Semestrálna práca MI-PAP 2013/2014:

Násobenie matíc

Martin Klepáč

Pavol Kušlita

April 3, 2014

1 Definícia problému

Našou úlohou bolo vytvoriť program, ktorý implementuje násobenie matíc formou ako klasického algoritmu, tak aj s použitím Strassenovho algoritmu.

2 Formát vstupu, výstupu

Formálne, vstup vyjadríme pomocou

- *A, B* = vstupné matice
- *Ax, Ay, Bx, By* = dimenzie vstupných matíc A, B

Výstupom algoritmu je matica *C* s dimenziami *Ax*, *By* za podmienky, že *Ay* = *Bx*. V opačnom prípade nie je možno vykonať násobenie vstupných matíc.

3 Implementácia sekvenčného riešenia

Sekvenčný algoritmu pozostáva z trojice cyklov, ktoré prechádzajú matice *A*, *B* v nasledovnom poradí:

1. riadok matice *A*
2. stĺpec matice *B*
3. stĺpec matice *A*, ktorý zároveň predstavuje riadok matice *B*

Vo najvnútornejšom cykle sa potom vykoná samotný výpočet popísaný pseudokódom nižšie:

```
C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
```

Zložitosť takéhoto výpočtu je potom intuitívne $O(n^3)$. Zároveň tento triviálny algoritmus nevyužíva možnosti cache pamäte.

Vylepšenie tohto triviálneho algoritmu spočíva v použití techniky loop-tiling. Výsledkom je zdvojnásobenie celkového počtu cyklov na 6, pričom miesto sekvenčného posunu indexov *i* až *k* posúvame indexy v našom prípade o 100, aby sme následne iterovali pomocnými indexami *ii*, *jj* respktíve *kk* medzi 0-99, 100-199 a tak ďalej. Výsledkom je rovnaké množstvo vykonanej práce pri efektívnejšom využití cache pamäte. Pseudokód popisujúci techniku loop tiling-u:

```
for i in 0..Ax
 for j in 0..By
  for k in 0..Ay
   for ii in i..i+100
    for jj in j..j+100
     for kk in k..k+100
      C[ii][jj] += A[ii][kk] * B[kk][jj];
```

Strassenov algoritmus je asymptoticky rýchlejší než štandardný multiplikatívny algoritmus. Jeho asymptotická zložitosť je $O(n^{2.8074})$. Jedna sa o rekurzivný algoritmus, ktorý maticu *A* a *B* rozdeli na podmatice *A11*, *A12*, *A21*, *A22* a podobne aj maticu *B*.

$$A = \begin{pmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{pmatrix}$$

Následne do pomocných matíc *p1* až *p7* uloží čiastočné výsledky násobenia. V tomto kroku dochádza k zrýchleniu voči klasickému násobeniu, kedže dochádza iba k siedmim násobeniam v porovnaní s ôsmimi násobeniami v prípade klasického alogritmu. Pri týchto siedmich násobeniach opäť využívame Strassenov algoritmus až do určitej hranice, pri ktorej je už efektívnejšie používať klasický spôsob. Táto hranica závisí od implementácie a od hardvéru. V našom prípade bola empiricky stanovená na hodnotu 64. Na konci algoritmu sa medzivýsledky v pomocných maticiach *p1* až *p7* spoja a vytvoria matice *C1*, *C2*, *C3*, *C4*, ktoré spolu vytvárajú výslednú maticu C.

4 Implementácia paralelného riešenia pomocou OpenMP

Prostredie OpenMP sa ukázalo byť veľmi jednoduché na implementáciu triviálneho algoritmu s použitím viacerých vlákien. Vzhľadom na to, že objem práce v najvnútornejšom cykle je rovnaký pre všetky vlákna, použili sme statické rozdelenie záťaže priamo v prostredí OpenMP definované kľúčovým slovom *static*. Aby sme v prípade menších vstupných matíc v kombinácii s väčším počtom vlákien zamedzili plytvaniu prostriedkov, miesto jedného cyklu paralelizujeme dvojicu vonkajších cyklov s pomocou kľúčového slova *collapse*.

Kód definujúci paralelizáciu ako triviálneho algoritmu, tak aj algoritmu s použitím loop tiling-u vyzerá nasledovne:

```
#pragma omp parallel for collapse (2) default(shared) private(i,j,k)
schedule(static)
```

	1024x1024			2048x2048			4096x4096		
	CL	**LT**	**ST**	**CL**	**LT**	**ST**	**CL**	**LT**	**ST**
-n 1	11.33	10.02	4.85	125.20	79.60	34.15	1347.2	651.67	239.81
-n 2	5.84	5.47	2.82	56.44	41.22	19.82	565.86	327.14	138.82
-n 4	2.93	2.82	1.49	30.03	20.79	10.21	302.63	163.87	70.66
-n 6	1.96	1.94	1.10	20.59	13.96	7.35	203.99	109.19	52.04
-n 8	1.48	1.46	0.85	16.33	10.57	5.80	158.66	81.65	39.93
-n 12	0.98	1.07	0.60	10.74	7.05	3.96	114.60	56.16	27.91
-n 24	0.92	0.81	0.50	8.40	5.87	3.14	83.37	50.18	19.71

Table 1: Trvanie behu v sekundách na OpenMP (CL = classic, LT = loop-tiling, ST = Strassen)

Pri paralelizácií Strassenovho algoritmu sme využili koštrukciu *Task*. Jedná sa o základnú jednotku paralelizácie. Paralelizácia spočíva v tom, že násobenie medzivýsledkov *p1* až *p7* sme rovnomerne rozdelili do 4 skupin. Prvé 3 skupiny sa rozdelia do 3 taskov a poslednú skupinu bude násobiť riadiace vlákno. Na konci tejto kritickej sekcie sa použije konštrukcia *taskwait*, ktorá zablokuje riadiace vlákno, kým jednotlivé tasky nebudú dokončené. Záverečné spájanie medzivýsledkov do výslednej matice C sme taktiež rozdelili do 4 taskov.

5 Merania

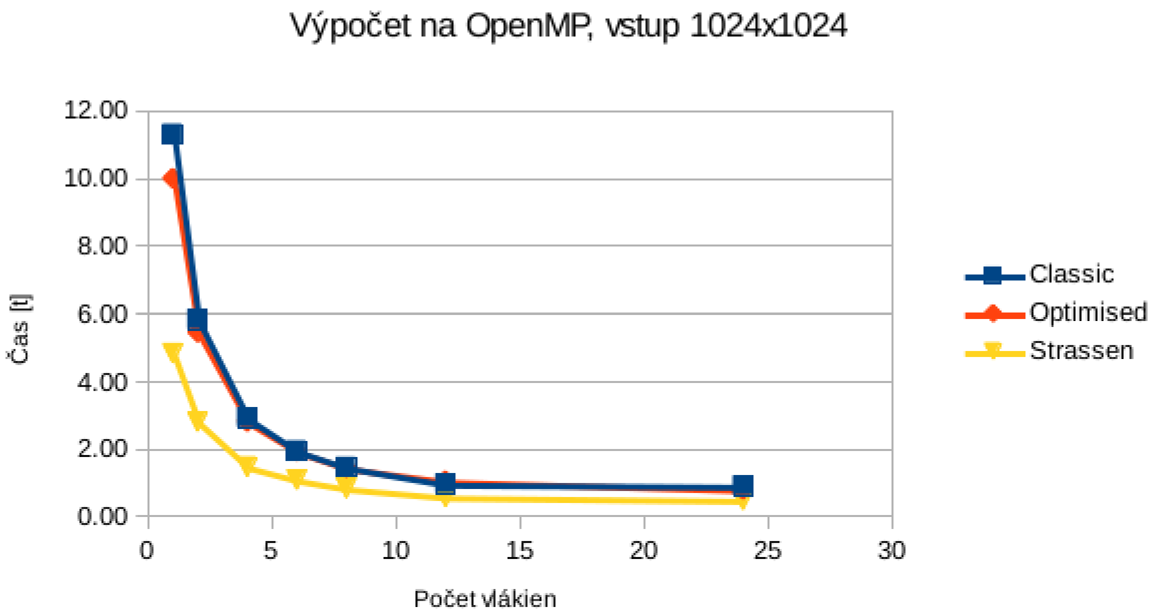
Pre potreby merania na serveri star.fit.cvut.cz sme vygenerovali trojicu pseudonáhodných štvorcových matíc o veľkosti 1024, 2048 a 4096. Program samozrejme dokáže spracovať aj iné ako štvorcové matice, ale pre férové porovnanie Strassenovho algoritmu s ostatnými riešeniami, používame práve štvorcové matice o veľkosti 2^n - naša implementácia Strassena automaticky dopĺňa vstupné matice na najbližšiu vyššiu takúto veľkosť.

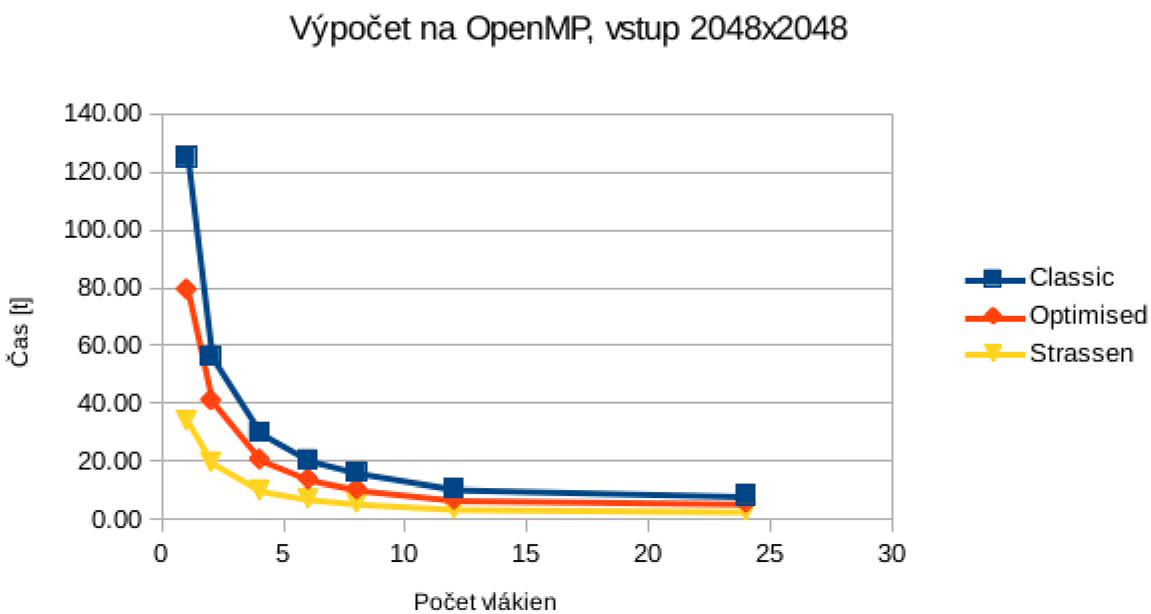
Namerané hodnoty sú uvedené v tabuľke 1 pre dané vstupné matice, počet vlákien 1, 2, 4, 6, 8, 12, 24 pre všetky hore popísané implementácie. Výsledné hodnoty predstavujú aritmetický priemer trojice meraní.

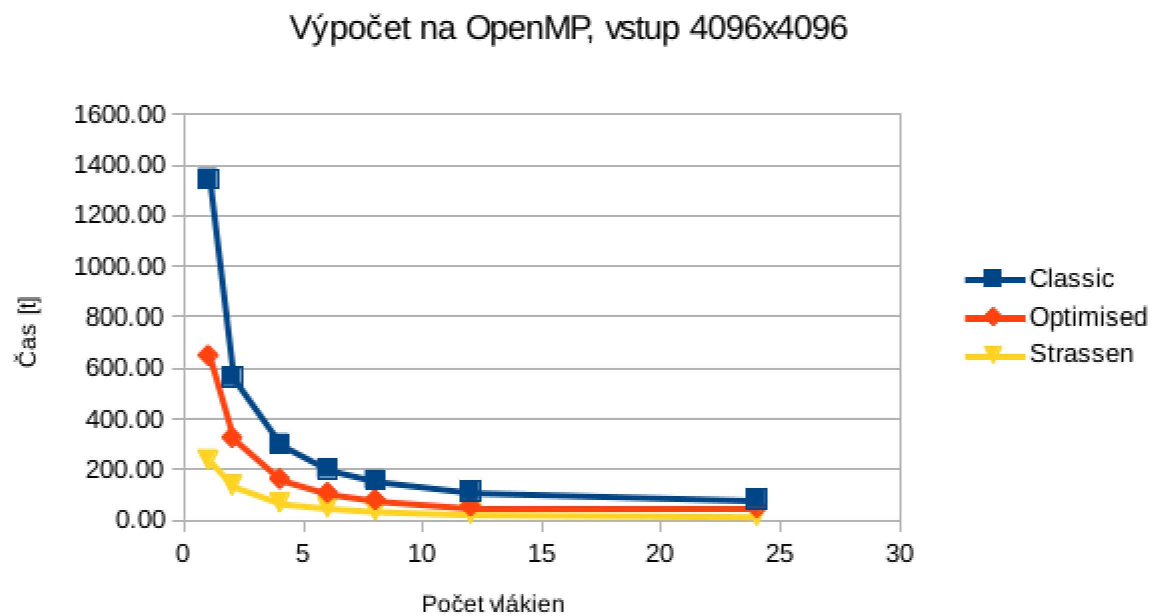
Nasledovné grafy znázorňujú ako paralelný čas, tak aj paralelnú cenu pre všetky tri vstupy pre variabilný počet vlákien.

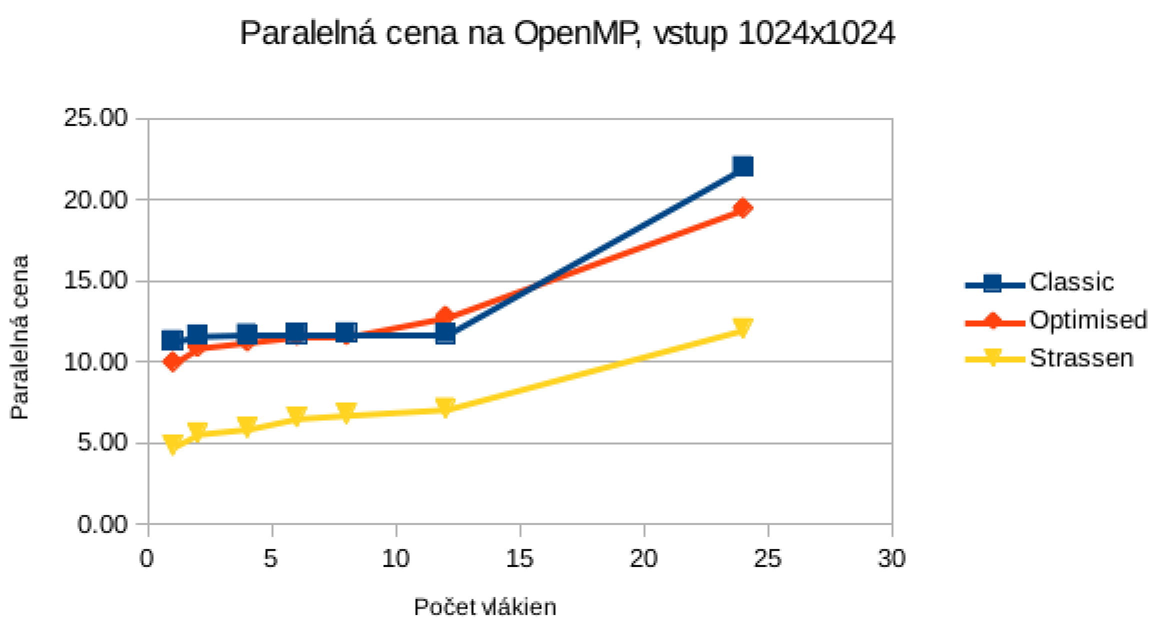
Ako môžeme vidieť, pre takmer všetky vlákna (výnimkou je 24 vlákien) a všetky implementácie sme dosiahli približne lineárne zrýchlenie, a teda konštantnú paralelnú cenu. Zvýšenie paralelnej ceny pre 24 vlákien spočíva v tom, že nami použitý hardvér nemal k dispozícii 24 fyzických procesorov, a teda zákonite došlo k prepínaniu kontextu v rámci jedného fyzického procesora. V porovnaní s predmetom BI-PPR, na ktorom sme pracovali s distribuovanou pamäťou, nedošlo k superlineárnemu zrýchleniu.

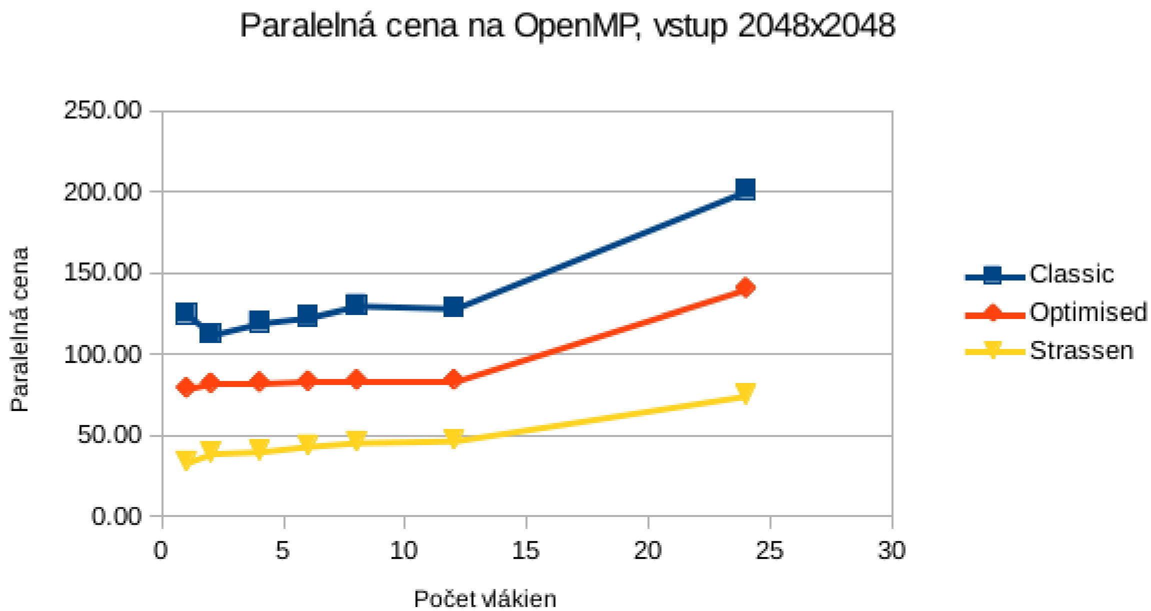
Ak by sme porovnávali jednotlivé implementácie medzi sebou, klasický a optimalizovaný algoritmus majú rovnakú asymptotickú zložitosť. Napriek tomu dosahuje optimalizovaná verzia zrýchlenie približne v rozsahu 10 až 50 percent v závislosti

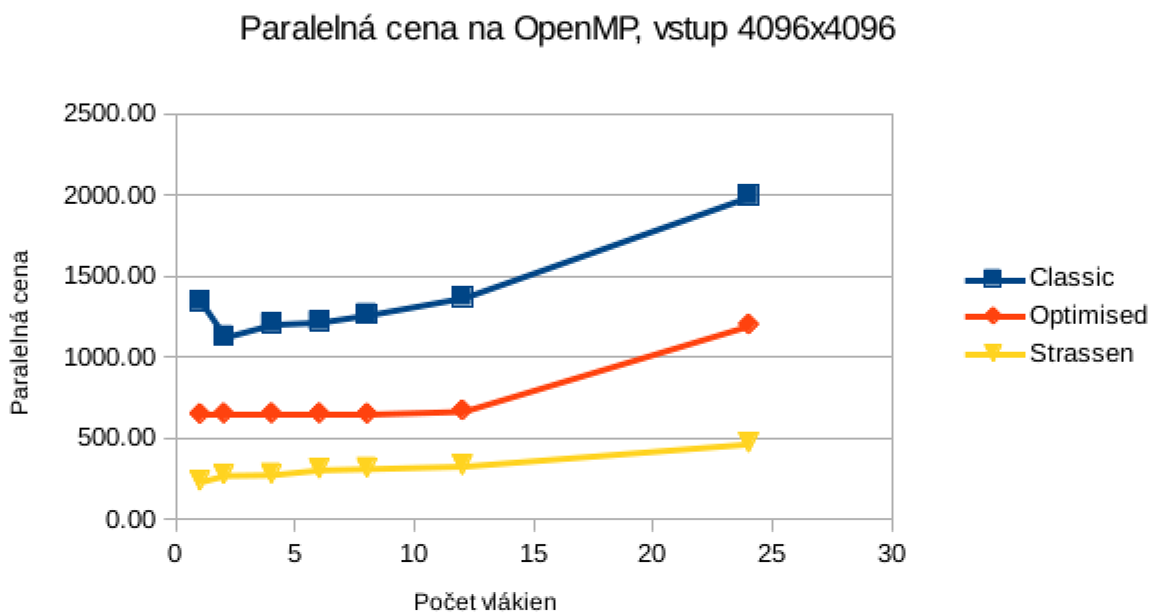

Výpočet na OpenMP, vstup 1024x1024
Čas [t]
Počet vlákien
Classic
Optimised
Strassen
12.00
10.00
8.00
6.00
4.00
2.00
0.00
0
5
10
15
20
25
30


Výpočet na OpenMP, vstup 2048x2048
Čas [t]
Počet vlákien
Classic
Optimised
Strassen
140.00
120.00
100.00
80.00
60.00
40.00
20.00
0.00
0
5
10
15
20
25
30


Výpočet na OpenMP, vstup 4096x4096
1600.00
1400.00
1200.00
1000.00
800.00
600.00
400.00
200.00
0.00
Čas [t]
0
5
10
15
20
25
30
Počet vlákien
Classic
Optimised
Strassen


Paralelná cena na OpenMP, vstup 1024x1024
25.00
20.00
15.00
10.00
5.00
0.00
Paralelná cena
0
5
10
15
20
25
30
Počet vlákien
Classic
Optimised
Strassen


Paralelná cena na OpenMP, vstup 2048x2048
250.00
200.00
150.00
100.00
50.00
0.00
Paralelná cena
0
5
10
15
20
25
30
Počet vlákien
Classic
Optimised
Strassen


Paralelná cena na OpenMP, vstup 4096x4096
2500.00
2000.00
1500.00
1000.00
500.00
0.00
Paralelná cena
0
5
10
15
20
25
30
Počet vlákien
Classic
Optimised
Strassen

od veľkosti vstupu (čím väčší vstup, tým väčšie zrýchlenie). Strassenov algoritmus, ktorého zložitosť je $O(n^{2.8074})$, dosahuje v porovnaní s optimalizovanou variantou zrýchlenie približne o 50 percent.