Peter Leupold

WS 2014/15
Institut für Informatik
Universität Leipzig

Übung Automatentheorie, Aufgabenblatt 4

Abgabe bis: Mittwoch, 12. November 2014, 13.^{15}Uhr

H 4-1: Beweisen Sie Theorem 2.4. :

(a) Sei A eine Menge, M ein Monoid, und $f : A \mapsto M$ eine Abbildung. Dann gibt es einen Morphismus $g : A^* \mapsto M$ mit $g|_A = f$. Weiterhin ist g durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.

(b) Sei M ein Monoid. Dann gibt es eine Menge A und einen Epimorphismus $g : A^* \mapsto M$.

H 4-2: (a) Geben Sie einen $(\mathbb{N}, max)$-Automaten an, der die Sprache $\{2, 3, 6\}$ erkennt!

(b) Geben Sie einen $(\mathbb{Z}, +)$-Automaten an, der die Sprache aller ungeraden ganzen Zahlen erkennt!

H 4-3: Geben Sie die syntaktischen Monoide folgender Sprachen an:

(a) $\{a, aaa\}^*$ im Monoid $\{a\}^*$.

(b) $\{ba\}^*$ im Monoid $\{a, b\}^*$.

(c) $\{2, 3, 6\}$ im Monoid $(\mathbb{N}, max)$.

(d) $\{7\}$ im Monoid $(\mathbb{Z}, +)$.

(e) $\{(n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ im Monoid $(\mathbb{N}, +)^2$.

Die Antworten zu folgenden Fragen müssen nicht schriftlich abgegeben werden, sollten jedoch mündlich vorbereitet werden:

S 4-1: Wieviele Untermonoide hat das Monoid $(\{0, 1, 2, 4\}, min)$?

Wieviele Untermonoide hat das Monoid $(\mathbb{N}, max)$?

S 4-2: Die Abbildung $|\ldots|_a$ liefert die Anzahl der Vorkommen des Buchstaben a in einem Wort über dem Alphabet $\{a, b\}$. Zeigen Sie, dass dies ein Morphismus ist! Welche Kongruenz über $\{a, b\}^*$ induziert dieser Morphismus?

Ist die Abbildung $|\ldots|_{ab}$, die die Anzahl der Vorkommen eines Faktors ab in einem Wort über dem Alphabet $\{a, b\}$ liefert, ebenfalls ein Morphismus?

S 4-3: (a) Sei $A = \{a, b, c, d\}$, M das Monoid $(\mathbb{N}, +)$, und f die durch $a \mapsto 1$, $b \mapsto 1$, $c \mapsto 2$, und $d \mapsto 3$ bestimmte Abbildung. Welches ist hier der Morphismus g aus Theorem 2.4.(a)?

(b) Sei $A = \{a, b, c\}$, M das Monoid $(\mathbb{N}, \cdot)$, und f die durch $a \mapsto 2$, $b \mapsto 3$, und $c \mapsto 5$. bestimmte Abbildung. Welches ist hier der Morphismus g aus Theorem 2.4.(a)?

Zeigen Sie auch, dass diese Morphismen tatsächlich Morphismen sind!

Die Korrektheit sämtlicher Antworten muss bewiesen werden.