组合数学 Homework5

提交者：游昆霖　学号：2020K8009926006

1. 设 $p(n)$ 表示分拆数，试比较 $p(n)-p(n-1)$ 和 $p(n-1)-p(n-2)$ 的大小。

解　由于 $p(n)-p(n-1)$ 表示 n 不含 1 的分拆数，故有：

$$p(n)-p(n-1)=\sum_{m=1}^{[\frac{n}{2}]}p(n-m,m)$$

$$p(n-1)-p(n-2)=\sum_{m=1}^{[\frac{n-1}{2}]}p(n-1-m,m)$$

二者相减则有：

$$[p(n)-p(n-1)]-[p(n-1)-p(n-2)]\geq\sum_{m=1}^{[\frac{n-1}{2}]}[p(n-m,m)-p(n-1-m,m)] \tag{1}$$

注意到，任意一个 n-1-m 的 m 分拆，只需在最大的分拆部分（即 x_1）处加 1，即得到了一个 n-m 的 m 分拆，因此有 $p(n-m,m)\geq p(n-1-m,m)$;

求和即得 $p(n)-p(n-1)\geq p(n-1)-p(n-2)\quad n\geq 3$

2. 设 $p(n,m)$ 表示恰好有 m 个正整数组成的 n 的分拆个数，$q(n,m)$ 表示 n 的分拆中最大的数恰好是 m 的分拆个数。

a. 证明：$p(n,m)=q(n,m)$;

b. 证明：$P(x)=\sum_{n\geq 0}p(n,m)x^n=x^m\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-x^k}$。提示：利用上一问的结论。

证明　a. 考虑 Ferrers diagram，由于恰好有 m 个正整数组成的 n 的分拆与格子数为 n，列数为 m 的 Ferrers diagram 一一对应，自底向上，将第 k 行作为 n 的分拆中第 k 个数，则每个 Ferrers diagram 均与 n 的分拆中最大的数恰好是 m 的分拆一一对应。故有 $p(n,m)=q(n,m)$，事实上，左端一个分拆与右端一个分拆一一对应，其 Ferrers diagram 互相共轭。

b. 考虑将分拆表示为坐标格式，k_i 表示分拆中 i 出现次数，则有:

$$q(n,m)=\#\{(k_1,k_2,\cdots,k_m)|1\cdot k_1+2\cdot k_2+\cdots+m\cdot k_m=n,k_i\geq 0,i=1,2,\cdots,m-1,k_m>0\}$$

由（a）结论有 $p(n,m)=q(n,m)$，故

$$\begin{aligned}P(x)&=\sum_{n\geq 0}p(n,m)x^n=\sum_{n\geq 0}q(n,m)x^n\\&=(1+x+x^2+\cdots+x^{k_1}+\cdots)\times(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k_2}+\cdots)\times\cdots\\&\quad\times(x^m+x^{2m}+\cdots+x^{mk_m}+\cdots)\\&=x^m\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-x^k}\end{aligned}$$

□

3. 证明：$\lceil \frac{n}{m} \rceil = \lfloor \frac{n+m-1}{m} \rfloor$。

证明 首先有 n,m 均为正整数，进行分类讨论如下：

a. 若 $m|n$，即 $n = km, k \in \mathbb{N}$，等式左边 $= k$，等式右边 $= \rfloor k + 1 - \frac{1}{m} \lfloor = k$, 成立；

b. 若 $m \nmid m$, 即 $n = km + t, k, t \in \mathbb{N}$ 则有：

$$\begin{aligned}\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor &= \frac{n}{m} - \{\frac{t}{m}\} + 1 - \frac{n+m-1}{m} + \{\frac{t-1}{m}\} \\ &= -\frac{t}{m} + \frac{1}{m} + \frac{t-1}{m} = 0\end{aligned}$$

综上可得：等式恒成立。 □

4. 证明：$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$。

证明 设 $\lfloor x \rfloor = k$，进行分类讨论如下：

a. 若 $k \le x < k + \frac{1}{2}$，则有 $k + \frac{1}{2} \le x < k + 1 \quad 2k \le 2x < 2k + 1$

故等式左边 $= k + k = 2k$，等式右边 $= 2k$, 成立

b. 若 $k + \frac{1}{2} \le x < k + 1$，则有 $k + 1 \le x < k + \frac{3}{2} \quad 2k + 1 \le 2x < 2k + 2$

故等式左边 $= k + k + 1 = 2k + 1$，等式右边 $= 2k + 1$, 成立

综上可得：等式恒成立。 □

5. 试计算 $2^{2021} \mod 11$。

解 由于 2 和 11 互素，由费马小定理可得：$2^{10} \equiv 1(mod 11)$; 因 $2021 = 202 * 10 + 1$, 故 $2^{2021} \equiv 1 \times 2^1 \equiv 2(mod 11)$;

6. 证明：任给 $m, n \in \mathbb{N}$，都有 $m!n!(m+n)!|(2m)!(2n)!$。

证明 记 $\alpha_p(n) := max\{s|p^s|n\}$, 则 $\alpha_p(n) = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \cdots + [\frac{n}{p^s}]$,

且有 $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} = \prod_{p \quad prime} p^{\alpha_p(2m)+\alpha_p(2n)-\alpha_p(m)-\alpha_p(n)-\alpha_p(m+n)}$

首先证明引理：$[2a] + [2b] \ge [a] + [b] + [a+b]$

设 $a = m + x, b = n + y, m, n \in \mathbb{Z}, 0 \le x, y < 1$, 则 $[2a] + [2b] = 2m + 2n + [2x] + [2y]$, $\quad [a] + [b] + [a+b] = 2m + 2n + [x+y]$

① 当 x 和 y 均小于 $\frac{1}{2}$ 时，有 $[2x] + [2y] = [x+y] = 0$, 不等式成立；

② 当 x 或 y 有一者大于等于 $\frac{1}{2}$ 时，有 $[2x] + [2y] \ge [x] + [y] + 1 \ge [x+y]$

综上，引理证毕。

应用引理立得：$\forall p(prime)\forall r \in \mathbb{N}, [\frac{2m}{p^r}] + [\frac{2n}{p^r}] - [\frac{m}{p^r}] - [\frac{n}{p^r}] - [\frac{m+n}{p^r}] \ge 0$

对 r 从 1 到无穷求和可得：$\alpha_p(2m) + \alpha_p(2n) - \alpha_p(m) - \alpha_p(n) - \alpha_p(m+n)$

由 p 任意性，则有 $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 的素数分解式中，素因子指数均非负，也即 $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 为整数。

注记：事实上 $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 为二元卡特兰数 $C(m,n)$, 由组合意义显然为整数。 □

7. 利用二次互反律，计算 *Legendre* 符号：$(\frac{20}{67})$。

解 $(\frac{20}{67}) = (\frac{5 \times 2^2}{67}) = (\frac{5}{67})$

由二次互反律有：$(\frac{5}{67})(\frac{67}{5}) = (-1)^{\frac{4 \times 66}{4}} = 1$

又因为 $(\frac{67}{5}) = (\frac{2}{5}) = -1$(此因 $5 = 8 \times 1 - 3$);

故 $(\frac{5}{67}) = -1$

8. 设 p 是奇素数，计算 *Legendre* 符号：$\left(\frac{3}{p}\right)$。

解

$$\text{由二次互反律有:}(\frac{3}{p})(\frac{p}{3}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1, & p = 4k+1 \\ -1, & p = 4k+3 \end{cases}$$

$$\text{又} \because (\frac{p}{3}) = \begin{cases} (\frac{1}{3}) = 1, & p = 3t+1 \\ (\frac{2}{3}) = -1, & p = 3t+2 \end{cases}$$

$$\therefore (\frac{3}{p}) = \begin{cases} 1, & p = 12k \pm 1 \\ -1, & p = 12k \pm 5 \end{cases} \quad \text{p 为奇素数}$$