Cheatsheet LIAL

Definitionen / Ausdrücke

Einheitsmatrix(I): Nullmatrix mit Diagonale aus Einsen
-> Reihenfolge bei Multiplikation spielt keine Rolle

Transponierte Matrix(X^T): Austausch Zeilen/Spalten
->(A*B)^T = A^T * B^T

Inverse Matrix(X^-1): Multiplikation mit X ergibt I
-> A * A^-1 = A^-1 * A = I

Inverse einer 2×2-Matrix   Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, $\det A \neq 0$

Reguläre Matrix: quadratische Matrix, für die eine Inverse existiert
-> A^-1 existiert
-> Det(A) != 0
-> Eigenvals(A) != 0
-> Zeilen/-spaltenvektoren linear unabhängig

Singuläre Matrix: Matrix, für die es keine Inverse gibt
-> Det(A) == 0

Orthogonale Matrizen: Zeilen- und Spalten sind orthonormale Vektoren. Werden gerne für Permutationen, Drehungen und Spiegelungen verwendet.
-> A^T * A = I
-> A^T = A^-1
-> det(A) ist 1(drehung) oder -1(drehspiegelung)

Cramersche-Regel

Drei Gleichungen in drei Unbekannten

$$\left| \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{array} \right|$$

Zugeordnete Determinanten:

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$D_x = \det \begin{pmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad D_y = \det \begin{pmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad D_z = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

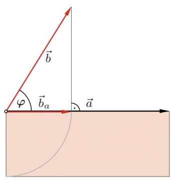
$D \neq 0$	eindeutig lösbar: $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$, $z = \frac{D_z}{D}$
$D = 0$ und mindestens eine der Determinanten $D_x, D_y, D_z \neq 0$	keine Lösungen
$D = 0$ und $D_x = D_y = D_z = 0$	unendlich viele oder keine Lösungen

Die obgenannten Formeln, die unter dem Namen CRAMER'sche Regel bekannt sind, lassen sich analog auch auf n Gleichungen mit n Unbekannten anwenden.

SW01: Grundlagen

Skalarprodukt

Skalarprodukt



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff \varphi = 90°,\ \text{falls } |\vec{a}| \neq 0,\ |\vec{b}| \neq 0$$

Vorzeichen des Skalarprodukts:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}_a|, & \text{wenn } \varphi \text{ spitz} \\ -|\vec{a}||\vec{b}_a|, & \text{wenn } \varphi \text{ stumpf} \\ 0, & \text{wenn } \varphi = 90° \end{cases}$$

Betrag (Länge) eines Vektors

Betrag

Länge von $\vec{a}$ $\quad |\vec{a}| = a = \left|\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$$|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|,\quad k \in \mathbb{R}$$

Dreiecksungleichung $\quad |\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$

SW02: Lin. Gleichungssysteme lösen

Einige wichtige Eigenschaften vom Rang

Seien $n, m \in \mathbb{N}$.

- Die einzige Matrix mit Rang 0 ist die Nullmatrix $0_{m \times n}$.
- Für den Rang einer $(m \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$ gilt: $r(A) \ll \min(m, n)$.
- Die $(n \times n)$-Einheitsmatrix E_n hat den Rang n.
- Die Transponierte $\mathbf{A}^T$ einer Matrix $\mathbf{A}$ hat den selben Rang wie $\mathbf{A}:\ r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A})$.
- *Subadditivität*: Für zwei $(m \times n)$-Matrizn $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt: $r(A + B) \ll r(A) + r(B)$.

Ein Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ hat:

3. genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b) = n$ gilt. Die Lösung ist dann gegeben durch $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
4. unendlich viele Lösungen, wenn $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b) < n$.
5. keine Lösung, wenn $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}|b)$.

SW03: Gausselim. / LU-Zerlegung

LU-Zerlegung

Das ursprüngliche LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ wird mittels der LR-Zerlegung nun wie folgt vereinfacht:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{LU}, \text{dann} \\ \mathbf{LUx} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Nun definieren wir folgendes:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ly} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Ux} &= \mathbf{y} \end{aligned}$$

SW04: Gauss-Jordan, Inverse, Determinante

Gauss-Jordan ist Erweiterung des Gauss-Eliminationsverfahren
-> Wird auch dazu verwendet, die Inverse einer quadratischen Matrix zu berechnen
-> Python

Gauss-Jordan Inverse

Man nutzt, dass $A^{-1}A = I$

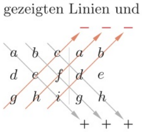
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Determinante

Determinanten

Determinante einer 2×2-Matrix	Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
Determinante einer 3×3-Matrix	Für $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ gilt: $\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$ $= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$
Regel von SARRUS für 3×3-Matrizen	Man verlängert die 3×3-Matrix um die erste und die zweite Spalte und rechnet mit den Dreifachprodukten entlang der gezeigten Linien und mit entsprechendem Vorzeichen.



So entsteht die Determinante:
$aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

- Falls Dreiecksmatrix A
  ↳ $\det(A)$ = Produkt der Diagonalelemente
- Vertauschen zweier Zeilen / Spalten
  ↳ Vorzeichenwechsel det
- Multiplizieren von Zeile/Spalte mit λ_1
  ↳ $\lambda_1 \cdot \det(A)$

Sätze

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$
- A ist regulär $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$
- A ist regulär $\Rightarrow$ $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Für A = 6x6 Matrix mit det = −1

a) $\det(\frac{1}{2}A) = (\frac{1}{2})^6 \cdot \det(A) = \frac{-1}{2^6}$ | Ausklammern
| Wieder ausklammern
b) $\det(-A) = -1^6 \cdot \det(A) = -1^6 \cdot -1 = 1 \cdot -1 = -1$
c) $\underbrace{\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}}_{\text{Rechenregel}} = -1^{-1} = \frac{1}{-1} = -1$

Sei $\mathbf{A}$ eine quadratische $n \times n$-Matrix.

- $\mathbf{A}$ ist regulär.
- $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ist regulär.
- Die Determinante von $\mathbf{A}$ ist *nicht null*.
- Der Rang von $\mathbf{A}$ ist gleich n.
- Der *Nullvektor* ist die einzige Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.
- Der algorithmische Test für die Invertierbarkeit ist das Eliminationsverfahren: $\mathbf{A}$ muss n (von Null verschiedene) Pivotelemente haben.
- Der algebraische Test für die Invertierbarkeit ist die Determinante von $\mathbf{A}$: $\det(\mathbf{A})$ darf nicht Null sein.
- Die Gleichung, die die Invertierbarkeit tests, ist $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ **muss die einzige Lösung sein.**

SW06: Lineare Abbildung

Definition (Lineare Abbildung)

Eine lineare Abbildung ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die Vektoren auf Vektoren abbildet und für die gilt:

$$(i) : f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) \qquad (ii) : f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) \text{ für alle } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}$$

Beispiel

- Die Abbildung f ist linear.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z)^T &\mapsto (x + y, y + z)^T. \end{aligned}$$

- Die Abbildung g ist nicht linear.

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 1. \end{aligned}$$

SW07: Translation / orthogonale Abbildungen/ Homogene Koordinaten

Homogene Koordinaten

Translation $\begin{bmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ u: Verschiebung x
v: Verschiebung y

Spiegelung $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (y-Achse)

Rotation $\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$T = \tau \circ R \circ \tau^{-1}$