

LGI1/MAG1 Übung 9

Auszuarbeiten bis 9.12.2025

1. Spezifizieren Sie das Problem, für ein gegebenes n -Tupel T den Index i des Elements zu bestimmen, ab dem (inklusive) drei aufeinanderfolgende Einträge im Tupel alle durch 7 teilbar sind. Somit erfüllen $T = (1, 5, 7, 21, 35, 42)$ und $i = 3$ sowie $T = (1, 5, 7, 21, 35, 42)$ und $i = 4$ diese Spezifikation, nicht aber $T = (14, 21)$ und beliebiges i , oder $T = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ und beliebiges i .

2. Gegeben sei folgende Relation R auf *Paaren* von natürlichen Zahlen (und nicht wie sonst auf den natürlichen Zahlen selbst):

$$R := \left\{ ((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid a \cdot d = b \cdot c \right\}$$

In dieser Relation stehen etwa die Paare $(3, 9)$ und $(2, 6)$ in Beziehung – es ist also $((3, 9), (2, 6)) \in R$ – da $3 \cdot 6 = 9 \cdot 2$ gilt.

- (a) Geben Sie fünf Elemente von R an.
 - (b) Rechnen Sie nach, dass R reflexiv ist.
3. [Fortsetzung von Aufgabe 2]. Rechnen Sie nach, dass R aus Aufgabe 2 symmetrisch und transitiv ist.
 4. [Fortsetzung von Aufgabe 2]. Da die letzten beiden Aufgaben nachgewiesen haben, dass R aus Aufgabe 2 eine Äquivalenzrelation ist, bezeichnen wir diese Relation hier mit \sim . Geben Sie die Äquivalenzklassen $[(1, 2)]_\sim$, $[(3, 1)]_\sim$ sowie $[(2, 4)]_\sim$ explizit an (also durch Angabe mehrerer ihrer Elemente).
 5. Gegeben sei folgende Partition P der Menge $\mathbb{N}_{\leq 9}$:

$$P = \left\{ \{1, 6, 8, 4\}, \{2, 3, 7\}, \{5, 9\} \right\}.$$

- (a) Visualisieren Sie die Äquivalenzrelation \sim , die durch diese Partition gegeben ist, also durch die Definition

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists_{p \in P} x \in p \wedge y \in p.$$

- (b) Geben Sie alle Äquivalenzklassen von \sim explizit an, listen Sie also die Elemente dieser Mengen auf.
6. Gegeben sei die *teilt*-Relation auf der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 - (a) Visualisieren Sie diese Relation als Pfeildiagramm.
 - (b) Argumentieren Sie (so formal, wie Sie wollen), dass die *teilt*-Relation auf dieser Menge eine partielle Ordnung ist.
 - (c) Warum ist *teilt*-Relation auf A keine lineare Ordnung?
 - (d) Bestimmen Sie eine Teilmenge von A , auf der die *teilt*-Relation eine lineare Ordnung ist.