Aufgabe 1

Um den Median in linearer Zeit zu bestimmen, kann der Quickselect-Algorithmus verwendet werden. Im folgenden ist der Algorithmus in Form von Pseudocode näher erläutert.

function FINDMEDIAN(Array A, Nummer k)

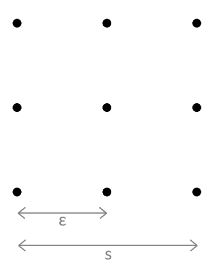
Nimm zufällige Zahl a aus A
Teile die Zahlen in A in 2 Sets auf
S - alle Nummern kleiner als a
B - alle Nummern größer als a

  if $|S| = k - 1$ **then**
    return a
  else if $|S| \leq k - 1$ **then**
    $findMedian(B, k - |S| - 1)$
  else
    $findMedian(S, k)$
  end if
end function

Beweis für lineare Zeit:
Test

Aufgabe 2

Eine Zelle der Kantenlänge s kann bei einem Punkt-Mindestabstand ϵ maximal $n_{max} = (\frac{s}{\epsilon} + 1)^2$ Punkte enthalten, da am meisten Punkte in die Zelle passen, wenn diese Gitterförmig angeordnet sind:

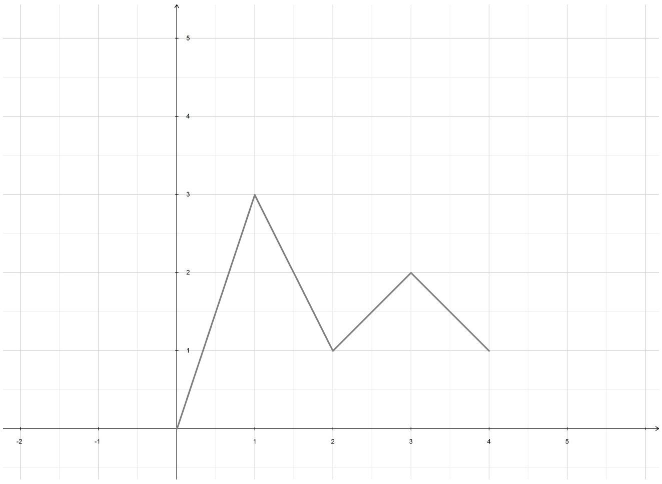


Ein Octree hat bei einer Tiefe t maximal $n = 8^t$ Blätter, bzw. Punkte. Nach t umgestellt ergibt sich für die maximale Tiefe bei n_{max} Punkten:

$$t_{max} = log_8(n_{max}) = 2 \cdot log_8(\frac{s}{\epsilon} + 1)$$

Aufgabe 3

Aufgabe 4



Aufgabe 5

Seien:
n die Anzahl der Kontrollpunkte
p_i mit $i \in \{0, 1, 2...n\}$ die Kontrollpunkte

Eine affine Transformation lässt sich in einen multiplikativen Teil (Matrix M) und einen additiven Teil (Vektor $\vec{a}$) aufteilen:

$$T(\vec{v}) = M \cdot \vec{v} + \vec{a}$$

Affine Invarianz: Es ist egal, ob zuerst T auf die Kontrollpunkte angewandt wird mit anschließender Interpolation oder umgekehrt:

$$T(\sum_{i=0}^{n} p_i \cdot L_i^n(u)) = \sum_{i=0}^{n}(T(p_i \cdot L_i^n(u)))$$

Setze gleich:

$$\begin{aligned}
T(\sum_{i=0}^{n} p_i \cdot L_i^n(u)) &= \sum_{i=0}^{n}(T(p_i \cdot L_i^n(u))) \\
M(\sum_{i=0}^{n} p_i \cdot L_i^n(u)) + \vec{a} &= \sum_{i=0}^{n}(M(p_i \cdot L_i^n(u)) + \vec{a}) \\
\sum_{i=0}^{n} M(p_i \cdot L_i^n(u)) + \vec{a} &= \sum_{i=0}^{n} M(p_i \cdot L_i^n(u)) + \sum_{i=0}^{n} \vec{a} \cdot L_i^n(u) \\
\vec{a} &= \vec{a} \cdot \sum_{i=0}^{n} L_i^n(u) \qquad \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} L_i^n(u) = 1 \quad \square
\end{aligned}$$

Demnach sind beide Seiten gleich, genau dann, wenn für die Basisfunktion gilt:

$$L_i^n(u) = 1 \ \forall u \ //\text{Partition der Eins}$$