**Thomas Weidner**

**WS 2014/15**
**Institut für Informatik**
**Universität Leipzig**

# Übung Automatentheorie, Aufgabenblatt 10

## Abgabe bis: Mittwoch, 14. Januar 2015, 13:15 Uhr

**Hausaufgabe 10.1**
Beweisen Sie die folgende Aussage:

Sei $A$ ein Alphabet, $S$ ein beliebiger Semiring, und $s\colon A^* \to S$ eine erkennbare Funktion. Weiterhin sei $\# \notin A$ ein neues Zeichen und die Funktion $t\colon (A \cup \{\#\})^* \to S$ definiert durch

$$t(w) = \begin{cases} s(v) & \text{falls } w = u\#v \text{ und } v \in A^* \\ s(w) & \text{falls } w \in A^* \,. \end{cases}$$

Dann ist die Funktion $t$ erkennbar.

**Hausaufgabe 10.2**
Sei $A = \{a, b, c\}$. Geben Sie gewichtete Automaten an, welche die folgenden Funktionen $s\colon A^* \to S$ über den angegebenen Semiringen $S$ erkennen:

(a) $S = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ mit

$$s(w) = 2|w|_a - 3|w|_b + 4|w|_c$$

(b) $S = (\mathcal{P}(A^*), \cup, \cdot, \emptyset, \{\varepsilon\})$ mit

$$s(w) = \begin{cases} \{a^n\} & \text{falls } w = a^n bv \text{ mit } v \in A^* \\ \{a^{2n}\} & \text{falls } w = a^n cv \text{ mit } v \in A^* \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Begründen Sie Ihre Wahl kurz!

**Hausaufgabe 10.3**
Sei $S$ ein kommutativer Semiring und $s\colon A^* \to S$ eine erkennbare Funktion. Für ein Wort $w = w_1 \ldots w_n \in A^*$ definieren wir $\widetilde{w} = w_n \cdots w_1$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\widetilde{s}\colon A^* \to S$ mit

$$\widetilde{s}(w) = s(\widetilde{w})$$

wieder erkennbar ist. Versuchen Sie Darstellungen und keine gewichteten Automaten in ihrem Beweis zu verwenden.

*Hinweis:* Das bekannte Gesetz $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$ gilt auch für Matrizen über kommutativen Semiringen.

**Seminaraufgabe 10.1**
Zeigen Sie, dass die bekannte Formel für Produkte von Blockmatrizen auch in Semiringen gilt, d.h: Seien $A, A' \in S^{k\times k}$, $B, B' \in S^{k\times n}$, $C, C' \in S^{n\times k}$, und $D, D' \in S^{n\times n}$, dann gilt

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot A' + B \cdot C' & A \cdot B' + B \cdot D' \\ C \cdot A' + D \cdot C' & C \cdot B' + D \cdot D' \end{pmatrix} \,.$$

Hierbei ist

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} & b_{k,1} & \cdots & b_{k,n} \\ c_{1,1} & \cdots & c_{1,k} & d_{1,1} & \cdots & d_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,k} & d_{n,1} & \cdots & d_{n,n} \end{pmatrix} \in S^{(k+n)\times(k+n)}$$

*Hinweis:* Diese Aussage gilt auch für beliebig viele Blöcke.