组合数学 Homework1

提交者：游昆霖　学号：2020K8009926006

1. 计算 $\binom{-2}{m}$, 并验证它是 $(1+x)^{-2}$ 展开式的第 m 项的系数。

解

$$\binom{-2}{m} = \frac{(-2)^{\underline{m}}}{m!} = \frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-m+1)}{m!} = \frac{(-1)^m(m+1)!}{m!} = (-1)^m(m+1)$$

$$\text{由麦克劳林展开式} \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n + \cdots$$

故$(1+x)^{-2}$展开式第 m 项系数为

$$\frac{[(1+x)^{-2}]^{(m)}}{m!} = \frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-m+1)}{m!} = \frac{(-1)^m(m+1)!}{m!} = (-1)^m(m+1)$$

与 $\binom{-2}{m}$ 相等，证毕。

2. 证明：$(1+x)^\alpha = \sum_{i\geq 0}\binom{\alpha}{i}x^i$, 其中 $0<|x|<1$ 且 $\alpha \in \mathbb{R}$.

证明

$$\text{由麦克劳林展开式} \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n + \cdots$$

故$(1+x)^\alpha$展开式第 $i(i>0)$ 项系数为

$$\frac{(1+x)^{\alpha(i)}}{i!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} = \frac{\alpha^{\underline{i}}}{i!} = \binom{\alpha}{i}$$

展开式首项系数 $1 = \binom{\alpha}{0}$

展开式与求和式 x 各次方对应系数相等，故两式相等。

□

3. 计算下列和式：

$a.\sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k}, \sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1}, \sum_{k\geq 0}\binom{n}{3k+2}$;

$b.\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$;

$c.\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\cdot\binom{n}{i}$;

$d.\sum_{i=0}^{n}i^3$.

解 (a)

$$\because w = e^{i\frac{2\pi}{3}}\text{为三次单位根}$$
$$\therefore 1 + w + w^2 = 0$$
$$\text{由第 2 题结论}(1+x)^\alpha = \sum\nolimits_{i\geq 0}\binom{\alpha}{i}x^i\text{分别取 } x = 1, w, w^2 \text{ 即有}$$
$$(1) \quad (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots;$$
$$(2) \quad (1+w)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}w + \binom{n}{2}w^2 + \binom{n}{3} + \cdots;$$
$$(3) \quad (1+w^2)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}w^2 + \binom{n}{2}w + \binom{n}{3} + \cdots;$$
$$\therefore \sum\nolimits_{k\geq 0}\binom{n}{3k} = \frac{1}{3}[(1+1)^n + (1+w)^n + (1+w^2)^n]$$
$$= \frac{1}{3}[2^n + e^{i\frac{n\pi}{3}} + e^{i\frac{-n\pi}{3}}]$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{3}(2^n+2) & \text{if } n = 6k, \\ \frac{1}{3}(2^n+1) & \text{if } n = 6k+1 \text{ or } 6k+5, \\ \frac{1}{3}(2^n-1) & \text{if } n = 6k+2 \text{ or } 6k+4, \\ \frac{1}{3}(2^n-2) & \text{if } n = 6k+3. \end{cases} (k \in \mathbb{R})$$
$$\sum\nolimits_{k\geq 0}\binom{n}{3k+1} = \frac{1}{3}[(1+1)^n + w^2(1+w)^n + w(1+w^2)^n]$$
$$= \frac{1}{3}[2^n + e^{i\frac{(n-2)\pi}{3}} + e^{i\frac{-(n-2)\pi}{3}}]$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{3}(2^n+2) & \text{if } n = 6k+2, \\ \frac{1}{3}(2^n+1) & \text{if } n = 6k+1 \text{ or } 6k+3, \\ \frac{1}{3}(2^n-1) & \text{if } n = 6k \text{ or } 6k+4, \\ \frac{1}{3}(2^n-2) & \text{if } n = 6k+5. \end{cases} (k \in \mathbb{R})$$
$$\sum\nolimits_{k\geq 0}\binom{n}{3k+2} = \frac{1}{3}[(1+1)^n + w(1+w)^n + w^2(1+w^2)^n]$$
$$= \frac{1}{3}[2^n + e^{i\frac{(n+2)\pi}{3}} + e^{i\frac{-(n+2)\pi}{3}}]$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{3}(2^n+2) & \text{if } n = 6k+4, \\ \frac{1}{3}(2^n+1) & \text{if } n = 6k+3 \text{ or } 6k+5, \\ \frac{1}{3}(2^n-1) & \text{if } n = 6k \text{ or } 6k+2, \\ \frac{1}{3}(2^n-2) & \text{if } n = 6k+1. \end{cases} (k \in \mathbb{R})$$

解 (b)（解法一）

$$首先，由公式k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}可得: \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=n\cdot 2^{n-1}; \qquad (1)$$

$$另一方面，k(k-1)\binom{n}{k}=n(k-1)\binom{n-1}{k-1}=n(n-1)\binom{n-2}{k-2};$$

$$故\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}=\sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}=n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}=n(n-1)2^{n-2}; \qquad (2)$$

$$将式\ (1)、(2)\ 相加即得：\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$$

解 (b)（解法二）

$$对(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k两侧求一阶、二阶导可得：$$

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} \qquad (1)$$

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2} \qquad (2)$$

$$式（1）（2）取\ x=1\ 并相加即得：\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$$

解 (c)（解法一）

$$由公式\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}可得：$$

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

解 (c)（解法二）

$$对(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{i}x^i两侧求积分可得：$$

$$\frac{1}{1+x}^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}x^{i+1}$$

$$取上式两侧从\ 0\ 到\ 1\ 的定积分即得：\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\cdot\binom{n}{i}=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

解 (d)（解法一）

先证平方和公式，由$(i+1)^3-i^3=3i^2+3i+1$，对 i=1,2,$\cdots$,n 各式累加并整理，即得:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2=\frac{1}{3}[(n+1)^3-1]-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

再由$(i+1)^4-i^4=4i^3+6i^2+4i+1$，对 i=1,2,$\cdots$,n 各式累加并整理，即得:

$$\sum_{i=0}^{n} i^3=\frac{1}{4}[(n+1)^4-1]-\frac{3}{2}\sum_{i=0}^{n} i^2-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{4}=[\frac{n(n+1)}{2}]^2$$

解 (d)（解法二）

$$\because i^3 = i(i-1)(i-2) + 3m(m-1) + m$$
$$\therefore \sum_{i=0}^{n} i^3 = 6\sum_{i=0}^{n}\binom{m}{3} + 6\sum_{i=0}^{n}\binom{m}{2} + \sum_{i=0}^{n}\binom{m}{1};$$
$$\text{由朱世杰恒等式可知：} \sum_{i=0}^{n} i^3 = 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$$

4. 证明：对任意 $k \in \mathbb{N}, x^k$ 可以表示为$x^{\underline{k}}, x^{\underline{k-1}}, \cdots, x$ 的线性组合。

证明

$$\text{通过强归纳法证明：显然，当 } k = 0, 1 \text{ 时成立；}$$
$$\text{假设对 } 1 \le k \le m \text{ 成立，即 } x^m, x^{m-1}, \cdots x \text{ 均可表示为 } x^{\underline{m}}, x^{\underline{m-1}}, \cdots x \text{ 的线性组合；}$$
$$\text{当 } x = m+1 \text{ 时，} x^{m+1} - x^{\underline{m+1}} \text{ 为关于 x 的 m 次整系数多项式，}$$
$$\text{由假设，多项式中各项均可表示为 } x^{\underline{m}}, x^{\underline{m-1}}, \cdots x \text{ 的线性组合；}$$
$$\text{则 } x^{m+1} \text{ 可表示为 } x^{\underline{m+1}}, x^{\underline{m}}, \cdots x \text{ 的线性组合；}$$
$$\text{由强归纳法可知：对任意 } k \in \mathbb{N}\ x^k \text{ 可以表示为} x^{\underline{k}}, x^{\underline{k-1}}, \cdots, x \text{ 的线性组合。}$$

□

5. 证明：$(\frac{n}{k})^k \le \binom{n}{k} \le (\frac{en}{k})^k$，其中，$k$ 为正整数且 $k \le n$。

证明

$$\text{先证左边：} \because \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdots\frac{n-k+1}{1};$$
$$\text{对其中第 i 项均有} \frac{n-i+1}{k-i+1} \ge \frac{n}{k};$$
$$\text{将各式累乘即得左式；}$$
$$\text{再证右边：} \binom{n}{k} \le \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}$$
$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}(\frac{k}{n})^k \le \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}(\frac{k}{n})^i \le \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}(\frac{k}{n})^i = [(1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}}]^k \le e^k$$
$$\text{整理即得：} \binom{n}{k} \le (\frac{en}{k})^k$$

□

6. *4 名男士和 8 名女士围着一张圆桌就座，如果每两名男士之间恰好有两名女士，一共有多少种就座方法？*

解 先考虑男士座位，圆排列共有 $3! = 6$ 种可能，每种情形对应的女士座位情况有 $8! = 40320$ 种可能，故总共有 $3!8! = 241920$ 种可能。

7. *15 个人围着一张圆桌就座，如果 B 拒绝坐在 A 旁边，一共有多少种就座方法？如果 B 只拒绝坐在 A 右边一共有多少种就座方法？*

解　首先考虑 A 和 B 的位置，有 12 种可能，每种情形对应的其他人就座情况有 $13! = 6227020800$ 种可能，故总共有 $12 \cdot 13! = 74724249600$ 种可能。

8. *在一个聚会上有 15 名男士和 20 名女士，请问有多少种方式形成 10 对男女共舞？*

解　首先考虑参加舞蹈的男士，共有 $\binom{15}{10} = 3003$ 种可能，下面考虑每种情形女士情况：
考虑男士依次从女士中挑选舞伴，共有 $P(20, 10) = 20^{\underline{10}} = 670442572800$ 种可能；
故总共有 $\binom{15}{10}\binom{20}{10}10!$ 种可能

9. *确定下面的多重集合的 10 排列的数目（10 排列指包含 10 个元素的排列）。*

$$S = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\} = \{a, a, a, b, b, b, b, c, c, c, c, c\}$$

解　S 的 10 排列可以被划分为 6 个部分：

$$(1)\{1 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}\text{的 10 排列数，有}\frac{10!}{1!4!5!} = 1260$$
$$(2)\{3 \cdot a, 2 \cdot b, 5 \cdot c\}\text{的 10 排列数，有}\frac{10!}{3!2!5!} = 2520$$
$$(3)\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 3 \cdot c\}\text{的 10 排列数，有}\frac{10!}{3!4!3!} = 4200$$
$$(4)\{2 \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c\}\text{的 10 排列数，有}\frac{10!}{2!3!5!} = 2520$$
$$(5)\{2 \cdot a, 4 \cdot b, 4 \cdot c\}\text{的 10 排列数，有}\frac{10!}{2!4!4!} = 3150$$
$$(6)\{3 \cdot a, 3 \cdot b, 4 \cdot c\}\text{的 10 排列数，有}\frac{10!}{3!4!4!} = 1050$$
$$\text{故 S 的 10 排列个数是}1260 + 2520 + 4200 + 2520 + 3150 + 1050 = 14690$$

10. *考虑大小为 $2n$ 的多重集合$n \cdot a, 1, 2, 3, \cdots, n$，确定它的 n 组合数。*
注：对于多重集合 S，其 n 组合是 S 中的 n 个对象的无序选择。例如对于多重集合 $S = \{2 \cdot a, b, 3 \cdot c\}$，其 3 组合是 $\{2 \cdot a, b\}, \{2 \cdot a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, 2 \cdot c\}, \{b, 2 \cdot c\}, \{3 \cdot c\}$。

解

$\because$ 多重集合中有 n 个相同元素 a，其 n 组合可划分为 n+1 个部分，
分别对应 a 个数为 $0, 1, \cdots, n$ 的情况；
$\therefore$ n 组合数为 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$