Algebra a diskrétna matematika
Prehľad zo 4. týždňa
Teória grafov – základné pojmy

Graf je dvojica $G = (V, E)$, kde V je neprázdna množina **vrcholov** a E je nejaká množina dvojprvkových podmnožín V – **hrán**. Niekedy $V = V(G)$, $E = E(G)$.

Príklad: $H = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{d, e\}\}$
Stručnejší zápis množiny hrán: $E = \{ab, ac, ae, de\}$

Grafy znázorňujeme obrázkami v rovine;
vrcholy = body roviny, **hrany** = jednoduché krivky (úsečky, ak je to výhodné) spájajúce príslušné vrcholy.

Grafy môžeme reprezentovať napr. ako vstupy rôznych algoritmov. Najčastejšie používame **zoznam susedov** vrcholov alebo **maticu susednosti**.

1. **Zoznam susedov** $S = S(H)$ pre graf $H = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{ab, ac, ae, de\}$:
   $a:\ b, c, e$
   $b:\ a$
   $c:\ a$
   $d:\ e$
   $e:\ a, d$

2. **Matica susednosti** $A = (a_{ij})_{n\times n}$ pre graf G s n vrcholmi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ a s hranami $E(G)$ má pre $i, j \in \{1, 2, \dots n\}$ definované prvky nasledovne

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } \{v_i v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Niektoré jednoduché, ale dôležité príklady grafov:

P_n – **cesta** s n vrcholmi; jej *dĺžka* je $n - 1$ (počet jej hrán)
$V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ a $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4 \dots, v_{n-1}v_n\}$

Matica susednosti

$$A(P_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C_n – **kružnica** (niekedy aj cyklus) rádu n, $(n \geq 3)$

$V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$; $E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4 \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$

Matica susednosti

$$A(C_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

K_n – **úplný graf** rádu n (alebo: s n vrcholmi) je graf, v ktorom je každá dvojica vrcholov spojená práve jednou hranou. Matica susednosti má nuly na hlavnej diagonále a inde jednotky.

$K_{m,n}$ – **úplný bipartitný** graf rádu $m+n$ (alebo: s $m+n$ vrcholmi) je graf, v ktorom je množina vrcholov rozdelená do dvoch disjunktných partií, s m a n vrcholmi. Dvojica vrcholov je spojená hranou ak sa vrcholy nachádzajú v rôznych partiách.

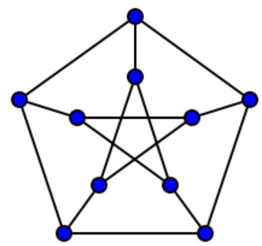
$V(K_{m,n}) = V_m \cup W_n$

$E(K_{m,n}) = \{v_iw_j; v_i \in V_m, i \in \{1, 2, \dots m\}, w_j \in W_n, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$

Matica susednosti je zložená z dvoch nulových blokov a dvoch blokov so samými jednotkami.

Koktailový graf rádu n (alebo: s $2n$ vrcholmi) pozostáva z n párov vrcholov, pričom každá dvojica vrcholov je spojená hranou okrem vrcholov tvoriacich páry.

Petersenov graf



Obyčajný graf je graf, ktorý nemá násobné hrany ani slučky. (Zatiaľ budeme pracovať len s nimi.)

Stupeň vrchola $v \in V(G)$ je počet hrán **incidentných** s vrcholom v. Označuje sa $\deg(v)$.

Pravidelný graf stupňa d je graf, ktorý má všetky stupne rovnaké (d).

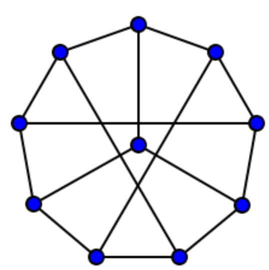
Známy fakt: V každom konečnom grafe platí:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Tvrdenie: Každý konečný obyčajný graf má párny počet vrcholov nepárneho stupňa.

Izomorfizmus grafov: Dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sú **izomorfné**, ak existuje vzájomne jednoznačné zobrazenie (bijekcia) $f : V \to V'$ také, že pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ platí: $\{u, v\} \in E$ práve vtedy, keď $\{f(u), f(v)\} \in E'$.

Nasledujúci graf je izomorfný Petersenovmu grafu:



Ak $G = (V, E)$, tak jeho **komplement** je graf $\overline{G} = (V, \overline{E})$, kde $\overline{E}$ je doplnok E v množine $V^{(2)}$ *všetkých* 2-prvkových podmnožín V.

Graf sa nazýva **samokomplementárny**, ak je izomorfný svojmu komplementu.

$G' = (V', E')$ je **podgraf** grafu $G = (V, E)$, ak $V' \subset V$ a $E' \subset E$. Tento podgraf je **indukovaný**, ak $E' = E \cap V'^{(2)}$.

Graf G je **súvislý**, ak každé jeho dva vrcholy sú spojené cestou v G.

Vzdialenosť $d(u, v)$ vrcholov $u, v \in V(G)$ v súvislom grafe G je dĺžka *najkratšej* cesty spájajúcej u a v.

Priemer $\mathrm{diam}(G)$ súvislého grafu G je *najväčšia* vzdialenosť "nameraná" v G: $\mathrm{diam}(G) = \max\{d(u, v);\ u, v \in V(G)\}$.

Obvod $g(G)$ grafu G je dĺžka najmenšej kružnice v grafe G.

Problém motivovaný navrhovaním sietí:
Máme navrhnúť sieť tak, aby jeden uzol bol pevnou linkou spojený s najviac 3 inými, ale aby ľubovoľná dvojica nespojených uzlov bola pevnými spojmi dosiahnuteľná len cez jeden uzol. Aký najväčší počet uzlov môže taká sieť mať?

Grafová formulácia: Aký najväčší rád má graf priemeru 2 s maximálnym stupňom vrchola $d \leq 3$?

Odpoveď po malom experimentovaní je Petersenov graf.

Aký **najväčší rád** n má graf priemeru 2 s maximálnym stupňom vrchola $d \geq 4$?

- Pre stupeň $d = 4$: $n = 15$
- Pre stupeň $d = 5$: $n = 24$ - ťažké !
- Pre stupeň $d = 6$: Odpoveď nepoznáme! Najlepšia známa hodnota je 32 vrcholov.
- Pre stupeň $d = 7$: $n = 50$ – veľmi slávny Hoffman-Singletonov graf.
- Pre stupne $d > 7$: Slávny otvorený problém – maximum nepoznáme pre žiadnu hodnotu $d > 7$.

Graf je **rovinný**, ak ho je možné znázorniť v rovine tak, aby sa žiadne 2 krivky reprezentujúce jeho hrany nemali spoločný bod, ktorý by bol vnútorným bodom jednej z nich.

Oblasti rovinnej realizácie $\mathcal{G}$ rovinného grafu G v R^2 sú súvislé komponenty množiny $R^2 \setminus \mathcal{G}$.

Eulerov vzorec: V súvislom rovinnom grafe s n vrcholmi, h hranami a o oblasťami platí $n - h + o = 2$.

Dôkaz: Indukciou* podľa počtu hrán h grafu G

Ak $h = 0$, potom $n = 1$, $o = 1$ a vzorec platí.

1. Veta platí pre súvislé grafy bez kružníc.

2. Uvažujme rovinný graf G, ktorý obsahuje kružnicu, napr. C. Nech e je hrana v C; potom $G - e$ vzniknutý z G odstránením e ostane súvislý, ale odstránenm hrany sa spoja dve oblasti do jednej. Teda pre rovinný graf $G-e$ s n vrcholmi, $h-1$ hranami a $o-1$ oblasťami podľa indukčného predpokladu platí $n - (h - 1) + (o - 1) = 2$. Ale potom triviálne $n - h + o = 2$.

Použitím Eulerovho vzorca sa dá ukázať, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nie sú rovinné. To isté platí pre Petersenov graf.

Graf H je **homeomorfný** grafu K_5, ak H vznikne z K_5 nahradením ľubovoľnej podmnožiny hrán cestami (ľubovoľnej dĺžky). Podobne – graf homeomorfný grafu $K_{3,3}$. Všetky tieto sú opäť nerovinné.

Podgraf rovinného grafu je rovinný.

Kuratowského veta (1930): Graf je rovinný práve vtedy, keď neobsahuje podgraf homeomorfný grafu K_5 alebo $K_{3,3}$. (Slávny výsledok).

* Dôkaz matematickou indukciou

Matematickou indukciou dokazujeme tvrdenia, ktoré platia pre všetky *prirodzené čísla* alebo pre určitú *nekonečnú postupnosť*.

Tvrdenie: Pre každé prirodzené číslo $n \geq k_0$ platí $T(n)$.

Dôkaz sa skladá z dvoch krokov:

1. Báza:
Ukážeme, že tvrdenie platí pre najmenšie číslo z postupnosti, tj. dokazujeme platnosť $T(k_0)$.

2. Indukčný krok:
Ukážeme, že pre ľubovolné $k \geq k_0$ z platnosti $T(k)$ vyplýva platnosť $T(k+1)$.

Predpoklad platnosti $T(k)$ sa nazýva *indukčný predpoklad*.