

1 Übung 02

1.1 H 2-1

1.1.1 $L_1 = L_2 \cup L_1 L_3$

Die Sprache $L_1 = L_2 \cup L_1 L_3 = L_2 L_3^*$ ist nach dem folgenden Prinzip aufgebaut:

$$\begin{aligned} L_1^0 &= L_2 \\ L_1^1 &= L_2 \cup L_1^0 L_3 = L_2 \cup L_2 L_3 \\ L_1^2 &= L_2 \cup L_2 L_3 \cup L_2 L_3 L_3 \\ &\dots \\ L_1^n &= \bigcup_{k=0}^n L_2 L_3^k \end{aligned}$$

Wobei L_1^n jeweils n „Expansionen“ der rekursiven Definition von L_1 sind.

Der Beweis erfolgt über Induktion in der Anzahl der Expansionen der rekursiven Definition:

$$\begin{aligned} n = 0 : L_1^0 &= L_2 \\ n = 1 : L_1^1 &= L_2 \cup L_1^0 L_3 \\ \text{Sei } L_1^n &= \bigcup_{k=0}^n L_2 L_3^k \\ n + 1 : L_1^{n+1} &= L_2 \cup L_1^n L_3 = L_2 \cup \left(\bigcup_{k=0}^n L_2 L_3^k \right) L_3 = L_2 L_3^{n+1} \end{aligned}$$

1.1.2 $L_1 = L_2 \cup L_3 L_1$

Die Expansion der rekursiven Definition ist erneut ein Hinweis auf die resultierende Sprache:

$$\begin{aligned}
L_1^0 &= L_2 \\
L_1^1 &= L_2 \cup L_3 L_1^0 = L_2 \cup L_3 L_2 \\
&\dots \\
L_1^n &= \bigcup_{k=0}^n L_3^k L_2
\end{aligned}$$

Der Beweis erfolgt analog zum obigen Beweis für $L_1 = L_2 \cup L_1 L_3$.

1.2 H 2-2

Der Automat \mathcal{A} akzeptiert die Sprache $L(\mathcal{A}) = a\{a,b\}^*$, da aus dem Initialzustand stets eine Transition welche das Symbol a akzeptiert ausgeführt werden muss und alle weiteren Wörter der Sprache aus Transitionen über den Zyklus mit der Transition $\{a,b\}^*$ aus Finalzustand 6 akzeptiert werden können.

1.2.1 Beweis

$$\subseteq: w \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow \exists \text{ run } u \text{ für } w \in \mathcal{A}$$

$$u = q1 \xrightarrow{a} 6 \underbrace{\left[\xrightarrow{\{a,b\}} 6 \right]^*}_{\{a,b\}^*} \text{ ist erfolgreicher run in } \mathcal{A}$$

die einzige Alternative zur ersten Transition ist $1 \xrightarrow{a} 2$

d.h. $w = aw'$, wobei jedes $w' \in A^*$, was bereits in u enthalten ist

$$\Rightarrow L(\mathcal{A}) = \{a\{a,b\}^*\}$$

$$\supseteq: w = aw', \quad w' \in \{a,b\}^*$$

$$\Rightarrow \exists u : 1 \xrightarrow{a} 6 \underbrace{\left[\xrightarrow{\{a,b\}} 6 \right]^*}_{\{a,b\}^*}$$

u ist erfolgreicher run

$$\Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$$

■

1.3 H 2-3

(b) Finalzustandsnormalisierter Automat \mathcal{A}_f mit $L(\mathcal{A}_f) = L(\mathcal{A})$

Sei $\mathcal{A}_f = (Q', T', I', F')$ mit :

$$Q' = Q \cup \{f\}$$

$$I' = \begin{cases} I, & \text{wenn } \varepsilon \notin L(\mathcal{A}) \\ I \cup \{f\}, & \text{wenn } \varepsilon \in L(\mathcal{A}) \end{cases}$$

$$F' = \{f\}$$

$$T' = T \cup \{(p, a, f) \mid a \in A, \exists q \in F : (p, a, q) \in T\}$$

Sei $\varepsilon \neq w = a_1 \dots a_n \in A^*$.

$$w \in L(\mathcal{A})$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ run } q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n \text{ in } \mathcal{A} \text{ mit } q_0 \in I, q_n \in F$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ run } q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{a_n} f \text{ in } \mathcal{A} \text{ mit } q_0 \in I$$

$$\Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_f)$$

$$\varepsilon \in L(\mathcal{A})$$

$$\Leftrightarrow f \in I'$$

$$\Leftrightarrow I' \cap F' \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon \in L(\mathcal{A}_i)$$

(c) Normalisierter Automat \mathcal{A}_n mit $L(\mathcal{A}_n) = L(\mathcal{A}) \setminus \{\varepsilon\}$

Es ist zuerst die Initial- und Finalzustandsnormalisierung auf den Automaten anzuwenden. Da nun $I \cap F = \emptyset$ ist, d.h. es gibt keine gemeinsamen Initial- und Finalzustände im Automaten, wird ε vom resultierenden Automaten nicht mehr akzeptiert. Ebenfalls werden Wörter der Länge 1 nach der Ausführung von (a) und (b) nicht mehr akzeptiert. Dies muss im folgenden korrigiert werden, dabei markiere ' die Mengen des resultierenden Automaten.

$$\forall (p, a, q) \in T : p \in I \wedge q \in F : \exists (i, a, f) \in T' : i \in I' \wedge f \in F'$$