Aufgabe 1

Um den Median in linearer Zeit zu bestimmen, kann der Median of Medians Algorithmus verwendet werden. Im folgenden ist der Algorithmus in Form von Pseudocode näher erläutert.

function SELECT(L, k)
    if *L enthält* 10 *oder weniger Elemente* **then**
        sort(L)
        return Element an $k$ter Stelle
    end if

Teile L in Subsets $S[i]$ mit jeweils 5 Elementen auf ▷ Es gibt n/5 Subsets

    for $i = 1 \to n/5$ **do**
        X *add* $select(S[i], 3)$ ▷ Median von den Subsets
    end for

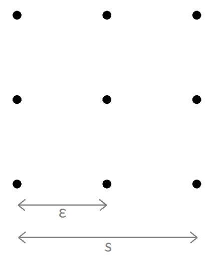
    $M = select(X[i], n/10)$

Teile L auf in L1 < M, L2 = M, L3 > M
    if $k \leq |L1|$ **then**
        return $select(L1, k)$
    else if $k > |L1| + |L2|$ **then**
        $select(L3, k - |L1| - |L2|)$
    else
        return M
    end if
end function

Beweis für lineare Zeit:
Wir werfen entweder $L3$ (Werte größer als M) oder $L1$ (Werte kleiner als M) weg. Angenommen wir werfen $L3$ weg. Unter den $n/5$ Werten von X befinden sich $n/10$ größere Werte als M. Wenn ein Wert aus X größer als M ist, dann sind genau 2 Werte aus $S[i]$ ebenfalls größer als der Wert aus X. Daraus folgt, dass $L3$ mindestens 3 Elemente in jeder der $n/10$ Gruppen von $S[i]$ hat, woraus sich mindestens $3n/10$ Elemente ergeben. Das gleiche gilt für $L1$, wodurch sich höchstens $7n/10$ Elemente ergeben ($T(7n/10)$).

Aufgabe 2

Eine Zelle der Kantenlänge s kann bei einem Punkt-Mindestabstand ϵ maximal $n_{max} = (\frac{s}{\epsilon} + 1)^2$ Punkte enthalten, da am meisten Punkte in die Zelle passen, wenn diese Gitterförmig angeordnet sind:

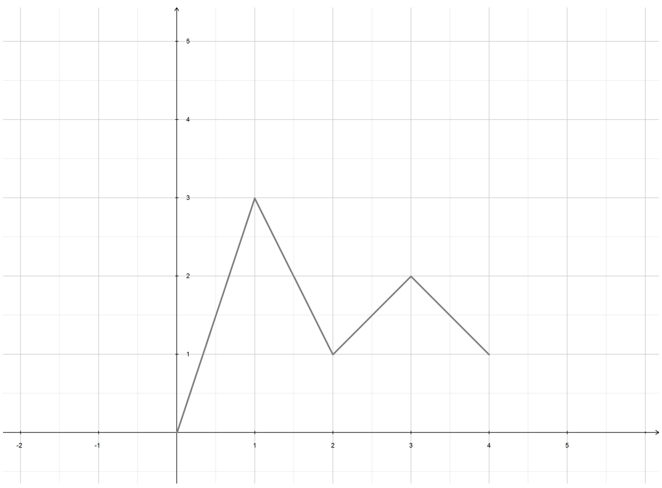


Ein Octree hat bei einer Tiefe t maximal $n = 8^t$ Blätter, bzw. Punkte. Nach t umgestellt ergibt sich für die maximale Tiefe bei n_{max} Punkten:

$$t_{max} = log_8(n_{max}) = 2 \cdot log_8(\frac{s}{\epsilon} + 1)$$

Aufgabe 3

Aufgabe 4



Aufgabe 5

Seien:
n die Anzahl der Kontrollpunkte
p_i mit $i \in \{0, 1, 2...n\}$ die Kontrollpunkte

Eine affine Transformation lässt sich in einen multiplikativen Teil (Matrix M) und einen additiven Teil (Vektor $\vec{a}$) aufteilen:

$$T(\vec{v}) = M \cdot \vec{v} + \vec{a}$$

Affine Invarianz: Es ist egal, ob zuerst T auf die Kontrollpunkte angewandt wird mit anschließender Interpolation oder umgekehrt:

$$T(\sum_{i=0}^{n} p_i \cdot L_i^n(u)) = \sum_{i=0}^{n}(T(p_i \cdot L_i^n(u)))$$

Setze gleich:

$$\begin{aligned}
T(\sum_{i=0}^{n} p_i \cdot L_i^n(u)) &= \sum_{i=0}^{n}(T(p_i \cdot L_i^n(u))) \\
M(\sum_{i=0}^{n} p_i \cdot L_i^n(u)) + \vec{a} &= \sum_{i=0}^{n}(M(p_i \cdot L_i^n(u)) + \vec{a}) \\
\sum_{i=0}^{n} M(p_i \cdot L_i^n(u)) + \vec{a} &= \sum_{i=0}^{n} M(p_i \cdot L_i^n(u)) + \sum_{i=0}^{n} \vec{a} \cdot L_i^n(u) \\
\vec{a} &= \vec{a} \cdot \sum_{i=0}^{n} L_i^n(u) \qquad \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} L_i^n(u) = 1 \quad \square
\end{aligned}$$

Demnach sind beide Seiten gleich, genau dann, wenn für die Basisfunktion gilt:

$$L_i^n(u) = 1 \ \forall u \ //\text{Partition der Eins}$$