**Лекция 5**

Оглавление

[**3.3. Интерпретация в логике первого порядка** 1](#_Toc180734736)

[**3.4. Равносильность, законы логики первого порядка** 3](#_Toc180734737)

[**3.5. Логическое следствие** 6](#_Toc180734738)

[**3.6. Формулы, выражения, свободные и связанные переменные** 8](#_Toc180734739)

## **3.3. Интерпретация в логике первого порядка**

*Определение.* ***Интерпретацией* на непустом множестве М называется функция, заданная на сигнатуре *F* ∪ *R* , которая:**

* **константе ставит в соответствие элемент из *M*;**
* **символу *n* - местной функции ставит в соответствие некоторую *n* - местную функцию, определенную на множестве *M*;**
* **символу *n* - местного предиката ставит в соответствие *n* -местный предикат,заданный на *M*.**
* результате любая формула *F* получает в соответствие предикат, местность которого равна числу свободных переменных формулы *F*.

*Пример*.Пусть сигнатура состоит из символов одноместного предиката *P* и двухместного предиката *D*,

*M* = {**2**, **3**, 6, 9, 12},

F = *P* ( *x* ) & ( ∀*y* )( *P* ( *y* ) → *D* ( *x* , *y* )) .

Поставим в соответствие символу *P* предикат “ *x* – простое число”, символу *D* – предикат “ *x* меньше или равно *y* ”. Тогда формула *F* получит в соответствие предикат “ *x* = 2”.

На этом же множестве можно рассмотреть и другую интерпретацию:

*P* ставится в соответствие “ *x* – нечетное число”, (3,9)

D– предикат “ *x* делит *y* ”.

В таком случае, формула *F* получает в соответствие предикат “ *x* = 3”.

Если *ϕ* – интерпретация, то предикат, соответствующий формуле *F*, будем обозначать через *ϕ*F .

Одним из основных типов задач этого раздела являются задачи, связанные с использованием выразительных возможностей языка логики предикатов.

В качестве примера рассмотрим задачу перевода на язык логики

предикатов следующего рассуждения:

* каждый первокурсник знаком с кем- либо из спортсменов .
* никакой первокурсник не знаком ни с одним любителем подледного лова.
* никто из спортсменов не является любителем подледного лова.

Выберем следующую сигнатуру:

П( *x* ): *x* – первокурсник,

*С*( *x* ):  *x* –спортсмен,

*Л*( *x* ):  *x* –любитель подледного лова,

З( x , y ): x знаком с y .

Тогда рассуждение запишется в виде следующей последовательности формул:

*H* 1= (∀*x* )[ *П*(х)→(∃*y* )( *C* ( *y* ) & *З*( *x* , *y* ))],

*H* 2= (∀*x* )(∀*y* )[ *П*( *x* )& *Л*( *y* )→*З*( *x* , *y* )],

*H* 3= (∀*x* )( *C* ( *x* )→*Л*( *x* )) .

Мы установили, что выразительных средств логики предикатов достаточно, чтобы записать рассуждение о первокурсниках.

## **3.4. Равносильность, законы логики первого порядка**

*Определение.* **Формулы *F* ( *x* 1 , … , *x* *n* ) и *G* ( *x* 1 , … , *x* *n* ) называются *равносильными*, если для любой интерпретации ϕ с областью *M* высказывания ( ϕ*F* )( *a* 1 , … , *a* *n* ) и ( ϕ*G* )( *a* 1 , … , *a n* )одновременно истинны или одновременно ложны прилюбых *a* 1 , … , *a* *n* из *M* .**

*Пример.*Пусть*P*–символ двухместного предиката.

Докажем , что формулы *F* ( *x* ) =  ( ∀*y* ) *P* ( *x* , *y* ) и *G* ( *x* ) = ( ∃*y* ) *P* ( *x* , *y* ) равносильны. Возьмем интерпретацию ϕ с областью *M*.

Пусть высказывание (ϕ*F*) (*a*) истинно для *a* ∈ *M*.

* Истинность этого высказывания означает, что не для всякого *y* ∈ *M* высказывание (ϕ*P*)( *a*, *y* ) истинно.
* Следовательно, найдется *b* ∈ *M*, для которого высказывание ( ϕ*P*) (*a*, *b*)ложно.
* Если высказывание(ϕ*P*) (*a* , *b*)ложно,то высказывание ( ϕ*P*) (*a* , *b*) истинно.
* Отсюда следует, что найдется *y* ∈ *M* такой,для которого высказывание

 (ϕ*P* )( *a* , *y* )истинно.

* Это означает истинность высказывания (ϕ*G*) (*a*).

Мы доказали, что если высказывание (ϕ*F*) (*a*) истинно, то высказывание (ϕ*G*) (*a*) тоже истинно. Обратная интерпретация доказывается аналогично.

Итак, значения истинности высказываний (ϕ*F*) (*a*) и (ϕ*G*) (*a*) при любом

*a* ∈ *M* совпадают. Следовательно, формулы *F* (*x* ) и *G* ( *x* ) равносильны.

*Определение.* **Формула *F* ( *x* 1 , … , *x* *n* ) называется *т о ж д ест в е н н о истинной*,если для любой интерпретации *ϕ* с областью *M* высказывание**  **( *ϕF* )( *a* 1 , … , *a* *n* ) при любых *a* 1 , … , *a* *n* из *M* является истинным.**

*Пример.*Рассмотрим формулу*F*(*x*) = (∀*y*)*P*(*x*,*y*)→*P*(*x*,*c* ),где *P* –символ двухместного отношения,с–константа.

Покажем, что формула *F*(*x*) тождественно истинна. Возьмем интерпретацию *ϕ* с областью *M* и элемент *а* из *M*.

Высказывание (*ϕF* ) (*a*) = ( ∀*y* )( *ϕP* )( *a* , *y* ) → ( *ϕP* )( *a* , *ϕ*( *c* )) .

Предположим, что посылка ( ∀*y* )(*ϕP* )( *a* , *y* ) истинна. Это означает, что для всякого *y* ∈ *M* высказывание ( *ϕP* )( *a* , *y* ) истинно, в том числе оно истинно и для *y* = *ϕ*( *c* ) . Следовательно, истинно заключение (*ϕP*) (*a*, *ϕ*(*c* )) и вся интерпретация ( *ϕF*)( *a* ) .

Понятия равносильности и тождественной истинности в логике первого порядка связаны точно так же, как и в логике высказываний.

*Теорема.* **Формулы *F* (*x* 1 , … , *x* *n* ) и *G* ( *x* 1 , … , *x* *n* ) равносильны тогда и только тогда, когда формула *F* ( *x* 1, … , *x n* )↔ *G* ( *x* 1, … , *x n* ) тождественно истинна.**

Как и в случае логики высказываний, приведем список основных равносильностей – законов логики предикатов. Прежде всего, получим законы логики предикатов из законов 1 – 21 логики высказываний, понимая под *F*, *G*, *H* произвольные формулы логики предикатов. Дополним полученный ранее в параграфе 1.2 Лекции1 список законами, специфичными для логики предикатов.

1. ( ∀*x* )( *F* ( *x* ) &*G* ( *x* )) равносильна ( ∀*x* ) *F* ( *x* ) & ( ∀*x* ) *G* ( *x* ),
2. ( ∃*x* )( *F* ( *x* ) ∨*G* ( *x* )) равносильна ( ∃*x* ) *F* ( *x* ) ∨ ( ∃*x* ) *G* ( *x* ),
3. ( ∀*x* )( ∀*y* ) *F* ( *x* , *y* ) равносильна ( ∀*y* )( ∀*x* ) *F* ( *x* , *y* ),
4. ( ∃*x* )( ∃*y* ) *F* ( *x* , *y* ) равносильна ( ∃*y* )( ∃*x* ) *F* ( *x* , *y* ),
5. ** ( ∀*x* ) *F* ( *x* ) равносильна ( ∃*x* ) *F* ( *x* ),**
6. ** ( ∃*x* ) *F* ( *x* ) равносильна ( ∀*x* ) *F* ( *x* ) .**

Законы 22, 23 утверждают, что *квантор общности можно переносить через конъюнкцию, а квантор существования через – дизъюнкцию*. Естественно поставить вопрос, можно ли квантор существования переносить через конъюнкцию, а квантор общности – через дизъюнкцию. Другими словами, будут ли равносильны следующие пары формул:

(∀*x*) ( *F* ( *x* ) ∨ *G* ( *x* )) и ( ∀*x* ) *F* ( *x* ) ∨ ( ∀*x* ) *G* ( *x* ),

(∃x) ( *F* ( *x* ) & *G* ( *x* )) и ( ∃*x* ) *F* ( *x* ) & ( ∃*x* ) *G* ( *x* )

Оказывается, нет. Докажем это для случая, когда F (x) и G (x) – атомарные формулы.

Пусть основное множество есть множество натуральных чисел N,

*F* (*x*) – **предикат “ *x* – четное число”,**

*G* (*x*) – **предикат “ *x* – нечетное число”.**

Обозначим эту интерпретацию буквой *ϕ*. Тогда:

*ϕ*[( ∃*x* ) ( *F* ( *x* ) & *G* ( *x* ))] = 0, но

*ϕ*[( ∃*x* ) *F* ( *x* ) & ( ∃*x* ) *G* ( *x* )] = 1.

Аналогично, можно убедиться, что

(∀*x*) ( *F* ( *x* ) ∨ *G* ( *x* )) = 1 и ( ∀*x* ) *F* ( *x* ) ∨ ( ∀*x* ) *G* ( *x* ) = 0.

Рассмотрим законы 23 и 24. Они утверждают, что одноименные кванторы можно менять местами. Можно ли переставлять местами разноименные кванторы, сохраняя равносильность? Другими словами, равносильны ли формулы:

(∀*x* ) ( ∃*y* ) *F* ( *x* , *y* ) и ( ∃*y*) ( ∀*x* ) *F* ( *x* , *y* )?

Оказывается, тоже нет. В качестве основного множества опять возьмем **множество натуральных чисел**, *F* (*x*, *y*) будем считать атомарной формулой и поставим ей в соответствие предикат “ ***x* меньше *y*** ” . Тогда левая формула будет истинной, правая – ложной.

Вернемся к законам 22 и 23. Ранее отмечалось, **что квантор общности нельзя переносить через дизъюнкцию, а квантор существования – через конъюнкцию.** Тем не менее, если одна из формул *F* или *G* не содержит переменной *x*, на которую навешивается квантор, то это делать можно. Запишем соответствующие законы:

* + (∀*x* )( *F* ( *x* ) ∨ *G* ) равносильна ( ∀*x* ) *F* ( *x* ) ∨ *G* ,
  + (∃*x*) (*F* (*x* ) & *G* ) равносильна ( ∃*x*) *F* ( *x*) & *G* ,
  + (∀*x*) (∃*u*) (*F* (*x*) ∨*G* (*u* )) равносильна (∀*x*) *F* (*x*) ∨ (∃*u*) *G* (*u*),
  + (∀*x*) (∃*u*) (*F* (*x*) & *G* (*u*)) равносильна (∀*x*) *F* (*x*) & (∃*u*) *G* (*u*),

где переменная *u* не входит в *F* (*x)*,а переменная *x* не входит в *G* (*u*) .

Для доказательства равносильности двух формул могут оказаться полезными следующие законы.

В логике высказываний применялись два способа доказательства равносильности формул: построение совместной таблицы истинности и переход от одной формулы к другой с помощью законов логики.

Подчеркнем, что доказательство равносильности двух формул обычно проводится с помощью законов логики первого порядка. Доказательство того, что формулы неравносильны осуществляется построением интерпретации, при которой одна формула истинна, другая ложна.

## **3.5. Логическое следствие**

*Определение.* **Формула G называется логическим следствием формул F1 , F2 , …, Fk , если для любой интерпретации *ϕ* из того, что *ϕ*(F1 ) = *ϕ*(F2 ) = … = *ϕ*(Fk ) = 1, следует , что *ϕ*(G) = 1.**

***Пример*. Пусть заданы формулы:**

***F* 1 = (∀*x*) (*P* ( *x* ) → *Q* ( *x* ) & *R* ( *x* )),**

***F* 2 = *P* (*c*),**

***G* = *Q* ( *c* ) .**

**Покажем,что формула *G* является логическим следствием формул *F* 1 и *F* 2. Возьмем интерпретацию ϕ с областью *M* такую, что высказывания ϕ*F*1 и ϕ*F*2 истинны.**

**Истинность ϕ*F*2 означает, что высказывание (ϕ*P*) (*с*) истинно.**

**Истинность высказывания ϕ*F*1 означает, что для любого элемента**

***x* ∈ *M* истинно высказывание (ϕ*P*) (*x*) → (ϕ*Q*) (*x*) & (ϕ*R*) (*x*) .**

**Поскольку это высказывание истинно для любого х, оно, в частности,**

**истинно для *x* = с.**

**Мы видим, что истинна импликация:**

**(ϕ*P*) (*с*) → ( ϕ*Q*) (с) & ( ϕ*R* ) (с) и ее посылка ( ϕ*P*) (с) .**

**Из таблицы истинности импликации следует истинность заключения**

**(ϕ*Q*) ( с ) & ( ϕ*R*) ( с ) . Следовательно, истинно высказывание (ϕ*Q*)( с ) . А это и есть ϕ*G*.**

**Мы доказали, что если истинны высказывания ϕ*F*1 и ϕ*F*2 , то истинно высказывание ϕ*G* , т. е. что *G* – логическое следствие *F* 1 и *F* 2 .**

*Определение.* **Множество формул = {*F* 1 ( *x* 1 , … , *x* *l* ), … , *F* *m* ( *x* 1 , … , *x* *l* )} называется *в ы п о л н и м ы м*, если существует интерпретация *ϕ* такая, что *ϕ*(F1 ) = *ϕ*(F2 ) = … = *ϕ*(Fl) = 1.**

*Пример*.Имеем множество формул *К***:**

*K*= {*F*1= (∀*x*) (∃*y*) (*P*(*y*) & *Q* ( *x* , *y* )),

*F* 2= (∀*y* ) *Q* ( *c* , *y* ) }

Покажем, что оно выполнимо.

**Возьмем в качестве области интерпретации** **множество натуральных чисел** ***N*** **.**

**Символы *P*, *Q*  и *с* проинтерпретируем следующим образом:**

(ϕ*P*) (y) = “ ***y* – простое число**”,

(ϕ*Q*) (*x*, y) = “ **y не меньше х** ”,

ϕ(*с*) = **1.**

**Тогда высказывание ϕ*F*1 означает, что**

* **для любого натурального числа х**
* **найдется простое число *y*, которое не меньше х,**
* **высказывание ϕ*F*2 означает, что 1 – наименьшее натуральное число,**

Ясно, что все эти высказывания истинны, и поэтому множество формул *K* выполнимо.

Понятия логического следствия и выполнимости в логике первого порядка связаны точно так же, как и в логике высказываний.

*Теорема.* **Формула *G* является логическим следствием формул *F* 1 F2,… , *F* *k* тогда и только тогда, когда множество формул**

**L = { *F* 1 , … , *F k*, *G* ( *x* 1, … , *x n* )}невыполнимо.**

## **3.6. Формулы, выражения, свободные и связанные переменные**

Дадим определение формул и выражений исчисления предикатов. Для построения выражений будем использовать те же символы, что и в исчислении высказываний: запятые, скобки, знаки ****, →; будем использовать функциональные буквы A1 ,...,An , а также предметные переменные X1,...,Xn, предметные константы а1,…,аn, функциональные буквы f 1,...,fn , а также введенные раньше в рассмотрение кванторы ∀ и ∃.

Из функциональных букв, предметных переменных и констант могут быть построены термы.

*Определение.* **Всякая предметная переменная (Xi) или константа (аi) есть**

**терм. Если fi функциональная буква, а t1,...,tk – термы, то fi(t1,...,tk) тоже есть терм.**

Из функциональных (предикатных) букв и термов можно получать элементарные формулы. Так, если Ai предикатная буква, а t1,...,tk термы, то Ai(t1,…tn) - - элементарная формула.

Формулы исчисления предикатов определяются так:

а) всякая элементарная формула есть формула.

б) если А и В формулы и y – предметная переменная, то каждое из

выражений (****А), (А→В), (∀y A), (∃y B) – есть формулы.

с) выражение является формулой лишь тогда, когда оно получено в

соответствии с утверждениями a) и b).

**В выражениях (∀y A) и (∃y А) формула А называется областью действия соответствующих кванторов ∀y и ∃y.**

Введение кванторов в формулу разбивает множество входящих в нее переменных на два подмножества: свободных и связанных переменных.

Например, в формуле:

∀x ****∀y ∀z A(x, y, z) v B(x, y) & C(x, y)<-> D(y)

переменная X имеет связанное вхождение, а переменная Y и связанное и свободное.

Понятие свободной и связанной переменных широко используется в математике. Выражение, содержащее свободную переменную, зависит от значения этой переменной, а выражение, содержащее связанную переменную, представляет результат операции, примененной к области изменения этой переменной.

Например в выражении:  n – свободная переменная i - связанная переменная ai – константа.

Связанную переменную можно не меняя смысла и конечного результата заменить на любую другую, имеющую ту же область изменения, например: 

Если в выражение подставить вместо свободной переменной какое-либо ее конкретное значение из области ее изменения, то мы, как правило, получим осмысленный, конкретный результат, но эта же операция, примененная к связанной переменной приводит к бессмыслице, что видно из примера:

 ; .