1 Übung 01

1.1 H 1-1

Die Semigruppe aller Wörter über dem endlichen Alphabet A ist genau dann mit der Konkatenation $\cdot$ kommutativ, wenn $A = \{u \mid v = u^k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$, also d.h. wenn v eine Potenz von u ist.

$n = 0$

$$
\begin{aligned}
u &= A^* \\
v &= u^n = u^0 = \epsilon \\
u \cdot \epsilon &= \epsilon \cdot u
\end{aligned}
$$

$n > 0$

$$
\begin{aligned}
v = u^n &= \overbrace{u \dots u}^{n-mal} \\
v \cdot u = u^{n+1} &= \underbrace{u^n}_{=v} \cdot u = u \cdot v = u \cdot u^n
\end{aligned}
$$

■

1.2 H 1-2

Anmerkung: Die Zustände der Automaten wurden im Uhrzeigersinn markiert.

1.2.1 **Sprache** $\{a,b\}^*ab$

„$\subseteq$“ : $w \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow \exists$ run u für w in $\mathcal{A}$

$\Rightarrow q_0 = 1, q_n = 3$

$\Rightarrow$ 3 mögliche Pfade die jeweils ab ausführen:

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

$$2 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

$$3 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

$\mathcal{A}_1$ ist vollständig und zusammenhängend[1]

$$\Rightarrow u = \underbrace{q_0 \cdots q_{n-2}}_{v \in A^* = \{a,b\}^*} \xrightarrow{a} q_{n-1} \xrightarrow{b} q_n$$

„$\supseteq$“ : $w = w'ab$ mit $w' \in A^*$

$$\Rightarrow \exists u : \underbrace{1 \to \cdots q_{n-2}}_{w'} \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

mit $q_{n-2} \in \{1,2,3\}$

$\Rightarrow u$ ist ein erfolgreicher run

$\Rightarrow w \in L(\mathcal{A}_1)$

$\blacksquare$

[1] $\forall_{j,h} \in Q \ : \ \exists run(u) \ : \ q_0 = j \wedge q_n = k$

1.2.2 Sprache $ab*$

$$
\begin{aligned}
&\text{„}\subseteq\text{“} : w \in L(\mathcal{A}_2) \Rightarrow \exists \text{ run } u \text{ für } w \text{ in } A\\
&\quad \Rightarrow q_0 = 1, q_n = 3\\
&\quad \Rightarrow \nexists \text{ run mit } q_i = 2 \text{ für } 0 \leq i \leq n\\
&\quad \Rightarrow \text{einziger erfolgreicher run ist:}\\
&\qquad\quad 1 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} \cdots \xrightarrow{b} 3\\
&\quad \Rightarrow w = ab^*
\end{aligned}
$$

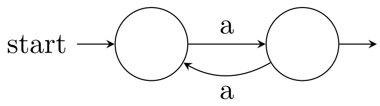
$$
\begin{aligned}
&\text{„}\supseteq\text{“} : \ w = ab^*\\
&\quad \Rightarrow u : 1 \xrightarrow{a} \underbrace{3 \xrightarrow{b} \cdots \xrightarrow{b} 3}_{b^*}\\
&\quad \Rightarrow u \text{ ist erfolgreicher run für } w\\
&\quad \Rightarrow w \in L(\mathcal{A}_2)
\end{aligned}
$$

■

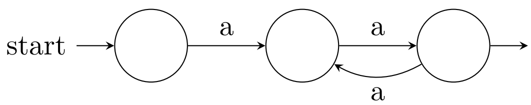
1.3 H 1-3

$\mathcal{A} = \{w \text{ so dass } |w|_a \mod (2) = 1, |w|_b = 2\}$

Die Konstruktion des Automaten wurde mit Hilfe von zwei Teilautomaten durchgeführt $\mathcal{A}_{even}$, $\mathcal{A}_{odd}$, die gerade und ungerade Anzahlen von Buchstaben akzeptieren:



$\mathcal{A}_{odd}$

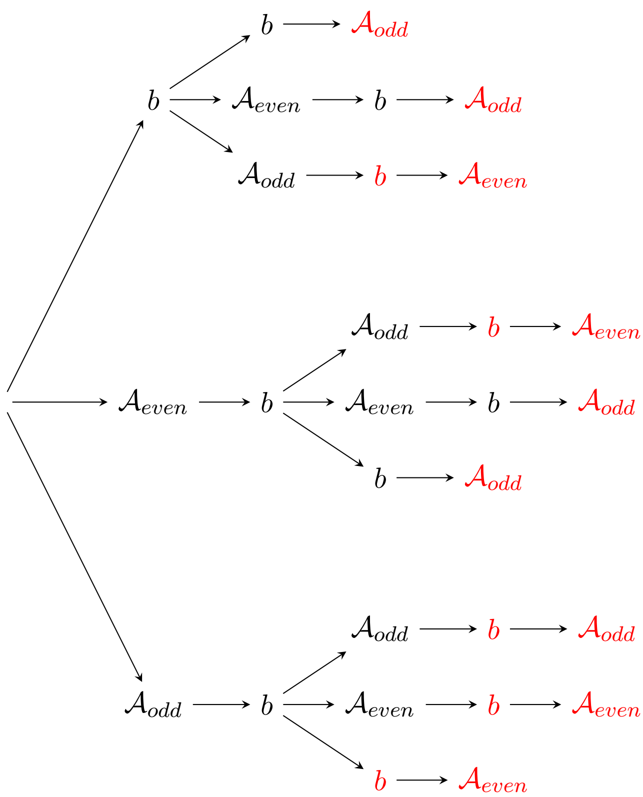


$\mathcal{A}_{even}$

Um insgesamt eine ungerade Anzahl an „a“s zu erhalten gibt es nun 11 verschiedene Varianten sie zwischen den „b“s zu verteilen

- o steht für eine ungerade und e für eine gerade Anzahl an „a“s
- $a^*ba^*ba^*$ (ooo, oee, eeo, eoe)
- a^*ba^*b und ba^*ba^* (oe, eo)
- a^*bb, bba^* und ba^*b (o)

Da durch die angegebenen Teilautomaten bekannt ist wie ungerade bzw. gerade Anzahlen von „a“s erkannt werden können und zwischen diesen nur ein b vorkommen kann, ist es möglich die 11 Varianten mit einem Automaten zu realisieren.



Spezifikation von $\mathcal{A}$, Finalzustände sind rot

Der Automat $\mathcal{A}$ ist nicht vollständig und aufgrund der Wahl zwischen $\mathcal{A}_{odd}$ und $\mathcal{A}_{even}$ „a“-Sequenzen auch *nicht* deterministisch.