

Olympiade Mathématique Belge 2018 - Mini - Eli

Extrait du règlement du concours

Ce questionnaire contient 30 questions; répondez à 5 questions au moins. La plupart des questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par A, B, C, D et E. Chaque question possède une seule réponse correcte. Certaines questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0; 999]$. Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse.

Le questionnaire éliminatoire 2018

Question 1

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

A : 0

B : $\frac{1}{4}$

C : $\frac{1}{2}$

D : $\frac{3}{4}$

E : $\frac{5}{4}$

Question 2

Combien peut-il y avoir au maximum de lundis dans une période de 75 jours consécutifs ?

A : 10

B : 11

C : 12

D : 13

E : 15

Question 3 Sans réponse préformulée

Un car peut transporter 62 personnes (en plus du chauffeur). Si une école de 692 élèves et 35 de leurs professeurs doivent partir en excursion, combien faudra-t-il de cars de ce type, au minimum, pour que tous aient une place assise ?

Question 4

Une salle de cinéma compte onze rangées de sièges, numérotées de 1 à 11. Les rangées dont le numéro est impair ont 15 sièges chacune, tandis que les rangées dont le numéro est pair ont 16 sièges chacune. Combien y a-t-il de sièges dans le cinéma ?

A : 76

B : 165

C : 170

D : 171

E : 186

Question 5

Une grille 3×3 est remplie par des nombres un, deux et trois écrits de trois manières : en chiffres indo-arabes, en chiffres romains et en faces de dés. Dans chaque ligne et dans chaque colonne se trouvent les trois valeurs et les trois écritures. Que contient la case centrale (grisée) ?

1		II
		■
■		

A : 2

B : 3

C : ■

D : I

E : III

Question 13

Sur une ligne de chemin de fer, la distance entre les villes A et B est de 70 km . Une ville C est située sur la ligne, entre A et B , à 40 km de A . Si un train, roulant à vitesse constante, est parti de A à 10h07 et arrivé en B à 10h49, à quelle heure est-il passé en C ?

A : 10h21

B : 10h24

C : 10h27

D : 10h31

E : 10h35

Question 14

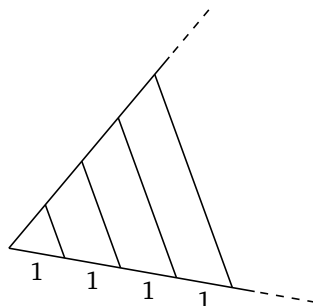
Si m et n désignent des nombres naturels impairs, alors, parmi les nombres suivants, lequel est forcément impair ?

A : $m + n$ C : $m \cdot n$

E : Aucun des précédents.

B : $m - n$ D : $3m + 7n$ **Question 15** *Sans réponse préformulée*

A un triangle équilatéral de côté 1 sont accolés des trapèzes isocèles dont les côtés non parallèles sont de longueur 1, de manière à former des triangles équilatéraux emboîtés. Que mesure la grande base du trapèze dont l'aire vaut 21 fois celle du triangle initial ?

**Question 16**

Que vaut $ab - (a + b)$ si $a = 7$ et $b = 11$?

A : 715

B : 693

C : 634

D : 81

E : 59

Question 17 *Sans réponse préformulée*

Quel est le plus petit nombre naturel non nul divisible par 8, 12 et 30 ?

Question 18

Le premier jour, il pleuvait ; le marchand de crème galcée a peu vendu. Le deuxième et le troisième jour, il a doublé chaque fois sa vente du jour précédent et, mieux encore, le quatrième jour et le cinquième jour il a chaque fois triplé la vente de la veille. Sa vente du 5^e jour étant de 396 glaces, combien a-t-il vendu de glace sur les cinq jours ?

Question 19

Bill change 600 dollars en euros au taux de 1,25 \$ par euro. Ayant annulé son voyage, il reconvertisse tous ces euros en dollars au nouveau taux de 1,20 \$ par euro. Combien reçoit-il de dollars ?

A : 576

B : 600

C : 625

D : 630

E : 720

Question 20

Quel est l'encadrement correct de la fraction $\frac{3}{7}$?

A : $\frac{1}{4} < \frac{3}{7} < \frac{1}{3}$

B : $\frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{2}{5}$

C : $\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$

D : $\frac{1}{2} < \frac{3}{7} < \frac{3}{5}$

E : $\frac{3}{5} < \frac{3}{7} < \frac{2}{3}$

Question 21

Si $ABCDEF$ est un hexagone régulier d'aire 60, que vaut l'aire du triangle ACF ?

A : 16

B : 18

C : 20

D : 24

E : 30

Question 22

Dans l'écriture $17,3\overline{765}$, la partie surlignée indique la partie périodique de $17,3765765765\dots$ Parmi les nombres suivants, lequel est le plus grand ?

A : $17,3765$

B : $17,376\overline{5}$

C : $17,3\overline{765}$

D : $17,3\overline{765}$

E : $17,3\overline{765}$

Question 23

Quel est le pourcentage d'une réduction unique qui équivaut à des réductions successives de 10% et de 20% ?

A : 30%

B : 28%

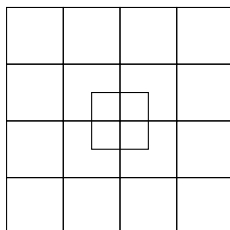
C : 25%

D : 24%

E : 15%

Question 24

Combien compte de carrés la figure suivante ?



A : 18

B : 20

C : 22

D : 31

E : 35

Question 25

Si p est un diviseur premier de 240, alors forcément

A : p divise 30 ;

C : p divise 75 ;

E : Aucune des réponses

B : p divise 48 ;

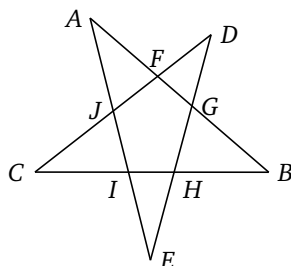
D : p divise 80 ;

précédentes.

Question 26

Sans réponse préformulée

Dans figure imprécise suivante, l'angle \widehat{AFD} mesure 94° et les angles \widehat{CIJ} et \widehat{CJI} mesurent 80° . Que mesure, en degrés, $\widehat{FGH} + \widehat{GHI}$?



Question 27

Audrey a aligné vingt pièces de 0,20€ sur une table. Bernard a alors remplacé une pièce sur quatre, à partir de la 4^e, par une pièce de 0,50€. Ensuite, Charlotte a remplacé une pièce sur trois, à partir de la 3^e, par une pièce de 1€. Finalement, David a remplacé une pièce sur six, à partir de la 6^e, par une pièce de 2€. Quel est maintenant le montant total de la rangée de pièces de monnaie ?

A : 10,5€

C : 13€

E : Une autre réponse.

B : 12,2€

D : 13,5€

Question 28

Le trapèze $ABCD$ vérifie : $(AB) \parallel (DC)$, $AB = AD$ et $DB = BC$. Si l'angle \widehat{DAB} mesure 110° , que mesure l'angle \widehat{ABC} ?

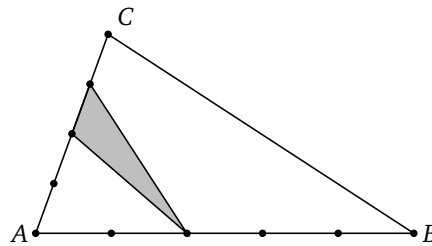
A : 135° C : 145°

E : Une autre réponse.

B : 140° D : 150°

Question 29

Dans la figure suivante, les points partagent les côtés sur lesquels ils se trouvent en segments de mêmes longueurs. L'aire du triangle ABC est 180 ; quelle est celle du triangle gris ?



A : 9

B : 18

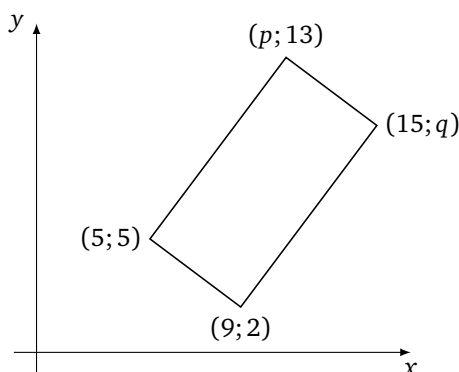
C : 27

D : 36

E : 45

Question 30

La figure ci-dessous est un rectangle ; que vaut $p + q$?



A : 17

B : 18

C : 20

D : 21

E : 22

Solutions

Solution – Question 1 , p. 1

A : $\frac{3}{4}$

Solution détaillée :

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Solution – Question 2 , p. 1

B : 11

Solution détaillée :

$75 = 7 \cdot 10 + 5$; 75 jours consécutifs forment 10 semaines et 5 cinq jours ; $10 + 1 = 11$ lundis au maximum.

Solution – Question 3 , p. 1

12

Solution détaillée :

$(692 + 35) : 62 = 727 : 62 = (682 + 45) : 62 = 11 + \frac{45}{62}$; il faudra donc 12 cars.

Solution – Question 4 , p. 1

C : 170




Solution détaillée :

$6 \cdot 15 + 5 \cdot 16 = 90 + 80 = 170$; il y a 170 sièges dans le cinéma.

Solution – Question 5 , p. 1

A : 2

Solution détaillée :

1		II
III	2	
	I	3

Solution – Question 6 , p. 1

9

Solution détaillée :

Il faudra attendre 9 ans ($2018 + 9 = 2027$) car la somme des chiffres de 2027 est égale à $2 + 0 + 2 + 7 = 11$.

Solution – Question 7 , p. 2

70

Solution détaillée :

$0,01 \cdot x + 0,05 \cdot x + 0,10 \cdot x = 11,20 \Leftrightarrow 0,16 \cdot x = 11,20 \Leftrightarrow x = 1120 : 16 \Leftrightarrow x = 70$ pièces de monnaie.

Solution – Question 8 , p. 2

125

Solution détaillée :

$V_{\text{avant}} = a^3$; $V_{\text{après}} = (5 \cdot a)^3 = 125 \cdot a^3 = 125 \cdot V_{\text{avant}}$; le volume est multiplié par 125.

Solution – Question 9 , p. 2

A : 6

Solution détaillée :

$30 \cdot (x + 2) = 40 \cdot x \Leftrightarrow 30x + 60 = 40x \Leftrightarrow 10x = 60 \Leftrightarrow x = 6$; 6 personnes étaient présentes à ce repas, en plus de Pierre et de Paul.

Solution – Question 10 , p. 2A : $4,6 \cdot 10^4$ *Solution détaillée :*

$$2,3 \cdot 10^4 \cdot 2 = 2,3 \cdot 2 \cdot 10^4 = 4,6 \cdot 10^4$$

Solution – Question 11 , p. 2

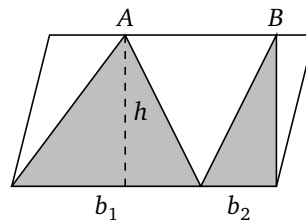
D : 8

Solution détaillée :

4		5		8		7
	9		13		15	
		22		28		
			50			

Solution – Question 12 , p. 2

C : 3

Solution détaillée :

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (b_1 + b_2) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b = \frac{1}{2} \cdot A_{\text{parallélogramme}} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Solution – Question 13 , p. 2

D : 10h31

Solution détaillée :

$$\frac{42}{70} = \frac{x}{40} \Leftrightarrow x = \frac{42 \cdot 40}{70} \Leftrightarrow x = 6 \cdot 4 \Leftrightarrow x = 24 ; \text{ le train passe à « 10h07 + 00h24 = 10h31 » en C.}$$

Solution – Question 14 , p. 3C : $m \cdot n$ *Solution détaillée :*

$$m \cdot n = (2p + 1) \cdot (2q + 1) = 4pq + 2p + 2q + 1 = \underbrace{2 \cdot (2pq + p + q)}_{\text{pair}} + 1$$

impair

Solution – Question 15 , p. 3

11

Solution détaillée :

$$A_{\text{trapeze}} = 21 \cdot A_{\text{triangle}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (b_1 + b_2) \cdot h = 21 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \Leftrightarrow b_1 + b_2 = 21 \Leftrightarrow b_1 = 10 \wedge b_2 = 11$$

Solution – Question 16 , p. 3

E : 59

Solution détaillée :

$$ab - (a + b) = 7 \cdot 11 - (7 + 11) = 77 - 18 = 59$$

Solution – Question 17 , p. 3

120

Solution détaillée :

$$\text{ppcm}(8; 12; 30) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 120$$

Solution – Question 18 , p. 3

605

Solution détaillée :

Soit x le nombre de glaces vendu le premier jour, alors le deuxième jour il a vendu $2 \cdot x = 2x$, le troisième jour $2 \cdot (2x) = 4x$, le quatrième jour $3 \cdot (4x) = 12x$ et le cinquième jour $3 \cdot (12x) = 36x$ glaces.

Or, $36x = 396 \Leftrightarrow x = 11$. Au total, il a vendu $x + 2x + 4x + 12x + 36x = 55x = 55 \cdot 11 = 605$ glaces.

Solution – Question 19 , p. 3

A : 576

Solution détaillée :

Il reconvertit $\frac{1 \cdot 600}{1,25} = \frac{600 \cdot 100}{125} = \frac{600 \cdot 4}{5} = 120 \cdot 4 = 480$ euros en dollars au taux de change de 1,20\$.

$$1,20 \cdot 480 = 12 \cdot 48 = 480 + 96 = 576 \text{ dollars.}$$

Solution – Question 20 , p. 3

$$C : \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$$

Solution détaillée :

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 14}{5 \cdot 14} < \frac{3 \cdot 10}{7 \cdot 10} < \frac{1 \cdot 35}{2 \cdot 35} \Leftrightarrow \frac{28}{70} < \frac{30}{70} < \frac{35}{70}$$

Solution – Question 21 , p. 4

C : 20

Solution détaillée :

L'hexagone régulier peut être divisé en 6 triangles identiques et $[ACF] = \frac{1}{6} \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot 60 = 10 + 10 = 20$.

Solution – Question 22 , p. 4D : $17,3\overline{765}$ *Solution détaillée :*

$$17,3\overline{765} = 17,3765765\dots > \begin{cases} 17,3765 \\ 17,3765555\dots \\ 17,3765656\dots \\ 17,3765376\dots \end{cases}$$

Solution – Question 23 , p. 4

B : 28%

Solution détaillée :

$$-10\% - (1 - 10\%) \cdot 20\% = -\frac{10}{100} - \left(1 - \frac{10}{100}\right) \cdot \frac{20}{100} = -\frac{10}{100} - \frac{90}{100} \cdot \frac{20}{100} = -\frac{10}{100} - \frac{18}{100} = -\frac{28}{100} = -28\%$$

La remise est de 28%.

Solution – Question 24 , p. 4

E : 35

Solution détaillée :

Supposons que le carré a un côté de 4 unités, il y a 4 très petits carrés (de côté 0,5), 17 petits carrés (de côté 1), 9 moyens carrés (de côté 2), 4 grands carrés (de côté 3) et 1 très grand carré (de côté 4) ; $4 + 17 + 9 + 4 + 1 = 35$.

Solution – Question 25 , p. 4A : p divise 30*Solution détaillée :*

$$240 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1, \text{ donc } \text{div}_{\text{premiers}} 240 = \{2; 3; 5\}, \text{ or les diviseurs premiers 2, 3 et 5 divisent 30.}$$

Solution – Question 26 , p. 4

B :

Solution détaillée :

$FGHIJ$ est un pentagone ($n = 5$) et donc $\Sigma_{\text{angles}} = (n - 2) \cdot 180^\circ = (5 - 2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

$$\begin{aligned} \widehat{FGH} + \widehat{GHI} + \widehat{HIJ} + \widehat{IJF} + \widehat{JFG} &= 540^\circ \\ \Leftrightarrow \widehat{FGH} + \widehat{GHI} + (180^\circ - \widehat{CIJ}) + (180^\circ - \widehat{CJI}) + \widehat{AFD} &= 540^\circ \\ \Leftrightarrow \widehat{FGH} + \widehat{GHI} + (180^\circ - 80^\circ) + (180^\circ - 80^\circ) + 94^\circ &= 540^\circ \\ \Leftrightarrow \widehat{FGH} + \widehat{GHI} + 294^\circ &= 540^\circ \\ \Leftrightarrow \widehat{FGH} + \widehat{GHI} &= 246^\circ \end{aligned}$$

Solution – Question 27 , p. 4

C : 13 €

Solution détaillée :

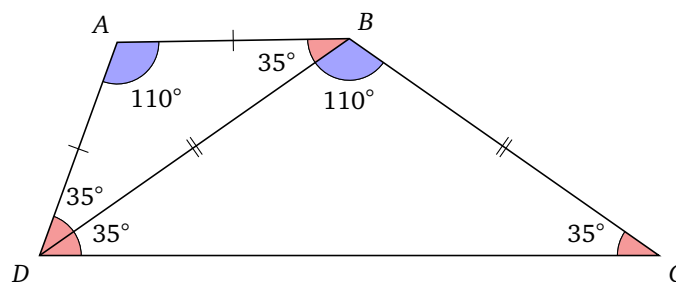
0,20	0,20	1	0,50	0,20	2	0,20	0,50	1	0,20	0,20	2	0,20	0,20	1	0,50	0,20	2	0,20	0,50
------	------	---	------	------	---	------	------	---	------	------	---	------	------	---	------	------	---	------	------

$$3 \cdot 2\text{€} + 3 \cdot 1\text{€} + 4 \cdot 0,5\text{€} + 10 \cdot 0,2\text{€} = 6\text{€} + 3\text{€} + 2\text{€} + 2\text{€} = 13\text{€}$$

Solution – Question 28 , p. 5

C : 135°

Solution détaillée :

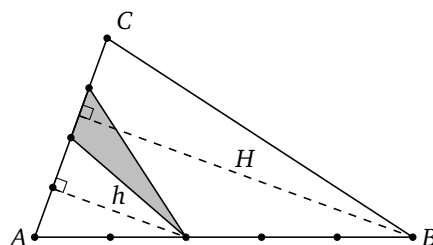


$\triangle ABD \sim \triangle BCD$, les triangles ABD et BCD sont semblables et donc $\widehat{DBC} = \widehat{DAB} = 110^\circ$.
 $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} = (180^\circ - \widehat{DAB}) : 2 + \widehat{DAB} = (180^\circ - 110^\circ) : 2 + 110^\circ = 35^\circ + 110^\circ = 145^\circ$

Solution – Question 29 , p. 5

B : 18

Solution détaillée :

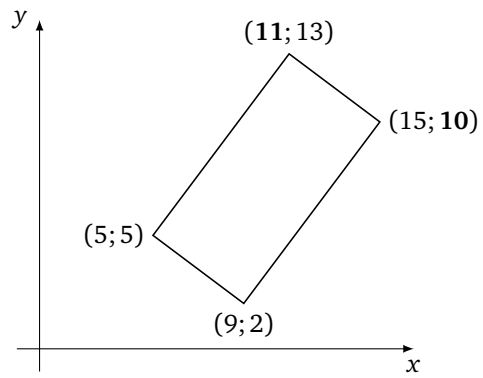


$$A = \left(\frac{1}{4} \cdot AC \cdot h\right) : 2 = \left(\frac{1}{4} \cdot AC \cdot \frac{2}{5} \cdot H\right) : 2 = \frac{1}{10} \cdot AC \cdot H : 2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{AC \cdot H}{2} = \frac{1}{10} \cdot [ABC] = \frac{1}{10} \cdot 180 = 18$$

Solution – Question 30 , p. 5

D : 21

Solution détaillée :



$p = 11$ et $q = 10$; ainsi $p + q = 11 + 10 = 21$.