Peter Leupold

WS 2014/15
Institut für Informatik
Universität Leipzig

Übung Automatentheorie, Aufgabenblatt 6

Abgabe bis: Mittwoch, 3. Dezember 2014, 13.^{15}Uhr

H 6-1: Welche der folgenden Monoide sind aperiodisch?

(a) $(\mathbb{Z}, +)$.

(b) $(\mathbb{N}, min)$.

(c) $(\{0, 1, 2, \dots, n\}, \cdot_n)$ wobei $x \cdot_n y = n$ falls $x \cdot y > n$; sonst $x \cdot_n y = x \cdot y$.

(d) Das Flip-Flop-Monoid. Dies ist das kleinste Monoid mit zwei rechtsneutralen Elementen. Damit „speichert" es wie ein elektronisches Flip-Flop die letzte von zwei möglichen Eingaben, die nicht Null war. Das Monoid ist $(\{1, A, B\}, \ \Diamond\ )$ mit Nullelement 1 und $A \Diamond B = B \Diamond B = B$ sowie $B \Diamond A = A \Diamond A = A$.

H 6-2: Nach Theorem 3.5 sind alle sternfreien Sprachen aperiodisch, also auch die aus Aufgabe **H 5-3**. Geben Sie für jede der Sprachen aus Aufgabe **H 5-3** deren Index an!

H 6-3: Nach Satz 3.3 ist das sytaktische Monoid einer Sprache L aperiodisch genau dann, wenn L aperiodisch ist. Geben Sie das syntaktische Monoid der Sprache $L := a^+c^+$ über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ an! Da die Sprache L nach Aufgabe **H 5-3** (a) sternfrei und nach Aufgabe **H 6-2** aperiodisch ist, ist auch ihr syntaktisches Monoid aperiodisch. Zeigen Sie dies direkt, d. h. ohne Verwendung von Satz 3.3.

Die Antworten zu folgenden Fragen müssen nicht schriftlich abgegeben werden, sollten jedoch mündlich vorbereitet werden:

S 6-1: Seien L und K aperiodische Sprachen, und $n = i(X) + i(Y) + 1$. Seien weiter x, y und z Wörter so dass $xy^{n+1}z \in LK$. Zeigen Sie, dass auch $xy^nz \in LK$! (dies vervollständigt den Beweis von Theorem 3.5)

S 6-2: Ein Monoid M heißt monogen, wenn es von einem einzigen Element erzeugt wird. Das heißt, es gibt ein $m \in M$, so dass $M = \{m\}^*$. Zeigen Sie, das sei monogenes Monoid genau dann aperiodisch ist, wenn es endlich ist!

Die Korrektheit sämtlicher Antworten muss bewiesen werden.