组合数学 10.04 思考题

提交者：游昆霖　学号：2020K8009926006

1. *n*n 方格图用 1*2 或 2*1 的多米诺牌进行覆盖，总共有多少种可能性？请给出显式表达式或估计。*

解　显然，当且仅当 n 为偶数的时候有非零的多米诺牌覆盖情形数。一般地，考虑 $m*n$ 方格图（m,n 均为偶数）的多米诺牌覆盖情形。

不妨用每个方格中心点代表该方格，用连接水平或垂直相邻点的线代表多米诺牌，则原问题可转化为如下形式：

考虑一个 $m*n$ 的点阵（m,n 均为偶数），规定一个点作为且仅作为一条边的端点，所有边均为水平或竖直的，求满足以上条件的边的排布方式。

由于所有的边都是相邻点的连线，可以考虑将该点阵二染色，使得相邻点异色（例如，染色如黑白棋盘），则该点阵可转化为二分图，且黑点数 = 白点数 $=\frac{mn}{2}$, 此时，每种满足条件的边的排布方式（方便起见，以下称为可行排布）对应二分图的一种完美匹配（反之不成立，此因黑点和白点不是任意相邻，不可任意连接）

对黑点和白点，分别从左上角向右下角逐行编码，记为 $a_i, b_i \quad (i=1,2,\cdots,\frac{mn}{2})$，则一种可行排布对应一个置换 σ，使得 a_i 与 $b_{\sigma(i)}$ 相邻，用 $\sim$ 表示相邻，则只需求

$$F_{m,n}=\sum_{\sigma,a_i\sim b_{\sigma(i)},\forall i}1$$

已知 $\frac{mn}{2}\times\frac{mn}{2}$ 矩阵行列式可表达为 $detK=\sum_\sigma sgn(\sigma)k_{1,\sigma(1)}\cdots k_{\frac{mn}{2},\sigma(\frac{mn}{2})}$

注意到：$sgn(\sigma)$ 可表示为 $(-1)^k$，其中 k 为该置换可分解的对换个数。观察得到，若一个可行排布复合奇数次对换仍为一个可行排布，则必将增加 2 条竖直边 (在 mod4 的意义下)，且符号乘-1，考虑到最平凡的可行分布 $\sigma_0: i\to i$，符号为 1，可为表示竖直边的元素赋权 i 以消去 σ 符号的改变，为使以上两式有相同形式，我们可对 K 的元素进行以下赋值

$$k_{i,j}=\begin{cases}1 & a_i\sim b_j,\text{且连线水平}\\ i & a_i\sim b_j,\text{且连线竖直}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

此时，K 即为该点阵的邻接矩阵（其中，表示竖直边的元素替换为 i 以消去 $sgn(\sigma)$），不妨将该矩阵称为点阵的二部邻接矩阵，则只需求 $detK$

对该点阵重新编码，$s.t. \quad a_i=c_i, b_i=c_{i+\frac{mn}{2}}\forall i=1,\cdots,\frac{mn}{2}$ 此时 $mn\times mn$ 矩阵 $C_{m,n}=\begin{bmatrix}0,K\\K^t,0\end{bmatrix}$ 即为该点阵的邻接矩阵（在将权重 i 考虑为 1 的情况下），且 $detC_{m,n}=(detK)^2$

邻接矩阵的行列式与编码顺序无关，且点阵图 G 是长度为 m 的直线点列与长度为 n 的直线点列的笛卡尔积。记这两个点列的邻接矩阵分别为 C_m, C_n，且 C_m, C_n 的特征值和特征向量分别为 $\lambda_m, \vec{v_m}$ 与 $\lambda_n, \vec{v_n}$，则 $C_{m,n}=C_m\otimes I_n+iI_m\otimes C_n, \quad C_{m,n}$ 的特征值为 $\lambda_m+i\lambda_n$;[注记 1]

注意到 $C_m = J_m + J_m^{-1}$ 其中 J_m 为 m 阶（上）若尔当块，其逆为 m 阶下若尔当块（不考虑边界的情况下），方便起见，先计算无穷阶若尔当块的特征值 μ，则 $\lambda_m = \mu + \mu^{-1}$

由 C_m 拓展到无穷阶的特征值可知，C_m 的特征向量必为 $\vec{w_1} = [\cdots, \mu^{-1}, 1, \mu^1, \cdots]$ 和 $\vec{w_2} = [\cdots, \mu^1, 1, \mu^{-1}, \cdots]$ 的线性组合。同时考虑边界条件，若 $\vec{v} = [v_1, \cdots, v_m]$ 为 C_m 的特征向量，则应满足 $v_0 = v_{m+1} = 0,$ 注意到 $\vec{v_1} - \vec{v_2}$ 可出现 0 项，将其作为 v_0，则同时应当满足 $v_{m+1} = \mu^{m+1} - \mu^{-m-1} = 0,$ 故解得 $\mu = e^{i\pi/m+1}, \quad \lambda_m = 2cos\frac{i\pi}{m+1} \quad (i = 1, \cdots, m),$ 完全同理，有 $\lambda_n = 2cos\frac{j\pi}{m+1} \quad (j = 1, \cdots, n)$

由特征多项式及多元韦达定理易知，矩阵的行列式为所有特征值（计算重数）的乘积，于是我们可以得到以下式子：

$$\begin{aligned} detK &= \sqrt{detC_{m,n}} \\ &= \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\sqrt{2cos\frac{i\pi}{m+1} + 2icos\frac{j\pi}{n+1}} \end{aligned}$$

该结果即为所求。

[注记 1]：笔者离散数学与线性代数课程对部分相关知识进行了介绍，但未深入学习图的笛卡尔积与对应邻接矩阵关系式，以及相关张量知识，本自然段内容通过网上查阅代数图论与张量相关文献获得，此处不加证明的加以引用。