组合数学 Homework4

提交者：游昆霖　学号：2020K8009926006

1. *确定在满足下面条件之下给 $1\times n$ 的棋盘着色的方法数：用红色、蓝色和绿色着色，每一种颜色至少用一次，并且红格数能被 3 整除。*

解　假设方案数共有 f_n 种，假设红格个数 i，蓝格个数 j，则绿格个数为 $n-i-j(i+j\le n-1)$；由可重排列公式，所有可能数为

$$f_n=\sum_{\substack{i,j\\ i+j\le n-1,3|i,i\ge 1,j\ge 1}}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$$

设红格、蓝格、绿格生成函数分别为 $A(x),B(x),C(x)$, 由限制则有：

$$A(x)=\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}\cdots=\frac{e^x+e^{wx}+e^{w^2x}}{3}-1$$

$$\text{其中 } w=e^{\frac{2\pi i}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\text{ 为三次单位根}$$

$$B(x)=\sum_{j\ge 1}\frac{x^i}{i!}=x+\frac{x^2}{2!}+\cdots=e^x-1$$

$$C(x)=\sum_{k\ge 1}\frac{x^i}{i!}=x+\frac{x^2}{2!}+\cdots=e^x-1$$

考虑 x^n 项系数，则 t 只能取 $n-i-j$, 由 Vandermonde 恒等式三阶形式可得：

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge 0}\frac{f(n)}{n!}x^n&=A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)\\
&=(e^x-1)^2(\frac{e^x+e^{wx}+e^{w^2x}}{3}-1)\\
&=\frac{1}{3}[e^{3x}+e\frac{3+\sqrt{3}i}{2}x+e^{\frac{3-\sqrt{3}i}{2}x}-5e^{2x}-2e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x}-2e^{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}x}+7e^x+e^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x}+e^{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}x}-3]\\
&=-1-\frac{1}{3}\sum_{n\ge 0}\frac{1}{n!}[3^n+(\frac{3+\sqrt{3}i}{2})^n+(\frac{3-\sqrt{3}i}{2})^n-5\cdot 2^n-2(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})^n-2(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})^n\\
&\quad+7+(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^n+(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^n]\\
&=-1-\frac{1}{3}\sum_{n\ge 0}\frac{1}{n!}[3^n+2\cdot 3^{\frac{n}{2}}cos(\frac{n\pi}{6})-5\cdot 2^n-4\cdot cos(\frac{n\pi}{3})+7+2\cdot cos(\frac{2n\pi}{3})]\end{aligned}$$

对比系数即得:

$$f_n=\begin{cases}0\quad(n=0,1,\cdots 4)\\ -\frac{1}{3}[3^n+2\cdot 3^{\frac{n}{2}}cos(\frac{n\pi}{6})-5\cdot 2^n-4\cdot cos(\frac{n\pi}{3})+7+2\cdot cos(\frac{2n\pi}{3})]\quad(n\ge 5)\end{cases}$$

2. *求由数字 1，2 组成的且能被 3 整除的 n 位数的个数。*

解　该 n 位数被 3 整除等价于各位数之和被 3 整除。首先考虑在 mod3 的意义下 1 和 2 的位数，易知若该数被 3 整除，则 1 和 2 的位数同为 0 或同为 1 或同为 2。由此我们可在 mod3 的意义下对位数进行分类：

设 $w=e^{\frac{2\pi i}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$ 为三次单位根

a. 若 $n=3k\quad(k\in\mathbb{Z})$ 则 mod3 的意义下 1 和 2 的位数同为 0，可能情形数为

$$\sum_{t=0}^{k}\binom{n}{3t}=\frac{1}{3}[(1+1)^n+(1+w)^n+(1+w^2)^n]=\frac{1}{3}[2^n+2cos(\frac{n\pi}{3})]=\frac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}$$

b. 若 $n=3k+1\quad(k\in\mathbb{Z})$ 则 mod3 的意义下 1 和 2 的位数同为 2，可能情形数为

$$\sum_{t=0}^{k-1}\binom{n}{3t+2}=\frac{1}{3}[(1+1)^n+w(1+w)^n+w^2(1+w^2)^n]=\frac{1}{3}[2^n-2cos(\frac{(n-1)\pi}{3})]=\frac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}$$

c. 若 $n=3k+2\quad(k\in\mathbb{Z})$ 则 mod3 的意义下 1 和 2 的位数同为 1，可能情形数为

$$\sum_{t=0}^{k}\binom{n}{3t+1}=\frac{1}{3}[(1+1)^n+w^2(1+w)^n+w(1+w^2)^n]=\frac{1}{3}[2^n-2cos(\frac{(n+1)\pi}{3})]=\frac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}$$

综上, 满足条件 n 位数的个数为：$\frac{2^n+2\cdot(-1)^n}{3}$

3. *求从 1 到 10000 中不能被 4、6、7 或 10 整除的整数个数。*

解　利用容斥原理求解。设 $I=1,2,\cdots,10000,A_1=\{1\leq n\leq 10000|n=4k,k\in\mathbb{Z}\},A_2=\{1\leq k\leq 10000|n=6k,k\in\mathbb{Z}\},A_3=\{1\leq k\leq 10000|n=7k,k\in\mathbb{Z}\},A_4=\{1\leq k\leq 10000|n=10k,k\in\mathbb{Z}\}$

则有

$$|A_1|=\lfloor\frac{10000}{4}\rfloor=2500,|A_1|=\lfloor\frac{10000}{6}\rfloor=1666,|A_1|=\lfloor\frac{10000}{7}\rfloor=1428,|A_1|=\lfloor\frac{10000}{10}\rfloor=1000$$
$$|A_1\cap A_2|=\lfloor\frac{10000}{12}\rfloor=833,|A_1\cap A_3|=\lfloor\frac{10000}{28}\rfloor=357,|A_1\cap A_4|=\lfloor\frac{10000}{20}\rfloor=500,$$
$$|A_2\cap A_3|=\lfloor\frac{10000}{42}\rfloor=238,|A_2\cap A_4|=\lfloor\frac{10000}{30}\rfloor=333,|A_3\cap A_4|=\lfloor\frac{10000}{70}\rfloor=142,$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=\lfloor\frac{10000}{84}\rfloor=119,|A_1\cap A_2\cap A_4|=\lfloor\frac{10000}{60}\rfloor=166,|A_1\cap A_3\cap A_4|=\lfloor\frac{10000}{140}\rfloor=71,$$
$$|A_2\cap A_3\cap A_4|=\lfloor\frac{10000}{210}\rfloor=47,|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=\lfloor\frac{10000}{420}\rfloor=23,$$

由容斥原理则有：

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|&=|I|-\sum_{i=1}^{4}|A_i|+\sum_{1\leq i<j\leq 4}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leq i<j<k\leq 4}|A_i\cap A_j\cap A_k|+|\bigcap_{i=1}^{4}A_i|\\&=5429\end{aligned}$$

4. *确定满足 $x_1+x_2+x_3+x_4=14,0\leq x_i\leq 8,x_i\in\mathbb{N},i=1,2,3,4$ 的四元组 (x_1,x_2,x_3,x_4) 的个数。*

解

$$\begin{aligned}&\text{设}I=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1+x_2+x_3+x_4=14,x_i\in\mathbb{N},i=1,2,3,4\},\\&A_k=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)|x_1+x_2+x_3+x_4=14,x_k\geq 9,x_i\in\mathbb{N},i=1,2,3,4\}\end{aligned}$$

于是有 $|I|=\binom{17}{3}, |A_k|=\binom{8}{3}, k=1,2,3,4$

注意到：A_k 中任意两个集合相交为空，（此因若存在非空交集，两元素之和已经大于 14，其余数不为非负整数，无解），于是由容斥原理有：

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|=|I|-\sum_{i=1}^{4}|A_i|=\binom{17}{3}-4\binom{8}{3}=456$$

5. 1 到 1000 之间有多少个素数？

解　注意到 $\lceil\sqrt{1000}\rceil=32$，且若某数为合数，则可分解为两个或以上素数乘积，则必含一个小于 32 的素因子。

因此首先考虑不被小于 32 的素数 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31(共 11 个) 整除的数，不妨将这些数编码为 $a_1,\cdots,a_{11}$, 设 $I=\{n|1\le n\le 1000\}, A_i=\{n|n=k\cdot a_i, k\in\mathbb{Z}\}, i=1,2,\cdots,11$

于是 $|I|=1000, |A_i|=\lfloor\frac{1000}{a_i}\rfloor, |\bigcap_{p=1}^{m}A_{tp}|=\lfloor\frac{10000}{\Pi_{p=1}^{m}a_{tp}}\rfloor\quad(1\le t1<t2<\cdots<tm\le 11)$

于是由容斥原理得：

$$|\bigcap_{i=1}^{11}\overline{A_i}|=|I|+\sum_{m=1}^{11}(-1)^m\sum_{1\le t1<\cdots<tm\le 11}|\bigcap_{p=1}^{m}A_{tp}|$$

考虑最开始被自身所整除的 11 个素数以及未被以上素数整除但并非素数的 1，则有 1000 以内素数数为 $|\bigcap_{i=1}^{11}\overline{A_i}|+11-1=168$

6. 确定 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的排列中恰有 k 个整数在它自然位置上的排列数。

解　首先考虑对 r 个数，均不在自然位置的情况（全错位排列），设 I 表示所有可能排列，A_i 表示第 i 个数正确排列的所有可能情形，则有 $|I|=r!, |A_i|=(r-1)!, |\bigcap_{p=1}^{m}A_{tp}|=(r-m)!, (1\le t1<\cdots<tm\le r)$;

于是由容斥定理得：

$$\begin{aligned}|\bigcap_{i=1}^{r}\overline{A_i}|&=|I|+\sum_{m=1}^{r}(-1)^m\sum_{1\le t1<\cdots<tm\le r}|\bigcap_{p=1}^{m}A_{tp}|\\&=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}(r-k)!=r!\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k}{k!}\end{aligned}$$

其次考虑所求情况，即首先选择 k 整数放好，然后剩余 n-k 个数全错位排列的情况，将上式 r 用 $n-k$ 代入可得，满足条件排列数为

$$\binom{n}{k}(n-k)!\sum_{t=0}^{n-k}\frac{(-1)^t}{t!}=\frac{n!}{k!}\sum_{t=0}^{n-k}\frac{(-1)^t}{t!}\sim\frac{n!}{e\cdot k!}$$

7. 多重集合 $\{3\cdot a, 4\cdot b, 2\cdot c, 1\cdot d\}$ 的圆排列中，满足不连续出现 3 个 a、并且不连续出现 4 个 b、也不连续出现 2 个 c 的有多少种？例如：所求循环排列中出现 aaa 不合法，但出现 $aaba$ 是合法的。

解　设 I 表示所有可能圆排列的集合，A 表示出现连续三个 a 的圆排列集合，B 表示出现连续 4 个 b 的圆排列集合，C 表示出现连续 2 个 c 的圆排列集合。

则由多重集合圆排列公式有：$|I|=\frac{9!}{3!4!2!}=1260$, 若确定连续 3 个 a 情况，则将 3 个连续的 a 作为一个元素参与多重集合圆排列，故有 $|A|=\frac{7!}{4!2!}=105$

同理有 $|B| = \frac{6!}{3!2!} = 60, |C| = \frac{8!}{3!4!} = 280, |A \cap B| = \frac{4!}{2!} = 12, |A \cap C| = \frac{6!}{4!} = 30, |B \cap C| = \frac{5!}{3!} = 20, |A \cap B \cap C| = 3! = 6$

由容斥原理则有：

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |I| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| = 871$$

故合法排列数共有 871 种。

8. 求下列斯特林数的表达式:

a) $S_1(n,3)$*;* *b)* $S_2(n,n-3)$.

解 a. 从组合排列意义推导，则 $S_1(n,3)$ 表示 n 个数恰好形成 3 个无序圆排列的方法数。首先考虑 3 个圆排列有序，则可能方法数为

$$\begin{aligned}&\sum_{i\geq 1, j\geq 1, i+j\leq n-2} \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}(i-1)!(j-1)!(n-i-j-1)!\\ &= n! \sum_{i\geq 1, j\geq 1, i+j\leq n-2} \frac{1}{i\cdot j\cdot (n-i-j)}\end{aligned}$$

考虑圆排列无序，只需除以三个圆排列进行排列的方法数 3! 即可，故所求为：

$$S_1(n,3) = \frac{n!}{6} \sum_{i\geq 1, j\geq 1, i+j\leq n-2} \frac{1}{i\cdot j\cdot (n-i-j)}$$

b. 从组合排列意义推导，则 $S_2(n,n-3)$ 表示 n 个数恰好位于 n-3 个无序非空集合的方法数，则可分为三种情形：

①1 个集合有 4 个元素，其余集合均只有 1 个元素，对应方法数为 $\binom{n}{4}$

②1 个集合有 3 个元素，1 一个集合有 2 个元素，其余集合均只有 1 个元素, 对应方法数为 $\binom{n}{3}\binom{n-3}{2} = 10\binom{n}{5}$

③3 个集合有 2 个元素，其余集合均只有 1 个元素，对应方法数为 $\frac{1}{3!}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2} = 15\binom{n}{6}$

故所求的可能方法数为：

$$S_2(n,n-3) = \binom{n}{4} + 10\binom{n}{5} + 15\binom{n}{6}$$

9. 证明当 $n \geq 2$ 时,

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} S_1(n,2i) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} S_1(n,2i+1).$$

证明 由第一类斯特林数公式，有 $x^{\overline{n}} = \sum_{m=0}^{n} S_1(n,m)x^m$ (1)

注意到，题目等式左侧即是（1）式右侧偶此项系数之和，题目等式右侧即是（1）式右侧奇次项系数之和，因此令 $x=-1$，则（1）式可化为：

$$(-1)^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} S_1(n,2i) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} S_1(n,2i+1)$$

注意到：当 $n \geq 2$ 时，$(-1)^{\overline{n}} = 0$, 将上式移项即为所求结果。 □