1. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Функция *F(x)* называется *первообразной* функции *f(x)* на интервале *(a;b)*, если *F(x)* дифференцируема на *(a;b)* и $F'(x)=f(x)\ \forall\ x\in(a;b)$. Совокупность всех первообразных для функции *f(x)* на интервале *(a;b)* называют *неопределенным интегралом от функции f на* этом *интервале,* обозначают символом $\int f(x)dx$ и пишут

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Здесь *F(x)* – какая-нибудь первообразная функции *f* на интервале *(a;b)*, C– произвольная постоянная. Знак $\int$ называют *знаком интеграла, f – подынттегральной функцией, f(x)dx– подынтегральным выражением.* Операция нахождения всех первообразных функции *f(x)* называется *интегрированием* этой *функции.*

Перечислим свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),\ d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C,\ \int df(x) = f(x) + C;$
3. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx\ (A = const;\ A \neq 0);$
4. $\int \left(f(x) \pm \varphi(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$

Приведем *таблицу основных неопределенных интегралов:*

1. $\int 0dx = C;$	2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1);$
3. $\int dx = x + C;$	4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C;$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$	6. $\int e^x dx = e^x + C;$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$	8. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$	10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$
11. $\int shxdx = chx + C;$	12. $\int chxdx = shx + C;$
13. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C;$	14. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C;$

$$15.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C;$$

$$16.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C;$$

$$17.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C;$$

$$18.\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C;$$

$$19.\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C.$$

Многие интегралы можно найти, пользуясь только таблицей основных интегралов и свойствами 3, 4 неопределенного интеграла. *Непосредственным интегрированием* будем называть интегрирование с помощью этих двух свойств, тождественных преобразований подынтегральной функции и таблицы основных интегралов.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти $\int f(x)dx$, если:
а) $f(x)=e^x+x^2$; б) $f(x)= -2\sin x+3/(1+x^2)$.

Решение. а) Используя таблицу основных интегралов и свойства 3,4 неопределенного интеграла, получаем

$$\int \left(e^x + x^2\right)dx = e^x + \frac{x^3}{3} + C.$$

б) Так как $(-\cos x)'=\sin x$, $(arctgx)'=1/(1+x^2)$, то

$$\int \left(-2\sin x + \frac{3}{1 + x^2}\right)dx = 2\cos x + 3arctgx + C.$$

Пример 2. Найти интегралы:

$$a)\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}; \qquad b)\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx;$$

$$c)\int \frac{1+\cos^2 t}{1+\cos 2t}dt; \qquad d)\int \frac{dy}{\sqrt{2-3y^2}}.$$

Решение. а) Представив подынтегральную функцию в виде $1/x\sqrt{x}=x^{-3/2}$ и применив формулу 2 таблицы основных интегралов, получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int x^{-3/2}dx = \frac{x^{-3/2+1}}{-3/2+1} + C = C - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

b) Если числитель записать в виде $(1+x^2)+x^2$ и почленно разделить на знаменатель, получим сумму двух табличных интегралов 2 и 14:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}dx + \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = C - \frac{1}{x} + arctgx.$$

c) В соответствии с формулой $\cos^2 t=(1+\cos 2t)/2$ преобразуем знаменатель: $1+\cos 2t=2\cos^2 t$, а затем, разделив почленно числитель на знаменатель, сведем данный интеграл к сумме двух табличных интегралов 3 и 9:

$$\int \frac{1+\cos^2 t}{1+\cos 2t}dt = \int \frac{1+\cos^2 t}{2\cos^2 t}dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{\cos^2 t} + \int dt\right) = \frac{1}{2}(tgt+t)+C.$$

d) Чтобы воспользоваться табличным интегралом 11, вынесем множитель за знак радикала:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2-3y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{3}\sqrt{2/3-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dy}{\sqrt{(\sqrt{2/3})^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{y}{\sqrt{2/3}} + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int cos2xdx$.

Решение.

$$\int \cos 2x dx = \left| d(2x) = 2dx \right| = \int \cos 2x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x \cdot 2dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

П р и м е ч а н и е. Прямыми линиями $|\ldots|$ будем обозначать вспомогательные преобразования.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int 4^{cos3x} sin3xdx$.

Решение.

$$\int 4^{\cos 3x} \sin 3x dx = \left| d(\cos 3x) = -3\sin 3x \right| = \int 4^{\cos 3x} \left[-\frac{1}{3}(-3)\sin 3x \right] dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \int 4^{\cos 3x} (-3\sin 3x) dx = -\frac{1}{3} \int 4^{\cos 3x} d(\cos 3x) = -\frac{1}{3} \frac{4^{\cos 3x}}{\ln 4} + C =$$

$$= -\frac{4^{\cos 3x}}{3\ln 4} + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int (2x^{-1,2}+3x^{-0,8}–5^{0,38})dx$.

Решение.

$$\int \left(2x^{-1,2} + 3x^{-0,8} + 5^{0,38}\right) dx = \int 2x^{-1,2} dx + \int 3x^{-0,8} dx - \int 5^{0,38} dx =$$

$$= 2\int x^{-1,2} dx + 3\int x^{-0,8} dx - 5^{0,38} \int dx = 2\frac{x^{-1,2+1}}{-1,2+1} + 3\frac{x^{-0,8+1}}{-0,8+1} - 5^{0,38} x + C =$$

$$= -10x^{-0,2} + 15x^{0,2} - 5^{0,38}x + C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int x^2(x^3+2)^{1/5}dx.$

Решение.

$$\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}\,dx = \left| d(x^3+2) = 3x^2dx \right| = \int (x^3+2)^{1/5}x^2dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int\left(x^3+2\right)^{1/5}3x^2dx = \frac{1}{3}\int\left(x^3+2\right)^{1/5}d\left(x^3+2\right) = \frac{1}{3}\frac{\left(x^3+2\right)^{1/5+1}}{1/5+1} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{5}{6}\left(x^3+2\right)^{6/5} + C = \frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6} + C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int dx/(1+9x^2).$

Решение.

$$\int\frac{dx}{1+9x^2} = \int\frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\int\frac{3dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\int\frac{d(3x)}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}arctg(3x) + C.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int dx/(x^2+3x\text{-}10).$

Решение.

$$\int\frac{dx}{x^2+3x-10} = \int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-10} = \int\frac{dx}{(x^2+3x+\frac{9}{4})-\frac{49}{4}} =$$

$$= \int\frac{dx}{(x+3/2)^2-(7/2)^2} = \left| d(x+3/2) = dx \right| = \int\frac{d(x+3/2)}{(x+3/2)^2-(7/2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot(7/2)}\ln\left|\frac{x+3/2-7/2}{x+3/2+7/2}\right| + C = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right| + C.$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int(\sin 2x/\cos^5 2x)dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos^5 2x}\,dx = \left| d(\cos 2x) = -2\sin 2x dx \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2)\sin 2x dx}{\cos^5 2x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos^{-5} 2x d(\cos 2x) = -\frac{1}{2}\,\frac{\cos^{-4} 2x}{-4} + C = \frac{1}{8\cos^4 2x} + C.$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int((1-x)/(1+x))^{1/2}dx$.

Решение.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1-x)}}\,dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{(-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = \arcsin x +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

по теме: **«Непосредственное интегрирование»**

Группа А

Вычислите интегралы

1*A*. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ $\quad \left(I = \arcsin(2x-1) + C\right).$

$$2A.\ \int\left(\frac{6}{2x^2+9}+\frac{12}{2x^2-9}\right)dx \qquad \left(I=\sqrt{2}arctg\frac{x\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}-3}{x\sqrt{2}+3}\right|+C\right).$$

$$3A.\ \int\frac{\left(2-\sqrt[3]{u}\right)^2}{u^3}du \qquad \left(I=C-\frac{2}{u^2}+\frac{12}{5u\sqrt[3]{u^2}}-\frac{3}{4u\sqrt[3]{u}}\right).$$

$$4A.\ \int\frac{5^{2x}-3^x}{5^x}dx \qquad \left(I=\frac{5^x}{\ln 5}-\frac{(3/5)^x}{\ln(3/5)}+C\right).$$

$$5A.\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}} \qquad \left(I=\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+5}\right|+C\right).$$

$$6A.\ \int\frac{k+\sin^3 t}{m-m\cos 2t}dt \qquad \left(I=C-\frac{k}{2m}ctg\,t-\frac{1}{2m}\cos t\right).$$

$$7A.\ \int\frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \left(I=-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C\right).$$

$$8A.\ \int\frac{3x-1}{x^2+9}dx \qquad \left(I=\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C\right).$$

$$9A.\ \int\frac{xdx}{x+4} \qquad \left(I=x-4\ln|x+4|+C\right).$$

$$10A.\ \int\frac{\cos 2xdx}{1+\sin x\cdot\cos x} \qquad \left(I=\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{2}\sin 2x)+C\right).$$

П р и м е ч а н и е. В скобках (…) приведены ответы (I- значение интеграла).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ
по теме: **«Непосредственное интегрирование»**

Группа В

1В. $\int ctg^2 x dx \qquad \left(I = C - ctgx - x\right).$

2В. $\int \dfrac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx \qquad \left(I = C - \dfrac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|\right).$

3В. $\int \dfrac{(1-x)^3 dx}{x\sqrt{x}} \qquad \left(I = \dfrac{2x^2 - 12x - 6}{3\sqrt{x}} + C\right).$

4В. $\int \dfrac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} \qquad \left(I = tgx + C\right).$

5В. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx \qquad \left(I = C - \dfrac{5}{33}(8-3x)^{11/5}\right).$

6В. $\int \dfrac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}} \qquad \left(I = \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + C\right).$

7В. $\int \dfrac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}} \qquad \left(I = C - \dfrac{1}{2(\arcsin x)^2}\right).$

8В. $\int \dfrac{dx}{2x^2 + 9} \qquad \left(I = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} arctg \dfrac{\sqrt{2}}{3} x + C\right).$

9В. $\int \dfrac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}} \qquad \left(I = \dfrac{\arcsin 2^x}{\ln 2} + C\right).$

10*B*. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}dx$ $\left(I = \frac{1}{2} arctgx^2 - \frac{1}{4}\ln\left|x^4+1\right| + C \right)$.

11*B*. $\int \frac{x+2}{2x-1}dx$ $\left(I = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\ln\left|2x-1\right| + C \right)$.

12*B*. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$ $\left(I = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C \right)$.

13*B*. $\int \cos^2 x dx$ $\left(I = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \right)$.

14*B*. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$ $\left(I = C - ctg\frac{x}{2} \right)$.

П р и м е ч а н и е: примеры *группы А* предназначены для решения в аудитории, а примеры *группы В*– для самостоятельного внеаудиторного задания.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПУТЕМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

В некоторых случаях бывает целесообразно при вычислении интеграла

$$J=\int f(x)dx \tag{2.1}$$

перейти к новой переменной.

Пусть $x=\varphi(t)$– строго монотонная и дифференцируемая на некотором промежутке функция. Тогда она имеет обратную функцию

$$t=\omega(x). \tag{2.2}$$

Преобразуя подынтегральное выражение в интеграле (2.1) с помощью подстановки $x=\varphi(t)$, получаем $f(x)dx=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Обозначим $u(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$, тогда

$$f(x)dx=u(t)dt. \tag{2.3}$$

Пусть $U(t)$– первообразная для функции $u(t)$, тогда

$$\int u(t)dt=U(t)+C. \tag{2.4}$$

Из равенств (2.1)-(2.4) находим

$$J=\int f(x)dx=\int u(t)dt=U(t)+C=U(\omega(x))+C. \qquad (2.5)$$

Формулу (2.5) называют *формулой интегрирования подстановкой.* Согласно этой формуле для вычисления интеграла (2.1) достаточно подобрать такую обратимую дифференцируемую функцию $x=\varphi(t)$, с помощью которой подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется в виде $u(t)dt$, причем первообразная для функции $u(t)$ известна.

Частным случаем интеграла вида (2.5) является интеграл

$$\int f(kx+m)dx \quad (k\neq 0).$$

Если $F(t)$– первообразная функции $f(t)$ на некотором интервале (α,β), то, используя подстановку $t=kx+m$, получаем

$$\int f(kx+m)dx=F(kx+m)/k+C. \qquad (2.6)$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Найти следующие интегралы:

$a)\int \frac{xdx}{(x+4)^4}$; $\qquad$ $b)\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$;

$c)\int \sqrt[3]{(4-3x)^2}\,dx$; $\qquad$ $d)\int x^2\cos(x^3+6)dx$;

$e)\int \frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+6}}$; $\qquad$ $f)\int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$;

$g)\int \frac{e^{-t}dt}{e-e^{-2t}}$; $\qquad$ $h)\int \frac{y+\arccos 3y}{\sqrt{1-9y^2}}dy$.

Решение. а) Подстановкой $t=x+4$ знаменатель упрощается, и интеграл приводится к табличным интегралам:

$$\int \frac{xdx}{(x+4)^4}=\left|\begin{matrix}x=t-4,\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{t-4}{t^4}dt=\int\left(\frac{1}{t^3}-\frac{4}{t^4}\right)dt=\int t^{-3}dt-4\int t^{-4}dt=$$

$$=\frac{t^{-2}}{-2}-4\frac{t^{-3}}{-3}+C=\left|t=x+4\right|=\frac{4}{3(x+4)^3}-\frac{1}{2(x+4)^2}+C.$$

b) Желание избавиться от иррациональности приводит к подстановке $t=(e^x+1)^{1/4}$. Отсюда $e^x+1=t^4$, $e^x=t^4-1$, $e^x dx=4t^3dt$, $e^{2x}dx=e^xe^xdx=(t^4-1)4t^3dt$. Следовательно,

$$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}} = 4\int \frac{t^3(t^4-1)}{t}dt = 4\int\left(t^6-t^2\right)dt = 4\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^3}{3}\right)+C =$$

$$= 4\left(\frac{1}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7}-\frac{1}{3}\sqrt[4]{(e^x+1)^3}\right)+C.$$

c) Так как под знаком интеграла находится сложная функция, аргументом которой является линейная функция вида $kx+m$, воспользуемся формулой (6) и соответствующей формулой таблицы основных интегралов:

$$\int\sqrt[3]{(4-3x)^2}dx = \int(4-3x)^{2/3}dx = -\frac{1}{3}\frac{(4-3x)^{5/3}}{5/3}+C = C-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(4-3x)^5}.$$

d) Применим подстановку $t=x^3+6$, откуда $dt=3x^2dx$ и $x^2dx=dt/3$. Следовательно,

$$\int x^2\cos(x^3+6)dx = \frac{1}{3}\int\cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(x^3+6)+C.$$

e) Получаем

$$\int\frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+6}} = \frac{1}{3}\int\frac{d(y^3)}{\sqrt{(y^3)^2+(\sqrt{6})^2}} = \frac{1}{3}\ln(y^3+\sqrt{y^6+6})+C.$$

$$f)\int\frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx = \int(tgx)^{1/2}d(tgx) = \frac{(tgx)^{3/2}}{3/2}+C = \frac{2}{3}\sqrt{tg^3x}+C.$$

$$g)\int\frac{e^{-t}dt}{e-e^{-2t}} = -\int\frac{de^{-t}}{e-(e^{-t})^2} = C-\frac{1}{2\sqrt{e}}\ln\left|\frac{\sqrt{e}+e^{-t}}{\sqrt{e}-e^{-t}}\right|.$$

h) На основании свойства 4 (см. п.1) имеем

$$\int \frac{y+\arccos 3y}{\sqrt{1-9y^2}}dy = \int \frac{ydy}{\sqrt{1-9y^2}} + \int \frac{\arccos 3y}{\sqrt{1-9y^2}}dy = -\frac{1}{18}\int (1-9y^2)^{-1/2}d(1-9y^2) -$$

$$-\frac{1}{3}\int \arccos 3y\, d(\arccos 3y) = C - \frac{1}{18}\frac{(1-9y^2)^{1/2}}{1/2} - \frac{1}{3}\frac{(\arccos 3y)^2}{2} =$$

$$= C - \frac{1}{9}\sqrt{1-9y^2} - \frac{1}{6}(\arccos 3y)^2.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int dx/(1+(x+1)^{1/2})$.
Решение.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \left| \begin{matrix} x+1=t^2 \Rightarrow t=\sqrt{x+1} \\ x=t^2-1 \Rightarrow dx=2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{(t+1)-1}{1+t} =$$

$$= 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} = 2t - 2\int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} -$$

$$-2\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right) + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int x^3dx/(x-1)^{1/2}$.
Решение.

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x-1}=t \Rightarrow x-1=t^2 \\ x=t^2+1 \Rightarrow dx=2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{\left(t^2+1\right)^3 2tdt}{t} = 2\int \left(t^2+1\right)^3 dt =$$

$$= 2\int \left(t^6+3t^4+3t^2+1\right)dt = 2\int t^6dt + 6\int t^4dt + 6\int t^2dt + 2\int dt = \frac{2}{7}t^7 +$$

$$+\frac{6}{5}t^5+\frac{6}{3}t^3+2t+C=\left|t=\sqrt{x-1}\right|=\frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7}+\frac{6}{5}\sqrt{(x-1)^5}+$$

$$+2\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int dx/((x+7)ln^3(x+7))$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{(x+7)\ln^3(x+7)}=\left|\begin{aligned}&u=\ln(x+7)\\&du=dx/(x+7)\end{aligned}\right|=\int\frac{du}{u^3}=\int u^{-3}du=-\frac{u^{-2}}{2}+C=$$

$$=-\frac{1}{2u^2}+C=-\frac{1}{2\ln^2(x+7)}+C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int x^{1/2}dx/(x(x+1))$.

Решение.

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{x(x+1)}=\left|\begin{aligned}&\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\\&dx=2tdt\end{aligned}\right|=\int\frac{t\cdot 2tdt}{t^2(t^2+1)}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=$$

$$=2arctg\sqrt{x}+C.$$

3. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на некотором интервале Δ. Тогда функция uv также имеет непрерывную производную на Δ и, согласно правилу дифференцирования произведения, выполняется равенство

$$uv'=(uv)'-vu'.$$

Интегрируя это равенство и учитывая, что

$$\int(uv)'dx=uv+C,$$

получаем

$$\int uv'dx=uv+C-\int vu'dx.$$

Относя произвольную постоянную C к интегралу $\int vu'dx$, находим

$$\int uv'dx=uv-\int vu'dx \qquad (3.1)$$

или

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (3.2)$$

Формула (3.1) (или (3.2)) называется *формулой интегрирования по частям*. Она сводит вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$.

К интегралам, которые находят по формуле (2), относятся, например, интегралы вида

$$\int P(x)f(x)dx, \qquad (3.3)$$

где $P(x)$– многочлен; $f(x)$– одна из следующих функций: $e^{\lambda x}$, $a^{\lambda x}$ $(a>0)$, $sin\lambda x$, $cos\lambda x$, $sh\lambda x$, $ch\lambda x$. Чтобы свести в этом случае интеграл к табличному, надо последовательно применять формулу (3.2) столько раз, какова степень многочлена $P(x)$, причем положив в первый раз $u=P(x)$, $dv=f(x)dx$. Если $f(x)$– одна из функций $ln\lambda x$, $arcsin\lambda x$, $arccos\lambda x$, $arctg\lambda x$, $arcctg\lambda x$, то за u принимают эти функции, а за dv– выражение $P(x)dx$.

Интегралы вида

$$\int e^{\lambda x}sin\beta xdx;\ \int sh\lambda xsin\beta xdx;\ \int ch\lambda xsin\beta xdx;$$

$$\int e^{\lambda x}cos\beta xdx;\ \int sh\lambda xcos\beta xdx;\ \int ch\lambda xcos\beta xdx \qquad (3.4)$$

находят двукратным интегрированием по частям, причем первоначальный выбор u и v произволен.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Вычислить интеграл $\int xcosxdx$.

Решение.

$\int xcosxdx=\int xd(sinx)=xsinx-\int sinxdx=xsinx+cosx+C.$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int xe^{-x}dx$.

Решение.

$$\int xe^{-x}dx=\left|\begin{matrix} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{matrix}\right|=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=$$

$$=-xe^{-x}-e^{-x}+C=-e^{-x}(x+1)+C.$$

Пример 3. Вычислить интегралы:

$$a)\int\left(3x^2-x+4\right)e^{-x/2}dx; \qquad b)\int\log_2\left(1-3x\right)dx;$$

$$c)\int e^x\cos 2x dx; \qquad d)\int\left(\arcsin x\right)^2dx;$$

$$e)\int e^{3x}\cos e^x dx; \qquad f)\int\frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;$$

$$g)\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx \qquad h)\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx.$$

Решение. a) Положим $u=3x^2-x+4$, $dv=e^{-x/2}dx$, тогда $du=(6x-1)dx$, $v=\int e^{-x/2}dx=-2\,e^{-x/2}$. Согласно формуле (3.2)
$\int(3x^2-x+4)e^{-x/2}dx=-2(3x^2-x+4)e^{-x/2}+2\int(6x-1)e^{-x/2}dx.$

Поступая аналогично с полученным интегралом, имеем
$\int(6x-1)e^{-x/2}dx=\Big/u=6x-1,\ du=6dx,\ dv=e^{-x/2}dx,\ v=-2e^{-x/2}\Big/=-2(6x-1)e^{-x/2}+$
$+12\int e^{-x/2}dx=(2-12x)e^{-x/2}-24e^{-x/2}+C.$

Таким образом,
$\int(3x^2-x+4)e^{-x/2}dx=C-(6x^2+22x+52)e^{-x/2}.$

b) Учитывая, что $log_2(1-3x)=ln(1-3x)/ln2$, находим

$$\int\ln(1-3x)dx=\left|\begin{matrix}u=\ln(1-3x),du=(-3/(1-3x))dx,\\ dv=dx,v=x\end{matrix}\right|=x\ln(1-3x)+3\int\frac{x}{1-3x}dx=$$

$$=\left|\frac{x}{1-3x}=\frac{-(1-3x)/3+1/3}{1-3x}=\frac{1}{3}\left(-1+\frac{1}{1-3x}\right)\right|=x\ln(1-3x)-\int dx+\int\frac{dx}{1-3x}=$$

$$=x\ln(1-3x)-x-\frac{1}{3}\ln(1-3x)+C.$$

Тогда

$$\int\log_2(1-3x)dx=\frac{1}{\ln 2}\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)\ln(1-3x)-x\right)+C.$$

c) Применим формулу (3.2) дважды:

$$\int e^{x}\cos 2x dx = \begin{vmatrix} u = e^{x}, du = e^{x}dx, \\ dv = \cos 2x dx, v = \sin 2x/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(e^{x}\sin 2x - \int e^{x}\sin 2x dx\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{x}, du = e^{x}dx, \\ dv = \sin 2x dx, v = -\cos 2x/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(e^{x}\sin 2x - \frac{1}{2}\left(-e^{x}c\cos 2x + \int e^{x}c\cos 2x dx\right)\right).$$

Таким образом:

$$\int e^{x}\cos 2x dx = \frac{1}{2}e^{x}\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) - \frac{1}{4}\int e^{x}\cos 2x dx,$$

откуда

$$\int e^{x}\cos 2x dx = \frac{2}{5}e^{x}\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C.$$

d) Полагая $e^{x}=t$, имеем $e^{x}dx=dt$, $e^{3x}dx=e^{2x}e^{x}dx=t^{2}dt$ и
$\int e^{3x}\cos e^{x}dx=\int t^{2}\cos t dt=t^{2}\sin t-2\int t\sin t dt=t^{2}\sin t-2(-t\cos t+\int\cos t dt)=$
$=(t^{2}-2)\sin t+2t\cos t+C=(e^{2x}-2)\sin e^{x}+2e^{x}\cos e^{x}+C.$

e) Находим
$\int(\arcsin x)^{2}dx= /\arcsin x=t,\ x=\sin t,\ dx=\cos t dt/= \int t^{2}\cos t dt=(t^{2}-2)\sin t+2t\cos t+C=$
$=((\arcsin x)^{2}-2)\sin\arcsin x+2\arcsin x*\cos\arcsin x+C=((\arcsin x)^{2}-2)x+2*\arcsin x*$
$*(1-x^{2})^{1/2}+C.$

f) Имеем

$$\int\frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \begin{vmatrix} x = t^{2}, \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} = 2\int arctgt dt = \begin{vmatrix} u = arctgt, du = \dfrac{dt}{1+t^{2}}, \\ dv = dt, v = t \end{vmatrix} =$$

$$2\left(t\,arctgt - \int\frac{tdt}{1+t^{2}}\right) = 2t\,arctgt - \ln(1+t^{2}) + C = 2\sqrt{x}arctg\sqrt{x} - \ln(1+x) + C.$$

g) Полагаем $u=x$, $dv=\cos x dx/\sin^{3}x$, тогда $du=dx$,

$$v = \int\frac{\cos x}{\sin^{3}x}dx = \int\frac{d\sin x}{\sin^{3}x} = -\frac{1}{\sin^{2}x},$$

а поэтому

$$\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx = -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}ctgx + C.$$

h) Находим

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx = \int \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x, du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}}, v = 2\sqrt{x+1} \end{matrix} \right| = 2\sqrt{x+1}\arcsin x -$$

$$-2\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\sqrt{x+1}\arcsin x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

Решение.

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int e^t 2tdt = 2\int te^t dt = \left| \begin{matrix} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{matrix} \right| =$$

$$= 2te^t - 2\int e^t dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \sin(\ln x)dx$.

Решение.

$$\int \sin(\ln x) = \left| \begin{matrix} u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \cos(\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \right| = x\sin(\ln x) - \int x\frac{1}{x}\cos(\ln x)dx =$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = \left| \begin{matrix} u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\sin(\ln x)\dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \right| =$$

$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx.$

Итак,

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx,$$

откуда

$$2\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \cos(\ln x) + 2C,$$

и

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{1}{2}x\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

по теме: **«Интегрирование путем замены переменной и по частям»**

Группа А

1A. $\int \frac{x^7 dx}{(1+x^4)^2}$ $\left(I = \frac{1}{4}\left(\ln\left(1+x^4\right) + \frac{1}{1+x^4} \right) + C \right)$.

2A. $\int \frac{du}{(4-3u)^3}$ $\left(I = \frac{1}{6(4-3u)^2} + C \right)$.

3A. $\int \frac{dy}{4-3y}$ $\left(I = C - \frac{1}{3}\ln\left|4-3y\right| \right)$.

4A. $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$ $\left(I = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right| + C \right)$.

5A. $\int \frac{\sin(1/4\tau)}{\tau^2}d\tau$ $\left(I = 4\cos\frac{1}{4\tau} + C\right)$

6A. $\int (1+\cos\frac{\varphi}{2})^3 \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$ $\left(I = C - \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\varphi}{2}\right)^4\right)$.

7A. $\int te^{2-3t^2}dt$ $\left(I = C - \frac{1}{6}e^{2-3t^2}\right)$.

8A. $\int \left(x^3 - 27\right)\ln 2x dx$ $\left(I = \left(\frac{x^4}{4} - 27x\right)\ln 2x - \frac{x^4}{16} + 27x + C\right)$.

9A. $\int x^2 \arccos x dx$ $\left(I = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{9}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2} + C\right)$.

10A. $\int e^{\sqrt[4]{x+2}}dx$ $\left(I = 4e^{\sqrt[4]{x+2}}\left(\sqrt[4]{(x+2)^3} - 3\sqrt{x+2} + 6\sqrt[4]{x+2} - 6\right) + C\right)$.

11A. $\int x\,arctg\frac{x}{a}dx$ $\left(I = \frac{1}{2}\left(x^2+a^2\right)arctg\frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + C\right)$.

12A. $\int t^3 \sin t^2 dt$ $\left(I = \frac{1}{2}\left(\sin t^2 - t^2\cos t^2\right) + C\right)$.

13A. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx$ $\left(I = \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C\right)$.

14A. $\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$ $\left(I = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}arctgx + C\right)$.

15A. $\int \ln(x^2+1)dx$ $\left(I = x\ln(x^2+1) - 2x + 2arctgx + C\right)$.

П р и м е ч а н и е: в скобках (…) приведены ответы (I- значение интеграла).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ
по теме: **«Интегрирование путем замены переменной и по частям»**

Группа В

1*В*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ $\left(I = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C \right)$.

2*В*. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$ $\left(I = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}arctg\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C \right)$.

3*В*. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ $\left(I = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(1+\sqrt[4]{x}) + C \right)$.

4*В*. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$ $\left(I = 2\sqrt{1+\ln x} - \ln\left|\ln x\right| + 2\ln\left|\sqrt{1+\ln x}-1\right| + C \right)$.

5*В*. $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}$ $\left(I = \frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right| + C \right)$.

6*В*. $\int x3^x dx$ $\left(I = \frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3 - 1) + C \right)$.

7*В*. $\int xtg^2 xdx$ $\left(I = xtgx - \frac{x^2}{2} + \ln\left|\cos x\right| + C \right)$.

8B. $\int te^{2-3t^2}dt$ $\left(I = C - \frac{1}{6}e^{2-3t^2}\right).$

9B. $\int \frac{5x-3}{4x^2+3}dx$ $\left(I = \frac{5}{8}\ln\left(4x^2+3\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} arctg\frac{2x}{\sqrt{3}} + C\right).$

10B. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}dx$ $\left(I = \frac{1}{9}\left(2\sqrt{9x^2-4} - 3\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-4}\right|\right) + C\right).$

11B. $\int e^{-3t+1}dt$ $\left(I = C - \frac{1}{3}e^{3t+1}\right).$

12B. $\int \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} + \psi\right)dt$ $\left(I = \frac{T}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi t}{T} + \psi\right) + C\right).$

13B. $\int \frac{(x^2+1)}{(x-5)^2}dx$ $\left(I = x - 5 + 10\ln|x-5| - \frac{26}{x-5} + C\right).$

14B. $\int \ln^2 x dx$ $\left(I = x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C\right).$

15B. $\int e^{3x}\left(\sin 2x - \cos 2x\right)dx$ $\left(I = \frac{e^{3x}}{13}\left(\sin 2x - 5\cos 2x\right) + C\right).$

16B. $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$ $\left(I = C - \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2}arctgx\right).$

Непосредственное интегрирование и интегрирование по частям
Тренировочный тест

№	Условие	Ответы
1	$\int (2e^{3x} - \cos 5x)dx$	А. $2e^{3x} - \sin 5x, + C$, Б. $(2/3)e^{3x} - 0{,}2\sin 5x, + C$, В. $2e^{3x} + \sin 5x + C$, Г. $6e^{3x} + 5\sin 5x, + C$, Д. $(2/3)e^{3x} + 0{,}2\sin 5x + C$
2	$\int \frac{1-x}{x} dx$	А. $\ln \|1 - x\| + C$, Б. $\ln \|x\| - 2x + C$, В. $\ln \|x\| + x + C$, Г. $\ln \|x\| - x + C$, Д. $\ln \|1 - x\| - x + C$
3	$\int (2x-8)^4 dx$	А. $0{,}1(2x - 8)^5 + C$, Б. $(2x - 8)^5 + C$, В. $0{,}25(2x - 8)^3 + C$, Г. $0{,}2(2x - 8)^5 + C$, Д. $0{,}4x^5 + 8x + C$
4	$\int e^{2x} \sin(e^{2x})dx$	А. $\cos(e^{2x}) + C$, Б. $2\cos(e^{2x}) + C$, В. $0{,}5\cos(e^{2x}) + C$, Г. $\cos(2e^{2x}) + C$, Д. $-0{,}5\cos(e^{2x}) + C$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$	А. $\arcsin(4x) + C$, Б. $\arcsin(16x) + C$, В. $0{,}25\arcsin(4x) + C$, Г. $4\arcsin(4x) + C$, Д. $(1/16)\arcsin(4x) + C$
6	$\int \frac{\mathrm{arctg}^3 x}{1+x^2} dx$	А. $\mathrm{arctg}^4\, x + C$, Б. $0{,}25\mathrm{arctg}^4\, x + C$, В. $\mathrm{arctg}\, x + C$, Г. $0{,}5\mathrm{arctg}^2\, x + C$, Д. $4\mathrm{arctg}^4\, x + C$
7	$\int \frac{\cos x dx}{2\sqrt{\sin x}}$	А. $\sqrt{\sin x} + C$, Б. $0{,}5\sqrt{\sin x} + C$, В. $\ln(\sqrt{\sin x}) + C$, Г. $\sqrt{\cos x} + C$, Д. $2\sqrt{\sin x} + C$
8	$\int xe^{x/3}dx$	А. $xe^{x/3} - e^{x/3} + C$, Б. $3xe^{x/3} - 3e^{x/3} + C$, В. $3xe^{x/3} + C$, Г. $3xe^{x/3} - 9e^{x/3} + C$, Д. $9e^{x/3} + C$
9	$\int x\cos(x/2)dx$	А. $x\sin(x/2) + 2\cos(x/2) + C$, Б. $2x\sin(x/2) + 2\cos(x/2) + C$, В. $x\sin(x/2) + \cos(x/2) + C$, Г. $2x\sin(x/2) - 2\cos(x/2) + C$, Д. $2x\sin(x/2) + 4\cos(x/2) + C$
10	$\int x\,\mathrm{arctg}\, x dx$	А. $x^2\mathrm{arctg}\, x - 0{,}5x + 0{,}5\mathrm{arctg}\, x + C$, Б. $0{,}5x^2\mathrm{arctg}\, x + 0{,}5\mathrm{arctg}\, x + C$, В. $0{,}5x^2\mathrm{arctg}\, x - 0{,}5x + C$, Г. $0{,}5x^2\mathrm{arctg}\, x - 0{,}5x + 0{,}5\mathrm{arctg}\, x + C$, Д. $\mathrm{arctg}^2 x + C$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1.*Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособ.- СПб.: Профессия, 2002.– 432 с.

2.*Тер–Крикоров А. М.* Курс математического анализа: Учеб. пособ./ А. М. Тер–Крикоров, М. И. Шабунин. – 2-е изд., перераб. – М.: изд-во МФТИ, 2000.– 716 с.

3. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по мат. анализу: Учеб. пособ. – М.: Астрель; АСТ, 2002. – 558 с.

4.Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособ. / Под ред. В. Ф. Бузова. – М.: Физ.–мат. лит., 2000.– 479 с.