Definition 2.8 (Terme)
Gegeben sei eine Menge von Variablen, eine Menge von Objektkonstanten und eine Menge von Funktionskonstanten. Als *Terme* bezeichnet man genau jene Zeichenketten, die sich mit den folgenden Regeln bilden lassen:

(1) Jede Variable ist ein Term.

(2) Jede Objektkonstante ist ein Term.

(3) Wenn f eine Funktionskonstante ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind, dann ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

Im Folgenden seien $*, /, +, -$ Funktionskonstante, $1, 2, 3, \ldots$ Objektkonstante, und x, y, z Variable.
Somit sind alle diese Zeichenketten Terme:
$1, 2, 3, \ldots, x, y, z, *(1,x), +(2,*(1,x)), /(+(1,2),*(x,1)), \ldots$
Diese Funktionsnotation wird Präfix-Notation genannt.

Definition 2.9 (Atomare Aussagen)
Gegeben sei eine Menge von Prädikatenkonstanten. Als *atomare Aussagen* bezeichnet man Zeichenketten, die von der Form

$$P(t_1, \ldots, t_n)$$

sind, wobei P eine Prädikatenkonstante ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind. Eine atomare Aussage ist entweder wahr oder falsch; wenn zumindest einer der Terme $t_1, \ldots, t_n$ Variablen enthält, hängt der Wahrheitswert der atomaren Aussage von der Variablenbelegung ab.

Es gibt wie bisher durch Junktoren zusammengesetzte Aussagen, sowie noch weitere (siehe später).
Im Folgenden seien prim, gerade, $\leq, <$ Prädikatenkonstante.
Atomare Aussagen sind: prim(2), prim(8), $\leq(x,3)$, $\leq(2,+(x,4))$, prim$(+(*(x,2),4))$, ...

Definition 2.10 (Stelligkeit)
Die Anzahl der Terme, auf die eine Funktions- oder Prädikatenkonstante angewandt werden kann, wird *Stelligkeit* dieser Funktions- oder Prädikatenkonstante genannt.

Notation: FK_1, FK_2, FK_3 bezeichne 1,2,3-stellige Funktionskonstante, analog dazu PK_1, PK_2, PK_3 1,2,3-stellige Prädikatenkonstante.

zB: $*, +, /$ sind FK_2,
$\sqrt{\ }$, ^{2} sind FK_1,
$f(\cdot,\cdot,\cdot)$ ist FK_3

zB: prim, gerade, ... sind PK_1
$\leq, <$ sind PK_2
ist GGT sind PK_3

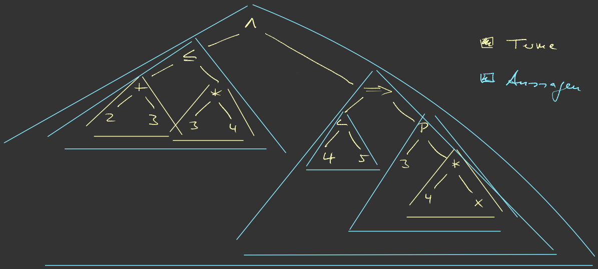
Somit ist es jetzt möglich, eine Syntaxanalyse auf Zeichenketten der Prädikatenlogik durchzuführen.

zB: $\overset{FK_2}{*}(\overset{FK_2}{/}(\overset{OK}{2}, \overset{V}{x}), \overset{FK_2}{+}(\overset{OK}{3}, \overset{FK_2}{*}(\overset{V}{x}, \overset{OK}{4})))$ ← Term

☑ Terme

Sei nun P eine zweistellige PK

$$\overset{PK_2}{\leq}(\overset{FK_2}{+}(\overset{OK}{2},\overset{OK}{3}),\overset{FK_2}{*}(\overset{OK}{3},\overset{OK}{4})) \overset{J}{\wedge} (\overset{PK_2}{<}(\overset{OK}{4},\overset{OK}{5}) \overset{J}{\Longrightarrow} \overset{PK_2}{P}(\overset{OK}{3},\overset{FK_2}{*}(\overset{OK}{4},\overset{V}{x})))$$



Wir wechseln nun wieder zur vertrauten Infix-Notation: $*(2,3) \rightsquigarrow 2*3$

Weiters lassen wir möglichst viele Klammern weg mit der Konvention, Zeichenketten wenn möglich syntaktisch korrekt zu lesen.

zB: $(2+3) \leq (3+4) \rightsquigarrow 2+3 \leq 3+4$

$$(2+3 \leq 3+4 \wedge 3 \leq x) \Longrightarrow y \leq 5$$

Syntaktisch falsch etwa wäre:

$$2 \leq \underbrace{(3 \leq 4)}_{\text{at. Auss.}}$$

$$f(2,3,\underbrace{2 \leq 3}_{\text{at. Auss.}})$$

Bisher waren alle Variablen frei. Der Wahrheitswert von Aussagen bzw. der Wert von Termen mit freien Variablen kann erst nach Variablenbelegung bestimmt werden.

zB: $x \leq 3$??, $x+(5*y)$??

Definition 2.11 (Allaussagen, Existenzaussagen)
Sei $A_{[x]}$ ein Aussage mit freier Variable x. Dann nennt man die Zeichenkette

$$(\forall x\ A_{[x]})$$

eine *Allaussage*, und die Zeichenkette

$$(\exists x\ A_{[x]})$$

eine *Existenzaussage*. Die Symbole $\forall$ (*für alle*) und $\exists$ (*es existiert ein*) werden als *Allquantor* bzw. *Existenzquantor* bezeichnet. Die Variable x wird in $A_{[x]}$ durch die Quantoren *gebunden*, und ist im Quantorausdruck nicht mehr frei.

zB: $\underbrace{\forall x\ \underbrace{x \leq 27}_{x\text{ frei}}}_{x\text{ gebunden}}$, $\underbrace{\exists x\ \underbrace{x \leq z}_{x,z\text{ frei}}}_{z\text{ frei},\ x\text{ gebunden}}$, $\underbrace{\forall x\ \underbrace{\exists y\ \underbrace{x \leq y}_{x,y\text{ frei}}}_{y\text{ geb.},\ x\text{ frei}}}_{x,y\text{ gebunden}}$

Definition 2.12 (Semantik von All- und Existenzaussagen)
Sei $A_{[x]}$ eine Aussage mit x als einzige freie Variable. Dann ist die Allaussage

$$(\forall x\ A_{[x]})$$

genau dann wahr, wenn die Aussage $A_{[x]}$ für alle möglichen Belegungen der Variablen x wahr ist. Die Existenzaussage

$$(\exists x\ A_{[x]})$$

ist genau dann wahr, wenn es zumindest eine Belegung der Variablen x gibt, die die Aussage $A_{[x]}$ wahr macht.

zB: $\mathcal{U} = \mathbb{N}$

x	$x \le 3$	$\forall x\ x \le 3$	$\exists x\ x \le 3$
1	w		
2	w		
3	w		
4	f	f	w
5	f		
6	f		

Modellieren mit Prädikatenlogik

$\mathcal{U} = \mathbb{N}$

$\exists x \exists y\ x \le y$ $\quad x \leftarrow 1 \quad y \leftarrow 2$

$\rightsquigarrow 1 \le 2$ ✓, also wahr

$\exists x \forall y\ x \le y$ $\quad x \leftarrow 1$

$\rightsquigarrow \forall y\ 1 \le y$ ✓, also wahr

$\forall x \exists y\ x \le y$ $\quad x \leftarrow x^*$ „sei x^* beliebig aber fix"

$\rightsquigarrow \exists y\ x^* \le y$

$\rightsquigarrow x^* \le x^*$ ✓, also wahr $\quad y \leftarrow x^*$

$\forall x \forall y\ x \le y$ ✗, also falsch $\quad x \leftarrow 4 \quad y \leftarrow 3$

$\rightsquigarrow 4 \le 3$ f