# 组合数学 09.18 思考题

提交者：游昆霖　　学号：2020K8009926006

**1.** 设有 $m$ 个 3 元子集 $S_i \subset [n], i = 1, \ldots, m$。试问 $m$ 至少需要多大，才一定存在 $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq m$ 使得 *(1)* 式成立？

$$S_{i_1} \cap S_{i_2} = S_{i_1} \cap S_{i_3} = S_{i_2} \cap S_{i_3} = S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap S_{i_3} \neq \emptyset \tag{1}$$

我们再把选取 *3* 个子集的情况扩展到选取 $k$ 个子集的情况，试问 $m$ 至少需要多大，才一定存在 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$ 使得 *(2)* 式成立？

$$S_{i_p} \cap S_{i_q} = \cap_{j=1}^{k} S_{i_j} \neq \emptyset, \forall i_p \neq i_q \tag{2}$$

**解**　此处只证明一个使得 3 元非空花心向日葵存在的集族大小的非平凡下界 m：一般地，直接拓展到选取 k 个子集情况。

首先我们取 3 个两两不交的（k-1）元集合 $V_1, V_2, V_3$, 将其称为原集族，将该原集族所有集合的元素整体称为一个分段, 其长度为 $3(k-1)$。

然后对该分段，考虑集族 $\mathcal{J} = \{T||T| = 3, |T \cap V_i| = 1, i = 1, 2, 3\}$, 则易知 $\mathcal{J}$ 中有 $(k-1)^3$ 个集合，下证这个集族不含 k 瓣向日葵。

由反证法：假设该集族中含有一个 k 瓣向日葵，不妨记为 $\{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$, 由集族定义可知，所有花瓣均与 $V_1$ 有一个相交元。因为共有 k 个花瓣，而 $V_1$ 中仅有 k-1 个元素，由抽屉原理可知，必存在 $T_i, T_j$ 使得这两个集合同时取得 $V_1$ 中一个元素，记为 $v_1$，则由定义有 $v_1 \in \bigcap_{i=1}^{k} T_i$, 对 $V_2, V_3$ 进行相同操作，则有 $\{v_1, v_2, v_3\} \in \bigcap_{i=1}^{k} T_i$, 由原集族中集合的不交性，可知所取元素两两不同。再由花瓣均为 3 元集合可知，所有花瓣中元素均相同，矛盾。故该集合不含 k 瓣向日葵。

再取另外 3 个两两不交的（k-1）元集合，构成新分段，与以上过程完全相同，可得取自该分段的 $(k-1)^3$ 个集合中不含 k 瓣向日葵。如此进行下去，最多可以得到 $\lfloor \frac{n}{3(k-1)} \rfloor$ 个完整分段，由于所有分段两两不交，取自不同分段的集合无法构成花心非空向日葵。由此我们得到了一个一般的非平凡下界:

$$m \geq \lfloor \frac{n}{3(k-1)} \rfloor \times (k-1)^3$$

特别地，当花瓣数为 3 时，有：

$$m \geq 8 \times \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$$