Wiederholung "Argumentieren mit Quantoren"

z.z. $\forall x \; \exists y \; x \leq y$

"zu zeigen"

Sei x^* beliebig aber fix

$x \leftarrow x^*$

z.z. $\exists y \; x^* \leq y$

$y \leftarrow x^*$

z.z. $x^* \leq x^*$ ✓

Axiom 2.1 (Gleichheit)
Seien x, y und z Variablen, f eine beliebige Funktionskonstante und P eine beliebige Prädikatenkonstante. In jedem Universum ist die Prädikatenkonstante $=$ (*Gleichheit*) definiert, für die gilt:

$$x = x \qquad \text{(Reflexivität)}$$
$$x = y \Rightarrow y = x \qquad \text{(Symmetrie)}$$
$$x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z \qquad \text{(Transitivität)}$$
$$x = y \Rightarrow f(\ldots, x, \ldots) = f(\ldots, y, \ldots)$$
$$x = y \Rightarrow P(\ldots, x, \ldots) = P(\ldots, y, \ldots)$$

z.z.: $\neg \exists n \; n \geq 3 \wedge \exists x \exists y \exists z \; x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0 \wedge x^n + y^n = z^n$ [Satz von Fermat]

$\forall x \; (x > 2 \wedge \text{gerade}(x)) \Longrightarrow \exists y \exists z \; \text{prim}(y) \wedge \text{prim}(z) \wedge x = y + z$

Notation: $\forall x,y,z$ bzw $\exists x,y$ sind Kurzschreibweisen für $\forall x \forall y \forall z$ bzw. $\exists x \exists y$.

$\exists x \; \text{istKatze}(x) \wedge \text{grau}(x)$

x	istKatze(x) ①	grau(x) ②	① ∧ ②	∃x ① ∧ ②
o_1	w	f	f	
o_2	f	w	f	
o_3	f	f	f	w
o_4	w	w	w	
⋮	⋮	⋮	⋮	

„Alle Tiroler sind lustig"

$\forall x\ \text{istTiroler}(x) \Rightarrow \text{lustig}(x)$

x	istTiroler(x) ①	lustig(x) ②	① $\Rightarrow$ ②	$\forall x$ ① $\Rightarrow$ ②
p_1	f	w	w	
p_2	w	w	w	
p_3	w	w	w	w
p_4	f	w	w	
⋮	⋮	⋮	⋮	

Definition 2.13 (Abkürzende Quantorenschreibweisen) Seien $A_{[x]}$ und $P_{[x]}$ zwei Aussagen mit freier Variable x. Die Aussage

$$\forall_{P_{[x]}} A_{[x]}$$

ist Kurzschreibweise für $\forall x\ P_{[x]} \Rightarrow A_{[x]}$. Ebenso ist

$$\exists_{P_{[x]}} A_{[x]}$$

eine Abkürzung für $\exists x\ P_{[x]} \wedge A_{[x]}$.

$$\forall_{n<10}\ 2^n < 1000 \equiv \forall n\ n<10 \Rightarrow 2^n < 1000$$

$$\exists_{n<10}\ \exists_{m<20}\ \text{prim}(n+m) \equiv \exists n\ n<10 \wedge \exists m\ m<20 \wedge \text{prim}(n+m)$$

Satz 2.4 (De Morgan) Sei A eine Aussage. Dann gelten

$$\neg\forall x\ A \equiv \exists x\ \neg A \qquad \text{und} \qquad \neg\exists x\ A \equiv \forall x\ \neg A.$$

zB: „es gibt keine größte Zahl"

$$\neg\exists x\ \forall y\ x>y \equiv \forall x\ \neg\forall y\ x>y \equiv$$
$$\forall x\ \exists y\ \neg(x>y) \equiv \forall x\ \exists y\ x\le y$$

Fakt [De Morgan für abkürzende Quantoren]

Es gilt $\neg\forall_{A_{[x]}} B_{[x]} \equiv \exists_{A_{[x]}} \neg B_{[x]}$

bzw. $\neg\exists_{A_{[x]}} B_{[x]} \equiv \forall_{A_{[x]}} \neg B_{[x]}$.

$$\neg\exists_{\text{prim}(x)} \text{gerade}(x) \wedge x>2 \equiv \forall_{\text{prim}(x)} \neg\text{gerade}(x) \vee x\le 2$$

(Mehr) Beispiele siehe Übungen

Definition 2.14 (Prädikatendefinition)
Eine Definition eines Prädikats führt eine neue Prädikatenkonstante ein. Der Wahrheitswert der atomaren Aussage, die durch diese Prädikatenkonstante gegeben ist, wird dabei durch eine andere (meist größere) Aussage bestimmt. Syntaktisch schreiben wir die Definition einer n-wertigen Prädikatenkonstanten P als

$$P(x_1, \dots, x_n) :\Leftrightarrow A_{[x_1,\dots,x_n]},$$

wobei $A_{[x_1,\dots,x_n]}$ eine Aussage mit freien Variablen $x_1, \dots, x_n$ ist.

Beachte, dass sowohl links als auch rechts von $:\Leftrightarrow$ dieselben freien Variablen sein müssen.

z.B. $x \mid y :\Leftrightarrow \exists z \; x \cdot z = y$

"teilt ohne Rest", "ist Vielfaches von"

$2 \mid 4 \Leftrightarrow \exists z \; 2 \cdot z = 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 = 4$ ✓

$z \leftarrow 2$

$3 \mid 7 \Leftrightarrow \exists z \; 3 \cdot z = 7$ ✗

$z \leftarrow 1$ ✗
$z \leftarrow 2$ ✗
$z \leftarrow 3$ ✗
$z \leftarrow 4$ ✗
$\vdots$

somit $\neg(3 \mid 7)$ bzw $3 \nmid 7$.

$\text{gerade}(n) :\Leftrightarrow 2 \mid n$

$\text{prim}(n) :\Leftrightarrow \neg \exists x \; x \neq 1 \wedge x \neq n \wedge x \mid n$

$\equiv \forall x \, \neg(\text{———} \text{"} \text{———})$

$\equiv \forall x \; \neg(x \neq 1 \wedge x \neq n) \vee \neg(x \mid n)$

$\equiv \forall x \, \neg(x \mid n) \vee \neg(x \neq 1 \wedge x \neq n)$

$x \Rightarrow y \equiv \neg x \vee y$

$\equiv \forall x \; x \mid n \Rightarrow (x = 1 \vee x = n)$

$\equiv \forall_{x \mid n} \; x = 1 \vee x = n$

Terminologie: $x \le y \le z :\Leftrightarrow x \le y \wedge y \le z$

PK

Definition 2.15 (Explizite Termdefinition)
Die *explizite Definition* eines Terms führt eine neue Funktions- bzw. Objektkonstante bzw. Variablenbelegung ein. Syntaktisch schreiben wir die Definition einer Objektkonstanten oder Variablen x als

$$x := t,$$

wobei t ein Term ist. Für eine n-stellige Funktionskonstante f schreiben wir

$$f(x_1, \dots, x_n) := t_{[x_1,\dots,x_n]},$$

wobei $t_{[x_1,\dots,x_n]}$ ein Term mit Variablen $x_1, \dots, x_n$ ist.

zB: $\text{piapprox} := \frac{355}{113} = 3.141592920$

$$f(x,y) := x^2 - 2xy$$

$$x^2 := x * x$$

Somit: $:\Longleftrightarrow$ definiert eine Prädikat (und damit eine atomare Aussage)

$:=$ definiert eine Konstante, Variable oder Funktion (und damit einen Term)