组合数学 08.30 思考题

提交者：游昆霖　学号：2020K8009926006

1. 现有 A,B 两人分一个蛋糕，A 和 B 对这个蛋糕的不同部分有自己的偏好。试问能否将这个蛋糕分成两份，A,B 各拿一份，并且要求 A 拿到的蛋糕在他自己的偏好下不少于整个蛋糕的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，B 拿到的部分在他自己的偏好下不少于整个蛋糕的 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$。

问题形式化表述如下：现有非负整数 $f_1.f_2$ 满足

$$\int_0^1 f_i(x)dx = 1(i=1,2)$$

是否存在区间 *[0,1]* 的子集 A,B 使得 $A\bigcup B=[0,1], A\bigcap B=\varnothing$ 且

$$\int_A f_1(x)dx \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \int_B f_2(x)dx \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2}?$$

试为这两人的要求设计一个算法，或证明划分不存在。

解

首先，注意到：黄金分割率为斐波那契数列递推关系的特征根，具体如下：

设斐波那契数列第 n 项为 F_n，则 $F_1=F_2=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$;

由特征根方程可得：$F_n=\alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+\beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

结合 F_1,F_2 可确定 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$;

当 $n\gg 1$ 时,β 项衰减震荡消失，即可得 $\frac{F_n}{F_{n+1}}\to\frac{\sqrt{5}-1}{2}$;

根据以上性质，可确定分蛋糕算法如下：

Algorithm 1 Divide cake by golden ratio

输入： $f_1(x)f_2(x)$\\\\ A 和 B 对应的蛋糕函数

输出： n 满足黄金分割比的分割蛋糕方法

function Divide（）

  $F_1\leftarrow 1, F_2\leftarrow 1, n\leftarrow 1;$

  while true **do**

    Let $0=x_1<x_2<\cdots<x_{F_{n+1}+1}=1$,s.t.$\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx=\cdots=\int_{x_{F_{n+1}}}^{x_{F_{n+1}+1}} f_1(x)dx=\frac{1}{F_{n+1}}$

    $\exists 0\leq x_{i_1}<\cdots<x_{i_{F_{n+1}}}\leq 1, B=\bigcup_{k=1}^{F_n}[x_{i_k},x_{i_{k+1}}]$,s.t. $\int_B f_2(x)$ 取得最大值;

    \\\\ A 将蛋糕按自己价值标准平均分割为 F_{n+1} 块；B 取其中对自己价值较大的 F_n 块；

    if $\int_B f_2(x)\geq\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ **then** break；\\\\ 若 B 所取蛋糕满足条件，跳出循环

    else $n\leftarrow n+1, F_{n+1}\leftarrow F_n+F_{n-1}$

    end if

  end while

  return n

end function

注：由上述斐波那契前后两项比值趋于黄金分割比可知，该算法进行下去，最终能求得满足题意的解法。