LGI1/MAG1 Übung 12

Auszuarbeiten bis 13. 1. 2026

1. Der *Euklid'sche Algorithmus* (der meist als der erste nicht-triviale Algorithmus angesehen wird) berechnet den größten gemeinsamen Teiler ggT von zwei natürlichen Zahlen in der Original-Version durch Subtrahieren von Zahlen. Dabei wird ausgenutzt, dass der ggT zweier Zahlen gleich dem ggT der Differenz dieser Zahlen und der kleineren Zahl ist. Somit gelten

$$\begin{aligned}&\mathrm{ggT}(18,12) = \mathrm{ggT}(6,12) = \mathrm{ggT}(6,6) = 6 \qquad \text{und}\\ &\mathrm{ggT}(13,5) = \mathrm{ggT}(8,5) = \mathrm{ggT}(3,5) = \mathrm{ggT}(3,2) = \mathrm{ggT}(1,2) = \mathrm{ggT}(1,1) = 1.\end{aligned}$$

   Formulieren Sie diesen ggT-Algorithmus für zwei natürliche Zahlen a und b formal korrekt als rekursive Funktion. Beachten Sie, dass Sie drei Fälle zu unterscheiden haben: Die beiden Situationen $a > b$, $b > a$, sowie $a = b$.

2. [Variante von Aufgabe 1] Definieren Sie die ggT-Funktion als implizite Funktion, also unter Verwendung des *dasjenige*-Quantors.

3. Nehmen Sie an, dass Sie in einem Computer nur die Operationen *incr* (*increment*, Erhöhen um 1) und *decr* (*decrement*, Verringern um 1) zur Verfügung hätten. Definieren Sie ausgehend von diesen beiden Funktionen rekursiv folgende Funktionen von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{N}_0$; wir schreiben diese Funktionen in der gewohnten Art (also mit der Funktionskonstante in Infix):

   (a) $a + b$ (Addition)

   (b) $a \cdot b$ (Multiplikation; Sie können $+$ als gegeben voraussetzen)

   (c) a^b (Exponentiation; Sie können $\cdot$ als gegeben voraussetzen)

   Hinweis: Verringern Sie in jedem der rekursiven Aufrufe eines der Argumente (etwa das zweite). Dann können Sie im Rekursionsanfang überprüfen, ob Sie bei diesem Argument schon bei 0 angekommen sind.

4. Beweisen Sie mittels Induktion, dass folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{1}{2}\Big(3^{n+1} - 1\Big)\,.$$

5. Beweisen Sie mittels Induktions, dass folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   Hinweis: Sie können auch alle Terme der rechten Seite der Gleichungen in den *wir wissen*- und *zu zeigen*-Zeilen (nach der ersten Umformung der *wir wissen*-Zeile) ausmultiplizieren und überprüfen, dass die Resultate identisch sind. Sie müssen also nicht den Teil der *wir wissen*-Zeile so umformen, dass ebenfalls $(n^* + 1)(n^* + 2)(2n^* + 3)/6$ herauskommt.