1 Übung 02

20

1.1 H 2-1

3

1.1.1 $L_1 = L_2 \cup L_1 L_3$

Beide Inklusionen sind zu beweisen, wobei die „Zielseite" jeweils nicht benutzt werden darf.

Die Sprache $L_1 = L_2 \cup L_1 L_3 = L_2 L_3^*$ ist nach dem folgenden Prinzip aufgebaut:

$$
\begin{aligned}
L_1^0 &= L_2 \\
L_1^1 &= L_2 \cup L_1^0 L_3 = L_2 \cup L_2 L_3 \\
L_1^2 &= L_2 \cup L_2 L_3 \cup L_2 L_3 L_3 \\
&\dots \\
L_1^n &= \bigcup_{k=0}^{n} L_2 L_3^k
\end{aligned}
$$

Wobei L_1^n jeweils n „Expansionen" der rekursiven Definition von L_1 sind.

Der Beweis erfolgt über Induktion in der Anzahl der Expansionen der rekursiven Definition:

$$
\begin{aligned}
n = 0 &: L_1^0 = L_2 \\
n = 1 &: L_1^1 = L_2 \cup L_1^0 L_3 \\
&\text{Sei } L_1^n = \bigcup_{k=0}^{n} L_2 L_3^k \\
n + 1 &: L_1^{n+1} = L_2 \cup L_1^n L3 = L_2 \cup \Big(\bigcup_{k=0}^{n} L_2 L_3^k\Big) L_3 = L_2 L_3^{n+1}
\end{aligned}
$$

1.1.2 $L_1 = L_2 \cup L_3 L_1$

Die Expansion der rekursiven Definition ist erneut ein Hinweis auf die resultierende Sprache:

$$L_1^0 = L_2$$
$$L_1^1 = L_2 \cup L_3 L_1^0 = L_2 \cup L_3 L_2$$
$$\dots$$
$$L_1^n = \bigcup_{k=0}^{n} L_3^k L_2$$

S.O.

Der Beweis erfolgt analog zum obigen Beweis für $L_1 = L_2 \cup L_1 L_3$.

1.2 H 2-2

10

Der Automat $\mathcal{A}$ akzeptiert die Sprache $L(\mathcal{A}) = a\{a,b\}^*$, da aus dem Initialzustand stets eine Transition welche das Symbol a akzeptiert ausgeführt werden muss und alle weiteren Wörter der Sprache aus Transitionen über den Zyklus mit der Transition $\{a,b\}^*$ aus Finalzustand 6 akzeptiert werden können.

1.2.1 Beweis

$\subseteq$: $w \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow \exists$ run u für $w \in \mathcal{A}$

$$u = q1 \xrightarrow{a} 6 \underbrace{\left[\xrightarrow{\{a,b\}} 6 \right]^*}_{\{a,b\}^*} \quad \text{ist erfolgreicher run in } \mathcal{A}$$

die einzige Alternative zur ersten Transition ist $1 \xrightarrow{a} 2$

d.h. $w = aw'$, wobei jedes $w' \in A^*$, was bereits in u enhalten ist

$\Rightarrow L(\mathcal{A}) = \{a\{a,b\}^*\}$

$\supseteq$: $w = aw', \quad w' \in \{a,b\}^*$

$$\Rightarrow \exists u : 1 \xrightarrow{a} 6 \underbrace{\left[\xrightarrow{\{a,b\}} 6 \right]^*}_{\{a,b\}^*}$$

u ist erfolgreicher run

$\Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$

■

1.3 H 2-3

(a)? 7

(b) Finalzustandsnormalisierter Automat $\mathcal{A}_f$ mit $L(\mathcal{A}_f) = L(\mathcal{A})$

$$
\begin{aligned}
&\text{Sei } \mathcal{A}_f = (Q', T', I', F') \textit{ mit :}\\
&\quad Q' = Q \uplus \{f\}\\
&\quad I' = \begin{cases} I, & \text{wenn } \varepsilon \notin L(\mathcal{A})\\ I \cup \{f\}, & \text{wenn } \varepsilon \in L(\mathcal{A}) \end{cases}\\
&\quad F' = \{f\}\\
&\quad T' = T \cup \{(p, a, f) \mid a \in A, \exists q \in F : (p, a, q) \in T\}
\end{aligned}
$$

Sei $\varepsilon \neq w = a_1 \ldots a_n \in A^*$.

$$
\begin{aligned}
&w \in L(\mathcal{A})\\
&\quad \Leftrightarrow \exists \text{ run } q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n \text{ in } \mathcal{A} \text{ mit } q_0 \in I, q_n \in F\\
&\quad \Leftrightarrow \exists \text{ run } q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{a_n} f \text{ in } \mathcal{A} \text{ mit } q_0 \in I\\
&\quad \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_f)\\
&\varepsilon \in L(\mathcal{A})\\
&\quad \Leftrightarrow f \in I'\\
&\quad \Leftrightarrow I' \cap F' \varnothing\\
&\quad \Leftrightarrow \varepsilon \in L(\mathcal{A}_i)
\end{aligned}
$$

(c) Normalisierter Automat $\mathcal{A}_n$ mit $L(\mathcal{A}_n) = L(\mathcal{A}) \setminus \{\varepsilon\}$

Es ist zuerst die Initial- und Finalzustandsnormalisierung auf den Automaten anzuwenden. Da nun $I \cap U = \varnothing$ ist, d.h. es gibt keine gemeinsamen Initial- und Finalzustaende im Automaten, wird ε vom resultierenden Automaten nicht mehr akzeptiert. Ebenfalls werden Wörter der Länge 1 nach der Ausführung von **(a)** und **(b)** nicht mehr akzeptiert. Dies muss im folgenden korrigiert werden, dabei markiere $'$ die Mengen des resultierenden Automaten.

$$\forall (p, a, q) \in T : p \in I \wedge q \in F : \exists (i, a, f) \in T' : i \in I' \wedge f \in F' \checkmark$$

Beweis für $L(\mathcal{A}_n) = L(\mathcal{A}) \setminus \{\varepsilon\}$?