Метод решения нелинейного уравнения Пуассона

В работе рассматривается решение нелинейного уравнения Пуассона вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}p(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}p(u)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u),$$

где x, y — пространственные координаты, $u(x, y)$ — искомая функция, $f(u, x, y), p(u)$ — известные функции.

Воздействовав на исходное уравнение базисной функцией $w(x, y)$ и проинтегрировав, получаем выражение:

$$\int\limits_{\Omega} p\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}d\Omega + \int\limits_{\Omega} p\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}d\Omega + \int\limits_{\Omega} fwd\Omega - \int\limits_{S} pw(\frac{\partial u}{\partial x}l_n + \frac{\partial u}{\partial y}l_m)dS = 0,$$

где l_n, l_m — направляющие косинусы внешней нормали к граничной поверхности.

Область разбивается на конечные элементы, и применяется метод конечных элементов.

Заметим, что часть уравнения $\int\limits_{S} pw(\frac{\partial u}{\partial x}l_n + \frac{\partial u}{\partial y}l_m)dS$ является граничным условием задачи.

Представляем искомую функцию u в виде $u = [N]\{u\}$, где $[N]$ — матрица функции положения, а $\{u\}$ — вектор узловых параметров, для применения метода.

Такая замена позволяет получить матричное уравнение вида $[K]\{u\} = \{F\}$, где $[K]$ — матрица «жесткости», а $\{F\}$ — вектор «силы», зависящие от условии задачи и заданных функции положения. Таким образом задача сводится к решению матричного уравнения.

Для поиска $[K]$ и $\{F\}$ необходимо найти ингеграл, для этого применяется численный метод нахождения интеграла, например, метод наименьших квадратов.

Решение данного уравнения позволяет решить задачи кручения, теплопроводности, газовой динамики, а также ряд других задач, модели которых можно описать исходным уравнением или производящими от него уравнениями.