Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Пакеты прикладных программ»

Студент 415 группы
К. Е. Летуновский

Руководитель практикума
асп. М. В. Паршиков

Москва, 2025

1 Условие задачи

Имеется фирма, которая занимается ремонтом оборудования. Клиенты этой фирмы располагаются в разных частях г. Москвы, и, возможно, в других городах России. Каждое взаимодействие фирмы с клиентом заключается в выезде бригады на адрес клиенты, что приводит к затратам фирмы, пропорциональным расстоянию от офиса этой фирмы до места положения клиента. В один прекрасный день Вы (как потенциальный генеральный директор фирмы) решаете поменять положение Вашего офиса с целью минимизации издержек. При этом предполагается, что стоимость аренды офиса, его содержания и т.п. почти постоянна (не зависит от его положения), а издержки связаны исключительно с необходимостью выезжать к клиентам.

В качестве исходных данных необходимо использовать некоторый текстовый файл с координатами клиентов (для каждого клиента в отдельной строке указаны широта и долгота его положения, через запятую). Широта и долгота задаются как вещественные числа, в градусах (без выделения минут и секунд); символ-разделитель - "точка".

Основная задача состоит в разработке алгоритма поиска оптимального положения офиса. При этом необходимо рассмотреть несколько разных постановок задачи:

1. Все клиенты равнозначны и могут затребовать услуги фирмы с одинаковой вероятностью. Можно считать, что Земля является "плоской так как расстояния между разными клиентами невелики. В качестве расстояния от офиса до клиента можно использовать расстояние по прямой.

2. Все клиенты равнозначны и могут затребовать услуги фирмы с одинаковой вероятностью. Поскольку расстояния до клиентов большие (это могут быть точки в разных городах РФ), то при расчётах необходимо учитывать эллиптическую модель Земли. В качестве расстояния от офиса до клиента необходимо учитывать длину кратчайшего пути по поверхности эллипсоида.

3. Клиенты неравнозначны и могут затребовать услуги фирмы с разными вероятностями. В файле с информацией о клиентах для каждой строки (i-ого клиента) кроме широты и долготы указывается приоритет - некоторое положительное число (чем больше число, тем чаще этому клиенты требуются услуги Вашей фирмы). Как и в первом пункте, можно считать, что Земля "плоская". В качестве расстояния от офиса до клиента можно использовать расстояние по прямой.

Для каждого варианта задачи необходимо придумать постановку соответствующей математической задачи оптимизации и алгоритм численного решения этой задачи.

Результатом выполнения работы являются программа и краткий отчёт. Программа должна выдавать оптимальные координаты положения офиса.

2 Первый случай

2.1 Постановка задачи

Будем считать, что во входном файле даны декартовы координаты точек на плоскости, т.е. $C_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N$. Здесь N – количество клиентов. Требуется найти положение офиса, т.е. точку с кодинатами $O = (x_0, y_0)$. Расстояние между i-м клиентом и офисом равно $\rho(C_i, O) = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$. Издержки фирмы пропорциональны этому расстоянию, т.е. равны $k\rho(C_i, O)$. Требуется минимизировать издержки фирмы, т.е. следующую сумму:

$$\sum_{i=1}^{N} k\rho(C_i, O) = k\sum_{i=1}^{N} \rho(C_i, O) = k\sum_{i=1}^{N} \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \to \min_{(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2}$$

Поскольку k присутствует здесь в качестве множителя, то его можно опустить и минимизировать сумму расстояний. Тогда минимизируемый функционал равен

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \to \min_{(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2}$$

2.2 Решение

Данная задача известна как задача поиска геометрического центра многоугольника. Точно можно посчитать решение для трех и двух точек (для трех неколлинеарных точек это точка Ферма), для N точек существует численный алгоритм[1], которым мы воспользуемся.

Формула для итерационного метода следующая:

$$(x_0^{t+1}, y_0^{t+1}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{1}{\rho((x_0^t, y_0^t), (x_i, y_i))}(x_i, y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{1}{\rho((x_0^t, y_0^t), (x_i, y_i))}}$$

В качестве начального приближения будем брать среднее всех точек.

Данный метод может "застревать"в уже имеющихся точках, так что их можно проверить отдельно, а потом слегка отклоняться от заданных точек, если попали в их малую окрестность.

2.3 Примеры

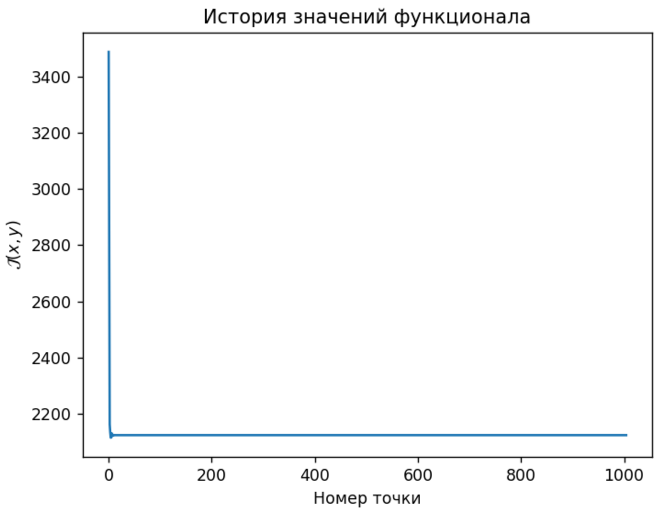

Рис. 1

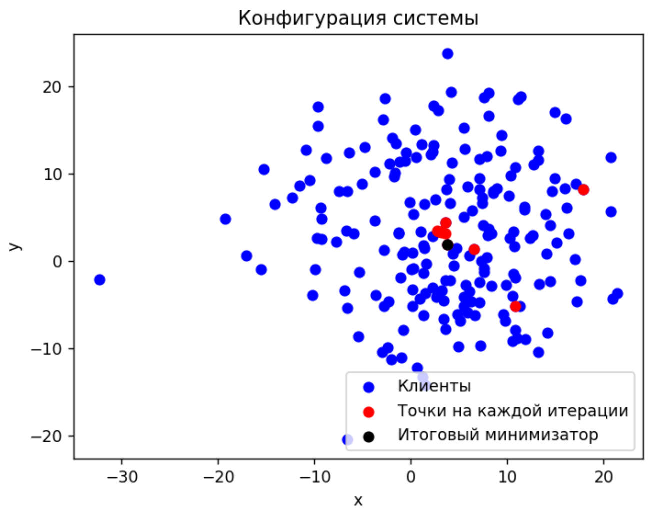

Рис. 2

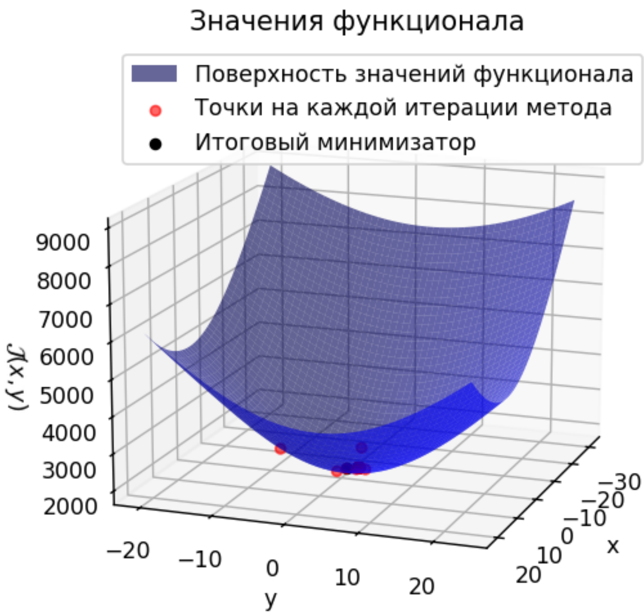

Рис. 3

На рис. 2 изображена конфигурация системы. Отдаленные красные точки – одни из клиентов. Черная точка – итоговый ответ. Следует отметить, что функционал в данной задаче является выпуклым, что видно на рис. 3.

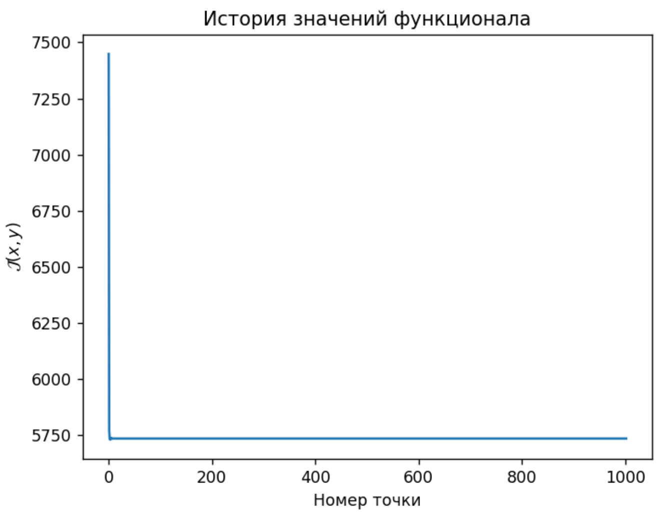

Рис. 4

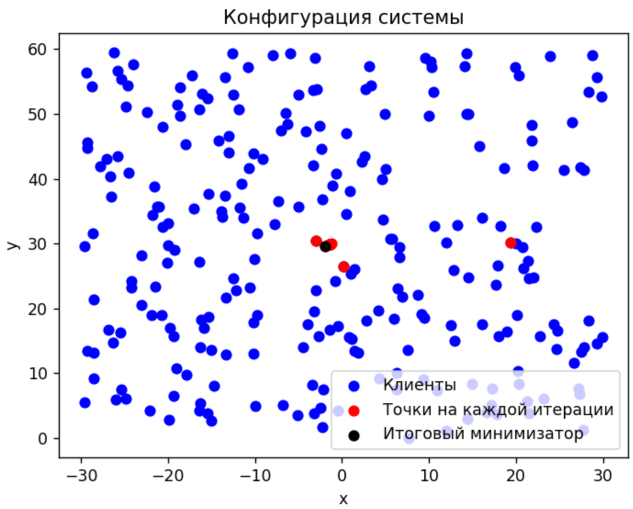

Рис. 5

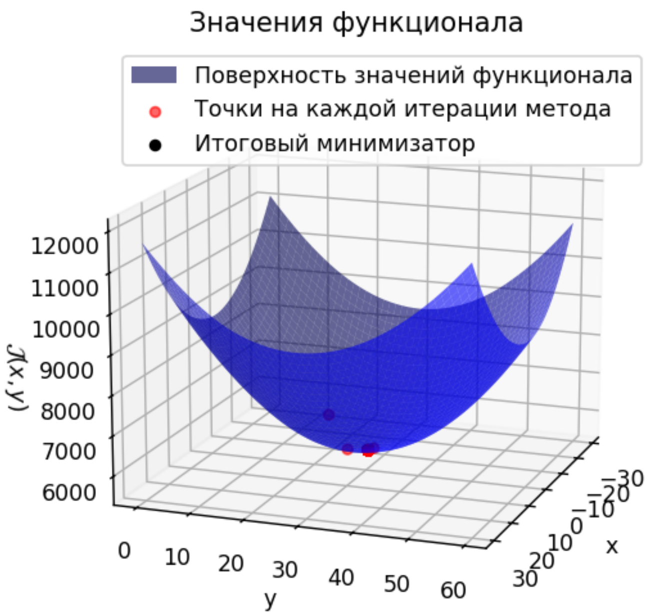

Рис. 6

На 5 изображена конфигурация системы. Отдаленные красные точки – одни из клиентов. Черная точка – итоговый ответ. Следует отметить, что функционал в данной задаче также является выпуклым, а значит существует его нижняя грань, что видно на рис. 6.

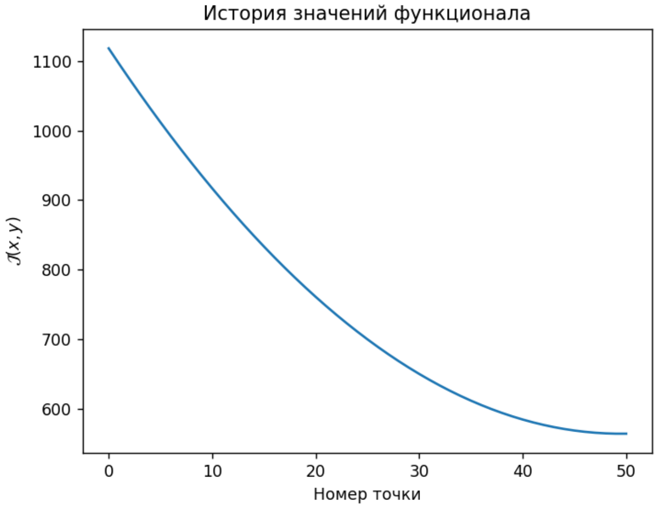
История значений функционала
1100
1000
900
800
700
600
$\mathcal{J}(x, y)$
0
10
20
30
40
50
Номер точки

Рис. 7

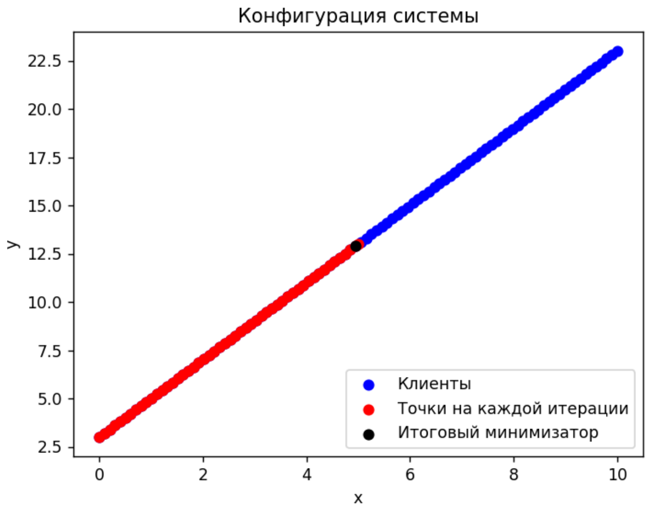
Конфигурация системы
22.5
20.0
17.5
15.0
12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
y
0
2
4
6
8
10
x
Клиенты
Точки на каждой итерации
Итоговый минимизатор

Рис. 8

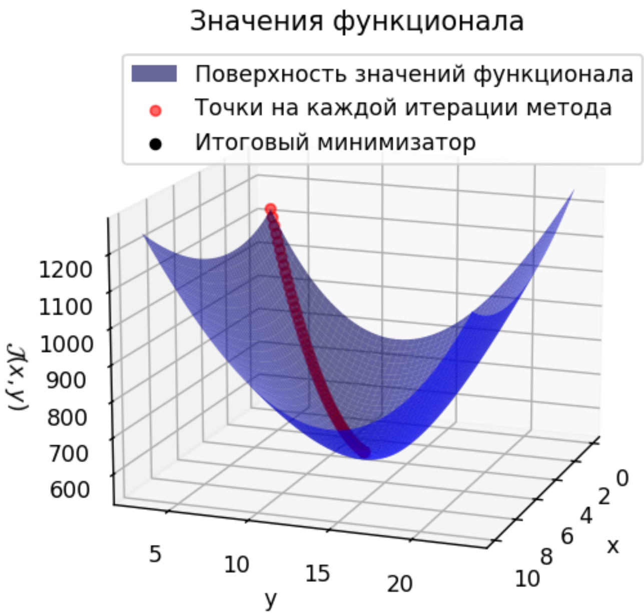

Рис. 9

На рис. 8 изображена специфическая конфигурация системы. Все точки находятся на одной прямой. В таком случае заранее известен минимизатор: средняя точка, если число точек нечетно и любая точка из отрезка между двумя средними точками, если число точек четно. Сначала были проверены все точки-клиенты, затем вычислен итоговый ответ.

3 Третий случай

3.1 Постановка задачи

Постановка задачи такая же, что и в первом случае, но минимизируемый функционал будет равен

$$\mathcal{J}(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{N} w_i \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}.$$

Здесь w_i – весовые множители, вычисляемые по следующей формуле

$$w_i = \frac{p_i}{\sum\limits_{k=1}^{N} p_k}.$$

Здесь p_i – вероятность запроса услуги i-м клиентом.

3.2 Решение

Численный метод практически ничем не отличается от первого случая. Единственное отличие — в формуле расчета множителя у точек (x_i, y_i). На $(t+1)$-м шаге приближение будет следующим

$$(x_0^{t+1}, y_0^{t+1}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{w_i}{\rho((x_0^t, y_0^t), (x_i, y_i))}(x_i, y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{w_i}{\rho((x_0^t, y_0^t), (x_i, y_i))}}.$$

3.3 Пример

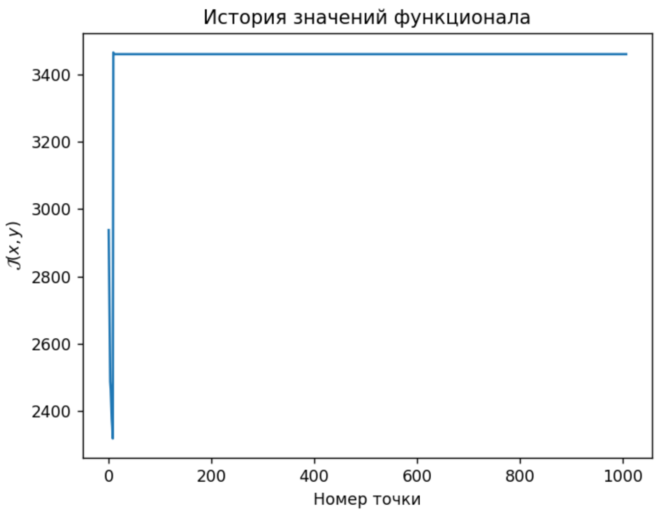

Рис. 10

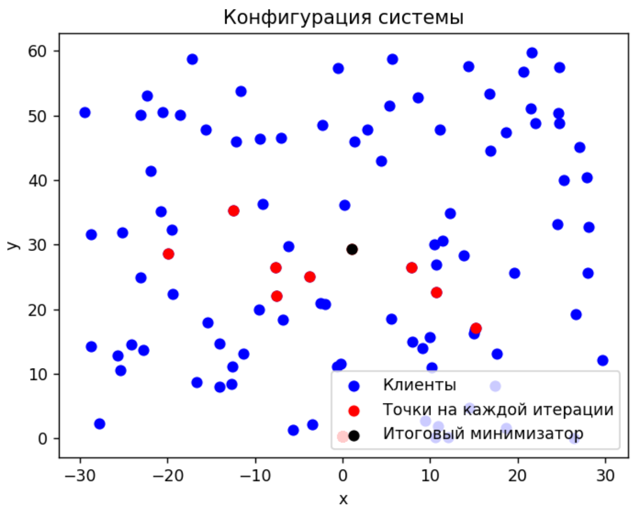

Рис. 11

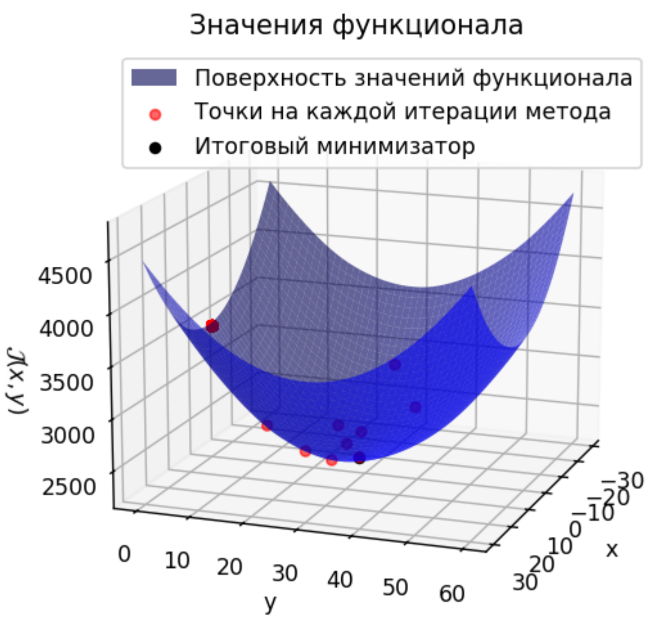

Рис. 12

На рис. 11 изображена конфигурация системы. Отдаленные красные точки – одни из клиентов. Черная точка – итоговый ответ. В этом примере показано, что минимальное значение функционала может достигаться в одной из точек-клиентов.

4 Второй случай

4.1 Постановка задачи

Постановка задачи отличается от первого случая лишь другой формулой расстояния. Расстояние между двумя точками на эллипсоиде можно посчитать по формуле Винсента[2]. В программе же использована библиотека **geopy**, в которой есть встроенная функция подсчета расстояния по эллипсоиду Земли.

4.2 Решение

К данной задаче применим ранее упомянутый метод. Расстояние здесь считается по эллипсоиду.

4.3 Пример

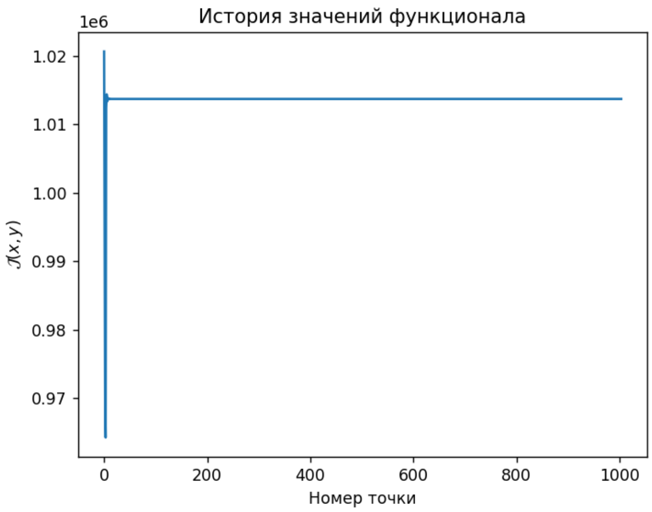

Рис. 13

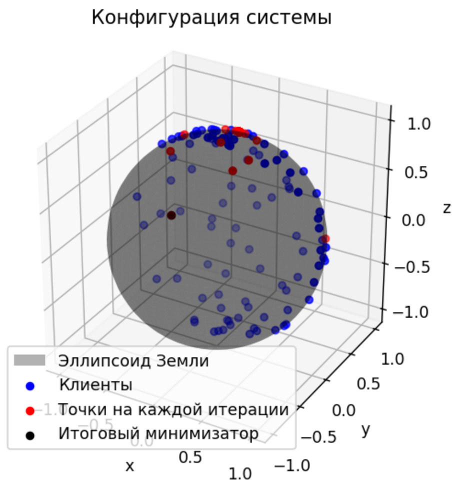

Рис. 14

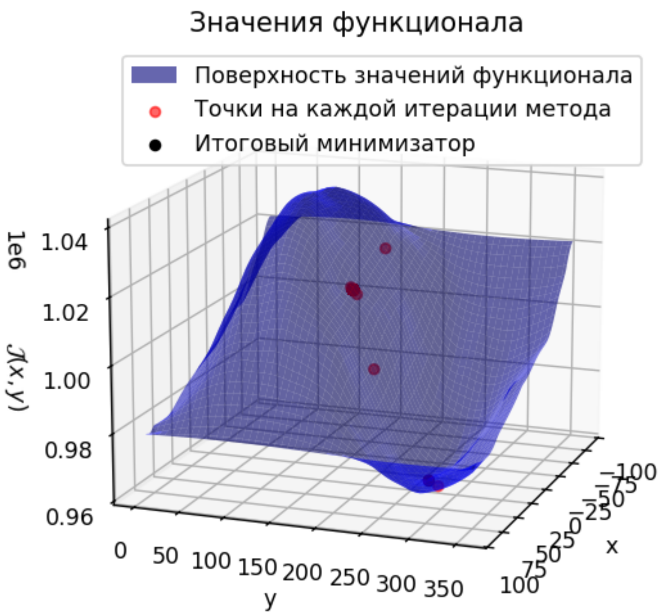

Рис. 15

На рис. 14 изображена конфигурация системы на эллипсоиде. Также стоит отметить вид функционала на рис. 15. Он не похож на выпуклый. Это произошло из-за того, что долгота была взята в промежутке [0, 360). Можно сдвинуть картинку на промежуток [-180, 180) и тогда функционал станет выпуклым.

Список литературы

[1] E. Weiszfeld *Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnes est minimum.* Tohoku Mathematical Journal, 1937.

[2] Thaddeus Vincenty *Direct and Inverse Solutions of Geodesics on the Ellipsoid with application of nested equations.* Survey Review. 1975.