22

1 Übung 07

8

1.1 H 7-1: MSO-Formeln für Sprachen über $\{a, b\}$

(a) $\{a, b\}^+$

Das ist stets falsch, also $L(\varphi_a) = \emptyset$

$$\varphi_a := \forall X : X \neq \emptyset \land \forall x \in X : P_a(x) \lor P_b(x)$$

(b) $\{w : bba \text{ ist Faktor von } w\}$

$$\varphi_b := \exists x, y, z : y = x + 1 \land z = x + 1 \land P_b(x) \land P_b(y) \land P_a(z)$$ ✓

(c) $\{w : |w| \in \mathbb{N} \land |w| * 3 \neq 0\}$

$$\begin{aligned}\varphi_c := \exists X, Y, Z : & \bigcap XYZ = \emptyset \land \forall p\,(p \in X \lor p \in Y \lor p \in Z) \\ & \land \exists x \in X, \exists z \in Z : \forall y\,(x < y < z) \\ & \land \forall x \in X : x + 1 \in Y \\ & \land \forall y \in Y : y + 1 \in Z \\ & \land \forall z \in Z : \exists y \in Y : z = y + 1\end{aligned}$$ ✓

(d) $\{w : \text{zwischen zwei Vorkommen von } bb \text{ kommt mindestens ein } a \text{ vor}\}$

$$\begin{aligned}\varphi_d := \forall x, y : & \; y = x + 1 \land P_b(x) \land P_b(y) \\ & \land \exists v, w : x \leq y \land w = v + 1 \land P_b(v) \land P_b(w) \\ & \to \exists z : y < z < v \land P_a(z)\end{aligned}$$ ✓

7

1.2 H 7-2: rationale Ausdrücke für Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$ an

(a) $L\,(\forall x \forall y\,[(P_a(x) \land x = y + 1) \to P_b(y))])$

$$L = \{a\} \cup [(ba)^* \cup b^*]$$ ✓

(b) $L\,(\exists x \exists y\,[\forall z(z \neq y \to z \leq y) \land P_b(x) \land P_b(y) \land x = y + 1])$

$$L = \emptyset$$ ✓

(c) $L\,(\forall X \exists y\,[y \in X \wedge P_a(y)])$

$$L = a^+$$

für $X = \emptyset$ stets falsch

(d) $L\,((\exists x(\neg \exists y\,[x < y \wedge P_a(x)])) \vee (\exists y(\neg \exists x\,[x < y \wedge P_a(y)])))$

$$L = A^*a \quad \cup\ a A^*$$

1.3 H 7-3: Sätze erster Ordnung für MSO-Sätze

7

(a) $\forall X \forall x \forall y \forall z\,[(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge z \neq y) \rightarrow (P_a(x) \wedge P_a(y) \wedge P_a(z))]$

$$\forall x, y, z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq y) \rightarrow (P_a(x) \wedge P_a(y) \wedge P_a(z))$$ ✓

(b) $\exists X \exists Y \forall x \forall y\,[(x \in X \wedge y \in Y) \rightarrow (x \leq y \wedge P_b(x) \wedge P_a(y))]$

$$\exists x, y(x < y \wedge P_b(x) \wedge P_a(y))$$ ✓

(c) $\forall X \forall x\,[(x \in X \rightarrow P_a(x)) \rightarrow \exists y(P_b(y) \wedge \forall z\,(z \in X \rightarrow P_b(z))]$

$$\perp$$?