组合数学第六讲

授课时间: 2021 年 10 月 4 日　授课教师: 孙晓明　　记录人: 林盛昊　游昆霖　洪泽润

1 回顾与拓展（生成函数）

任给数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 它对应的生成函数为 $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$
例如，有以下数列和生成函数的对应关系

$$1,1,1,1,\ldots \to 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$
$$1,2,3,4,\ldots \to 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = (\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$0,1,2,3,\ldots \to 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2}$$
$$1,2,4,8,\ldots \to 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots = \frac{1}{1-2x}$$

例 1. 汉诺塔 *(Tower of Hanoi)*

根据递推关系 $h(n) = 2h(n-1) + 1 \quad (n \geq 1)$, 及初始值 $h(1) = 1, h(0) = 0$
可得对应生成函数有如下形式：

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{n\geq 0} h(n)x^n = 0 + \sum_{n\geq 1} h(n)x^n = \sum_{n\geq 1} x^n(2h(n-1)+1) \\ &= 2\sum_{n\geq 1} x^n h(n-1) + \sum_{n\geq 1} x^n = 2x\sum_{m\geq 0} x^m h(m) + \frac{1}{1-x} - 1 \\ &= 2xH(x) + \frac{1}{1-x} - 1 \end{aligned}$$

移项可得 $(1-2x)H(x) = \frac{1}{1-x} - 1$, 进一步整理可得生成函数形式：

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{n\geq 0} 2^n x^n - \sum_{n\geq 0} x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} (2^n - 1)x^n = \sum_{n\geq 0} h(n)x^n \end{aligned}$$

系数对比即得 $h(n)$ 的通项公式 $h(n) = 2^n - 1$
事实上，对上述递推式进行推广我们有更一般的情形，如例 2.

例 2.

$$\begin{cases} h(n) = 2h(n-1) + 3^n \\ h(1) = 3 \end{cases}$$

法一：待定系数法
解　解方程 $h(n) + \alpha \cdot 3^n = 2(h(n-1) + \alpha \cdot 3^{n-1})$, 得 $\alpha = -3$,

即得 $h(n)-3\cdot 3^n=2(h(n-1)-3\cdot 3^{n-1})$,
另设函数 $t(n)=h(n)-3\cdot 3^n$ 即有 $t(n)=2t(n-1)$ 及初始值 $t(1)=-6$;
由等比数列易得 $t(n)=-3\cdot 2^n$;
反解即得 $h(n)=3(3^n-2^n)$

法二：生成函数

解 该递推关系对应生成函数有如下形式：

$$
\begin{aligned}
H(x)&=\sum_{n\geq 0}h(n)x^n=0+\sum_{n\geq 1}x^nh(n)\\
&=\sum_{n\geq 1}x^n(2h(n-1)+3^n)\\
&=2xH(x)+\frac{1}{1-3x}-1
\end{aligned}
$$

移项可得：$(1-2x)H(x)=\frac{3x}{1-3x}$ 进一步整理可得生成函数形式：

$$
H(x)=\frac{3x}{(1-3x)(1-2x)}=\frac{3}{1-3x}-\frac{3}{1-2x}
$$

系数对比即得 $h(n)$ 的通项公式 $h(n)=3(3^n-2^n)$

例 3.

$$
\begin{cases}
f(n)=f(n-1)+g(n-1)+g(n-2), f(0)=f(1)=1\\
g(n)=g(n-1)+2f(n-1)-f(n-2), g(0)=g(1)=1
\end{cases}
$$

解 考察 $f(n),g(n)$ 对应的生成函数 $F(n),G(n)$;

$$
\begin{aligned}
F(x)&=\sum_{n\geq 0}f(n)x^n=1+x+\sum_{n\geq 2}x^nf(n)\\
&=1+x+\sum_{n\geq 2}x^n(f(n-1)+g(n-1)+g(n-2))\\
&=1+x+x\sum_{n\geq 1}x^nf(n)+x\sum_{n\geq 1}x^ng(n)+x^2\sum_{n\geq 0}x^ng(n)\\
&=1+x+x(F(x)-1)+x(G(x)-1)+x^2G(x)
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
G(x)=1+x+x(G(x)-1)+2x(F(x)-1)-x^2F(x)
$$

整理可得

$$
\begin{aligned}
x-1&=(x-1)F(x)+(x+x^2)G(x)\\
2x-1&=(x-1)G(x)+(2x-x^2)F(x)
\end{aligned}
$$

解得

$$
\begin{aligned}
F(x)&=-\frac{2x^3+x-1}{x^4-x^3-x^2-2x+1}\\
G(x)&=\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-x^3-x^2-2x+1}
\end{aligned}
$$

注意到，对于形如 $F(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$ 的式子，则可写作部分分式和，从而进行级数展开，$f(n)$ 即是 x^n 项对应系数.

例 4. 对于系数为 n 的递推关系，如:

$$\begin{cases} h(n)=nh(n-1)+3n \\ h(1)=0 \end{cases}$$

解 注意到：两边同时除 $n!$ 得

$$\frac{h(n)}{n!}=\frac{h(n-1)}{(n-1)!}+\frac{3}{(n-1)!}$$

$$\therefore h(n)=3n!\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i-1)!}$$

例 5. 对于系数为 n^2 的递推关系，如:

$$\begin{cases} h(n)=n^2h(n-1)+3n \\ h(1)=0 \end{cases}$$

解 同理有：两边同时除 $(n!)^2$ 得

$$\frac{h(n)}{(n!)^2}=\frac{h(n-1)}{((n-1)!)^2}+\frac{3n}{(n!)^2}$$

$$\therefore h(n)=3n(n!)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i!)^2}$$

一般地，对 $h(n)=a_nh(n-1)+b_n$，其中 a_n,b_n 为关于 n 的多项式，常数或指数等
则有以下变化形式:

$$\frac{h(n)}{a_n\cdot a_{n-1}\cdots a_1}=\frac{h(n-1)}{a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdots a_1}+\frac{b_n}{a_n\cdot a_{n-1}\cdots a_1}$$

2 指数型生成函数

定义 1 (指数型生成函数).

对于数列 a_n, 定义其指数型生成函数为 $A(n)=a_0+a_1x+a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+a_n\frac{x^n}{n!}+\cdots$

定理 2 (Vandermonde 恒等式).

第二节课中我们已经介绍过范德蒙德恒等式

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{0\le i\le k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

将其扩展到三阶形式:

$$\binom{n+m+p}{l}=\sum_{\substack{i,j\neq 0\\ i+j\le l}}\binom{n}{i}\binom{m}{j}\binom{p}{l-i-j}$$

证明 对 $(1+x)^n,(1+x)^m,(1+x)^p$ 使用广义二项式定理

$$(1+x)^n=\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i, \tag{1}$$

$$(1+x)^m=\sum_{j\geq 0}\binom{m}{j}x^j. \tag{2}$$

$$(1+x)^p=\sum_{k\geq 0}\binom{p}{k}x^k. \tag{3}$$

将 (1),(2),(3) 式相乘得:

$$(1+x)^{n+m+p}=\sum_{l\geq 0}x^l\sum_{i,j,k\neq 0,i+j+k=l}\binom{n}{i}\binom{m}{j}\binom{p}{k}$$

由限制条件可消去变量 k 得:

$$(1+x)^{n+m+p}=\sum_{l\geq 0}x^l\sum_{i,j\neq 0,i+j\leq l}\binom{n}{i}\binom{m}{j}\binom{p}{l-i-j} \tag{4}$$

对 $(1+x)^{n+m+p}$ 使用广义二项式定理可得

$$(1+x)^{n+m+p}=\sum_{l\geq 0}x^l\binom{n+m+p}{l}. \tag{5}$$

对比 (4),(5) 式中 x^k 系数，于是得到

$$\binom{n+m+p}{l}=\sum_{i,j\neq 0\ i+j\leq l}\binom{n}{i}\binom{m}{j}\binom{p}{l-i-j}$$

□

例 6. 有红黄蓝三色的共 n 个球排成一列，其中红球有偶数个，黄球有奇数个，蓝球不做限制，求共有多少种排列方法？

解 设排列方法共有 $f(n)$ 种，假设红球个数为 $i\quad(2\mid i)$，黄球个数为 $j\quad(2\nmid j)$, 则蓝球个数为 $n-i-j\quad(i+j\leq n)$

由可重排列公式，对确定的 i，j 有排列数 $\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$;

故所有可能情形数为

$$f(n)=\sum_{\substack{i,j\\ i+j\leq n,2|i,2\nmid j}}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$$

假设 $f(n)$ 生成函数为 F(n), 并设以下三个函数 A(n)，B(n) 和 C(n)

若不对球的奇偶性做限制，有

$$A(n)=\sum_{i\geq 0}\frac{x^i}{i!}\quad B(n)=\sum_{j\geq 0}\frac{x^j}{j!}\quad C(n)=\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}$$

考虑 x^n 项系数，则 k 只能取 $n-i-j$，由 Vandermonde 恒等式三阶形式可知:

$$\sum_{n\geq 0}[\sum_{\substack{i,j\\ i+j\leq n}}\frac{1}{i!j!(n-i-j)!}]x^n=\sum_{i\geq 0}\frac{x^i}{i!}\cdot\sum_{j\geq 0}\frac{x^j}{j!}\cdot\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}$$

对红黄两球限制奇偶性 $2|i, 2\nmid j$ 可得:

$$A(n) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$B(n) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$C(n) = \sum_{i\geq 0} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = e^x$$

考虑红黄两球的奇偶性限制则有:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \frac{f(n)}{n!} x^n &= \sum_{i\geq 0, 2|i} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j\geq 0, 2\nmid j} \frac{x^j}{j!} \cdot \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} \\ &= e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{4}(e^{3x} - e^{-x}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n\geq 0} (\frac{3^n}{n!} - \frac{(-1)^n}{n!}) x^n\end{aligned}$$

对比系数可得:

$$f(n) = \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n)$$

将其推广到较为复杂的情况，有以下例子。

例 7. *有红黄蓝三色的共 n 个球排成一列，其中红球有偶数个，黄球个数可被 3 整除，蓝球不做限制，求共有多少种排列方法？*

解 假设排列方法共有 $f(n)$ 种，红球个数为 $i \quad (2 \mid i)$，黄球个数为 $j \quad (3 \mid j)$, 则蓝球个数为 $n - i - j \quad (i + j \leq n)$; 因此排列方法数为:

$$f(n) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j\leq n, 2|i, 3|j}} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$$

考虑红黄球的个数限制，同例 6 可得下式（其中 $w = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ 为三次单位根）:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \frac{f(n)}{n!} x^n &= \sum_{i\geq 0, 2|i} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j\geq 0, 3|j} \frac{x^j}{j!} \cdot \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(k)!} \\ &= e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^x + e^{wx} + e^{w^2 x}}{3} \\ &= \frac{1}{6}(e^{3x} + e^{(\frac{3+\sqrt{3}i}{2})x} + e^{(\frac{3-\sqrt{3}i}{2})x} + e^x + e^{(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})x} + e^{(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})x}) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} (3^n + (\frac{3+\sqrt{3}i}{2})^n + (\frac{3-\sqrt{3}i}{2})^n + 1 + (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^n + (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^n) x^n\end{aligned}$$

对比系数可得:

$$f(n) = \frac{1}{6}(3^n + (\frac{3+\sqrt{3}i}{2})^n + (\frac{3-\sqrt{3}i}{2})^n + 1 + (\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^n + (\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^n)$$

注意到：上式中含有虚数单位 i 的式子有两对共轭复数，考虑到共轭复数的 n 次幂仍互为共轭复数，其和为实部的两倍，可进一步简化得到:

$$f(n) = \frac{1}{6}(3^n + 2(\sqrt{3})^n cos(\frac{n\pi}{6}) + 1 + 2cos(\frac{2n\pi}{3}))$$

3 卡特兰数（Catalan Number）

回顾汉诺塔问题，要求 3 根柱子，n 个盘子（大小顺序为上小下大），规定堆叠过程中大盘子不能放置于小盘子上方，求将所有盘子保持顺序从最左端移到最右端的方法数。

卡特兰数初始条件相同，未限制堆叠顺序，但规定了盘子只能单向移动（例如，$I \to II \to III$ 或 $I \to III$），考察最多能在最右端形成多少种不同的排列。

特别的，卡特兰数在数据结构中有重要应用，栈规定数据先进后出，函数调用时进行递归操作时，不能越过节点直接访问子节点。该问题还可表述为多节车厢通过人字形铁轨能形成的排列数。

4 选做题

n*n 方格图用 1*2 或 2*1 的多米诺牌进行覆盖，总共有多少种可能性？请给出显式表达式或估计。