Übersicht / Zusammenfassung

„Argumentieren mit Quantoren"

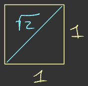
	Beweise	Widerlege
$\forall x \; A_{[x]}$	Sei x^* bel. aber fix. Beweise $A_{[x \leftarrow x^*]}$	Finde konkreten Wert y, für den $A_{[x \leftarrow y]}$ falsch („Gegenbeispiel")
$\exists x \; A_{[x]}$	Finde konkreten Wert y, für den $A_{[x \leftarrow y]}$ wahr ist	Meist am schwierigsten, meist über Widerspruchsbeweis

Widerspruchsbeweise

Idee: Statt A beweise $\neg A \Rightarrow f$, weil $A \equiv \neg A \Rightarrow f$

Somit nehmen wir zum Beweis von A das Gegenteil (also $\neg A$) als wahr an, und leiten daraus einen Widerspruch her.

zB: $\sqrt{2}$ ist irrational, also $\neg \exists p,q$ mit $\sqrt{2} = p/q$ und p,q gekürzt



Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an:

$\exists p,q$ (gekürzt) mit $\sqrt{2} = p/q$

$\sqrt{2} = p/q$

$2 = p^2/q^2$

$2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ gerade $\Rightarrow p$ gerade $\Rightarrow \exists k \; 2k = p$

$2q^2 = (2k)^2$

$2q^2 = 4k^2$

$q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ gerade $\Rightarrow q$ gerade

Widerspruch zu „p,q gekürzt"

Mehr zu Quantoren

Definition 2.16 (Quantor)
Ein *Quantor* ist ein Sprachkonstrukt, das syntaktisch sowohl eine Variable als auch einen Term oder einer Aussage benötigt. Der Quantor bindet diese Variable; je nach Semantik des Quantors ist der Quantorausdruck ein Term oder eine Aussage.

zB: $\forall x \;\; x \geq 3 \qquad \exists x \;\; 2 \mid x$

lokale Variable

Aussagen

Def [Summen/Produktquantor]

$\sum\limits_{A[x]} t[x]$ ist die Summe alle $t[x]$, wobei x alle Belegungen durchläuft, für die $A[x]$ wahr ist.

Analog für $\prod\limits_{A[x]} t[x]$.

zB: $\sum\limits_{2\le k\le 5} k^2 = 2^2+3^2+4^2+5^2 = 54$

$$\prod_{\substack{2\le k\le 6 \wedge \\ \text{gerade}(k)}} (k+1) = (2+1)\cdot(4+1)\cdot(6+1) = 105$$

Beachte: ☒ Statt $\sum\limits_{a\le k\le b} \dots$ schreibt man oft $\sum\limits_{k=a}^{b} \dots$, analog für $\prod\limits_{a\le k\le b} \dots$

☒ $\sum\limits_{f} t[x] := 0$; $\prod\limits_{f} t[x] := 1$

Def [Minimum- und Maximumquantor]

$\min\limits_{A[x]} t[x]$ ist der kleinste Wert, den $t[x]$ annehmen kann, wenn x alle Werte durchläuft, die $A[x]$ wahr machen.

$\max\limits_{A[x]} t[x]$ analog.

$\min\limits_{A[x]} B[x]$ ist der kleinste Wert von x, der sowohl $A[x]$ als auch $B[x]$ wahr macht.

$\max\limits_{A[x]} B[x]$ analog.

zB:

$$\underbrace{\min_{0\le k\le 4} (k-3)^2}_{0} \qquad \underbrace{\max_{0\le k\le 4} (k-3)^2}_{9}$$

k	$(k-3)^2$
0	$\boxed{9}$
1	4
2	1
3	$\boxed{0}$
4	1

$$\underbrace{\min_{0\le k\le 4} (k-3)^2<2}_{2}$$

$$\underbrace{\max_{0\le k\le 4} (k-3)^2<2}_{4}$$

k	$(k-3)^2$	$(k-3)^2<2$
0	9	f
1	4	f
$\boxed{2}$	1	w
3	0	w
$\boxed{4}$	1	w

Mengenlehre

Wir beschreiben Mengen nach Georg Cantor

„Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen."

Das Universum umfasse ab jetzt nur Mengen.

Zentral ist der Begriff "ist Element von" $\in$, eines PK$_2$. Für explizit angegebene Mengen kann man $\in$ über "Durchprobieren" auswerten.

zB: $2 \in \{1,2,3\}$, da 2 in $\{1,2,3\}$ vorkommt.

"Schachtel", "Box"

$4 \notin \{1,2,3\}$, weil 4 nicht $\{1,2,3\}$ vorkommt.

$\{1\} \notin \{1,2,3\}$, weil $\{1\}$ nicht $\{1,2,3\}$ vorkommt.

$\{1\} \neq 1$

Axiom 3.1 (Extensionalitätsaxiom)
Seien x und y zwei Mengen. Dann gilt

$$x = y :\Leftrightarrow \forall z\, z \in x \Leftrightarrow z \in y.$$

zB: $\{1,2\} = \{2,1\}$

$\{1,1,2\} = \{1,2\}$

Somit gilt:
- Reihenfolge von Objekten in Mengen ist egal
- Objekte können öfter als einmal gelistet werden.

$\{1\} \overset{??}{=} 1 \Rightarrow 1 \in 1$??

Axiom 3.2 (Regularitätsaxiom)
Keine Menge kann Element von sich selbst sein, also

$$\forall x\, x \notin x.$$

zB: $1 \notin 1$, somit $\{1\} \neq 1$

$\{1,2\} \neq \{\{1,2\}\}$

$\{1,2\} \neq \{1,2,\{1,2\}\}$

Mengenbildung aus Elementen

Definition 3.1 (Explizite Mengenbildung)
Seien $t_1, \ldots, t_n$ Terme. Dann bezeichnet der Term

$$\{t_1, \ldots, t_n\}$$

die Menge der Objekte, die von $t_1, \ldots, t_n$ beschrieben werden. Es gilt

$$x \in \{t_1, \ldots, t_n\} :\Leftrightarrow x = t_1 \lor x = t_2 \lor \ldots \lor x = t_n\,.$$

$\{3\} \in \{1,2,\{3\},4\}$

$3 \notin \{1,2,\{3\},4\}$

Definition 3.2 (Mengenbildung durch Aussage)
Sei $A_{[x]}$ eine Aussage mit freier Variable x. Dann bezeichnet

$$\{x \mid A_{[x]}\}$$

die Menge aller Objekte, für die die Aussage $A_{[x]}$ wahr ist. Es gilt

$$y \in \{x \mid A_{[x]}\} :\Leftrightarrow A_{[x \leftarrow y]},$$

wobei $A_{[x \leftarrow y]}$ diejenige Aussage ist, bei der die freie Variable x durch den Wert von y ersetzt wird.

zB: $\{x \mid \text{gerade}(x)\} = \{2, 4, 6, \dots\}$

$2 \in \{x \mid \text{gerade}(x)\}$, weil gerade(2) gilt

$7 \in \{x \mid \text{prim}(x)\}$, weil prim(7) gilt.