LGI1/MAG1 Übung 7

Auszuarbeiten bis 25. 11. 2025

1. Spezifizieren Sie das Problem, zu einer gegebenen Primzahl die nächstgrößere Primzahl zu bestimmen.

2. [Ähnlich zu Aufgabe 2 auf Übungszettel 4, aber diesmal mit Quantoren] Definieren Sie die folgenden Prädikate für natürliche Zahlen; Sie dürfen also annehmen, dass das Universum die natürlichen Zahlen sind. Alle dabei vorkommenden Prädikaten- bzw. Funktionskonstanten können Sie als gegeben voraussetzen.

   (a) perfekt(n) ist genau dann wahr, wenn n gleich der Summe seiner echten Teiler ist (also aller Teiler außer n selbst). Die ersten Beispiele perfekter Zahlen sind 6 $(= 1 + 2 + 3)$ und 28 $(= 1 + 2 + 4 + 7 + 14)$.

   (b) kgV(n, m, k) ist genau dann wahr, wenn k das kleinste gemeinsame Vielfache von n und m ist.

3. Berechnen Sie folgende Mengen. Setzen Sie speziell in Teil (c) in Definition 3.9 im Skriptum ein (kartesisches Produkt $x \times y$ zweier Mengen x und y).

   (a) $\mathrm{Pot}(\{a, b\})$

   (b) $\mathrm{Pot}(\{\varnothing, b, c\})$

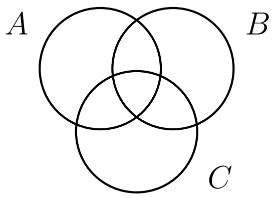
   (c) $\{a, b\} \times \varnothing$

   (d) $\{\varnothing\} \times \{\varnothing\}$

   (e) $\mathrm{Pot}(\{a, b\} \times \{c\})$

   (f) $\mathrm{Pot}(\varnothing) \times \mathrm{Pot}(\{a, b\})$

4. Welche der folgenden Mengengleichungen gelten, welche nicht? Argumentieren Sie mit Schraffierungen von Kreis-Diagrammen wie in Abbildung 3.1 im Skriptum. Diese Kreis-Diagramme werden *Venn*-Diagramme genannt. Beachten Sie, dass Sie Venn-Diagramme mit *drei* Kreisen benötigen, wie hier gezeigt:



   (a) $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

   (b) $(x \cup y) \cap (y \setminus z) = (x \cap y) \setminus (x \cap z)$

   (c) $(x \setminus y) \cap (y \setminus z) = x \setminus (y \cup z)$

   (d) $x \setminus (y \cap z) = (x \setminus y) \cup (x \setminus z)$

5. Einige Fragen, die den Zusammenhang zwischen Prädikatenkonstanten und Relationen illustrieren sollen; das Universum seien hier die natürlichen Zahlen:

   (a) Geben Sie je vier Elemente in der Mengendarstellung der einstelligen Prädikatenkonstanten *prim*, der zweistelligen Prädikatenkonstanten $\leq$, sowie der dreistelligen Prädikatenkonstanten *kgV* von Aufgabe 2 an.

(b) Wir definieren die Prädikatenkonstante *foo* über

$$\mathrm{foo}(x, y) :\Leftrightarrow x \mid y \land x \mid 50 \land y \mid 100 \land x \neq y.$$

Geben Sie vier Paare (x, y) an, für die $\mathrm{foo}(x, y)$ wahr ist. Diese Paare sind dann Elemente der Relation, die foo als Menge repräsentiert.

6. Gegeben sei die Relation

$$R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 5)\}$$

auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Durch die Relation R sei die Prädikatenkonstante P über

$$P(x, y) :\Leftrightarrow (x, y) \in R$$

definiert. Geben Sie die Mengen $\{x \mid (x, 2) \in R\}$ sowie $\{y \mid P(5, y)\}$ explizit an (also durch Auflistung all ihrer Elemente).

(b) Welche der Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch* bzw. *transitiv* erfüllt die Relation R?