

# LGI1/MAG1 Übung 5

Auszuarbeiten bis 11. 11. 2025

1. Wir definieren auf dem Universum der natürlichen Zahlen (also ohne Null) das zweistellige Prädikat *habenGemeinsamenTeiler* (*hgt*) als

$$\text{hgt}(x, y) :\Leftrightarrow \exists n \ n \neq 1 \wedge n | x \wedge n | y.$$

- (a) Warum gilt  $\text{hgt}(2, 4)$ ?
  - (b) Warum gilt  $\text{hgt}(2, 3)$  nicht?
  - (c) Gilt  $\exists x \ \text{hgt}(x, x)$ ?
  - (d) Gilt  $\forall x \ \text{hgt}(x, x)$ ?
2. [Fortsetzung von Aufgabe 1]
- (a) Gilt  $\exists x \ \exists y \ \text{hgt}(x, y)$ ?
  - (b) Gilt  $\forall x \ \forall y \ \text{hgt}(x, y)$ ?
  - (c) Gilt  $\forall x \ \forall y \ \text{hgt}(x, y) \Rightarrow \text{hgt}(y, x)$ ?
  - (d) Gilt  $\forall x \ \exists y \ \text{hgt}(x, y)$ ?
  - (e) Gilt  $\exists x \ \forall y \ \text{hgt}(x, y)$ ?
3. Spezifizieren Sie das Problem, von zwei natürlichen Zahlen das *kleinste gemeinsame Vielfache* zu bestimmen. Für 5 und 6 ist das 30, für 8 und 12 ist es 24, und für 3 und 21 ist es 21.

Beachten Sie dabei Folgendes:

- (a) Gehen Sie formal so vor, wie für Problemspezifikationen in der Vorlesung gezeigt wurde. Speziell geht es *nicht* darum, einen Algorithmus zu finden, mit dem das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen berechnet werden kann.
  - (b) Wir schreiben  $n | m$  für zwei ganze Zahlen  $n$  und  $m$ , wenn die Zahl  $n$  die Zahl  $m$  ohne Rest teilt, oder (anders ausgedrückt)  $m$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $n$  ist.
4. Berechnen Sie den Wert folgender Summen bzw. Produkte:

$$(a) \prod_{1 \leq j < 4} \sum_{j < k \leq j+2} k \cdot j$$

$$(b) \sum_{k=2}^4 \prod_{j=2}^k k + j$$

5. Verwenden Sie Summen- bzw. Produktquantoren, um die folgenden beiden Funktionen zu definieren:

- (a) Die Fakultäts-Funktion  $!$ , die für gegebene natürliche Zahl  $n$  das Produkt aller Zahlen zwischen 1 und  $n$  berechnet. Somit sind etwa  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ , und  $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ . Überprüfen Sie bitte auch, ob Ihre Definition  $0! = 1$  liefert (dies ist offiziell so definiert).

- (b) Die Funktion *teilerSumme*, die von einer gegebenen natürlichen Zahl die Summe aller echten Teiler berechnet. Als *echter Teiler* einer Zahl  $n$  wird jeder Teiler von  $n$  bezeichnet, der ungleich  $n$  selbst ist.
6. Werten Sie folgende Maximum- bzw. Minimum-Ausdrücke über dem Universum der ganzen Zahlen aus:
- (a)  $\max_{3 \leq k \leq 8} 4k - 10$
- (b)  $\max_{3 \leq k \leq 8} (4k - 10 \leq 10)$
- (c)  $\min_{2 \leq k \leq 7} (k - 4)^2$
- (d)  $\min_{2 \leq k \leq 7} ((k - 4)^2 \leq 4)$