

Algebra a diskrétna matematika
Prehľad z 11. prednášky
Dihedrálna, symetrická grupa, izomorfizmus grúp

Algebraické štruktúry s jednou binárnou operáciou

Nech M je neprázdna množina a nech platí

- (1) $*$ je binárna operácia na M
- (2) $*$ je asociatívna na M
- (3) $\exists e \in M \forall x \in M : x * e = e * x = x$
- (4) $\forall x \in M \exists x^{-1} \in M : x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

Potom dvojicu $(M, *)$ nazývame **grupa**.

Ak sú na M splnené iba vlastnosti (1), (2), (3), jedná sa o **monoid**.

Ak na M platí len (1), (2), hovoríme, že $(M, *)$ je **pologrupa**.

Ak na M požadujeme iba platnosť (1), štruktúra $(M, *)$ je **grupoid**.

Rád prvku a grupy $(M, *)$ je najmenšie kladné celé číslo n také, že

$$a^n = e,$$

Dihedrálna grupa

Grupa symetrií pravidelného n -uholníka sa nazýva **dihedrálna grupa**.

Označuje sa D_n

Jej rád je $|D_n| = 2n$ (n osových symetrií a n otočení)

Neutrálny prvok e je identita.

Prezentácia: $D_n = \langle r, s \mid r^n = e, s^2 = e, rs = sr^{-1} \rangle$

r – rotácia o $360^\circ/n$

s – symetria podľa pevnej osi symetrie

Priamy súčin grúp

Priamy súčin dvoch grúp $(S, *)$ a (T, \circ) je definovaný ako operácia \bullet na $S \times T$, kde $\forall s_1, s_2 \in S, t_1, t_2 \in T : (s_1, t_1) \bullet (s_2, t_2) = (s_1 * s_2, t_1 \circ t_2)$

Dá sa ukázať, že operácia \bullet je *asociatívna*.

Neutrálny prvok v $(S \times T, \bullet)$ je (e_1, e_2) , kde e_1 je neutrálny prvok v S a e_2 je neutrálny prvok v T .

Inverzný prvok k prvku (s, t) je prvok (s^{-1}, t^{-1}) , pričom s^{-1} je inverzný k s v $(S, *)$ a t^{-1} je inverzný k t v (T, \circ) .

Dvojica $(S \times T, \bullet)$ tvorí *grupu*.

Príklad 1: Priamy súčin grúp $(\mathbb{Z}_2, +)$ a $(\mathbb{Z}_2, +)$ je množina $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

s operáciou súčtu modulo 2 v oboch súradniciach.

Napr. $(0, 1) \oplus (1, 0) = (1, 1)$, $(1, 1) \oplus (1, 0) = (0, 1)$, $(1, 0) \oplus (1, 1) = (0, 1)$ atď.

Príklad 2: Priamy súčin grúp $(\mathbb{Z}_2, +)$ a $(\mathbb{Z}_3, +)$ je množina

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$

s operáciou \oplus , ktorá vykoná súčet modulo 2 v prvej súradnici a súčet modulo 3 v druhej súradnici.

Napr. $(1, 2) \oplus (0, 2) = (1, 1)$, $(1, 1) \oplus (1, 2) = (0, 0)$.

Izomorfizmus grúp

Nech $(M_1, *)$ a (M_2, \circ) sú dve grupy. Ak existuje bijekcia φ medzi M_1 a M_2 taká, že $\forall x, y \in M_1$ platí

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y),$$

potom grupy $(M_1, *)$ a (M_2, \circ) sú **izomorfné**, píšeme $M_1 \cong M_2$.

Zobrazenie φ sa nazýva **izomorfizmus**.

Neformálne: Dve grupy sú izomorfné, ak majú "takú istú štruktúru".

Izomorfné grupy majú rovnaký rád a rovnaký počet prvkov určitého rádu.

Tvrdenie 1: Všetky grupy s jedným prvkom sú izomorfné.

Tvrdenie 2: Existuje konečne veľa grúp daného konečného rádu (až na izomorfizmus).

Príklad 3: Grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nie sú izomorfné, pretože grupa $(\mathbb{Z}_4, +)$ má dva prvky rádu 4 a také sa v $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ nenachádzajú. Všetky jej prvky majú rád 2.

Príklad 4: Rozhodnite, či sú niektoré z grúp \mathbb{Z}_6, D_3 a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ izomorfné.

Odpoveď: Overením rádov prvkov zistíme, že D_3 nemôže byť izomorfná ani s \mathbb{Z}_6 ani s $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

V grupách \mathbb{Z}_6 a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ má rovnaký počet prvkov zhodné rády. Príslušný izomorfizmus je $\varphi(0) = (0, 0), \varphi(1) = (1, 1), \varphi(2) = (0, 2), \varphi(3) = (1, 0), \varphi(4) = (0, 1), \varphi(5) = (1, 2)$.

Príklad 5: Sú grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ a $(\mathbb{Z}_5 - \{0\}, \cdot)$ izomorfné?

Odpoveď: Áno

Symetrická grupa

Nech $X = \{1, 2, \dots, n\}$ a nech S_n je množina všetkých bijekcií (čiže permutácií) $\sigma : X \rightarrow X$. Potom platí

- zloženie dvoch bijekcií je bijekcia
- skladanie bijekcií je asociatívne
 $(\sigma \circ \tau) \circ \pi(x) = (\sigma \circ \tau)(\pi(x)) = \sigma(\tau(\pi(x))) = \sigma(\tau \circ \pi)(x) = \sigma \circ (\tau \circ \pi)(x)$
- identické zobrazenie je bijekcia na X
- inverzné zobrazenie bijekcie v S_n je tiež bijekcia v S_n

Množina S_n všetkých permutácií n objektov spolu s operáciou skladania permutácií tvorí grupu rádu $n!$ a nazýva sa **symetrická grupa** stupňa n .

Inverzný prvok sa počíta nasledujúcim spôsobom

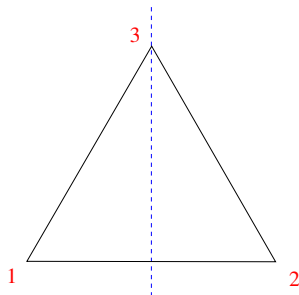
$$(a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{n-1} a_n)^{-1} = (a_1 a_n a_{n-1} \dots a_4 a_3 a_2)$$

Príklad 6: Vypíšte všetky prvky symetrickej grupy S_3 a overte komutatívnosť. Zistite, či je izomorfná s niektorou známou grupou rovnakého rádu.

Odpoveď: $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

Komutatívnosť neplatí; napr. $(12)(123) \neq (123)(12)$.

S_3 je izomorfná s dihedrálnou grupou $D_3 = \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$, kde r je rotácia okolo stredu o 120° proti smeru hodinových ručičiek a s je osová symetria podľa zvislej osi.



Zodpovedajúci izomorfizmus $\varphi : S_3 \rightarrow D_3$ je

$$\begin{aligned}\varphi(e) &= e, \varphi((123)) = r, \varphi((132)) = r^2, \\ \varphi((12)) &= s, \varphi((23)) = rs, \varphi((13)) = r^2s\end{aligned}$$

Príklad 7: Aké rôzne rády majú prvky grupy S_5 ?

Odpoveď: Rád 1 má identita,

rád 2 majú prvky typu (ij) , $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i < j$

rád 2 majú tiež prvky typu $(ij)(k\ell)$, $i, j, k, \ell \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i < j, k < \ell$,

rád 3 majú prvky tvaru (ijk) , $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i < j, k$

rád 4 majú prvky $(ijkl)$, $i, j, k, \ell \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i < j, k, \ell$,

rád 5 majú prvky $(1ijkl)$, $i, j, k, \ell \in \{2, 3, 4, 5\}$,

rád 6 majú prvky tvaru $(1i)(jkl)$, $i, j, \ell \in \{2, 3, 4, 5\}$, $j < k, \ell$,

pričom prvky i, j, k, ℓ sú vždy navzájom rôzne.

Alternujúca grupa

Permutácia zamieňajúca dva prvky a fixujúca všetky ostatné sa nazýva **transpozícia**.

Každú permutáciu je možné napísať vo forme súčinu transpozícií.

$$(a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n) = (a_1 a_2)(a_1 a_3)(a_1 a_4) \dots (a_1 a_n)$$

Permutácia je **párna**, ak je súčinom párneho počtu transpozícií.

Permutácia je **nepárna**, ak je súčinom nepárneho počtu transpozícií.

Príklad 8: Určte paritu daných permutácií

a) (13587)

b) (245398)

c) $(142)(3875)$

Odpoveď: a) párna permutácia, lebo $(13587) = (13)(15)(18)(17)$

b) nepárna permutácia; $(245398) = (24)(25)(23)(29)(28)$

c) nepárna permutácia; $(142)(3875) = (14)(12)(38)(37)(35)$

Množina všetkých párnych permutácií n prvkovej množiny spolu s operáciou skladania permutácií tvorí grupu, ktorá sa nazýva **alternujúca grupa** stupňa n a označuje sa A_n .

Počet prvkov A_n je $\frac{n!}{2}$.

Príklad 9: Vypíšte všetky prvky grupy A_3 a grupy A_4 .

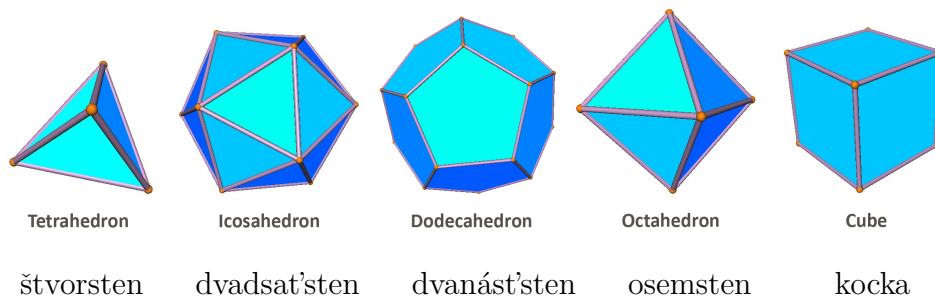
Odpoveď: $A_3 = \{e, (123), (132)\}$

$A_4 = \{e, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

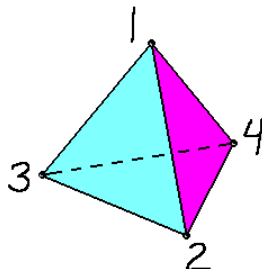
Platónske telesá

Platónske teleso je pravidelný mnohosten tvorený pravidelnými zhodnými mnohouholníkmi.

Existuje len 5 nasledujúcich platónskych telies.



Príklad 10: Určte grupu rotácií pravidelného štvorstena.



Odpoveď: Prvky grupy sú:

- identita,
- 8 prvkov rádu 3 – otočenia okolo 4 osí prechádzajúcich cez vrchol a stred protiláhej steny o 120° a 240° ,
- 3 prvky rádu 2 – otočenia okolo 3 osí prechádzajúcich stredmi protilahlých hrán o 180° .

Grupa rotácií pravidelného štvorstena je izomorfná s grupou A_4 .

Príklad 11: Určte grupu rotácií kocky.



Odpoveď: Prvky grupy sú:

- identita,
- 8 prvkov rádu 3 – otočenia okolo 4 telesových uhlopriečok o 120° a 240° ,
- 9 prvkov rádu 4 – otočenia okolo 3 osí prechádzajúcich stredmi protilahlých stien o 90° , 180° a 270°
- 6 prvkov rádu 2 – otočenia okolo 6 osí prechádzajúcich stredmi protilahlých hrán o 180° .

Grupa rotácií kocky je izomorfná s grupou S_4 .