

LGI1/MAG1 Übung 5

Auszuarbeiten bis 11. 11. 2025

1. Wir definieren auf dem Universum der natürlichen Zahlen (also ohne Null) das zweistellige Prädikat *habenGemeinsamenTeiler* (*hgt*) als

$$\text{hgt}(x, y) :\Leftrightarrow \exists n \, n \neq 1 \wedge n \mid x \wedge n \mid y.$$

- (a) Warum gilt $\text{hgt}(2, 4)$?
 - (b) Warum gilt $\text{hgt}(2, 3)$ nicht?
 - (c) Gilt $\exists x \, \text{hgt}(x, x)$?
 - (d) Gilt $\forall x \, \text{hgt}(x, x)$?
2. [Fortsetzung von Aufgabe 1]
- (a) Gilt $\exists x \, \exists y \, \text{hgt}(x, y)$?
 - (b) Gilt $\forall x \, \forall y \, \text{hgt}(x, y)$?
 - (c) Gilt $\forall x \, \forall y \, \text{hgt}(x, y) \Rightarrow \text{hgt}(y, x)$?
 - (d) Gilt $\forall x \, \exists y \, \text{hgt}(x, y)$?
 - (e) Gilt $\exists x \, \forall y \, \text{hgt}(x, y)$?
3. Spezifizieren Sie das Problem, von zwei natürlichen Zahlen das *kleinste gemeinsame Vielfache* zu bestimmen. Für 5 und 6 ist das 30, für 8 und 12 ist es 24, und für 3 und 21 ist es 21.

Beachten Sie dabei Folgendes:

- (a) Gehen Sie formal so vor, wie für Problemspezifikationen in der Vorlesung gezeigt wurde. Speziell geht es *nicht* darum, einen Algorithmus zu finden, mit dem das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen berechnet werden kann.
 - (b) Wir schreiben $n \mid m$ für zwei ganze Zahlen n und m , wenn die Zahl n die Zahl m ohne Rest teilt, oder (anders ausgedrückt) m ein ganzzahliges Vielfaches von n ist.
4. Berechnen Sie den Wert folgender Summen bzw. Produkte:

$$(a) \prod_{1 \leq j < 4} \sum_{j < k \leq j+2} k \cdot j$$

$$(b) \sum_{k=2}^4 \prod_{j=2}^k k + j$$

5. Verwenden Sie Summen- bzw. Produktquantoren, um die folgenden beiden Funktionen zu definieren:
- (a) Die Fakultäts-Funktion $!$, die für gegebene natürliche Zahl n das Produkt aller Zahlen zwischen 1 und n berechnet. Somit sind etwa $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, und $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Überprüfen Sie bitte auch, ob Ihre Definition $0! = 1$ liefert (dies ist offiziell so definiert).

- (b) Die Funktion *teilerSumme*, die von einer gegebenen natürlichen Zahl die Summe aller echten Teiler berechnet. Als *echter Teiler* einer Zahl n wird jeder Teiler von n bezeichnet, der ungleich n selbst ist.

6. Werten Sie folgende Maximum- bzw. Minimum-Ausdrücke über dem Universum der ganzen Zahlen aus:

(a) $\max_{3 \leq k \leq 8} 4k - 10$

(b) $\max_{3 \leq k \leq 8} (4k - 10 \leq 10)$

(c) $\min_{2 \leq k \leq 7} (k - 4)^2$

(d) $\min_{2 \leq k \leq 7} ((k - 4)^2 \leq 4)$