Anmerkungen / Notation:

☒ statt $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \dots\}$ schreiben wir oft $\{x \in \mathbb{N} \mid \dots\}$

☒ $\{x \mid A_{[x]}\}$: hier ist $\{\ \mid\ \}$ ein Quantoren

Definition 3.3 (Mengenbildung durch Term und Aussage)
Seien $A_{[x]}$ eine Aussage und $t_{[x]}$ ein Term, in dem die Variable x frei vorkommt. Dann bezeichnet

$$\{t_{[x]} \mid A_{[x]}\}$$

die Menge aller durch $t_{[x]}$ spezifizierten Objekte, wobei als Variablenbelegungen all jene genommen werden, die die Aussage $A_{[x]}$ erfüllen. Für die *istElementVon*-Relation auf so spezifizierten Mengen gilt

$$y \in \{t_{[x]} \mid A_{[x]}\} :\Leftrightarrow \exists x^* \; A_{[x \leftarrow x^*]} \wedge y = t_{[x \leftarrow x^*]} .$$

zB: $5 \in \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$, weil $\exists k \; k \in \mathbb{N} \; k \leftarrow 2 \quad 5 = 2 \cdot 2 + 1$

$25 \in \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$, weil $\exists x \; x \in \mathbb{N} \; x \leftarrow 5 \quad 25 = 5^2$

Mit diesen Mengenbildungsmöglichkeiten können auch Mengen wie $\{x \mid x \neq x\}$ oder $\{x \mid x \notin x\}$ angeschrieben werden.

$5 \in \{x \mid x \neq x\}$?? $\quad 5 \neq 5$ falsch $\Rightarrow 5 \notin \{x \mid x \neq x\}$

Axiom 3.3 (Existenzaxiom)
Es gibt eine Menge ohne Elemente, die wir als *leere Menge* bezeichnen und als $\{\}$ oder $\varnothing$ schreiben.

zB: $2 \notin \emptyset$, $\{1,2\} \notin \emptyset$

$\emptyset \notin \{1,2,3\} \quad \emptyset \in \{1,2,\emptyset\}$, $\emptyset \notin \emptyset$

$R := \{x \mid x \notin x\}$ ← damit existiert diese Menge nicht

$\left.\begin{array}{l} R \in R \Rightarrow R \notin R \\ R \notin R \Rightarrow R \in R \end{array}\right\}$ „Russell'sche Paradoxon"

Mengenbildung: Mengen aus Mengen

Definition 3.4 (Teilmenge)
Sei x eine Menge. Dann bezeichnet man jede Menge y, deren Elemente auch Elemente von x sind, als *Teilmenge* von x und schreibt dafür $y \subseteq x$. Wir definieren also

$$y \subseteq x :\Leftrightarrow \forall z \; z \in y \Rightarrow z \in x .$$

zB: $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} \qquad \{1,2\} \subseteq \{1,2\}$

$\{2,3\} \not\subseteq \{1,2\}$

$\{\{1,2\}\} \not\subseteq \{1,2\}$

Satz 3.1 Seien x und y zwei Mengen. Dann gilt

$$x = y \Leftrightarrow (x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x).$$

Fakt: $\forall x \quad \emptyset \subseteq x$

$\emptyset \subseteq \{1,2\}$ ✓ $\qquad \{1,2\} \not\subseteq \emptyset$

Warum? zz $\forall x \; \emptyset \subseteq x$

sei x^* bel. fix

zz $\emptyset \subseteq x^*$

zz $\forall z \; z \in \emptyset \Rightarrow z \in x^*$; sei z^* bel. fix

zz $\underbrace{\underbrace{z^* \in \emptyset}_{f} \Rightarrow z^* \in x^*}_{w}$ ✓

Definition 3.5 (Vereinigung, Durchschnitt, Komplement)
Seien x und y zwei Mengen. Dann ist die *Vereinigung* $x \cup y$ von x und y definiert als

$$x \cup y := \{z \mid z \in x \vee z \in y\},$$

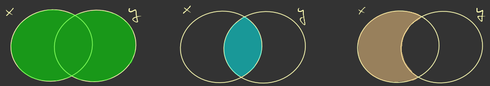
der *Durchschnitt* $x \cap y$ von x und y als

$$x \cap y := \{z \mid z \in x \wedge z \in y\},$$

und das *Komplement* $x \setminus y$ von y in x als

$$x \setminus y := \{z \mid z \in x \wedge z \notin y\}.$$

Man nennt x und y *disjunkt*, wenn $x \cap y = \varnothing$ gilt.



$x \cup y$ $\quad$ $x \cap y$ $\quad$ $x \setminus y$

$x = \{1,2,3\}$

$y = \{2,3,4\}$ $\quad$ $\{1,2,3,4\}$ $\quad$ $\{2,3\}$ $\quad$ $\{1\}$

Einschub: Mathematisches Argumentieren / Beweisen

z.z. $\quad \forall x \; A_{[x]}$ $\quad$ sei x^* bel. fix

"zu zeigen"

z.z. $\; A_{[x \leftarrow x^*]}$

z.z. $\quad \exists x \; A_{[x]}$ $\quad$ finde richtige Belegung $x \leftarrow x^*$

z.z. $\; A_{[x \leftarrow x^*]}$

z.z. $\quad \alpha \wedge \beta$ $\quad$ z.z. α <u>und</u> z.z. β

z.z. $\quad \alpha \Rightarrow \beta$

Fallunterscheidung: (1) $\alpha \equiv f$ $\quad$ z.z. $f \Rightarrow \beta$ $\quad$ automatisch wahr, nichts zu zeigen

(2) $\alpha \equiv w$ $\quad$ z.z. $\underline{w \Rightarrow \beta}$

β $\quad$ β zu zeigen

Somit z.z. $\alpha \Rightarrow \beta$ $\quad$ w.w. α

"wir wissen"

z.z. β

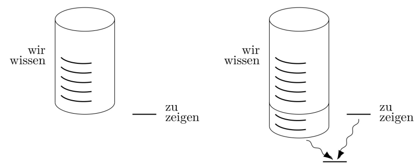


Abbildung 3.2 Struktur mathematischer Beweise: In der Ausgangslage (links) ist eine zu zeigende Aussage noch nicht in der Wissensbasis wahrer Aussagen. Im Beweisen (rechts) werden Aussagen aus der Wissensbasis, sowie die zu zeigende Aussage, so lange umgeformt, bis beide Umformungsstränge identische Aussagen liefern. Die so gezeigte Aussage kann dann zur Wissensbasis hinzugefügt werden.

z.z. $\quad \forall x, y \quad x \setminus (x \setminus y) = x \cap y$

z.z. $\;$ Seien x^*, y^* bel. fix

z.z. $\quad x^* \setminus (x^* \setminus y) = x^* \cap y^*$

$$\boxed{x = y \Leftrightarrow x \subseteq y \wedge y \subseteq x}$$

z.z. $\quad x^* \setminus (x^* \setminus y^*) \subseteq x^* \cap y^* \wedge x^* \cap y^* \subseteq x^* \setminus (x^* \setminus y^*)$

z.z. $\quad x^* \setminus (x^* \setminus y^*) \subseteq x^* \cap y^*$

z.z. $\quad x^* \cap y^* \subseteq x^* \setminus (x^* \setminus y^*)$ $\quad$ lassen wir weg

$$\boxed{x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z \; z \in x \Rightarrow z \in y}$$

z.z. $\forall z \;\; z \in x^* \setminus (x^* \setminus y^*) \Rightarrow z \in x^* \cap y^*$

z.z. sei z^* bel. fix

z.z. $z^* \in x^* \setminus (x^* \setminus y^*) \Rightarrow z^* \in x^* \cap y^*$

w.w. $z^* \in x^* \setminus (x^* \setminus y^*)$

z.z. $z^* \in x^* \cap y^*$

$$\boxed{x \in \{z \mid A_{[z]}\} \Leftrightarrow A_{[z \leftarrow x]}}$$

$$\boxed{x \setminus y := \{z \mid z \in x \wedge z \notin y\}}$$

$$\boxed{x \cap y := \{z \mid z \in x \wedge z \in y\}}$$

w.w. $z^* \in x^* \wedge z^* \notin x^* \setminus y^*$

w.w. $z^* \in x^* \wedge \neg (z^* \in x^* \wedge z^* \notin y^*)$

w.w. $z^* \in x^* \wedge (z^* \notin x^* \vee z^* \in y^*)$

w.w. $\underbrace{\underbrace{(z^* \in x^* \wedge z^* \notin x^*)}_{f} \vee (z^* \in x^* \wedge z^* \in y^*)}_{z^* \in x^* \wedge z^* \in y^*}$

w.w. $z^* \in x^* \wedge z^* \in y^*$ ✓

z.z. $z^* \in x^* \wedge z^* \in y^*$