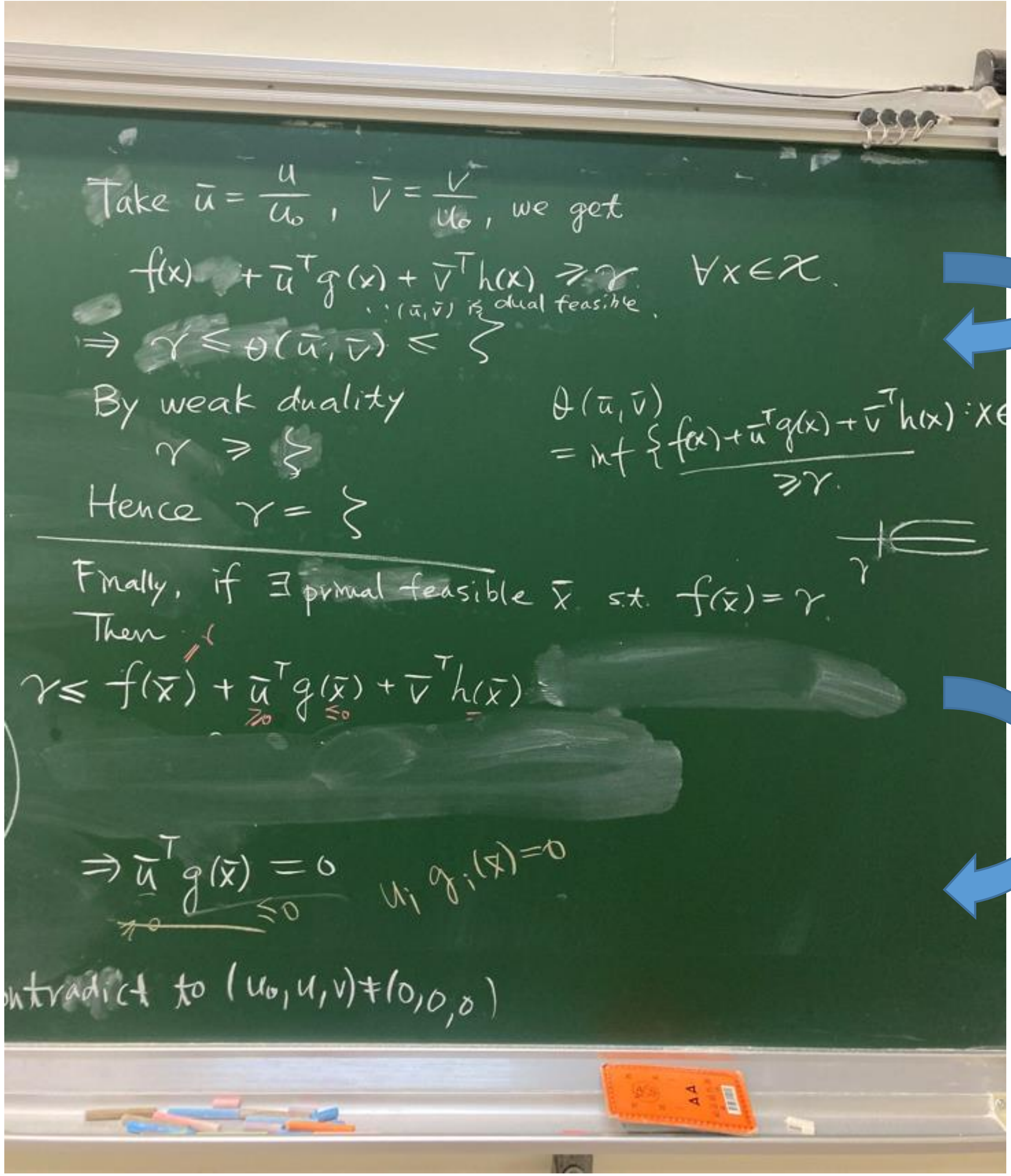

由前式我們知道γ為

$$\{f(x) + \bar{\mathbf{u}}^{T}\mathbf{g}(x) + \bar{\mathbf{v}}^{T}\mathbf{h}(x) : x \in \mathcal{X}\}$$

的下界，從而

$$\gamma \le \inf\{f(x) + \bar{\mathbf{u}}^{T}\mathbf{g}(x) + \bar{\mathbf{v}}^{T}\mathbf{h}(x) : x \in \mathcal{X}\} = \theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\boldsymbol{v}})$$

(注:Infimum為最大下界，故大於等於任何一個下界)

另一方面，前面已證過$\bar{\mathbf{u}} \ge \mathbf{0}$，因此

$$\theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \in \{\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \ge \mathbf{0}\}$$

從而

$$\theta(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \le \sup\{\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : \mathbf{u} \ge \mathbf{0}\} = \zeta$$

(注:Supremum為最小上界，故大於等於集合中的任何一個元素)

$$\gamma \le \underset{=\gamma}{f(\bar{x})} + \underset{\ge \mathbf{0}}{\bar{\mathbf{u}}^{T}}\underset{\le \mathbf{0}}{\mathbf{g}(\bar{x})} + \bar{\mathbf{v}}^{T}\underset{=\mathbf{0}}{\mathbf{h}(\bar{x})} \le \gamma$$

因為$\bar{x}$為primal optimal，故$f(\bar{x}) = \gamma$

因為$\bar{x}$為primal feasible，故$\mathbf{g}(\bar{x}) \le \mathbf{0}$且$\mathbf{h}(x) = \mathbf{0}$

因此上式均為等號，故

$$\bar{\mathbf{u}}^{T}\mathbf{g}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0$$

由於其中每一項$\bar{u}_i g_i(\bar{x})$均不大於零，但總和為零，因此每一項必為零，亦即

$$\bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0, i = 1, \dots, m$$

故證得complementary slackness性質。