Компьютерные сети, ДЗ #13

Азат Валеев

21 мая 2022 г.

№1

a. Пусть $f(p) = N \cdot p \cdot (1-p)^{N-1}$ при фиксированном N. Возьмём производную f по p и приравняем к 0 для поиска экстремумов:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = N \cdot (1-p)^{N-1} - N \cdot p \cdot (N-1) \cdot (1-p)^{N-2} = 0 \Longrightarrow N \cdot (1-p)^{N-2} \cdot (1 - p - p \cdot (N-1)) = 0 \Longrightarrow p_{\text{extremum}} = \frac{1}{N}.$$

Тривиальная проверка показывает, что это точка максимума функции f, таким образом, $p^* = \frac{1}{N}$.
b. Имеем теперь $f(p^*) = N \cdot \frac{1}{N} \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-1} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-1}$ и хотим найти предел при $N \to \infty$. Пользуясь вторым замечательным пределом, получаем конечный ответ:

$$\lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-1} = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{-N}\right)\right)^{-(1-N)} \underset{N\to\infty}{\sim} \lim_{N\to\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{-N}\right)\right)^{-(-N)} \underset{M=-N}{=} \lim_{M\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{M}\right)^{-1\cdot M} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$