

Algebra a diskrétna matematika

Prehľad z 1. týždňa

Riešenie sústav lineárnych rovníc

Sústavu lineárnych rovníc prepíšeme do tabuľkovej formy tak, že v každom stĺpci budú koeficienty zodpovedajúce jednej premennej, pričom v poslednom stĺpci (oddelenom zvislou čiarou) budú hodnoty z pravých strán rovníc.

Na riadky tabuľky môžeme aplikovať nasledujúce elementárne operácie, ktoré nemenia množinu riešení sústavy rovníc.

ERO 1 - Výmena poradia ľubovoľných dvoch riadkov.

ERO 2 - Vynásobenie riadku nenulovou konštantou.

ERO 3 - Pripočítanie nenulového násobku jedného riadku k inému riadku.

Gaussova eliminačná metóda

Systém lineárnych rovníc riešime v tabuľkovej forme pomocou elementárnych riadkových operácií v dvoch hlavných etapách.

Etapa 1: Postupne identifikujeme pivotné prvky (prvé nenulové prvky v riadku) a pomocou ERO 2 z nich produkujeme pivotné jednotky, počnúc ľavým horným prvkom (jeho získanie môže vyžadovať použitie ERO 1) a pokračujúc postupne vpravo a nadol. Ihneď po získaní pivotnej jednotky vyprodukujeme pomocou ERO 3 nuly v stĺpci pod ňou. Prípadné nulové riadky umiestnime pod nenulovými riadkami pomocou ERO 1.

Etapa 2: Pomocou ERO 3 postupne produkujeme nuly nad pivotnými jednotkami, počnúc stĺpcom s poslednou pivotnou jednotkou vpravo dolu a pokračujúc smerom vľavo a nahor.

Výsledná tabuľka, kde v každom stĺpci s pivotnou jednotkou sú všetky ostatné prvky nulové, sa nazýva tabuľkou v **redukovanom tvare**.

Redukovaný tvar je pre každý systém rovníc jednoznačne určený.

Ak má lineárna sústava rovníc **aspoň toľko rovníc ako neznámych**, počet riešení bude jedna z možností

- žiadne
- jediné
- nekonečne veľa

Ak má lineárna sústava rovníc **menej rovníc ako neznámych**, počet riešení bude jedna z možností

- žiadne
- nekonečne veľa

Homogénna sústava lineárnych rovníc je sústava, ktorá má všetky konštantné členy (pravé strany) nulové.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

Pre homogénnu sústavu lineárnych rovníc platí jedna z nasledujúcich možností:

- Sústava má iba triviálne riešenie $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.
- Sústava má nekonečne veľa riešení vrátane triviálneho.