

**Príklad 1.  $TM_1, 0^n1^n$** **Zadanie:**

■ Definujte Turingov stroj  $TM_1$ , ktorý rozpoznáva jazyk  $L_1 = \{ 0^n1^n \mid n \geq 1 \}$

**Riešenie:**

$$TM_1 = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

$$\Gamma = \{0, 1, B, X, Y\}$$

$$F = \{q_5\}$$

$$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, R)$$

$$\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, R)$$

$$\delta(q_1, Y) = (q_1, Y, R)$$

$$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, L)$$

$$\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, L)$$

$$\delta(q_2, X) = (q_3, X, R)$$

$$\delta(q_2, 0) = (q_4, 0, L)$$

$$\delta(q_4, 0) = (q_4, 0, L)$$

$$\delta(q_4, X) = (q_0, X, R)$$

$$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, R)$$

$$\delta(q_3, B) = (q_5, B, R)$$

Zobrazenie prechodov stavmi pri vstupnom slove 000111.

	X	X	X	Y	Y	Y	B
$q_0$							
	$q_1$						
		$q_1$					
			$q_1$				
				$q_2$			
			$q_4$				
		$q_4$					
	$q_0$						
		$q_1$					
			$q_1$				
				$q_1$			
					$q_2$		
				$q_4$			
			$q_4$				
		$q_0$					
			$q_1$				
				$q_1$			
					$q_1$		
						$q_2$	
					$q_2$		
				$q_2$			
			$q_2$				
				$q_3$			
					$q_3$		
						$q_3$	
							$q_5$

**Príklad výpočtu:**

► Výpočet T stroja na vstupnom slove 01

$(q_0, \uparrow 01) \vdash (q_1, X \uparrow 1) \vdash (q_2, \uparrow XY) \vdash (q_3, X \uparrow Y) \vdash (q_3, XY \uparrow) \vdash (q_5, XY \uparrow)$

## Príklad 2. $TM_2, a^n b^n c^n$

### Zadanie:

- Definujte Turingov stroj  $TM_2$ , ktorý rozpoznáva jazyk  $L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$

### Riešenie:

Nájdeme na páske symbol  $a$ , označíme ho ako  $\underline{a}$ , postupujeme vpravo, cez  $a$ ,  $\underline{b}$  až nájdeme symbol  $b$ . Nájdene  $b$  na páske označíme ako  $\underline{b}$ , postupujeme vpravo, cez  $b$ ,  $\underline{c}$  až nájdeme symbol  $c$ . Nájdene  $c$  na páske označíme ako  $\underline{c}$ , vraciame sa späť, vľavo cez  $\underline{c}$ ,  $b$ ,  $\underline{b}$  až pokým nenájdeme symbol  $a$  alebo symbol  $\underline{a}$ . Keď nájdeme na páske symbol  $a$ , prejdeme cez  $\underline{a}$  ku prvému  $a$ . Následne opakujem celý postup - cyklím. Keď už nenájdeme symbol  $a$  iba symbol  $\underline{a}$ , som na konci prezerania vstupného slova. V kontrolnom stave skontrolujem či sú vpravo na páske len symboly  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  a prejdeme do finálneho stavu a akceptujem.

$$TM_2 = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_k, q_f\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$\Gamma = \{a, b, c, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$$

$$F = \{q_f\}$$

$$\delta(q_0, a) = (q_1, \underline{a}, R)$$

$$\delta(q_1, X) = (q_1, X, R) \quad X \in \{a, \underline{b}\}$$

$$\delta(q_1, b) = (q_2, \underline{b}, R)$$

$$\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, R) \quad Y \in \{b, \underline{c}\}$$

$$\delta(q_2, c) = (q_3, \underline{c}, L)$$

$$\delta(q_3, Z) = (q_3, Z, L) \quad Z \in \{\underline{c}, b, \underline{b}\}$$

$$\delta(q_3, a) = (q_4, a, L)$$

$$\delta(q_4, a) = (q_4, a, L)$$

$$\delta(q_3, \underline{a}) = (q_0, \underline{a}, R)$$

$$\delta(q_3, \underline{a}) = (q_k, \underline{a}, R)$$

$$\delta(q_k, w) = (q_k, w, R) \quad w \in \{\underline{b}, \underline{c}\}$$

$$\delta(q_k, B) = (q_f, B, R)$$

Zobrazenie prechodov stavmi pri vstupnom slove *aaabbbccc*.

B	a	a	a	b	b	b	c	c	c	B
	$q_0$									
		$q_1$								
			$q_1$							
				$q_1$						
					$q_2$					
						$q_2$				
							$q_2$			
						$q_3$				
					$q_3$					
				$q_3$						
			$q_3$							
		$q_4$								
	$q_4$									
		$q_0$								
			$q_1$							
				$q_1$						
					$q_1$					
						$q_2$				
							$q_2$			
								$q_2$		
								$q_3$		
						$q_3$				
					$q_3$					
				$q_3$						
			$q_3$							
		$q_4$								
			$q_0$							
				$q_1$						
					$q_1$					
						$q_1$				
							$q_2$			
								$q_2$		
									$q_2$	
								$q_3$		
							$q_3$			
						$q_3$				
					$q_3$					
				$q_3$						
			$q_3$							
				$q_k$						
					$q_k$					
						$q_k$				
							$q_k$			
								$q_k$		
									$q_k$	
										$q_f$

### Príklad 3. $TM_3, ww^R$

**Zadanie:**

■ Definujte Turingov stroj  $TM_3$ , ktorý rozpoznáva jazyk  $L_3 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

**Riešenie:**

$$TM_3 = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

$$K = \{q_0, q_a, q_{a'}, q_b, q_{b'}, q_n, q_f\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Gamma = \{a, b, B\}$$

$$F = \{q_f\}$$

$$\delta(q_0, a) = (q_a, B, R)$$

$$\delta(q_a, X) = (q_a, X, R) \quad X \in \{a, b\}$$

$$\delta(q_a, B) = (q_{a'}, B, L)$$

$$\delta(q_{a'}, a) = (q_n, B, L)$$

$$\delta(q_0, b) = (q_b, B, R)$$

$$\delta(q_b, X) = (q_b, X, R)$$

$$\delta(q_b, B) = (q_{b'}, B, L)$$

$$\delta(q_{b'}, b) = (q_n, B, L)$$

$$\delta(q_n, X) = (q_n, X, L)$$

$$\delta(q_n, B) = (q_0, B, R)$$

$$\delta(q_0, B) = (q_f, B, R)$$

**Príklad 4.**  $TM_4$ ,  $\#_a w = \#_b w$

**Zadanie:**

- Definujte Turingov stroj  $TM_4$ , ktorý rozpoznáva jazyk  $L_4 = \{\#_a w = \#_b w \mid w \in \{a, b\}^*\}$

**Riešenie:**

$$TM_4 = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_f\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Gamma = \{a, b, \underline{a}, \underline{b}, B\}$$

$$F = \{q_f\}$$

$$\delta(q_0, a) = (q_1, \underline{a}, L)$$

$$\delta(q_0, X) = (q_0, X, R) \quad X \in \{\underline{a}, b, \underline{b}\}$$

$$\delta(q_1, X) = (q_1, X, L)$$

$$\delta(q_1, B) = (q_2, B, R)$$

$$\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, R) \quad Y \in \{\underline{a}, \underline{b}, a\}$$

$$\delta(q_2, b) = (q_3, \underline{b}, L)$$

$$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, L)$$

$$\delta(q_3, B) = (q_0, B, R)$$

$$\delta(q_0, B) = (q_4, B, L)$$

$$\delta(q_4, Z) = (q_4, Z, L) \quad Z \in \{\underline{a}, \underline{b}\}$$

$$\delta(q_4, B) = (q_f, B, R)$$

Zobrazenie prechodov stavmi pri vstupnom slove *abbabaa*.

B	<u>a</u>	<u>b</u>	<u>b</u>	<u>b</u>	<u>a</u>	<u>b</u>	<u>a</u>	<u>a</u>	B
$q_0$	$q_1$								
$q_1$	$q_2$	$q_2$							
$q_3$	$q_3$								
	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$				
$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_1$					
	$q_2$	$q_2$	$q_2$						
$q_3$	$q_3$	$q_3$							
	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$		
$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_1$			
	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_2$			
$q_3$	$q_3$	$q_3$	$q_3$	$q_3$	$q_3$				
	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	
$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_1$	$q_1$		
	$q_2$	$q_2$	$q_2$	$q_2$					
$q_3$	$q_3$	$q_3$	$q_3$						
	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$	$q_0$
								$q_4$	

**Príklad 5.**  $TM_5$ ,  $\#_a w = \#_b w = \#_c w$

**Zadanie:**

- Definujte Turingov stroj  $TM_5$ , ktorý rozpoznáva jazyk  $L_5 = \{\#_a w = \#_b w = \#_c w \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$

**Riešenie:**

Čítacia hlava bude postupovať po vstupnom slove smerom vpravo, až kým nenájde prvý nepodčiarknutý symbol  $a$ , ktorý zmení na  $\underline{a}$ . Vráti sa smerom vľavo, až po symbol blank  $B$ . Potom zmení smer vpravo a hľadá prvý nepodčiarknutý symbol  $b$ , ktorý zmení na  $\underline{b}$ . Vráti sa smerom vľavo, až po symbol blank  $B$ . Následne znovu zmení smer vpravo a hľadá prvý nepodčiarknutý symbol  $c$ , ktorý zmení na  $\underline{c}$ . Vráti sa smerom vľavo, až po symbol blank  $B$ . Túto činnosť opakuje až kým pri hľadaní symbolu  $a$  narazí na symbol  $B$  vpravo. Nakoniec cestou vľavo skontroluje vstupné slovo, či naozaj obsahuje iba podčiarknuté symboly  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$ .

$$TM_5 = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_f\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$\Gamma = \{a, b, c, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$$

$$F = \{q_f\}$$

hľadá symbol  $a$ , stav  $q_0$

$$\delta(q_0, X) = (q_0, X, R) \quad X \in \{\underline{a}, b, \underline{b}, c, \underline{c}\}$$

$$\delta(q_0, a) = (q_1, \underline{a}, L)$$

$$\delta(q_1, X) = (q_1, X, L)$$

$$\delta(q_1, B) = (q_2, B, R)$$

hľadá symbol  $b$ , stav  $q_2$

$$\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, R) \quad Y \in \{a, \underline{a}, \underline{b}, c, \underline{c}\}$$

$$\delta(q_2, b) = (q_3, \underline{b}, L)$$

$$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, L)$$

$$\delta(q_3, B) = (q_4, B, R)$$

hľadá symbol  $c$ , stav  $q_4$

$$\delta(q_4, Z) = (q_4, Z, R) \quad Z \in \{a, \underline{a}, b, \underline{b}, \underline{c}\}$$

$$\delta(q_4, c) = (q_5, \underline{c}, L)$$



$$\delta(q_5, Z) = (q_5, Z, L)$$

$$\delta(q_5, B) = (q_0, B, R)$$

kontrola, *stav*  $q_k$

$$\delta(q_0, B) = (q_k, B, L)$$

$$\delta(q_k, v) = (q_k, v, R) \quad v \in \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$$

$$\delta(q_k, B) = (q_f, B, R)$$

## Príklad 6. $TM_6$ , ww

### Zadanie:

- Definujte Turingov stroj  $TM_6$ , ktorý rozpoznáva jazyk  $L_6 = \{ww \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$

### Riešenie:

Hľadá stred vstupného slova na páske takým spôsobom, že označujem symboly zľava a sprava ako podčiarknuté symboly. Stred je na  $n/2 + 1$  pozícii. Stred vstupného slova mi označuje koniec prvého a začiatok druhého slova. Následne môžem kontrolovať zhodnosť oboch slov. Keď som v strede vstupného slova, označím symbol druhého slova veľkým písmenom, zapamätám si daný symbol v stave a vrátim sa vľavo, kde označím ten istý symbol v prvom slove veľkým písmenom a traverzujem vpravo do druhého slova. Opakujem tento postup, až kým neoznačím posledné písmeno prvého slova, čo znamená, že pri traverzovaní nájdem veľký podčiarknutý symbol. Prejdem do kontrolného stavu, skontrolujem slovo, či niekde nezostal neoznačený symbol a pri narazení na blank B akceptujem.

$$TM_6 = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

$$K = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_a, q_{a'}, q_{a''}, q_t, q_{t'}, q_{t''}, q_k, q_f\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$\Gamma = \{a, b, c, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$$

$$F = \{q_f\}$$

hľadá stred vstupného slova, stav  $q_0$

$$\delta(q_0, x) = (q_1, \underline{x}, R) \quad x \in \{a, b\}$$

$$\delta(q_1, x) = (q_1, x, R)$$

$$\delta(q_1, y) = (q_2, y, L) \quad y \in \{B, \underline{a}, \underline{b}\}$$

$$\delta(q_2, x) = (q_3, \underline{x}, L)$$

$$\delta(q_3, \underline{x}) = (q_4, \underline{x}, R)$$

$$\delta(q_3, x) = (q_5, x, L)$$

$$\delta(q_5, x) = (q_5, x, L)$$

$$\delta(q_5, \underline{x}) = (q_0, \underline{x}, R)$$

našiel stred vstupného slova v stave  $q_4$

kontroluje rovnosť slov w, začína v strede v stave  $q_4$

kontrola symbolu a, zapamätávanie symbolu v stave  $q_a$

$$\delta(q_4, \underline{a}) = (q_a, \underline{A}, L)$$

$$\delta(q_a, \underline{X}) = (q_a, \underline{X}, L)$$

$$\begin{aligned}
\delta(q_a, \underline{x}) &= (q_{a'}, \underline{x}, L) \\
\delta(q_{a'}, \underline{x}) &= (q_{a'}, \underline{x}, L) \\
\delta(q_{a'}, \underline{z}) &= (q_{a''}, \underline{z}, R) & z \in \{B, \underline{A}, \underline{B}\} \\
\delta(q_{a''}, \underline{a}) &= (q_t, \underline{A}, R) \\
\delta(q_t, \underline{x}) &= (q_{t'}, \underline{x}, R) \\
\delta(q_{t'}, \underline{x}) &= (q_{t'}, \underline{x}, R) \\
\delta(q_t, \underline{X}) &= (q_k, \underline{X}, R) \\
\delta(q_k, \underline{X}) &= (q_k, \underline{X}, R) \\
\delta(q_k, B) &= (q_f, B, R) \\
\delta(q_{t'}, \underline{X}) &= (q_{t''}, \underline{X}, R) \\
\delta(q_{t''}, \underline{X}) &= (q_{t'}, \underline{X}, R)
\end{aligned}$$

kontrola symbolu b, zapamätávanie symbolu v stave  $q_b$

$$\begin{aligned}
\delta(q_4, \underline{b}) &= (q_b, \underline{B}, L) \\
\delta(q_b, \underline{X}) &= (q_b, \underline{X}, L) \\
\delta(q_b, \underline{x}) &= (q_{b'}, \underline{x}, L) \\
\delta(q_{b'}, \underline{x}) &= (q_{b'}, \underline{x}, L) \\
\delta(q_{b'}, \underline{z}) &= (q_{b''}, \underline{z}, R) & v \in \{A, \underline{A}, \underline{B}\} \\
\delta(q_{b''}, \underline{b}) &= (q_t, \underline{B}, R) \\
\delta(q_t, \underline{x}) &= (q_{t'}, \underline{x}, R) \\
\delta(q_{t'}, \underline{x}) &= (q_{t'}, \underline{x}, R) \\
\delta(q_t, \underline{X}) &= (q_k, \underline{X}, R) \\
\delta(q_k, \underline{X}) &= (q_k, \underline{X}, R) \\
\delta(q_k, B) &= (q_f, B, R) \\
\delta(q_{t'}, \underline{X}) &= (q_{t''}, \underline{X}, R) \\
\delta(q_{t''}, \underline{X}) &= (q_{t'}, \underline{X}, R)
\end{aligned}$$