组合数学 Homework7

提交者：游昆霖　学号：2020K8009926006

1. 证明：对任意集合 $S \subset \{1,2,\ldots,n\}$，只要 $|S| \geq \log_2 n + \log_2 \log_2 n + 1$，就必然存在集合 $T_1, T_2 \subseteq S, T_1 \cap T_2 = \phi, \sum_{t_1 \in T_1} t_1 = \sum_{t_2 \in T_2} t_2$。

证明　记 $Sum(T) = \sum_{z \in T} z$, 则取 $T \subseteq S$，有 $0 \leq Sum(T) \leq n|S|$

又因 $T \subseteq S$,T 有 $2^{|S|}$ 种可能；

$\because f(x) = 2^x - nx - 1$，令 $f'(x) > 0$，则 $x > log_2 n + log_2 log_2 e$;

$\therefore$ 当 $x \geq \log_2 n + \log_2 \log_2 n + 1$ 时，有 $f'(x) > 0$

$\therefore 2^{|S|} - n|S| - 1 \geq nlog_2 n - nlog_2 log_2 n - n - 1 > 0$(当 n$\geq 5$)

由抽屉原理，$\exists A \neq B \subseteq S, s.t. Sum(A) = Sum(B)$;

取 $T_1 = A \backslash (A \cap B), T_2 = B \backslash (A \cap B)$, 即有 $T_1, T_2 \subseteq S, T_1 \cap T_2 = \emptyset, Sum(T_1) = Sum(T_2)$

当 $n = 1,2,3,4$ 时，枚举易证。　□

2. 证明：对任意集合 $S \subset \{1,2,\ldots,64\}$，$|S| = 9$，都必然存在集合 $T_1, T_2 \subset S, T_1 \cap T_2 = \emptyset, \sum_{t_1 \in T_1} t_1 = \sum_{t_2 \in T_2} t_2$。

证明　$\because |S| = 9$, 记其中元素从小到大依次为 $a_1, ..., a_9$, 若存在 S 的不同子集 $T_1, T_2, s.t. Sum(T_1) = Sum(T_2)$, 必有 $Sum(T_i) \leq a_2 + \cdots + a_9$, 故对任意可能成立的 T, 有 $1 \leq Sum(T) \leq 59 + \cdots + 64 = 482$，即共 482 个“抽屉”;

又因对 S，满足 $T \subseteq S, Sum(T) \leq a_2 + \cdots + a_9$ 的 T 有 $2^{|S|} - 2 = 510$ 种可能;

由抽屉原理，$\exists A, B \subseteq S, s.t. Sum(A) = Sum(B)$

取 $T_1 = A \backslash (A \cap B), T_2 = B \backslash (A \cap B)$, 即有 $T_1, T_2 \subseteq S, T_1 \cap T_2 = \emptyset, Sum(T_1) = Sum(T_2)$　□

3. 某人用 64 天读了 100 页书，其中每天读的页数是一正整数，当 p 取哪些值时，一定存在连续的若干天，在这些天此人正好读了 p 页书？对满足条件的 p 给出证明，不满足条件的 p 给出反例。

解　记 S_i 表示前 i 天所看页数，则有 $1 \leq S_1 < S_2 < \cdots < S_64 = 100$，以下对 p 进行分类讨论：

(1) 当 $1 \leq p \leq 28$ 时，若 $\exists S_i = p$，成立, 否则 $\forall i, S_i, S_i + p$ 均不等于 p，且有 $1 \leq S_1, ..., S_{64}, S_1 + p, ..., S_{64} + p \leq 100 + p \leq 128$,即“抽屉”小于等于 127 个,而“苹果”有 128 个;由抽屉原理,$\exists i, j \quad s.t. S_j = S_i + p$, 即有连续若干天读 p 页书，成立;

(2) 当 p=29,...,32 时，对 S_p 进行分类讨论：

① 若 $S_p \leq 2p - 1$, 若 $\exists 1 \leq i \leq p, s.t. S_i \equiv 0$ 成立，否则 $S_1, ...S_p$ 这 p 个数落在 $\{1, p+1\}, ..., \{p-1, 2p-1\}$ 这 p-1 个抽屉中，由抽屉原理，必有两数落在同一个抽屉中，即相减为 p，成立；

② 若 $S_p \geq 2p$, 定义 $t = 100 - 3p$，考虑抽屉 $\{2p, 3p\}, \{2p+1, 3p+1\}, ..., \{2p+t, 3p+t\}, \{2p+t+1\}, ..., \{3p-1\}$，共 $t + 1 + 3p - 1 - (2p + t) = p$ 个抽屉, 此时此时有 $S_p, ..., S_{64}$ 这 65-p 个数落在 p 个抽屉里，因为 $65 - p > p$，由抽屉原理，必有两数落在同一个抽屉中（且不等），即相减为 p，成立

(3) 当 p=33,...,36 时，可举出反例：$S_1 = 1, ...S_{p-1} = p - 1, S_p = p + 36, ...S_{64} = 100$

(4) 当 $37 \leq p \leq 64$ 时，有 $S_p \leq 100 - (64 - p) = 36 + p$，若 $\exists 1 \leq i \leq p, s.t. S_i \equiv 0$, 由于 $2 \times p > 36 + p$，故 $S_i = p$，成立；否则模 p 意义下只有 p-1 个抽屉，即 $\exists i < j, s.t. S_i \equiv S_j (\mod p)$, 由于 $2 \times p > 36 + p$，即 $S_j - S_i = p$, 成立；

(5) 当 $p \geq 65$ 时，只需使得 $S_1, ...S_{64}$ 分取模 p 意义下 $1, ..., p-1$ 的不同数，则任意二者相减不为 p，即给出反例。例如当 p=65 时，取 $S_1 = 36, S_2 = 37, ..., S_{29} = 64, S_{30} = 66, ..., S_{64} = 100$.

4. 平面上每个点都以红蓝两种颜色染色。求证：存在两个相似比为 2011 的相似三角形，每个三角形的三个顶点同色。

证明 以半径 1 和 2011 分别做两个同心圆，分别记作 O_1, O_2, 在 O_1 上任取 9 点，由抽屉原理，必有 5 点同色，记为 A, B, C, D, E，过同心圆圆心和对应点的射线分别交 O_2 于 A', B', C', D', E'，则由抽屉原理，其中必有三点同色，不妨记为 A', B', C'，则有 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，相似比为 2011，且每个三角形三顶点共色。 □

5. 证明下列命题：

a. $R(3,4) = 9$；

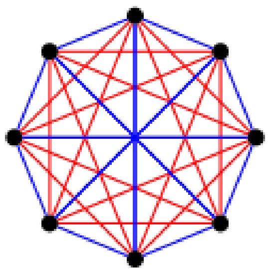
b. $R(4,4) \leq 18$。

证明 a. 首先对完全图任一点所引出的边进行讨论：

(1) 若存在一个点引出至少 4 条红边，考虑对应 4 个点之间边的着色情形：若存在红边，则存在红色的 K_3; 否则全为蓝边，存在蓝色 K_4

(2) 若存在一个点引出至少 6 条蓝边，考虑对应 6 个点之间边的着色情形：由于 $R(3,3) = 6$，故 6 点的边或存在红色 K_3，或存在蓝色 K_3，结合原始点，即存在蓝色 K_4; 然后考虑每个点引出 3 条红边，6 条蓝边的 K_9:

由于此时红边总数为 $\frac{3\times9}{2}$，蓝边总数为 $\frac{6\times9}{2}$，均不为整数，即不存在这样的 K_9，故对任意 K_9，必存在某一点，或引出至少 4 条红边，或引出至少 6 条蓝边，由上述讨论，可得 $R(3,4) \leq 9$; 且对 K_8，可给出以下既不存在蓝色 K_3，也不存在红色 K_4 的反例（与图片对应，互换红蓝，由对称性不改变结论）：



b. 利用 Ramsey 递推不等式，$R(n,m) \leq R(n-1,m)+R(n,m-1)$, 有 $R(4,4) \leq R(3,4)+R(4,3) = 18$. □

6. 证明：给定正整数 d，存在正整数 N，使得将 $1, 2, \ldots, N$ 任意 d 染色时，都存在四个互不相同的正整数 x, y, z, w，它们颜色相同，且 $xy = zw$。

证明 首先考虑第一象限平面点阵，其中格点 (x, y) 对应正整数 $2^x \cdot 3^y$, 取矩形宽为 d+1，则边上格点必有一对同色；由于总共 d 中颜色，且每种颜色的一对同色点位置可能性为 $\binom{d+1}{2}$，取矩形长为 $d\binom{d+1}{2}$, 则必存在两列均有一对颜色、位置相同的同色点，将这四个点从左下角顺时针依次记为

$A, B, C, D,$ ，分别对应 x, z, y, w, 且 A, C 对应坐标为 $(i, j), (l, k)$，则有 $xy = zw = 2^{i+l}3^{j+k}$; 故存在满足题意的 N，取 $N \geq 2^l 3^k$ 即可 $\square$

7. 对平面上的整点二染色，证明对任意正整数 m, n，存在集合 $S, T \subset \mathbb{Z}$，满足 $|S| \geq m, |T| \geq n$，S 和 T 中的所有元素分别构成两个等差数列，且网格图 $S \times T \subseteq \mathbb{Z}^2$ 中所有格点同色。

证明 固定 T，观察 S，即平行于 x 轴的一列格点，由范德瓦尔登定理，$\forall m \in \mathbb{Z}$，存在长度为 m 的同色等差数列，将该数列首尾点中全部点作为一个 block，记该 block 长度为 l, 则 $l \leq W(2, m)$，且该 block 染色共有 2^l 种可能；

改变 T，对不同 T 对应的 block，由范德瓦尔登定理，$\forall n \in \mathbb{Z}$，存在长度为 n 的同色等差数列，则该数列首尾点间全部点数量为 k，则 $k \leq W(2^l, n)$;

将同色等差 block 的纵坐标作为集合 T，将 block 内同色等差数列横坐标作为集合 S，则有 $S \times T$ 中所有格点同色。 $\square$

8. 我们用概率方法证明以下结论：存在足够大的正整数 n，使得当 n 个人两两进行一场比赛（没有平局）时，存在一种比赛结果（指任意两人都已分出胜负），使得对任意 4 个人都存在一个人将他们全部打败。下面我们用概率方法证明这个结论，考虑独立等概率随机地选取每场比赛的结果，试回答下列问题：

a. 总共 n 个人互相比赛，任取 4 个人，计算不存在一个人将他们全部打败的概率；

b. 证明存在充分大的 n，此时对任意 4 个人都存在一个人将他们全部打败的概率大于 0，从而证明该结论。

解 a. 取 4 个人后，考虑剩下的每一个人，无法将 4 个人全部打败概率为 $1 - (\frac{1}{2})^4 = \frac{15}{16}$, 故不存在一个人将 4 个人全部打败的概率为 $(\frac{15}{16})^{n-4}$;

b. 定义比赛结果为随机变量 K，若比赛结果对任意 4 个人存在一个人将他们全部打败，记为“good”，否则记为“bad”。则有 $Pr(Kgood) = 1 - Pr(Kbad)$

记对 4 个人 i_1, i_2, i_3, i_4,不存在一个人把他们全部打败为事件 $A(i_1, i_2, i_3, i_4)$; 则由 (a) 有 $A(i_1, i_2, i_3, i_4) = (\frac{15}{16})^{n-4}$：故：

$$Pr(Kbad) = Pr(\bigcup_{1 \leq i_1 < \cdots < i_4 \leq n} A(i_1, i_2, i_3, i_4)) \quad \leq \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_4 \leq n} Pr(A(i_1, i_2, i_3, i_4)) = \binom{n}{4}(\frac{15}{16})^{n-4}$$

当 n 充分大，有 $Pr(Kbad) < 1$，则 $Pr(Kgood) > 0$，即存在一种比赛结果，任意四个人都存在一个人将其全部打败。