1 Übung 06

1.1 H 6-1: *Welche der Monoide sind aperiodisch?*

a) $(\mathbb{Z}, +)$, nicht aperiodisch, da $\forall x \in \mathbb{Z}, x \neq 0 : |x^n| < \left|x^{n+1}\right| = |x^n| + |x|$.

b) $(\mathbb{N}, min)$ ist aperiodisch, da wiederholte Anwendung von *min* auf denselben Wert das gleiche Ergebnis liefern, also:

$$x^n = min(\underbrace{x, \dots, x}_{\text{n-mal}}) = x$$

c) $(\{0, 1, 2, \dots, k\} \cdot_k)$

$$x \cdot_k y = \begin{cases} k & x \cdot y > k \\ x \cdot y & sonst \end{cases}$$

Für die Aperiodizität ist nur der Fall $2^n = 2^{n+1}$ relevant, da $0^n = 0^{n+1} = 0$, $1^n = 1^{n+1} = 1$ und wenn $x^n = x^{n+1}$ für $x = 2$ gilt, dann gilt es auch für alle $x > 2$.

Das kleinste n für das $x^n = x^{n+1}$ gilt ist also $n = \lceil \log_2 k \rceil$:

$$\begin{aligned} 2^n &= 2^{\lceil \log_2 k \rceil} = k \\ 2^{n+1} &= 2^n \cdot 2 = 2^{\lceil \log_2 k \rceil} \cdot 2 = k \cdot_k 2 = k \\ &\Rightarrow 2^n = 2^{n+1} \text{ für } n = \lceil \log_2 k \rceil \end{aligned}$$

d) Das Monoid $(\{1, A, B\}, \diamond)$ ist aperiodisch für alle $n \geq 1$, da:

$$\forall x \in \{1, A, B\} : x^1 = x \diamond x = x$$

Demzufolge gilt auch:

$$\begin{aligned} x^n &= \underbrace{x \diamond \dots \diamond x}_{\text{n-mal}} = x \\ x^{n+1} &= x^n \diamond x = x \end{aligned}$$

1.2 H 6-2: *Index für sternfreie aperiodische Sprachen*

Def 3-2 (a): L ist aperiodisch $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \wedge \forall x, y, z \in M : xy^n z \Leftrightarrow xy^{n+1} z \in L$

(a)

$$L = a^+c^+$$
$$i(L) = 2$$

Für $i = 1$ ist $x = a, y = ac, z = c \in L$ aber $xy^{i+1}z = a \cdot acac \cdot c$ nicht.

(b)

$$L = (abc)^*$$
$$i(L) = 2$$

(c)

$$L = \{w : |w|_a \leq 3\}$$
$$i(L) = 4$$

(d)

$$L = \{w : |w|_{aba} = 2\}$$
$$i(L) = 3$$

1.3 H 6-3: *Aperiodizität syntaktischer Monoide*

$$\begin{aligned}
A &= \{a, b, c\} \\
L &= a^+c^+ \\
[a] &= \{a\} \\
[c] &= \{c\} \\
[ac] &= \{a(ac^m)c \mid m \geq 2\} \\
[b] &= A^*caA^* \cup A^*bA^* \cup a^+ \cup c^+
\end{aligned}$$

Nach Def. 3-2 (b) ab $i(L) = 2$ aperiodisch, siehe H 6-2.