1 Übung 07

1.1 H 7-1: *MSO-Formeln für Sprachen über* $\{a, b\}$

(a) $\{a, b\}^+$

$$\varphi_a \coloneqq \forall X : X \neq \varnothing \land \forall x \in X : P_a(x) \lor P_b(x)$$

(b) $\{w : bba \text{ ist Faktor von } w\}$

$$\varphi_b \coloneqq \exists x, y, z : y = x + 1 \land z = x + 1 \land P_b(x) \land P_b(y) \land P_a(z)$$

(c) $\{w : |w| \in \mathbb{N} \land |w| * 3 \neq 0\}$

$$\begin{aligned} \varphi_c \coloneqq \exists X, Y, Z : \bigcap XYZ = \varnothing \land \forall p\,(p \in X \lor p \in Y \lor p \in Z) \\ \land \exists x \in X, \exists z \in Z : \forall y\,(x < y < z) \\ \land \forall x \in X : x + 1 \in Y \\ \land \forall y \in Y : y + 1 \in Z \\ \land \forall z \in Z : \exists y \in Y : z = y + 1 \end{aligned}$$

(d) $\{w : \text{zwischen zwei Vorkommen von } bb \text{ kommt mindestens ein } a \text{ vor}\}$

$$\begin{aligned} \varphi_d \coloneqq \forall x, y : y = x + 1 \land P_b(x) \land P_b(y) \\ \land \exists v, w : x \leq y \land w = v + 1 \land P_b(v) \land P_b(w) \\ \to \exists z : y < z < v \land P_a(z) \end{aligned}$$

1.2 H 7-2: rationale Ausdrücke für Sprachen über dem Alphabet $\{a, b\}$ an

(a) $L\,(\forall x \forall y\,[(P_a(x) \land x = y + 1) \to P_b(y))])$

$$L = \{a\} \cup [(ba)^* \cup b^*]$$

(b) $L\,(\exists x \exists y\,[\forall z(z \neq y \to z \leq y) \land P_b(x) \land P_b(y) \land x = y + 1])$

$$L = \varnothing$$

(c) $L\left(\forall X \exists y\, [y \in X \wedge P_a(y)]\right)$

$$L = a^+$$

(d) $L\left((\exists x(\neg \exists y\, [x < y \wedge P_a(x)])) \vee (\exists y(\neg \exists x\, [x < y \wedge P_a(y)]))\right)$

$$L = A^* a$$

1.3 H 7-3: Sätze erster Ordnung für MSO-Sätze

(a) $\forall X \forall x \forall y \forall z\, [(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge z \neq y) \to (P_a(x) \wedge P_a(y) \wedge P_a(z))]$

$$\forall x, y, z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq y) \to (P_a(x) \wedge P_a(y) \wedge P_a(z))$$

(b) $\exists X \exists Y \forall x \forall y\, [(x \in X \wedge y \in Y) \to (x \leq y \wedge P_b(x) \wedge P_a(y))]$

$$\exists x, y(x < y \wedge P_b(x) \wedge P_a(y))$$

(c) $\forall X \forall x\, [(x \in X \to P_a(x)) \to \exists y(P_b(y) \wedge \forall z\, (z \in X \to P_b(z))]$

$$\perp$$