1 Übung 04

20

1.1 H 4-1

9

a)

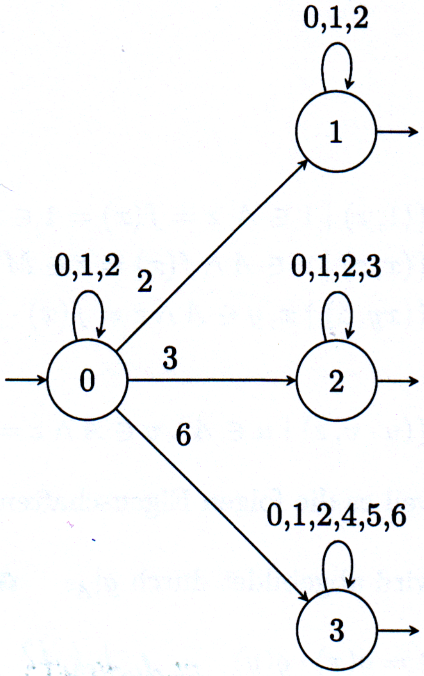
$$
\begin{aligned}
g|_{A^0} &= \{(1, z) \mid 1 \in A, z = f(x) = 1 \in M\} \\
g|_{A^1} &= \{(x, z) \mid x \in A \wedge f(x) = z \in M\} \\
g|_{A^2} &= \{(xy, z) \mid x, y \in A \wedge z = f(x) \cdot f(y)\} \\
&\vdots \\
g|_{A^{n+1}} &= \{(u \cdot v, z) \mid u \in A^n, v \in A \wedge z = g|_{A^n}(u) \cdot f(v)\}
\end{aligned}
$$

g ist ein Morphismus weil es die folgen Eigenschaften erfüllt:

- das Einselement wird abgebildet durch $g|_{A^0}$ auf 1_M
- $\forall x, y \in A : g(x \cdot y) = g(x) \cdot g(y)$ Eindeutigkeit?

b) Sei $f : A \mapsto M$ eine surjektive Abbildung. Nach *Theorem 2.4a* gibt es einen Morphismus $g : A^* \mapsto M$ mit $g|_A = f$. Da f bereits surjektiv ist, so ist g trivialerweise auch surjektiv und somit ein Epimorphismus. ✓

1.2 H 4-2 5



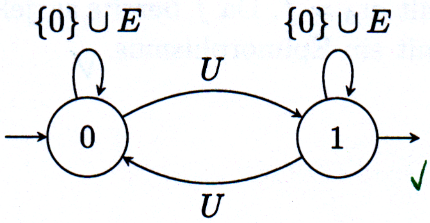
a)

8 = 4 · 6 (mit · dem Max)

aber δ(0, 4) ist nicht definiert

3 · 4 · 6 = 6

⋮



✓

b)

Beweis, dass die jeweilige Sprache akzeptiert wird und die Bedingungen für Monoid-Automaten erfüllt sind.

1.3 H 4-3 6

- **(a)**: $L = \{a, aaa\}^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\} = \{a\}^*$:

  $\{a\}^*$ hat lediglich eine Äquivalenzklasse: $[a] = a^*$, demzufolge gilt dasselbe auch für $\{a, aaa\}^*$. Das syntaktische Monoid besteht demnach auch nur aus dieser einen Äquivalenzklasse. ✓

- **(b)**: $L = \{ba\}^*$ im Monoid $\{a, b\}^*$ hat folgendes syntaktisches Monoid:

$$\{[a] = a(ba)^*, [b] = (ba)^*b, [ab] = (ab)^*, [ba] = (ba)^*\}$$

ε kann nicht in beiden sein

Beweise?

fehlen $\{\epsilon\}$ und $\{a,b\}^*\{aa,bb\}\{a,b\}^*$

- **(c)**: $L = \{2, 3, 6\}$ im Monoid $(\mathbb{N}, \max)$:

$$[1] = \{0, 1\}$$
$$[2] = [3] = \{2, 3\}$$
$$[6] = \{4, 5, 6\}$$
$$[42] = \{x \in \mathbb{N} : x > 6\}$$

$\{4,5\}$
$\{6\}$

- **(d)**: $L = \{7\}$ im Monoid $(\mathbb{Z}, +)$:

Zu L gibt es unendlich viele Äquivalenzklassen: $[1] = \{6\}$, $\cancel{[2] = \{5\}}$*, ..., welche alle die Form $[x] = y$ mit $x + y = 7$ haben.

Demnach ist das syntaktische Monoid $M/ \sim_{\{} 7\}$ ebenfalls unendlich:

$$\{[x] = \{y\} \text{ mit } y \in \mathbb{Z} \wedge x + y = 7\}$$

fatal aufgeschrieben aber richtig gemeint

- **(e)**: $L = \{(n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ im Monoid $(\mathbb{N}, +)^2$:

Für diese Sprache gibt es ebenfalls unendlich viele Äquivalenzklassen:

$$[(x, y)] = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \text{ mit } x + u = y + u\}$$

Das syntaktische Monoid enthält alle Äquivalenzklassen dieser Form. ✓

* $[x]$ ist die Klasse der Repräsentanten x, also immer $x \in [x]$