LGI1/MAG1 Übung 10

Auszuarbeiten bis 16. 12. 2025

1. Die Top 10 des Medaillenspiegels der olympischen Sommerspiele 2024 in Paris werden offiziell (und auch im deutschsprachigen Raum) gelistet als

Land	Gold	Silber	Bronze	Gesamt
Vereinigte Staaten	40	44	42	126
Volksrepublik China	40	27	24	91
Japan	20	12	13	45
Australien	18	19	16	53
Frankreich	16	26	22	64
Niederlande	15	7	12	34
Großbritannien	14	22	29	65
Südkorea	13	9	10	32
Italien	12	13	15	40
Deutschland	12	13	8	33

In Amerika schaut die Reihung anders aus:

Land	Gold	Silber	Bronze	Gesamt
Vereinigte Staaten	40	44	42	126
Volksrepublik China	40	27	24	91
Großbritannien	14	22	29	65
Frankreich	16	26	22	64
Australien	18	19	16	53
Japan	20	12	13	45
Italien	12	13	15	40
Niederlande	15	7	12	34
Deutschland	12	13	8	33
Südkorea	13	9	10	32

Definieren Sie formal je eine lineare Ordnung $\leq_{\mathrm{D}}$ und $\leq_{\mathrm{A}}$ auf Medaillen-Tripeln (g, s, b). Diese linearen Ordnungen sollen die Reihenfolgen in den obigen Tabellen reflektieren: So sollen $(27, 14, 17) \leq_{\mathrm{D}} (22, 21, 22)$ (Japan vor Großbritannien, deswegen kleiner in der Reihenfolge), aber $(22, 21, 22) \leq_{\mathrm{A}} (27, 14, 17)$ (Großbritannien vor Japan) gelten.

"Definieren Sie formal" bedeutet hier, dass Sie folgende Definition vervollständigen sollen:

$$(g_1, s_1, b_1) \leq_{\mathrm{D}} (g_2, s_2, b_2) :\Leftrightarrow \dots ,$$

sowie analog für $\leq_{\mathrm{A}}$.

2. Geben Sie für jede der folgenden Relationen auf $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ an, ob es sich dabei "nur" um Relationen, um partielle Funktionen, oder sogar um totale Funktionen handelt:

   (a) $f_1 = \{(1,3),(3,2)\}$
   (b) $f_2 = \{(1,3),(2,3),(3,3)\}$
   (c) $f_2 = \{(1,1),(1,3),(2,3),(3,2),(3,3)\}$
   (d) $f_4 = \varnothing$

3. Berechnen Sie das Bild $f(\{2,4,5\})$ und das Urbild $f^{-1}(\mathbb{N}_{\leq 200} \setminus \mathbb{N}_{\leq 20})$ unter der Funktion $f : \mathbb{N}_{\leq 7} \to \mathbb{N}_{\leq 1000},\ n \mapsto n!$ (also die faktorielle Funktion, wie auf Übungszettel 5 definiert).

4. Geben Sie für jede der folgenden Funktionen an, welche der Eigenschaften *injektiv*, *surjektiv* und *bijektiv* sie erfüllen:

   (a) $f_1 : \mathbb{N}_{\leq 4} \to \mathbb{N}_{\leq 3}; \quad f_1 = \{(1,1),(2,2),(3,1),(4,3)\}$
   (b) $f_2 : \mathbb{N}_{\leq 3} \to \mathbb{N}_{\leq 4}; \quad f_2 = \{(1,1),(2,4),(3,2)\}$
   (c) $f_3 : \mathbb{N}_{\leq 3} \to \mathbb{N}_{\leq 3}; \quad f_1 = (1,3),(2,3),(3,2)\}$
   (d) $f_4 : \mathbb{N}_{\leq 3} \to \mathbb{N}_{\leq 3}; \quad f_3 = \{(1,2),(2,1),(3,3)\}$

5. Geben Sie für jede der folgenden Funktionen die größte Teilmenge der reellen Zahlen im Definitionsbereich an, die die Funktion zu einer totalen Funktion macht. Geben Sie weiters die größte Teilmenge der reellen Zahlen im Bildbereich an, die die Funktion surjektiv macht. Verwenden Sie dazu die Bezeichungen $\mathbb{R}^+$ für die positiven, und $\mathbb{R}_0^+$ für die nicht-negativen reellen Zahlen. Hier bezeichnet $\ln(x)$ den natürlichen Logarithmus, und e^x die Exponentialfunktion.

   (a) $f_1(x) = \ln(x)$
   (b) $f_2(x) = e^x$
   (c) $f_3(x) = \sqrt{x}$
   (d) $f_4(x) = 1/x$

6. Spezifizieren Sie das Problem, aus einer gegebenen Relation R auf einer Menge M eine Vierer-Kette zu extrahieren. Eine *Vierer-Kette* sei ein 4-Tupel $(k_1,k_2,k_3,k_4) \in M^4$ mit der Eigenschaft, dass die vier Elemente k_1, k_2, k_3 und k_4 aus M eine Kette bilden, also in der Visualisierung von R eine Sequenz von aneinandergeketteten Pfeilen – in der richtigen Richtung!. Selbst-Pfeile seien in einer Kette nicht erlaubt. In folgender Graphik bildet (a,b,c,e) eine Vierer-Kette, nicht aber (d,g,h,e) (mindestens ein Pfeil in falscher Richtung) oder (d,f,f,g) (enthält mindestens einen Selbst-Pfeil).