组合数学 Homework3

提交者：游昆霖　　学号：2020K8009926006

1. 求解如下递推关系：

a. $h_0 = 0; \quad h_1 = 1; \quad h_2 = 2;$

$$h_n = h_{n-1} + 9h_{n-2} - 9h_{n-3}, \qquad (n \geq 3)$$

b. $h_0 = 2;$

$$h_n = (n+2)h_{n-1} + (n+2), \qquad (n \geq 1)$$

c. $h_0 = 3; \quad h_1 = 4;$

$$h_n = 2h_{n-1} - h_{n-2} + n + 1, \qquad (n \geq 2)$$

解　a.（法一）由递推式可得其特征根方程为：$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$，解得，$x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = -3$；
于是 h_n 通项公式形如：$h_n = a + b \times 3^n + c \times (-3)^n$;　(a,b,c 为常数)
代入初始值 $h_0 = 0; \quad h_1 = 1; \quad h_2 = 2$; 可得 $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{3}, c = -\frac{1}{12}$;
于是有通项公式 $h_n = -\frac{1}{4} + 3^{n-1} + \frac{1}{4}(-3)^{n-1}$

（法二）递推式整理可得：$h_n - h_{n-1} = 9(h_{n-2} - h_{n-3})$, 设 $f_n = h_n - h_{n-1}$,
则有 $h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$，且有初始值 $f_1 = 1, f_2 = 1$ 及递推式 $f_n = 9f_{n-2} \quad (n \geq 3)$ 故 $f_n = 9^{\lceil \frac{n}{2} - 1 \rceil}$;

$$\therefore h_n = \begin{cases} 2(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} 9^k) & = \frac{3^n - 1}{4} \qquad \text{n 为偶数} \\ 2(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} 9^k) + 9^{\frac{n-1}{2}} & = \frac{5}{4} \times 3^{n-1} - \frac{1}{4} \quad \text{n 为奇数} \end{cases}$$
$$= -\frac{1}{4} + 3^{n-1} + \frac{1}{4}(-3)^{n-1}$$

b. 将递推关系式等号两侧同除 $\frac{1}{(n+2)!}$, 并设 $f_n = \frac{h_n}{(n+2)!}$ 可得递推式 $f_n = f_{n-1} + \frac{1}{(n+1)!}$
由于所得递推式为等差数列，结合初始值 $f_0 = 1$ 即得 $f_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}$,
故 $h_n = (n+2)! \times \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}$

c. 递推式整理可得：$h_n - h_{n-1} = h_{n-1} - h_{n-2} + n + 1$，设 $f_n = h_n - h_{n-1}$
则有 $h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k + 3$，且有初始值 $f_1 = 1$ 及递推式 $f_n = f_{n-1} + n + 1$，
故 $f_n = 1 + 3 + 4 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2 = \frac{n^2 + 3n - 2}{2}$
于是 $h_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{3n(n+1)}{4} - n + 3 = \frac{n^3 + 6n^2 - n}{6} + 3$

2. 设 S 是多重集合 $\{\infty \cdot e_1, \infty \cdot e_2, \infty \cdot e_3, \infty \cdot e_4\}$。请确定数列 $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ 的生成函数，其中 h_n 表示分别满足下面各种限制的 S 的 n 组合数：

a. 每个 e_i 出现的次数为 *3* 的倍数；

b. e_1 不出现，e_2 至多出现一次；

c. 每个 e_i 至少出现 *10* 次。

解 设 a_n 表示单重集合 $\{\infty\cdot e_1\}$ 的 n 组合数,其生成函数为 $A(x)$, 类似的定义 $B(x),C(x),D(x)$,则 h_n 的生成函数 $H(x)$ 为满足条件的 $A(x),B(x),C(x),D(x)$ 的乘积

a. 由条件限制可得:$A(x)=B(x)=C(x)=D(x)=1+x^3+x^6+\cdots+x^{3k}+\cdots$

$$\therefore H(x)=(\sum_{k=0}^{\infty}x^{3k})^4=(\frac{1}{1-x^3})^4$$

b. 由条件限制可得:$A(x)=1,B(x)=1+x,C(x)=D(x)=1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots$

$$\therefore H(x)=(1+x)(\sum_{k=0}^{\infty}x^k)^2=\frac{1+x}{(1-x)^2}$$

c. 由条件限制可得:$A(x)=B(x)=C(x)=D(x)=x^{10}+x^{11}+\cdots+x^k+\cdots$

$$\therefore H(x)=(\sum_{k=10}^{\infty}x^k)^4=(\frac{x^{10}}{1-x})4$$

3. 确定满足下面条件,给 $1\times n$ 的棋盘染色的方案数:用红色、蓝色、绿色和橙色着色,要求其中红色格子有奇数个,绿色格子必定出现且有偶数个。

解 假设方案数共有 f_n 种,假设红格个数 i,绿格个数 j,蓝格个数 k,则橙格个数为 $n-i-j-k(i+j+k\leq n)$; 由可重排列公式,所有可能数为

$$f_n=\sum_{\substack{i,j,k\\ i+j+k\leq n,2\nmid i,2|j}}\frac{n!}{i!j!k!(n-i-j-k)!}$$

设红格、绿格、蓝格、橙格生成函数分别为 $A(x),B(x),C(x),D(x)$, 由奇偶性限制则有:

$$A(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$B(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1$$
$$C(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{x^i}{i!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots=e^x$$
$$D(x)=\sum_{t\geq 0}\frac{x^i}{i!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots=e^x$$

考虑 x^n 项系数,则 t 只能取 $n-i-j-k$, 由 Vandermonde 恒等式四阶形式可得:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{f(n)}{n!}x^n&=A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)\cdot D(x)\\&=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1)\cdot e^x\cdot e^x\\&=\frac{1}{4}(e^{4x}-2e^{3x}+2e^x-1)\\&=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}(\frac{4^n-2\cdot 3^n+2}{n!})x^n\end{aligned}$$

对比系数可得 $f_n=\frac{1}{4}(4^n-2\cdot 3^n+2)$

4. 给定一个 n 个节点的扇形（记为 W_n，见下图），问 W_n 有多少棵不同的生成树？（图中顶点各不相同）

解　假设 n 节点扇形的生成树个数为 h_n, 则显然有 $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 3$, 以下考虑 n+1 个节点扇形生成树数量 h_{n+1}：

考虑扇形最右侧节点（记为 x）在生成树中的度数，显然其度数只能为 1（对应叶）或者 2（对应内点），分情形进行考虑；

a. 若该点度数为 1，则该点为叶，每种 n 节点扇形的生成树将最右侧节点（记为 a）或扇心节点（记为 b）作为 x 的父节点均可得到 n+1 节点，且 x 度数为 1 的生成树，该类情形有 $2h_n \quad (n \geq 2)$ 种

b. 若该点度数为 2，则该点为内点，且同时连接 n 节点扇形最右侧点（a）和扇心（b），将生成树删去点 x 即可得到含扇心 k 节点扇形 $1 \leq k \leq n$ 的生成树和 n-k 节点弧形的生成树；注意到弧形的生成树唯一, 于是该类情形生成树为 $h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-1}$ 种

综上，有递推式 $h_{n+1} = 2h_n + \sum_{k=0}^{n-1} h_k \quad (n \geq 2)$;

整理即得 $h_{n+2} = 3h_{n+1} - h_n$, 结合初始值 $h_2 = 1, h_3 = 3$ 解得 $h_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{n-1}]$

5. 计算如下数列：

a. 有 n 个叶子节点的不同的满二叉树（*full binary tree,* 指每个节点孩子个数均为 0 或 2 的树）共有多少种？

b. 长为 $2n$ 的由左右小括号组成的序列中，包含 n 对可以合法匹配的括号的序列共有多少种？

c. 给定一个任意的凸 n 边形，不相交地连接多边形的顶点，可以将原先的多边形划分成三角形的组合，问一共有多少种不同的划分方法？

解　a. 假设 n 个叶子节点的不同的满二叉树共有 h_n 种，显然有 $h_1 = 1, h_2 = 1$;

当 $n \geq 2$ 时，根节点必有两个子节点，则有左子树和右子树，且子树叶子均非空，不妨设左子树叶子数为 $k \quad (1 \leq k \leq n-1)$，则右子树叶子数为 $n-k$;

于是有递推式 $h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k \cdot h_{n-k}$

补充定义 $h_0 = 1$, 设 h_n 的生成函数为 $H(x)$, 则:

$$
\begin{aligned}
H(x) &= \sum_{n\geq 0} h_n x^n = 1 + x + \sum_{n\geq 2} x^n (\sum_{k=1}^{n-1} h_k \cdot h_{n-k}) \\
\because H^2(x) &= 1 + 2x + \sum_{n\geq 2} x^n (2h_n + \sum_{k=1}^{n-1} h_k \cdot h_{n-k}) \\
&= 1 + 2x + 3(H(x) - 1 - x)
\end{aligned}
$$

整理得：$H^2(x) - 3H(x) + x + 2 = 0$，解得 $H(x) = \frac{3-\sqrt{1-4x}}{2}$(代入 $H(0) = h_0 = 1$ 可将另解舍去), 于是有:

$$
\begin{aligned}
H(x) &= \frac{1}{2}[2 - \sum_{n>=1} x^n \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n} (-4)^n] \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} x^n \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n}
\end{aligned}
$$

于是 $h_n = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n} \quad (n \geq 1)$

b. 首先考虑所有可能序列，即在 2n 位置中选择 n 个放置左括号，情形数为 $\binom{2n}{n}$;

然后考虑非法输入，即某位置之前右括号数大于左括号数的情形，不妨将问题转化为以下形式:

考虑 $n*n$ 网格, 以纵坐标 y 表示现有左括号数，横坐标 x 表示现有右括号数，则每种可能序列均对应从 $(0,0)$ 到 (n,n) 的一个最短路径；且其中非法路径必与直线 $l: y = x-1$ 有公共点，做 $(0,0)$ 关于 l 的对称点 $(1,-1)$，则非法序列数等于从 $(1,-1)$ 到 (n,n) 的最短路径数，即 $\binom{2n}{n+1}$;

于是合法序列数为 $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

c. 首先将凸 n 边形的顶点依次标记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，由于凸多边形任意一条边必属于划分中的一个三角形，不妨取边 (a_1, a_n), 再在剩余顶点中任取一个不同于以上两点的顶点 a_k 构成三角形，则该三角形将凸 n 边形划分为两个较小的凸多边形，一个是由 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 构成的凸 k 边形，一个是由 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 构成的凸 n-k+1 边形;

设凸 n 边形对应的三角形划分方法数为 h_n, 显然有 $h_3 = 1$, 补充定义 $h_2 = 1$，则由上述过程可得递推式 $h_n = \sum_{k=2}^{n-1} h_k \cdot h_{n-k+1} \quad (n \geq 4)$

设 $g_{n-2} = h_n$, 则有初始值 $g_0 = g_1 = 1$ 即递推式 $g_n = \sum_{k=0}^{n-1} g_k \cdot g_{n-k-1}$, 设其生成函数为 $G(x)$, 则：

$$G(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} g_n x^n$$

$$\because G^2(x) = \sum_{n \geq 1} x^{n-1} (\sum_{k \geq 0}^{n-1} g_k \cdot g_{n-k-1}) \therefore G(x) = 1 + xG^2(x);$$

解得：$G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$(通过代入 $G(0) = 1$ 可将另解舍去)

级数展开可得 $G(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} x^n$

于是 $g_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad h_n = g_{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$

6. 一个圆上等间隔地选出 $2n$ 个点，将这些点用 n 条互不相交的线段连成 n 对，共有多少种不同的方式？

解　将圆上点顺时针排序为 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 设 f_{2n} 表示圆上 2n 个点的连线方式，则显然有初始值 $f_2 = 1$

取圆上任意两点连线分割, 不妨记为 (a_1, a_k), 则该连线将圆上剩余 2n-2 个点分为两部分，注意到，对任意合法的连线方式，均要求这两部分点均为偶数个，（奇数个则必然可以在两侧分别取一个点，使其连线与分割线相交）。

于是可设一侧点数为 $2i \quad (0 \leq i \leq n-1)$，则另一侧点数为 $2(n-1-i)$，由于两部分连线各不相交，对一个确定的分割，圆上 2n 个点的连线方式即等于圆上 2i 个点的连线方式和圆上 2（n-i）个点的连线方式乘积;

补充定义 $f_0 = 1$ 于是有递推式:

$$f_{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} f_{2i} \cdot f_{2(n-1-i)} \quad (n \geq 2)$$

令 $h_n = f_{2n}$, 则 h_n 初始值及递推式即为标准的 Catalan 初始值及递推式，同题 5.c 中关于 g_n 求解过程可得：$f_{2n} = h_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

7. *确定 S_n 中 132 禁位排列的个数，即：排列 π 中不存在 3 个位置 $i < j < k$ 满足 $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$。例如，$n = 3$ 时共有 $123, 213, 231, 312, 321$ 这 5 种。*

解　首先证明 132 禁位排列条件等价于一个 $a_n, \cdots, a_k, \cdots, a_1$ 的入栈序列经过一个栈可能生成的出栈序列

注意到：任意三个入栈元素的出栈排序只与其相对入栈序列有关，与其余入栈元素无关，因此，依据栈“先进后出”的特点，对一个以 a_k, a_j, a_j 顺序入栈的序列，可得所有出栈可能的相对顺序为：

$$a_i, a_j, a_k \quad a_j, a_i, a_k \quad a_j, a_k, a_i \quad a_k, a_i, a_j \quad a_k, a_j, a_i$$

即所有经过栈的可能排列等价于 132 禁位排列，于是原题可描述为：确定一个 $a_n, \cdots, a_k, \cdots, a_1$ 的入栈序列经过一个栈可能生成的出栈序列数 (记为 h_n)

显然有 $h_1 = 1, h_2 = 2$，设后于 a_n 出栈的共有 k 个 $(0 \le k \le n-1)$，注意到由于 a_n 最先入栈，当 a_n 出栈时，栈完全清空，因此后于 a_n 出栈的元素为 $a_1, \cdots, a_k$，先于 a_n 出栈的元素为 $a_k, \cdots, a_{n-1}$，且两部分排列数均满足 132 禁位排列，于是有递推式 $h_n = \sum_{k=0}^{n-1} h_k \cdot h_{n-1-k}$ 其递推式及初始值即为标准 Catalan 数初始值及递推式，同题 5.c 中关于 g_n 求解过程可得：$h_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

8. *有 n 个木块，每块长度为 1（不考虑厚度），质量相同。把它们一个一个垒在一个桌子上，如下图所示，每层只放一个木块。在所有木块保持稳定的前提下，最顶层木块的最右端与桌子边缘的距离最多是多少？*

解　（利用贪心算法求解）不妨将木块自上而下编号为 $1, 2, \cdots, n$，设木块质量为 G，第 k 个木块右端相对于第 k+1 个木块右端的伸出量为 x_k, 前 k 个木块公共重心距第 k 个木块左端为 g_k, 则显然有 $x_1 = \frac{1}{2}, g_1 = \frac{1}{2}$

考虑 k 个木块 $(k \ge 2)$ 的情形，首先对前 k-1 个木块，为保持平衡，应有前 k-1 个木块公共重心位于第 k 个木块右端点，于是由力矩公式有:$g_k = \frac{\frac{1}{2}\cdot G + 1\cdot(k-1)G}{kG} = 1 - \frac{1}{2k}$

为使得总伸出量最大，令前 k 个木块的公共重心位于第 k+1 个木块右侧，则有第 k 个木块右端相对于第 k+1 个木块右端的伸出量为 $x_k = 1 - g_k = \frac{1}{2k}$

如此进行下去，最终将前 n 个木块的公共重心放置于桌面右端，则有总伸出量为 $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$