组合数学 Homework6

提交者：游昆霖　学号：2020K8009926006

1. 证明：对于 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$，

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[x+\frac{i}{n}\right]=[nx].$$

证明　对 x 的小数部分进行讨论:$\forall x \in \mathbb{R}, \exists j \in \{0,1,\cdots,n-1\}, s.t.\quad \frac{j}{n} \le \{x\} < \frac{j+1}{n}$;
则有 $[nx]=[n[x]+n\{x\}]=n[x]+j$;
又 $\because \forall 0 \le i \le n-j-1, [x+\frac{i}{n}]=[x] \quad \forall n-j \le i \le n-1, [x+\frac{i}{n}]=[x]+1$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{i=0}^{n-1}\left[x+\frac{i}{n}\right] &= \sum_{i=0}^{n-j-1}\left[x+\frac{i}{n}\right]+\sum_{i=n-j}^{n-1}\left[x+\frac{i}{n}\right]\\ &=(n-j)[x]+j([x]+1)=n[x]+j=[nx]\end{aligned}$$

□

2. 利用二次互反律计算下列式子：

a. $(\frac{60}{107})$；

b. $(\frac{56}{139})$。

解　a.　$\because (\frac{60}{107})=(\frac{3\times5\times2^2}{107})=(\frac{3}{107})\cdot(\frac{5}{107})$
由二次互反律有：$(\frac{3}{107})(\frac{107}{3})=(-1)^{\frac{2\times106}{4}}=-1, (\frac{5}{107})(\frac{107}{5})=(-1)^{\frac{4\times106}{4}}=1$
又 $\because (\frac{107}{3})=(\frac{2}{3})=-1, (\frac{107}{5})=(\frac{2}{5})=-1$
$\therefore (\frac{3}{107})=1, (\frac{5}{107})=-1$ 故 $(\frac{60}{107})=-1$
b.　$\because (\frac{56}{139})=(\frac{2\times7\times2^2}{139})=(\frac{2}{139})(\frac{7}{139})$
由二次互反律有：$(\frac{7}{139})(\frac{139}{7})=(-1)^{\frac{6\times138}{4}}=-1$
又 $\because (\frac{139}{7})=(\frac{-1}{7})=-1, (\frac{2}{139})=-1$(此因 $139=8\times17+3$)
$\therefore (\frac{7}{139})=1$，故有 $(\frac{56}{139})=-1$

3. 对于正整数 n，若存在整数 a,b 使得 $n=a^2+b^2$，则将 n 称为平方和数。证明如下结论：

a. 若平方和数 n 存在 $4k+3$ 型素因子 p，则 $p\mid a, p\mid b$，从而 $p^2\mid n$；

b. n 是平方和数的充要条件为，n 的每个 $4k+3$ 型素因子只出现偶数次。

证明　a. 反证法，假设 $p\mid a^2+b^2$ 且 $p\nmid a$, 则易知 $p\nmid b$, 结合 p 为素数知 p 与 a，p 与 b 互素。

$$\because p\mid a^2+b^2 \quad 即 a^2\equiv -b^2(modp)$$

$$\therefore (a^2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv(-b^2)^{\frac{p-1}{2}}(modp)$$

由费马小定理，上式化为:$1\equiv -1(modp)$

即得：$p\nmid 2$，矛盾，假设不成立

故有 $p \mid a, p \mid b$，即得 $p^2 \mid a^2, p^2 \mid b^2$, 从而 $p^2 \mid n$

b. 首先有如下两个引理：

引理 1：4k+1 型素数一定可以表示为两个平方数之和，4k+3 型素数一定不能表示为两个平方数之和。

证：4k+1 型素数情形已由课上证明过程给出，下证 4k+3 型素数情形：

由于平方数模 4 只可能余 0 或 1，故两个平方数之和模 4 只可能余 0、1 或 2，即 4k+3 型素数不可能表示为两个平方数之和。

引理 2：平方和数之积仍为平方和数。

证：$\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$

由上述两条引理可得：n 的所有 4k+1 型素因子乘积（考虑幂次）为平方和数，记做 r^2+s^2;

则 n 可表示为 $(r^2+s^2)p_1^{a_1}\cdots p_m^{a_m}$，其中 $p_1, \cdots, p_m$ 为 4k+3 型素数;

先证充分性：当 $a_1, \cdots, a_m$ 均为偶数时，显然 $n = (p_1^{\frac{a_1}{2}} \cdots p_m^{\frac{a_m}{2}})^2(r^2+s^2)$ 为平方和数;

下证必要性：反证法，考虑 n 为平方和数，且存在 4k+3 型素因子 p 幂次为 2t+1;

由（a）结论知，$p \mid a, p \mid b, p^2 \mid n$，故有 $\frac{n}{p^2} = (\frac{a}{p})^2 + (\frac{b}{p})^2$

此时仍有 p 为平方和数 $\frac{n}{p^2}$ 的因子，故 $\frac{n}{p^4} = (\frac{a}{p^2})^2 + (\frac{b}{p^2})^2$

如此进行下去，可得 $\frac{n}{p^{2t}} = (\frac{a}{p^t})^2 + (\frac{b}{p^t})^2$

此时有 p 是平方和数 $\frac{n}{p^{2t}}$ 的因子，但 $p^2 \nmid \frac{n}{p^{2t}}$，与 (a) 结论矛盾;

故 n 的所有 4k+3 型素因子均只出现偶数次。

□

4. *证明：对任意给定的 52 个整数，存在两个整数，要么两者的和能被 100 整除，要么两者的差能被 100 整除。*

证明 在模 100 的意义下可以划分 51 个抽屉，其中第 1 个抽屉余数为 0，第 2 个抽屉余数为 1 或 99，以此类推，第 50 个抽屉余数为 49 或 51，第 51 个抽屉余数为 50;

由抽屉原理，任意 52 个整数落在 51 个抽屉内，则必有两个整数落在同一个抽屉内。

若两数余数相同，则表示两数之差能被 100 整除；若两数余数不同，则表示两数之和能被 100 整除 □

5. *在边长为 1 的正方形内任意选择 9 个点，证明至少有三个点组成的三角形面积小于等于 $\frac{1}{8}$。*

证明 连接正方形对边中点，则将该正方形切分为 4 个边长为 $\frac{1}{2}$, 面积为 $\frac{1}{4}$ 的小正方形;

$\because 9 = 4 \times 2 + 1$，由抽屉原理知，9 个点中至少有 3 个点落在同一小正方形内。

因为正方形内三个点组成三角形面积必定小于等于正方形面积一半，故至少有三个点组成的三角形面积小于等于 $\frac{1}{8}$。 □

6. *证明：在单位圆内任取 6 个点，必有两点距离小于等于 1。*

证明 首先取 6 个点中的某个点 A 进行讨论：

a. 若 A 为圆心，结论显然成立;

b. 若 A 不为圆心，则将圆均分为 6 个圆心角 $60°$ 的扇形，且圆心 O 和 A 连线为其中一条分割线；此时对剩余 5 个点位置进行讨论：

若剩余 5 个点均不在 A 相邻的两个扇形中，则对剩下 4 个扇形，由抽屉原理知，至少有两个点位于同一个扇形中，易知，同一个扇形中任意两点距离小于等于 1，故结论成立；

若剩余 5 个点中存在 1 个点 B 在 A 的 2 个相邻扇形中，由于 A 在 2 个扇形交界处，故必有 A、B 在同一个扇形中，距离小于等于 1，成立；

综上，在单位圆内任取 6 个点，必有两点距离小于等于 1。 □

7. *将 $1, 2, \cdots, 10$ 任意圆排列，证明存在相邻的三个数和大于等于 18。将 18 改为 19 结论是否仍然成立？*

证明 由圆排列任意性，不妨固定 1 的位置为 a_1，记顺时针方向元素依次为 $a_2, \cdots, a_{10}$，并记 $S_1 = a_2 + a_3 + a_4, S_2 = a_5 + a_6 + a_7, S_3 = a_8 + a_9 + a_{10}$，则有 $S_1 + S_2 + S_3 = 2 + \cdots + 10 = 54$;

反证法：若任意 3 个相邻数的和小于 18，则有 S_1, S_2, S_3 均小于 18，即 $S_1 + S_2 + S_3 < 54$，矛盾

故任意圆排列均存在相邻三个数之和大于等于 18。

若将 18 改成 19，结论不成立，事实上易举出反例：以 1 为起始位置，顺时针方向元素依次为：1,7,8,3,5,9,4,2,10,6; 此时对应位置起始的顺时针方向三个相邻数之和依次为:16,18,16,17,18,15,16,18,17,14; 此时不存在相邻三个数之和大于等于 19. □

8. *证明：任取 7 个自然数，其中必存在 4 个数 a, b, c, d 使得 $4 \mid a + b + c + d$，且 7 是满足此性质的最小自然数。*

证明 记 7 个自然数分别为 $a_1, \cdots, a_7$, 由抽屉原理,其中必有 4 个数同奇偶,不妨设为 $a_1, \cdots, a_4$;

对剩余 3 个数再次应用抽屉原理可得，其中必有 2 个数同奇偶, 不妨设为 a_5, a_6;

则由 2 个同奇偶的数相加为偶数，可设 $a_1 + a_2 = 2b_1, a_3 + a_4 = 2b_2, a_5 + a_6 = 2b_3$;

对 b_1, b_2, b_3 应用抽屉原理可得，其中必有 2 个数同奇偶，不妨设为 b_1, b_2, 则 $2 \mid (b_1 + b_2)$;

(注意：此处讨论 b_i 的奇偶性时，不需再依赖 a_1, a_2 和 a_3, a_4 同奇偶，因此上述假设具有一般性；)

此时有 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2(b_1 + b_2)$, 故 $4 \mid (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$, 结论成立；

下证：7 是满足此性质的最小自然数；

当自然数个数为 6 时，易举出反例，取自然数 1,1,1,4,4,4，则任取其中 4 个数，1 出现次数为 1 或 2 或 3，4 个数之和模 4 的余数为 1 或 2 或 3，结论不成立；

当自然数个数小于 6 时，只需取上述反例所取 6 个数的子集即可，过程同上类似，有结论不成立，故 7 是满足此性质的最小自然数 □