Logik

Logik ist die Sprache der Mathematik.

Eine Sprache ist eine Menge von Zeichenketten.

Wir benötigen dafür ein Alphabet (Menge von Zeichen).

Jede Sprache hat

- Syntax: Wie schauen korrekte Zeichenketten der Sprache aus?
- Semantik: Was bedeutet eine korrekte Zeichenkette?

Wir betrachten hier zwei Arten von Logik:

- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik

Beispiel einer induktiven Definition:

> Def [arith. Ausdrücke]
>
> Jeder arith. Ausdruck lässt sich folgendermaßen bilden:
>
> (1) $1, 2, 3, 4, \ldots$ sind arith. Ausdrücke
>
> (2) Wenn x und y arith. Ausdrücke sind, dann sind auch $(x+y)$ und $(x*y)$ arith. Ausdrücke.

zB: $(1+2)$, $(3*4)$, $(5+8)$, $((5+8)+(3*4))$, $(1+(2*(3+5)))$, ...

Wir verwenden ebenso eine induktive Definition, um die Syntax der Aussagenlogik zu definieren:

> **Definition 2.1 (Aussagen)**
> Als (wohlgeformte) *Aussagen* bezeichnet man genau jene Zeichenketten, die sich mit den folgenden Regeln bilden lassen:
>
> (1) Die Zeichen A, B, C, ... sind Aussagen (genauer: *atomare Aussagen*).
>
> (2) Wenn x und y Aussagen sind, dann sind auch folgende Zeichenketten Aussagen (genauer: *zusammengesetzte Aussagen*):
>
> $(\neg x)$
>
> $(x \wedge y)$
>
> $(x \vee y)$
>
> $(x \Rightarrow y)$
>
> Die Symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$ (genannt *Negation*, *Konjunktion*, *Disjunktion* bzw. *Implikation*), die aus Aussagen zusammengesetzte Aussagen machen, nennt man *Junktoren*.

zB: $(A \wedge B)$, $(B \Rightarrow C)$, $(A \wedge (B \vee C))$, A, B, $((A \vee B) \Rightarrow (B \wedge (B \vee D)))$, ...

All diese Zeichenketten sind wohlgeformte Aussagen.

Keine wohlgeformten Aussagen sind zB.
$(A \wedge \vee B)$, $D \wedge \neg D$, $(A B)$

Durch Syntaxanalyse kann nachgewiesen werden, dass/ob Zeichenketten wohlgeformte Aussagen sind.

Dabei werden die Zeichenketten in ihre Teile zerlegt.

zB:

$$\underbrace{(A \Rightarrow \underbrace{(B \vee \underbrace{(\neg D)}_{\text{Neg.}})}_{\text{Disj.}})}_{\text{Impl.}}$$

$$\underbrace{(\underbrace{(D \vee E)}_{\text{Disj.}} \wedge \underbrace{(B \Rightarrow \underbrace{(\neg \underbrace{(A \vee C)}_{\text{Disj.}})}_{\text{Neg.}})}_{\text{Impl.}})}_{\text{Konj.}}$$

Definition 2.2 (Semantik atomarer Aussagen)
Die Bedeutung atomarer Aussagen ist eine der beiden *Wahrheitswerte wahr* oder *falsch*, die als `w` und `f` abgekürzt werden.

Erinnerung: arith. Ausdruck $(3+4) \rightsquigarrow 7$

$(x+3) \rightsquigarrow$???

x	$x+3$
1	4
2	5
3	6

Definition 2.3 (Semantik der Negation)
Die Semantik von $\neg x$ ist für die beiden möglichen Wahrheitswerte von x gegeben durch die Tabelle

x	$\neg x$
f	w
w	f

Definition 2.4 (Semantik der Konjunktion)
Für zwei Aussagen x und y ist die Semantik der Konjunktion $x \wedge y$ durch folgende Tabelle gegeben:

x	y	$x \wedge y$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Definition 2.5 (Semantik der Disjunktion)
Für zwei Aussagen x und y ist die Semantik der Disjunktion $x \vee y$ durch folgende Tabelle gegeben:

x	y	$x \vee y$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Definition 2.6 (Semantik der Implikation)
Für zwei Aussagen x und y ist die Semantik der Implikation $x \Rightarrow y$ durch folgende Tabelle gegeben:

x	y	$x \Rightarrow y$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Def [Semantik einer beliebigen zusammengesetzten Aussage]
Semantik von x ist die gesamte Spalte in der Wahrheitstabelle von x.

zB: $((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge (\neg B)))$

A	B	$(\neg B)$	$(A \vee B)$ ④	$(A \wedge (\neg B))$ ⑤	$(④ \Rightarrow ⑤)$
f	f	w	f	f	w
f	w	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f

← Bedeutung von $((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge (\neg B)))$

Definition 2.7 (Gleichwertigkeit von Aussagen)
Zwei Aussagen x und y heißen genau dann *gleichwertig*, wenn ihre Wahrheitswerte für alle Wahrheitswertbelegungen der atomaren Aussagen in x und y gleich sind. In diesem Fall schreiben wir $x \equiv y$ und sagen auch, dass x und y *äquivalent* sind.

zB: $((A \vee B) \Rightarrow (A \wedge (\neg B))) \equiv (\neg B)$

$(D \wedge (\neg D)) \equiv f$

$(A \vee (\neg A)) \equiv w$