Algoritmos em Grafos
Lista de Exercícios VIII
Fluxos

1. Seja G uma rede e considere uma aresta (u, v) de G. Mostre que ao quebrar a aresta (u, v) com criação de novo vértice x, e criação de arestas (u, x) e (x, v) no lugar de (u, v) e com mesma capacidade de (u, v), obtemos uma nova rede G' que é equivalente à G em relação ao fluxo. Ou seja, mostre que f é um fluxo válido para G se e somente se existe fluxo válido f' para G' onde $|f| = |f'|$.

2. Seja uma rede G tal que exista um vértice $x \neq s$, tal que não existe caminho de x para t em G. Mostre que existe um fluxo máximo f^* para G onde vale
$$\sum_v f(v, x) = 0 = \sum_v f(x, v).$$

3. Seja G uma rede de fluxo onde além das capacidades das arestas, cada vértice $v \in V$ também possui uma capacidade $c(v)$ que limita a quantidade de fluxo que pode passar por v. Mostre como encontrar um fluxo máximo em uma rede G onde o fluxo deve também respeitar as capacidades dos vértices.

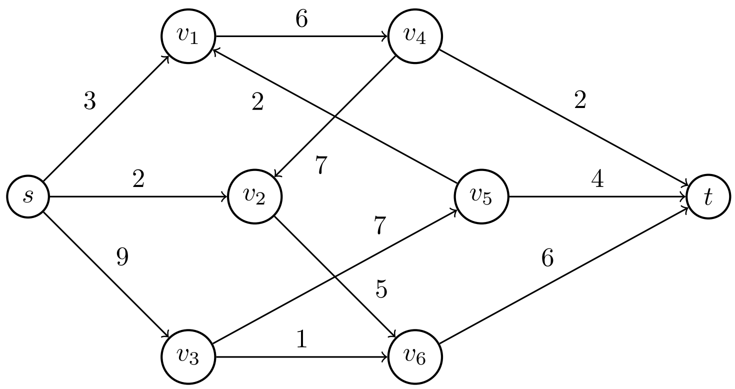
4. Seja G uma rede, seja f um fluxo válido para G, seja a rede residual G_f, e seja p um caminho aumentante em G_f. Definimos a função de fluxo $f_p : V \times V \to \mathbb{R}$ como
$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{se } (u, v) \in p \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$
onde $c_f(p)$ é a capacidade da aresta de menor capacidade em p. Mostre que f_p é um fluxo válido em G_f e que $|f_p| > 0$.

5. Suponha que f e f' sejam fluxos válidos para a rede G. É verdade que $(f \uparrow f')$ satisfaz a conservação de fluxo em G? É verdade que $(f \uparrow f')$ respeita as capacidades das arestas em G?

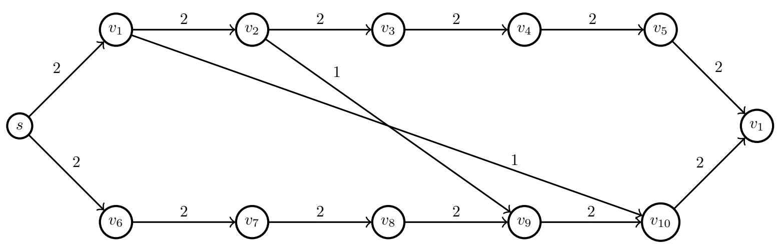
6. A conectividade por arestas de um grafo conexo não direcionado $G = (V, E)$ é o **menor** número k de arestas que precisam ser removidas de G para que este fique desconexo. Mostre como descobrir a conectividade por arestas de G resolvendo $|V|$ problemas de fluxo máximo, onde cada problema se dá em uma rede de tamanho $O(V + E)$.

7. Seja G uma rede com capacidades inteiras. Suponha que dentre todos os st-cortes de capacidade mínima na rede G, queremos encontrar o st-corte de capacidade mínima **e** que tenha o menor número de arestas. Mostre como construir uma outra rede G' alterando as capacidades de G de tal forma que um st-corte de capacidade mínima em G' corresponde a um corte de capacidade mínima em G e que tenha o menor número de arestas.

8. Mostre a execução do algoritmo de Edmonds-Karp para a rede abaixo. A cada iteração apresente o grafo residual G_f considerado.



9. Mostre a execução do algoritmo de Dinitz para a rede abaixo. A cada iteração apresente o grafo residual G_f e também a rede em níveis G_f^N.



10. Mostre que se temos uma rede G onde as capacidades das arestas são todos valores inteiros não negativos, então os algoritmos de Ford-Fulkerson, Edmonds-Karp e de Dinitiz encontram um fluxo máximo inteiro em G.

11. Seja $G = (L \cup R, E)$ um grafo bipartido, G' a rede montada a partir de G para se encontrar um emparelhamento máximo, e seja G'_f uma rede residual de G' para um determinado fluxo inteiro f. Faça um exemplo de rede G' com fluxo f tal que existirá um caminho aumentante em G'_f que passa por todos os vértices de $L \cup R$. Qual o tamanho máximo de um caminho aumentante em G'_f (supondo $|L| \neq |R|$)?

12. Um emparelhamento perfeito é aquele onde todo vértice do grafo pertence ao emparelhamento. Seja $G = (L \cup R, E)$ um grafo não direcionado bipartido onde $|L| = |R|$. Para qualquer $X \subseteq V = L \cup R$, defina a vizinhança de X como

$$N(X) = \{y \in V \text{ tal que } (x, y) \in E \text{ para algum } x \in X\}$$

ou seja, são todos os vértices y adjacentes a algum vértice em X. Prove o Teorema de Hall que diz que existe um emparelhamento perfeito em G se e somente se $|A| \leq |N(A)|$ para todo $A \subseteq L$.