

# LGI1/MAG1 Übung 6

Auszuarbeiten bis 18. 11. 2025

1. Gegeben seien die Mengen  $A = \{\{1, 2, 3\}, 4\}$ ,  $B = \{1, \{2, 3\}, 3, 4\}$  und  $C = \{1, 2, 3, 4\}$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

(a)  $\{2\} \in A$

(b)  $\forall x \ x \in C \Rightarrow x \in A$

(c)  $\exists_{x \in B} \exists_{y \in A} x \in y$

(d)  $\exists_{x \in A} \exists_{y \in B} \exists z z \in x \wedge z \in y$

Hinweis: Wir kennen offiziell die Mengendarstellung der natürlichen Zahlen nicht. Daher ist für uns keine natürliche Zahl ein Element einer anderen natürlichen Zahl, also gelten etwa  $2 \notin 3$ ,  $1 \notin 3$  oder  $1 \notin 2$ .

2. Seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  wie in Aufgabe 1. Berechnen Sie:

(a)  $\{x \mid x \in C \wedge \exists_{y \in B} x \in y\}$

(b)  $\{x \mid x \in A \wedge 3 \in x\}$

(c)  $\{x \mid x \in B \wedge x \in C \wedge \exists_{y \in A} x \in y\}$

3. Seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  wie in Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Mengen:

(a)  $A \cup B$

(b)  $B \cup C$

(c)  $A \cap B$

(d)  $A \cap C$

(e)  $A \setminus B$

(f)  $C \setminus B$

4. Die folgenden Mengen sind entweder über charakterisierende Eigenschaften definiert, oder über Terme und Eigenschaften. Begründen Sie, welche der unten angegebenen Element- bzw. Mengen-Beziehungen wahr, und welche falsch sind. Beachten Sie speziell die potentiellen Schwierigkeiten bei der Unterscheidung des Mengen-*für-die-gilt*-Striches  $|$  vom *teilt*-Strich  $|$ : Nur der erste horizontale Trennstrich in einer Menge ist der *für-die-gilt*-Strich; dieser ist hier außerdem zur besseren Unterscheidung etwas größer dargestellt als der *teilt*-Strich.

(a)  $6 \in \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}} y^2 = x\}$

(b)  $\{10\} = \{k \in \mathbb{N} \mid 2|k \wedge k|20\}$

(c)  $\{4, 5\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} \mid k|20\}$

(d)  $\{7, 8, 9\} \subseteq \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

(e)  $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

(f)  $\{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}} y^2 = x\}$

5. Gegeben sei die Menge  $E = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ . Finden Sie für die Mengen  $\emptyset$ ,  $\{\emptyset\}$  und  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  heraus, ob diese Elemente oder Teilmengen (oder beides) von  $E$  sind.
6. Definieren Sie die folgenden Mengen durch ihre charakterisierenden Eigenschaften, und nicht durch reine Aufzählung ihrer Elemente. Definieren Sie dazu zuerst die einstellige Prädikatenkonstante *istQuadratzahl*( $x$ ), die genau dann wahr ist, wenn  $x$  eine Quadratzahl ist, also das Quadrat einer natürlichen Zahl. Die ersten Quadratzahlen sind somit 1, 4, 9, 16, 25, ...

- (a) Die Menge aller Quadratzahlen zwischen 20 und 120.
- (b) Die Menge aller geraden Zahlen, die sich als Summe von zwei Quadratzahlen schreiben lassen.
- (c) Die Menge aller Zahlen, deren Teiler (außer der Zahl selbst) alle kleiner als 10 sind.