Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Образовательная программа «Прикладная математика»

бакалавр

Отчет
по проектной работе
Построение и исследование периодических орбит
вокруг точки L2 системы Земля-Луна

Выполнила студентка БПМ223

Клименко Олеся Владимировна

____

(подпись)

Руководитель проекта:

Заместитель директора по научной работе

МИЭМ им. А.Н. Тихонова

Аксенов Сергей Алексеевич

____________ ____________

(оцека) *(подпись)*

____

(дата)

Москва 2023

Содержание

1 Введение

Круговая ограниченная задача трех тел - задача, в которой исследуется движение малого тела, на которое действуют в соответствии с законом притяжения два массивных тела, движущихся по окружностям [1]. Основная цель определить траекторию движения малого тела. Эта задача привлекает многих ученых из области космонавтики, так как примером такой системы тел могут служить Земля, Луна и космический аппарат. Решения этой задачи позволяют смоделировать поведение аппарата в зоне влияния Земли и Луны. Точки либрации - такие точки в пространстве, что, если поместить в них тело без начальной скорости в системе, связанной с движением массивынх тел,то оно останется неподвижным относительно вращающейся системы. В круговой ограниченной задаче трёх тел существует 5 точек либрации: $L1, L2, L3, L4, L5$. Первые три называются коллинеарными и распологаются на прямой соединяющей два массивных тела, а четвертая и пятая называются треугольными. Они образуют с телами правильные треугольники, эти точки являются более устойчивыми чем $L1, L2$ и $L3$ (рис. 1).

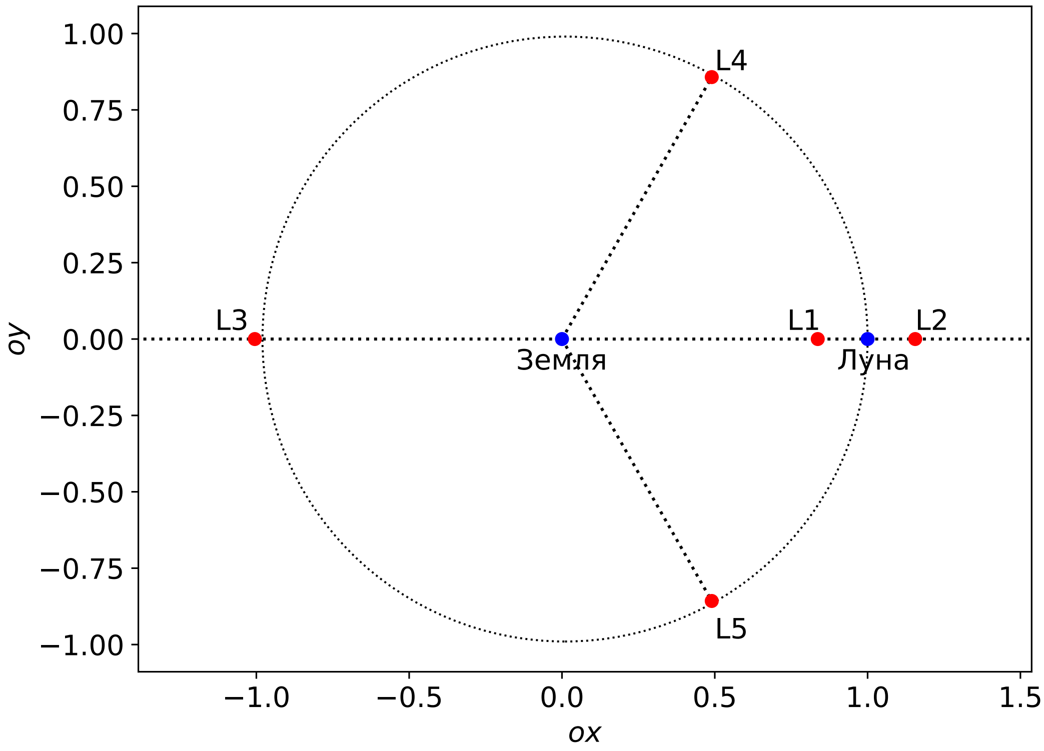

Рис. 1: Расположение точек либрации в системе Земля-Луна

Вокруг точек либраций существуют различные периодические семейства орбит, например, горизонтальные и вертикальные орбиты Ляпунова, гало-орбиты. В рамках проекта требуется исследовать семейство периодических орбит, бифурцирующее из семейства гало-орбит вокруг точки либрации $L2$ в системе Земля-Луна.

2 Математическая модель

2.1 От общей задачи трех тел к ограниченной

В отличии от общей задачи трёх тел, заключающейся в определении относительного движения трех тел, взаимодействующих по законам Ньютона, которую можно описать девятью дифференциальными уравнениями второго порядка:

$$\begin{cases} \ddot{\bar{r}}_1 = \gamma \dfrac{m_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) + \gamma \dfrac{m_3}{|\bar{r}_3 - \bar{r}_1|^3}(\bar{r}_3 - \bar{r}_1) \\ \ddot{\bar{r}}_2 = \gamma \dfrac{m_1}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^3}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) + \gamma \dfrac{m_3}{|\bar{r}_3 - \bar{r}_2|^3}(\bar{r}_3 - \bar{r}_2) \\ \ddot{\bar{r}}_3 = \gamma \dfrac{m_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_3|^3}(\bar{r}_2 - \bar{r}_3) + \gamma \dfrac{m_1}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_3|^3}(\bar{r}_1 - \bar{r}_3) \end{cases} \tag{1}$$

γ-гравитационная постоянная

$\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$-радиус-векторы тел

m_1, m_2, m_3-массы тел,

в круговой ограниченной задаче трёх тел прдполагается, что массивные тела движутся по окружностям, а третье тело настолько мало, что не влияет на движение первых двух. Решение сводиться к трём дифференциальным уравнениям второго порядка, у которых возможно лишь численное решение. Для решения этих уравнений производят обезразмеривание величин:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2},\ m_1 = 1 - \mu,\ m_2 = \mu \tag{2}$$

$$|\bar{r}_2 - \bar{r}_1| = 1,\ r_1 = \mu,\ r_2 = 1 - \mu \tag{3}$$

А вращающуюся систему координат выбирают с центром в барицентре массивных тел, ось *ox* лежит на прямой соединяющей эти тела, *oy* перпендикулярна *ox* и принадлежит плоскости траектории движения массивных тел, *oz* дополняет систему до правой тройки. В этой системе движение малого тела описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} = \dfrac{\partial U}{\partial x}\ , \end{cases}$$

где $U(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2) + \dfrac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2+y^2+z^2}} + \dfrac{\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2+y^2+z^2}}$

2.2 Описание метода для поиска точек

Начальные условия каждой точки определяются шестью координатами: $(x, y, z, \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$. Так как рассматриваемое семейство периодических орбит симметрично относительно плоскости $\{y, \upsilon_x, \upsilon_z\}$, задача нахождения начальной точки упрощается до поиска трех координат $(x, 0, z, 0, \upsilon_y, 0)$. Если известна начальная точка семейства орбит, координаты следующей точки: $(x_0 + r\cos\alpha, 0, z_0 + r\sin\alpha, 0, \upsilon_1, 0)$, где x_0, z_0 - координаты начальной точки, α - угол, определяющий направление кривой начальных условий семейства в плоскости xz, а r - расстояние между начальной и новой точкой, оно считается известным. Метод поиска скорости основан на использовании сечения Пуанкаре. Сечение Пуанкаре некоторой плосокстью - множество точек, в которых орбита перескает эту плоскость. В случае двухпериодической орбиты сечение плоскостью $y = 0$ имеет четыре такие точки пересечения (точки могут совпадать). Алгоритм основан на минимизации разности координат точек в сечении Пуанкаре известной орбиты и новой орбиты в семействе на каждом шаге приближения(их столько, сколько точек пересечения Пуанкаре - в текущей задаче четыре)

2.3 Множители Флоке

Матрица монодромии - матрица перехода состояния, которая линейно связывает небольшое отклонение вектора состояния от периодического решения в начальный момент времени и отклонение через период. Собственные значения такой матрицы называют множителями Флоке. По значениям множителей можно определить бифуркации семейства. Например, бифуркация типа умножение периода на n происходит когда, когда множители являются решениями уравнения $\lambda^n = 1$.

3 Ход работы

3.1 Рассчет семейства орбит

В качестве начальной точки для нахождения начальных условий двухпериодических орбит была задана точка бифуркации на известной ветке гало-орбит (рис. 2). Далее, с помощью метода описанного выше, реализованного на языке Python с использованием библиотеки OrbiPy [2], было рассчитано семейство двухпериодических орбит (рис. 3). В процессе рассчета для точности получения данных многократно менялись параметры оптимизаторов: размер шага - расстояние между известной и следующей точками, ограничения на изменение угла и координат.

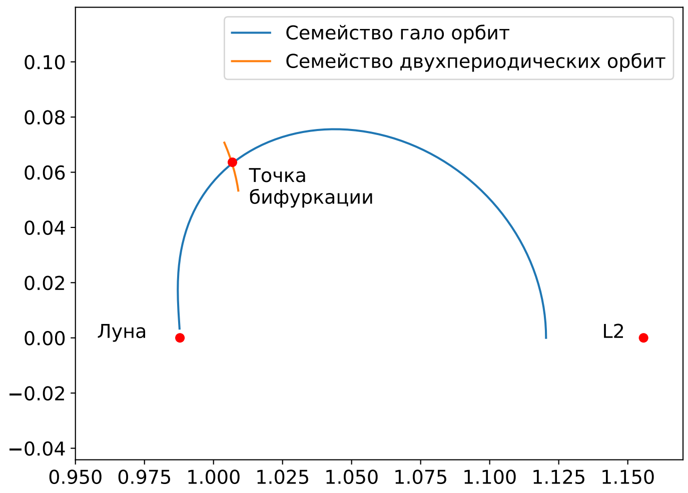

Рис. 2: Известные условия на начало выполнения задачи

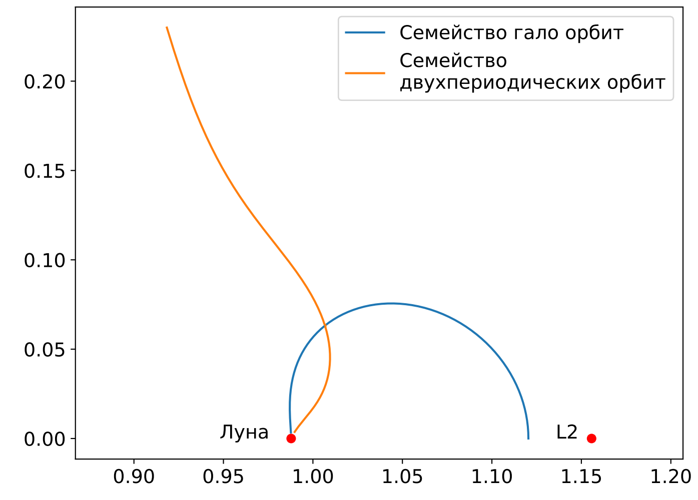

Рис. 3: Построенная ветка двухпериодических орбит

3.2 Анализ орбит

В ходе работы были получены траектории орбит в трехмерном пространстве (рис. 4) и в плоскостях xy xz yz (рис. 5):

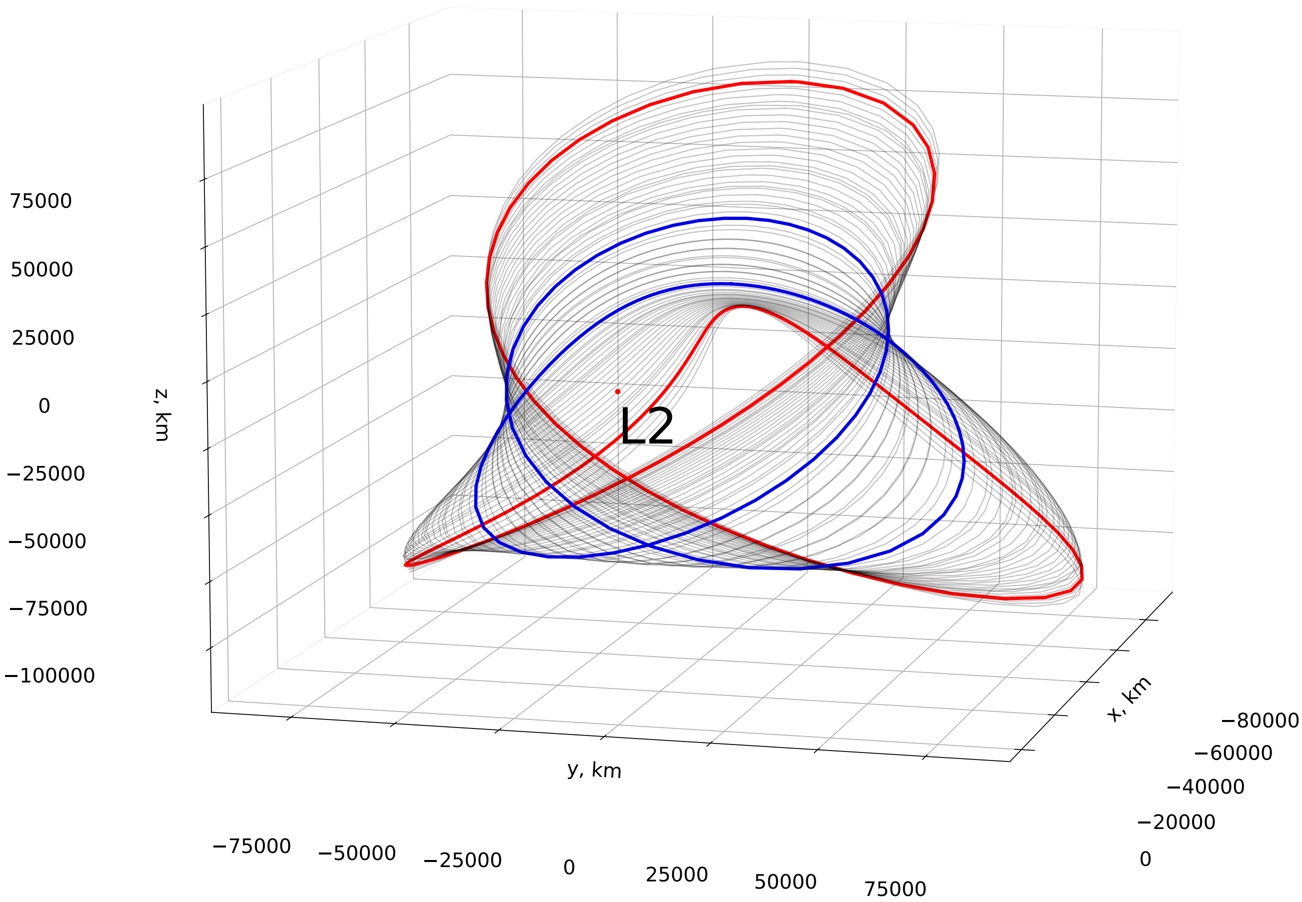

Рис. 4: Примеры траекторий орбит, 3d-вид

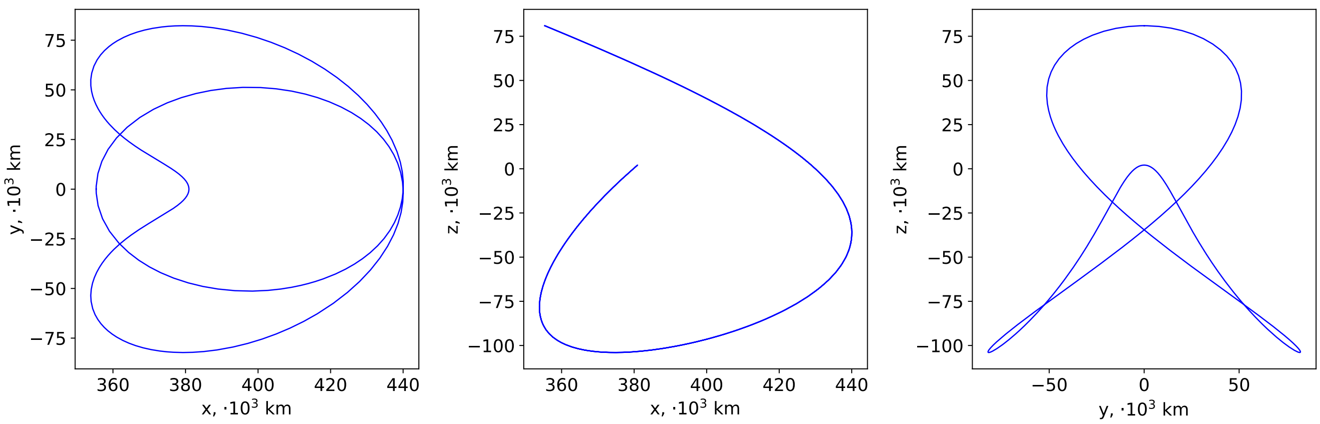

Рис. 5: Вид орбиты в плоскостях

Одна из характеристик решений - устойчивость или неустойчивость. Если все множители Флоке орбиты по модулю точно равны 1, то решение является устойчивым. Так же можно сказать, что в семействе нет бифуркаций, если все множители Флоке вещественные. Из графика на рисунке 6 видно, что в данном семействе устойчивых решений нет, у каждой орбиты существует хотя бы один множитель больше 1, соответственно все множители Флоке вещественные, изменений устойчивости нет и бифуркации не происходит.

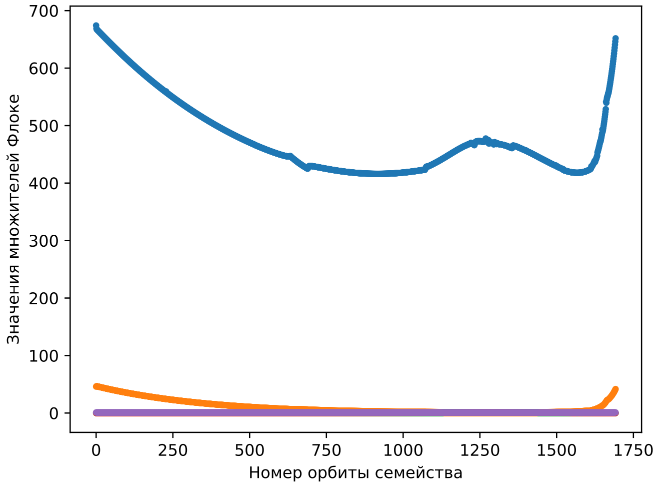

Рис. 6: Множители Флоке

4 Вывод

В результате работы был изучен алгоритм вычисления начальных условий орбит, с помощью которого было рассчитано одно семейство двухпериодических орбит около точки L2 в системе Земля-Луна; были изображены траектории орбит, а также выяснено, что семейство не имеет бифуркаций.

Список литературы

[1] *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы / Пер. с англ. под ред. И. И. Шевченко. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 588 с. - ISBN 978-5-9221-1121-8. / Дермотт С Мюррей К. — М., 2010.

[2] *Bober Stanislav Aksenov Sergey, Guskova Mariia.* OrbiPy. — `http://doi.org/10.5281/zenodo.4301584`. — (10.05.2023).

Примечание к отчету

Демонстрация умений работы в Latex

- Таблица 1

x_0	y_0	v_0	$alpha_0$	d_2
0.9186043882	0.2292317294	0.2967560281	-1.276950266	1.9536000538e-09
0.9186892796	0.2289859309	0.2968418438	-1.266057305	2.5937834886e-09

Таблица 1: Название таблицы

- Формулы 4 и 5

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i) \tag{4}$$

$$I = \iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \frac{2\pi}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i) \tag{5}$$