组合数学 09.06 思考题

提交者：游昆霖　　学号：2020K8009926006

1. 一个定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的多项式 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,若当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均为整数时,$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的值总是整数，则称这样的多项式为整值多项式。课上给出了 $n = 1$ 时整值多项式的刻画：

定理 *1.* d 次多项式 $P(x)$ 是整值多项式的充要条件是存在 $b_0, b_1, \cdots, b_d \in \mathbb{Z}$，使得

$$P(x) = b_d\binom{x}{d} + \cdots + b_1\binom{x}{1} + b_0\binom{x}{0}$$

对 $n = 2$ 的整值多项式是否也有类似的刻画？一般的 n 呢？

解　先证引理：$\{\binom{x}{i}\binom{y}{j}\}_{\substack{i\geq 0, j\geq 0,\\ i+j\leq d}}$ 为向量空间 $< x^i y^j >_{\substack{i\geq 0, j\geq 0,\\ i+j\leq d}}$ 的一组基。

一方面：由课上引理可得 x^i 可表示为 $\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \cdots, \binom{x}{i}$ 的线性组合，对 y^j 同理有相似表示；

故有 $x^i y^j = (\sum_0^i a_{i,k}\binom{x}{k})(\sum_0^j b_{j,t}\binom{y}{j}) = \sum_{0\leq k\leq i, 0\leq t\leq j} a_{i,k} b_{j,t}\binom{x}{k}\binom{y}{t}$;

另一方面：由于两向量组元素个数相等，只需证 $\{\binom{x}{i}\binom{y}{j}\}_{\substack{i\geq 0, j\geq 0,\\ i+j\leq d}}$ 线性无关；

对其中元素 $x^i y^j$，将其表示为其余向量的线性组合，注意到变量次数大于该式的项系数必为 0，则有 $\binom{x}{i}\binom{y}{j} = \sum_{\substack{0\leq k\leq i,\\ 0\leq t\leq j}} f_{i,k} g_{j,t}\binom{x}{k}\binom{y}{t}$

分别取 $(x, y) = (0, 0), (1, 0), \cdots, (i, 0), \cdots, (0, j), \cdots, (i, j)$ 代入得到 $i * j$ 个式子，

联立即可得到上式各项系数均为 0;

注意到 i,j 任意性，即可得 $\{\binom{x}{i}\binom{y}{j}\}_{\substack{i\geq 0, j\geq 0,\\ i+j\leq d}}$ 线性无关；

引理证毕。

由引理，可得 n=2 的 d 次整值多项式 $P(x, y)$ 在 $\{\binom{x}{i}\binom{y}{j}\}_{\substack{i\geq 0, j\geq 0,\\ i+j\leq d}}$ 上有唯一表示：

$$P(x, y) = \sum\nolimits_{\substack{i\geq 0, j\geq 0,\\ i+j\leq d}} c_{i,j}\binom{x}{i}\binom{y}{j}$$

;

一方面：当 $c_{i,j}(i \geq 0, j \geq 0, i + j \leq d)$ 均为整数时，显然有 $P(x, y)$ 为整值多项式；

另一方面：若 $P(x, y)$ 为整值多项式，应用拉格朗日插值思路求其系数, 对 $m = i + j$ 进行归纳：

当 $m = 0$ 时，取 $(x, y) = (0, 0)$, 有 $c_{0,0} \in \mathbb{Z}$;

当 $m = 1$ 时，取 $(x, y) = (0, 1)$, 有 $c_{0,1}\binom{1}{1} + c_{0,0} \in \mathbb{Z} \therefore c_{0,1} \in \mathbb{Z}$ 同理有 $c_{1,0} \in \mathbb{Z}$

假设当 $m \leq r$ 时，均有 $c_{i,j}(i \geq 0, j \geq 0, i + j = m)$ 为整数；

则当 $m = r + 1$ 时，$\forall c_{k,t}(k + t = r + 1)$, 不妨设 $t \neq 0$, 取 $(x, y) = (k, t)$，则有

$$c_{k,t}\binom{k}{k}\binom{t}{t} + \sum\nolimits_{\substack{i\geq 0, j\geq 0\\ i+j\leq r}} c_{i,j}\binom{k}{i}\binom{t}{j} \in \mathbb{Z}$$

由归纳假设 $c_{i,j} \in \mathbb{Z}(i \geq 0, j \geq 0, i + j \leq r)$　　故有 $c_{k,t} \in \mathbb{Z}$

结合 k,t 的任意性，有 $c_{i,j}(i \geq 0, j \geq 0, i + j = r + 1)$ 为整数

归纳则有 $c_{i,j} \in \mathbb{Z}(i \geq 0, j \geq 0, i + j \leq d)$　;

故 n=2 时整值多项式有刻画：d 次多项式 $P(x, y)$ 为整值多项式充要条件是

$$\exists c_{i,j} \in \mathbb{Z}(i \geq 0, j \geq 0, i + j \leq d) \quad s.t. P(x, y) = \sum\nolimits_{\substack{i\geq 0, j\geq 0,\\ i+j\leq d}} c_{i,j}\binom{x}{i}\binom{y}{j}$$

推论：对一般的 n，证明方法与 n=2 情况类似，同样有以下刻画：
d 次多项式 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为整值多项式的充要条件是：

$$\exists a_{i_1,\cdots,i_n} \in \mathbb{Z}(i_1 \geq 0, \cdots, i_n \geq 0, i_1 + \cdots + i_n \leq d)$$

$$s.t. P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\substack{i_1 \geq 0, \cdots, i_n \geq 0 \\ i_1 + \cdots + i_n \leq d}} a_{i_1,\cdots,i_n} \binom{x_1}{i_1} \cdots \binom{x_n}{i_n}$$