



Fakulta informatiky  
Masarykovy univerzity

---

# Cvičení k předmětu IB002 Algoritmy a datové struktury I



**Daliborek vzkazuje:** Algoritmus je parciální funkce z domény tvořené kartézským součinem domén typů parametrů do domény typu výsledku, případně kartézského součinu těchto domén, která je vyčíslitelná v rámci stanoveného formalizmu.

poslední modifikace 16. února 2018

---

Tato sbírka byla vytvořena z příkladů k procvičení v předmětu *IB002 Algoritmy a datové struktury I*. K vytvoření sbírky přispívají cvičící předmětu IB002. Aktuální verzi spravují Ivana Černá, Karel Kubíček, Henrich Lauko a Vojtěch Řehák.

# Obsah

1	Spojovaný seznam, fronta a zásobník	3
2	Algoritmy a korektnost	10
3	Asymptotická notace a složitost algoritmů	19
4	Rekurze	25
5	Řadicí algoritmy	36
6	Halda a prioritní fronta	42
7	Binární vyhledávací stromy	47
8	Červeno-černé stromy	53
9	B-stromy	59
10	Hašovací tabulka	64
11	Průzkum grafů	70
12	Cesty v grafech	79
	Řešení některých příkladů	86

# Kapitola 1

## Spojovaný seznam, fronta a zásobník

**Statické datové struktury** jsou datové struktury s pevnou velikostí, například uspořádaná  $k$ -tice nebo pole konstantní délky.

**Dynamické datové struktury** jsou datové struktury, jejichž velikost lze během vykonávání programu měnit.

**Operace nad datovými strukturami** jsou operace, kterými můžeme modifikovat nebo využívat obsah datové struktury.

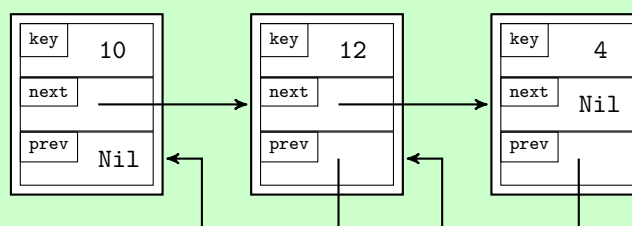
**Typické operace jsou:**

1. SEARCH vyhledává v datové struktuře prvek s daným klíčem,
2. INSERT vkládá prvek do datové struktury,
3. DELETE maže prvek datové struktury
4. MAXIMUM vrací ukazatel na maximální prvek z datové struktury,
5. MINIMUM vrací ukazatel na minimální prvek z datové struktury,
6. SUCCESSION vrací ukazatel na následující prvek (podle uspořádání) a
7. PREDECESSOR vrací ukazatel na předcházející prvek (podle uspořádání).

---

### 1.1 Procvičte si práci se zřetězeným seznamem:

Velmi nápomocné při práci s dynamickými datovými strukturami jsou obrázky. Takto si můžete představit oboustranně zřetězený seznam. Doporučujeme si jej překreslit tužkou a provést přidání a odebrání prvku.

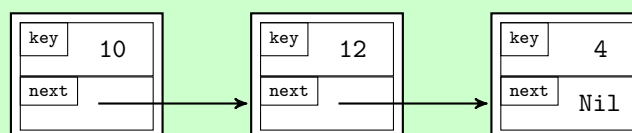


- a) Dokreslete motivační obrázek výše tak, aby vznikla kompletní datová strukturu oboustranně zřetěženého seznamu (s odkazy *first* a *last*). Nakreslený seznam bude konkrétní instance *L*.
- b) Vyhodnoťte následující výrazy:
- *10.next.key*
  - *first.key*
  - *L.first.key*
  - *L.first.next*
  - *L.first.next.prev.key*
  - *L.first.prev.next.key*
  - *L.first.next.key = L.last.prev.key*
  - *L.first.next = L.last.prev*
  - *L.first.next.key ← L.last.prev.prev.key*
  - *L.first.next ← L.last.prev.prev*
- c) K dané struktuře seznamu *L* navrhnete funkci vložení prvku – *INSERT(L, key)*. Výstupem bude ukazatel na nově přidaný prvek s klíčem *key*. Nový klíč vkládejte na konec seznamu *L*.

Při práci s dynamickými strukturami dávejte pozor, abyste na prvek struktury neztratili ukazatel.

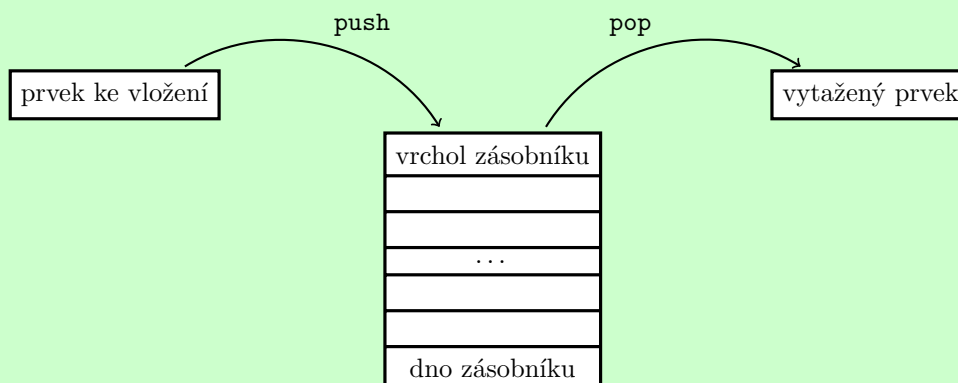
- d) Navrhnete metodu odstranění prvku ze seznamu *DELETE(L, node)*. Odstraňovaný prvek je zadán ukazatelem *node* a ve vstupní podmínce budeme požadovat, aby tento prvek v seznamu byl, takže to v pseudokódu nemusíme kontrolovat. Proč je odstraňování efektivnější u spojovaného seznamu než u pole?
- e) Navrhnete vyhledání prvku s konkrétním klíčem v seznamu – *SEARCH(L, key)*. Funkce vrací ukazatel na nalezený prvek, nebo *nil*, pokud se prvek v seznamu nenachází.
- f) Porovnejte přístup k *i*-tému prvku ve spojovaném seznamu a v poli.
- g) Jaké výhody nám poskytuje oboustranně spojovaný seznam oproti jednosměrně spojovanému seznamu?

Jednostranně zřetěžený seznam si můžeme vizualizovat následovně:



**1.2** Vytvořte zásobník na základě jednostranně spojovaného seznamu. Implementujte na něm operace *PUSH* pro vložení a *POP* pro odstranění vrcholu zásobníku.

Obrázek pro zásobník – LIFO (Last In First Out). Jaké kde mají být ukazatele si doplňte sami.



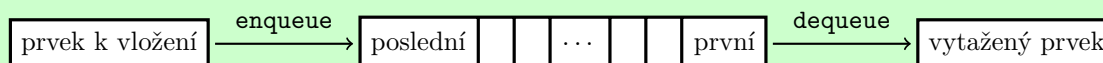
**Pan Usměvavý dodává:** Fronta na stojato je zásobník, kterému prasklo dno.

**1.3** Mějme zásobník a na něm sekvenci příkazů POP a PUSH. PUSH vkládá popořadě hodnoty od 0 po 9, POP vypíše odebranou hodnotu. Které z následujících sekvencí čísel nemůžou nastat?

- a) 4 3 2 1 0 9 8 7 6 5
- b) 4 6 8 7 5 3 2 9 0 1
- c) 2 5 6 7 4 8 9 3 1 0
- d) 4 3 2 1 0 5 6 7 8 9
- e) 1 2 3 4 5 6 9 8 7 0
- f) 0 4 6 5 3 8 1 7 2 9
- g) 1 4 7 9 8 6 5 3 0 2

**1.4** Vytvořte frontu na základě jednostranně spojovaného seznamu. Implementujte na ní operace ENQUEUE pro vkládání a DEQUEUE pro odstranění prvku.

Obrázek pro frontu – FIFO (First In First Out). Jaké kde mají být ukazatele si doplňte sami.



**1.5** Mějme frontu a na ní sekvenci příkazů DEQUEUE a ENQUEUE. ENQUEUE vkládá popořadě hodnoty od 0 po 9, DEQUEUE vypíše odebranou hodnotu. Které z následujících sekvencí čísel nemůžou nastat?

- a) 4 6 8 7 5 3 2 9 0 1
- b) 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- c) 2 5 6 7 4 8 9 3 1 0

## 1.6 Jak byste implementovali frontu jen pomocí dvou zásobníků?

Následující příklady jsou vhodné pro domácí studium.

1.7 Pečlivě si naprogramujte všechny potřebné operace pro práci se seznamem, frontou a zásobníkem. Budete je ještě v tomto předmětu potřebovat. Podklady najdete ve [studijních materiálech](#).



**Pan Usměvavý dodává:** Zkratky některých datových struktur:

LIFO (Last In, First Out) – také známo jako zásobník.

FIFO (First In, First Out) – také známo jako fronta.

FIGL (First In, Got Lost) – také známo jako byrokracie.

AIFO (All In, First Out) – také znám jako začátečník v pokeru.

FIGO (First In, Garbage Out) – také známo jako generátor náhodných čísel.

## 1.8 Naučte se pracovat s referencemi a složenými typy:

V Pythonu místo struktur používáme třídy. Třída je zobecnění struktury, která navíc umožňuje vytvářet funkce uvnitř třídy (pak jim říkáme metody). V tomto předmětu se však neočekává znalost objektově orientovaného programování a třídy budeme v Pythonu potřebovat pouze ve smyslu složeného datového typu (avšak těm, co OOP ovládají, nebráníme metody používat). Deklarace atributů se provádí zároveň s inicializací v konstruktoru (metodě `__init__`). Konstruktor má jeden povinný parametr `self`, může mít i další parametry. K atributům se v konstruktoru (i v jiných metodách) přistupuje pomocí `self.atribut`.

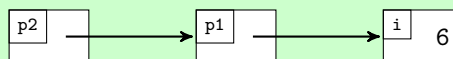
Výraz v Pythonu	Význam
<code>class Node:</code>	definice typu <code>Node</code>
<code>def __init__(self, k):</code>	konstruktor s parametrem <code>k</code>
<code>self.key = k</code>	typ atributu <code>key</code> je určen dynamicky podle toho, co do něj přiřazujeme
<code>self.next = None</code>	obdobně u atributu <code>next</code>
<code>a = Node(42)</code>	vytvoření objektu typu <code>Node</code> , parametr <code>k</code> je 42
<code>a.key</code>	přístup k atributu <code>key</code> proměnné <code>a</code>

Pro srovnání uvádíme i jazyk C, kde při práci s ukazateli používáme operátory reference a dereference.

Výraz v C	význam
<code>int* a</code>	proměnná <code>a</code> je ukazatelem, tj. adresou místa v paměti, kde se nachází proměnná/hodnota typu <code>integer</code>
<code>int b = *a</code>	do proměnné <code>b</code> ukládáme dereferenci <code>a</code> , tj. hodnotu uloženou na adrese <code>a</code>
<code>*a = b</code>	do dereference <code>a</code> , tj. na místo s adresou <code>a</code> , ukládáme hodnotu <code>b</code>
<code>a = &amp;b</code>	do proměnné <code>a</code> ukládáme referenci na <code>b</code> , tj. adresu proměnné <code>b</code>

Všimněte si, že dereference lze číst i do ní ukládat, ale reference lze jen číst. Zamyslete se proč.

```
int i = 3;
int* p1 = &i;
int** p2 = &p1;
```



```
i = *p1 + i;
```

V C můžeme pro složené typy používat struktury. Mějme proměnnou **a** typu **Struktura** a proměnnou **b**, která je typu ukazatel na místo v paměti s daty typu **Struktura**, tj. **Struktura a** a **Struktura\* b**.

Výraz v C	Význam
<code>typedef struct Node {     int key;     struct Node* next; } Node_t;</code>	definice typu <code>struct Node</code> , který je strukturou s atributy <code>key</code> a <code>next</code> <code>key</code> je typu integer <code>next</code> je typu ukazatel na <code>struct Node</code> zde si zavádíme alias <code>Node_t</code> pro <code>struct Node</code>
<code>a.key</code>	přístup k atributu <code>key</code> proměnné <code>a</code>
<code>(*b).key</code> <code>b-&gt;key</code>	přístup k atributu <code>key</code> struktury referencované ukazatelem <code>b</code> , kromě dereference lze použít i přehlednější operátor <code>-&gt;</code>

- Vytvořte vlastní složený datový typ, který reprezentuje osobu. K osobě je potřeba uchovávat jméno a věk.
- Přidejte do vašeho typu pole/seznam (C/Python) přátel dané osoby. Jakou formou je vhodné přátele ukládat?

### 1.9 Mějme následující funkce:

- `HEAD(n, A)`, která vrátí seznam prvních  $n$  prvků seznamu  $A$ .
- `TAIL(n, A)`, která vrátí seznam posledních  $n$  prvků seznamu  $A$ .

Pomocí těchto funkcí navrhnete funkci `INTERVAL(a, b, A)`, která vrátí seznam prvků ze seznamu  $A$  na pozicích v intervalu od  $a$  po  $b$ .

### 1.10 Implementujte funkci `DELETE`, která odstraní první výskyt zadaného prvku:

- ze zásobníku s použitím pouze funkcí `PUSH` a `POP` za použití pomocného zásobníku.
- z fronty s použitím pouze funkcí `ENQUEUE` a `DEQUEUE` za použití pomocné fronty.

Následující příklady jsou vytvořené ze starších implementačních testů. Mají sloužit jako bonusový materiál pro domácí studium nebo pro případ, že se již na cvičení všechno probralo.



**Karlík varuje:** Při řešení úloh s dynamickými datovými strukturami si dávejte pozor na přístupování a kontrolu k *Nil* prvkům.

**1.11** Implementujte následující modifikace lineárního seznamu:

- Formulujte funkci, která obrátí pořadí prvků v jednostranně zřetěženém lineárním seznamu. Tedy začátek bude nový konec a konec bude nový začátek.
- Modifikujte oboustranně zřetěžený lineární seznam tak, že ukazatele „dopředu“ budou ukazovat ob jeden prvek dál. Zpětné ukazatele zůstanou zachovány.

---

**1.12** Mějme definovaný cyklický seznam jako seznam, jehož *začátek* = *konec*. Implementujte nad takovýmto seznamem následující funkce:

- ISCIRCULAR, která ověří, zdali je zadaný seznam opravdu cyklický,
- GETLENGTH, která vrátí počet prvků v seznamu,
- CALCULATEOPPOSITE, která k jednotlivým prvkům seznamu najde protější prvek v kruhovém seznamu a vytvoří na něj ukazatel (řešte jen pro případ kruhového seznamu sudé délky).

---

**1.13** Implementujte modifikovaný zásobník, jehož metody PUSH a POP fungují následovně:

- PUSH vkládá na vrchol zásobníku v případě, že vkládaná hodnota je větší než aktuální vrchol zásobníku a vrchol aktualizuje. V opačném případě vloží nový prvek hned pod vrchol zásobníku a vrchol nemění.
- POP odebírá prvek ze zásobníku z jeho vrcholu v případě, že vrchní prvek je větší než prvek pod ním. V opačném případě se odstraní prvek pod vrchním prvkem, tedy ten co má větší hodnotu.



**Karlík varuje:** Zkontrolujte si, jak se vaše implementace chová na prázdném a jednoprvkovém zásobníku.

---

**1.14**

- Implementujte funkci, která bere na vstupu dva ukazatele na začátky zřetěžených seznamů a určí, jestli jsou seznamy shodné. Seznamy považujeme za shodné, pokud obsahují stejný počet prvků se stejným obsahem ve stejném pořadí.
- Modifikujte předchozí porovnávací funkci na ověření shodnosti cyklických seznamů.
- Jak byste postupovali, pokud byste měli určit, jestli seznamy obsahují stejné prvky (zapsané v libovolném pořadí)?

---

**1.15** Mějme dva zřetěžené seznamy, které obsahují prvek (bod shody), od něhož jsou dále stejné. Pro příklad mějme seznamy čísel  $S_1 = [1, 2, 3, 5]$  a  $S_2 = [1, 3, 5]$ , jejichž bod shody je 3. Implementujte funkci, která najde bod shody zadaných dvou seznamů.

---

**1.16** Mějme dva zřetěžené seznamy, které obsahují vzestupně seřazené posloupnosti čísel. Navrhněte funkci MERGE, která spojí tyto dva zřetěžené seznamy do jediného zřetěženého seznamu, který bude mít také všechny prvky seřazené. Při spojování nevytvářejte nový seznam ani nové prvky seznamu, pracujte jenom s ukazateli na následující prvky.



**1.17** Implementujte 2D seznam, který splňuje následující požadavky. Každý prvek 2D seznamu má ukazatele *left*, *right*, *up* a *bottom*, které ukazují na příslušné okolní prvky (v případě, že daný prvek neexistuje, pak je hodnota ukazatele *nil*). Do seznamu lze vkládat pouze pomocí funkcí `INSERTLEFT` a podobných, které berou ukazatel na prvek, vedle kterého se má nový prvek vložit, a vkládaný prvek. Vložení proběhne pouze v případě, že příslušný vedlejší prvek je před vložení *nil*. Při vkládání dejte pozor, abyste vytvořili příslušné ukazatele na všechny okolní prvky.

Pokud máte zájem, můžete implementovat i funkce pro odstranění okrajového prvku. Pro uvedení příkladu funkcionality uvažujme takovýto 2D seznam:

	<i>a</i>	<i>b</i>	
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	
<i>f</i>		<i>h</i>	

Prvek *g* (na pozici podle lexikografického uspořádání) lze vložit voláním `INSERTRIGHT(f, g)`, `INSERTBOTTOM(d, g)`, nebo `INSERTLEFT(h, g)`. Po vložení bude mít prvek *g* nastaven správně okolní ukazatele na *f*, *d*, *h* a ty budou mít zase zpětně nastaveny ukazatele na *g*.

## Kapitola 2

# Algoritmy a korektnost

**Algoritmus** je přesný a jednoznačný popis toho, jak máme postupovat, abychom po provedení tohoto postupu na vstupních hodnotách dostali kýžený výsledek.

**Program** je algoritmus zapsaný v jistém programovacím jazyce.

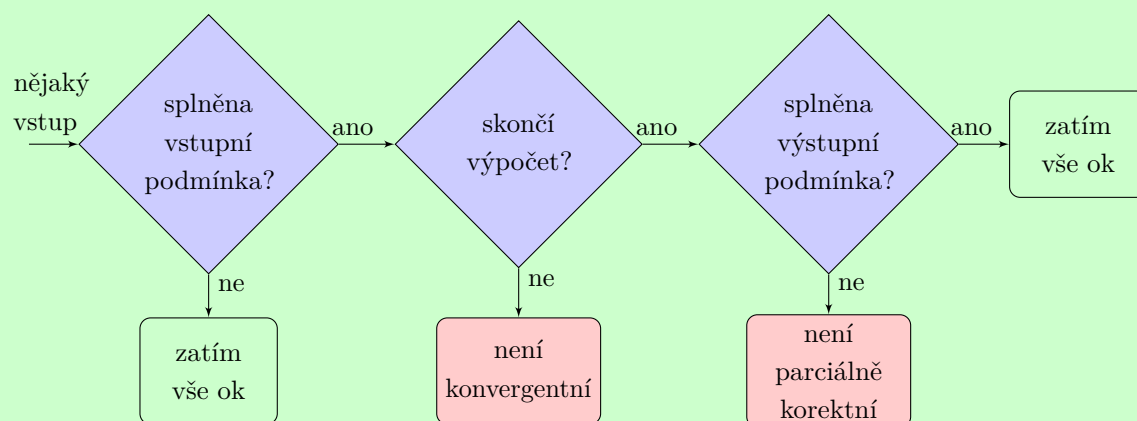
**Vstupní podmínka** ze všech možných vstupů do daného algoritmu vymezuje ty, pro které je algoritmus definován. Chování na ostatních vstupech nás nezajímá. Vstupní podmínka se značí symbolem  $\varphi$ .

**Výstupní podmínka** pro každý vstup daného algoritmu splňující vstupní podmínku určuje, jak má vypadat výsledek odpovídající danému vstupu. Značí se symbolem  $\psi$ .

**Algoritmus je částečně (parciálně) korektní**, pokud pro každý vstup, který splňuje vstupní podmínku a algoritmus na něm skončí, výstup splňuje výstupní podmínku.

**Algoritmus je úplný (konvergentní)**, pokud pro každý vstup splňující vstupní podmínku výpočet skončí.

**Totálně korektní** algoritmus je parciálně korektní a konvergentní.



**Invariant cyklu** je každé takové tvrzení o algoritmu, které platí před vykonáním a po vykonání každé iterace cyklu.

**Matematická indukce** je běžný způsob dokazování korektnosti rekursivního algoritmu. Nejdříve tvrzení musíme dokázat pro funkci bez zanoření, dále předpokládáme platnost pro obecné zanoření do hloubky  $m$  a indukčním krokem musíme potvrdit, že pokud platí pro  $m$ , pak platí i pro  $m + 1$ .



**Paní Bílá připomíná:** Algoritmus je procedura proveditelná Turingovým strojem.

**2.1** Je následující algoritmus, který jako vstup bere počet dnů od roku 1980 a jako výstup má vrátit aktuální rok, korektní?

Funkce $\text{GETCURRENTYEAR}(days)$	
<b>vstup:</b>	$days$ je počet dní od 1. 1. 1980
<b>výstup:</b>	napočítaná hodnota $year$ s aktuálním rokem
<pre> 1  <math>year \leftarrow 1980</math> 2  <b>while</b> <math>days &gt; 365</math> <b>do</b> 3      <b>if</b> <math>year</math> je přestupný rok <b>then</b> 4          <b>if</b> <math>days &gt; 366</math> <b>then</b> 5              <math>days \leftarrow days - 366</math> 6              <math>year \leftarrow year + 1</math> 7          <b>fi</b> 8      <b>else</b> 9          <math>days \leftarrow days - 365</math> 10         <math>year \leftarrow year + 1</math> 11     <b>fi</b> 12 <b>od</b> 13 <b>return</b> <math>year</math> </pre>	



**Pan Usměvavý dodává:** Jak informatik vaří vodu? Vezme konvici a podle toho, zda je prázdná, se rozhodne: Pokud je prázdná, pak do ní nalije vodu a dá ji vařit. Pokud není prázdná, pak z ní vylije vodu, čímž problém redukuje na předchozí případ. – toto je korektní algoritmus.

**2.2** Mějme následující algoritmus, jehož vstupem i výstupem je reálné číslo.

Funkce $\text{SQUARE}(x)$	
<b>vstup:</b>	$x$ je číslo
<b>výstup:</b>	$x^2$
<pre> 1  <math>i \leftarrow x</math> 2  <math>z \leftarrow 0</math> 3  <b>while</b> <math>[i] \neq 0</math> <b>do</b> 4      <math>z \leftarrow z + x</math> 5      <math>i \leftarrow i - 1</math> 6  <b>od</b> 7  <b>return</b> <math>z</math> </pre>	

a) Vzhledem ke kterým z následujících vstupních podmínek je algoritmus konvergentní? Přirozená čísla uvažujeme včetně nuly.

a)  $\varphi(x) \equiv x \in \mathbb{R}$

b)  $\varphi(x) \equiv x \in \mathbb{R}^+$

c)  $\varphi(x) \equiv x \in \mathbb{Z}$

d)  $\varphi(x) \equiv x \in \mathbb{N}$

- b) Vzhledem ke kterým z uvedených vstupních podmínek a výstupní podmínce

$$\psi(x, z) \equiv z = x^2$$

je algoritmus parciálně korektní?

- c) Jak se změní vstupní podmínka, pokud cyklus zapíšeme bez zaokrouhlení  $i$  dolů, tedy  $i \neq 0$ ?  
Pro jaké vstupy je nyní algoritmus korektní pro výstupní podmínku z části b)?
- 

### 2.3

- a) Rozhodněte, zda následující algoritmus korektně testuje, zdali je vstupní řetězec  $S$  palindrom.  
Pro potřeby příkladu ještě zdefinujeme, že přístup mimo meze řetězce vždy vrátí znak „-“.

Funkce PALINDROMCHECK( $S, n$ )	
<b>vstup:</b> řetězec $S$ délky $n$ <b>výstup:</b> <i>true</i> pokud je $S$ palindrom, jinak <i>false</i>	
1	$i \leftarrow 1$
2	$j \leftarrow n$
3	<b>while</b> $i \neq j$ <b>do</b>
4	<b>if</b> $S[i] \neq S[j]$ <b>then</b>
5	<b>return</b> <i>false</i>
6	<b>else</b>
7	$i \leftarrow i + 1$
8	$j \leftarrow j - 1$
9	<b>fi</b>
10	<b>od</b>
11	<b>return</b> <i>true</i>

- b) Pokud je algoritmus totálně korektní, dokažte to pomocí invariantu cyklu. Pokud není, uveďte příklad vstupní posloupnosti a vysvětlete, proč výpočet algoritmu pro daný vstup není korektní. Algoritmus se v takovém případě pokuste opravit.
- 

### 2.4 Funkce SOUCET vrátí pro pole celých čísel $A$ součet všech prvků od začátku po první výskyt nuly.

Funkce SOUCET( $A$ )	
<b>vstup:</b> <b>výstup:</b>	
1	$i \leftarrow 1$
2	$s \leftarrow 0$
3	<b>while</b> $A[i] \neq 0$ <b>do</b>
	// místo pro invariant
4	$s \leftarrow s + A[i]$
5	$i \leftarrow i + 1$
6	<b>od</b>
7	<b>return</b> $s$

Ze zadání formulujte vstupní a výstupní podmínku, následně nalezněte invariant **while** cyklu na řádcích **3** až **6** a dokažte pomocí něj korektnost algoritmu.

**2.5** Mějme následující algoritmus pro výpis horního trojúhelníku hodnot z matice  $M$ . Horní trojúhelník zahrnuje všechny pozice nad hlavní diagonálou včetně diagonály. Indexujeme od levého horního rohu a hlavní diagonála odpovídá pozicím, kde se indexy řádku a sloupce rovnají.

<b>Funkce</b> TRIANGLEMATRIXPRINT( $M, x, y$ )	
<b>vstup:</b> matice $M$ s rozměry $x$ řádků a $y$ sloupců	
1	$i \leftarrow 1$
2	<b>while</b> $i \leq x$ <b>do</b>
3	$j \leftarrow 1$
4	<b>while</b> $j \leq y$ <b>do</b>
5	<b>if</b> $j < i$ <b>then</b>
6	$j \leftarrow i$ // přeskoč k diagonále
7	<b>fi</b>
8	PRINT( $M[i, j]$ )
9	$j \leftarrow j + 1$
10	<b>od</b>
11	$i \leftarrow i + 1$
12	<b>od</b>

- a) Rozhodněte, zda je algoritmus korektní.
- b) Pokud je algoritmus korektní, dokažte to. Jestliže není, uveďte příklad vstupní matice a vysvětlete, proč výpočet algoritmu pro daný vstup není korektní, a navrhněte opravu.

**2.6** Následující algoritmus SELECTSORT ( $A, n$ ) seřadí pole čísel  $A = [A_1, \dots, A_n]$ . Na konci výpočtu budou prvky v poli  $A' = [A'_1, \dots, A'_n]$  permutací prvků pole  $A$  tak, že budou seřazené vzestupně.

Pro vyhledání maxima se použije následující algoritmus, který vrací index v poli, na kterém se nachází maximální prvek.

<b>Funkce</b> MAXIMUM( $A, n$ )	
<b>vstup:</b> ( $A, n$ ) // $A$ je pole a $n$ je počet prvků v poli	
<b>výstup:</b> index maxima z pole $A$	
1	$maxIndex = 1$
2	<b>for</b> $i \leftarrow 2$ <b>to</b> $n$ <b>do</b>
3	<b>if</b> $A[i] > A[maxIndex]$ <b>then</b>
4	$maxIndex \leftarrow i$
5	<b>fi</b>
6	<b>od</b>
7	<b>return</b> $maxIndex$

Dokazování korektnosti algoritmu MAXIMUM si necháme na příklad 2.16, zatím můžete předpokládat jeho korektnost.

**Funkce** SELECTSORT( $A, n$ )**vstup:****výstup:**

```

1 for  $i \leftarrow n$  downto 2 do
2    $j \leftarrow \text{MAXIMUM}(A, i)$ 
3   SWAP ( $A[i], A[j]$ ) // přehodí prvky
4 od
5 return  $A$ 

```

Ze zadání zformulujte vstupní a výstupní podmínky a na základě invariantu **for** cyklu dokažte korektnost algoritmu vzhledem k těmto podmínkám.

Cyklus **for** je jen maskovaný **while** cyklus, viz srovnání níže. Proto bude po jeho skončení v iterované proměnné hodnota o jedna větší, než horní hranice, tj.  $n + 1$  v následujícím srovnání.

```

1 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
2   print  $i$ 
3 od

```

```

1  $i \leftarrow 1$ 
2 while  $i \leq n$  do
3   print  $i$ 
4    $i \leftarrow i + 1$ 
5 od

```



**Daliborek vzkazuje:** Abychom dokázali invariant, musíme dokázat invariant.

Následující příklady jsou vhodné na domácí studium.

**2.7** Na programovací část jsme pro vás připravili [zdrojové kódy](#) se spoustou typických chyb. Vaším úkolem je jich najít a opravit co nejvíce. Zkuste různé vstupy, hledejte na místech, kde se chyby dělají nejčastěji.

**2.8** Které algoritmy jsou vzhledem k dané vstupní a výstupní podmínce parciálně korektní právě tehdy, když jsou totálně korektní?

**2.9** Který algoritmus je parciálně korektní vzhledem k libovolným vstupním a výstupním podmínkám?

**2.10** Předpokládejme, že číselné pole  $A[1 \dots n]$  obsahuje seřazenou posloupnost čísel (od nejmenšího po největší). Dále předpokládejme, že  $A$  **obsahuje číslo**  $x$ . Rozhodněte, zda volání funkce SEARCH( $A, x, 1, n$ ) vrátí hodnotu indexu  $l$  takového, že  $A[l] = x$ . Jestliže ano, dokažte korektnost algoritmu. Jestliže ne,

uvedte příklad vstupní posloupnosti a vysvětlete, proč výpočet algoritmu pro daný vstup není korektní.

Funkce SEARCH( $A, x, l, r$ )	
<b>vstup:</b>	$A$ je seřazené pole, $x$ je hledaný prvek, $l$ a $r$ jsou indexy intervalu vyhledávání
<b>výstup:</b>	Index hledaného prvku
<pre> 1  if <math>l = r</math> then 2      return <math>l</math> 3  else 4      <math>m \leftarrow \lfloor (l + (r - l + 1)/2) \rfloor</math> 5      if <math>x \leq A[m]</math> then 6          SEARCH (<math>A, x, l, m</math>) 7      else 8          SEARCH (<math>A, x, m + 1, r</math>) 9      fi 10 fi</pre>	

**2.11** Rozhodněte, zda následující algoritmus vrátí sumu všech prvků matice čísel. Jestliže ano, dokažte korektnost algoritmu. Jestliže ne, uveďte příklad vstupní posloupnosti a vysvětlete, proč výpočet algoritmu pro daný vstup není korektní.

Funkce MATRIXSUM( $A, n$ )	
<b>vstup:</b>	matice celých čísel $A$ rozměrů $n \times n$ , $n \geq 1$
<b>výstup:</b>	suma všech prvků matice $A$
<pre> 1  <math>s \leftarrow 0</math> 2  for <math>i \leftarrow 1</math> to <math>n</math> do 3      for <math>j \leftarrow 1</math> to <math>n/2</math> do 4          <math>s \leftarrow s + A[i, j]</math> 5          <math>s \leftarrow s + A[j, i]</math>; 6      od 7  od 8  return <math>s</math></pre>	

**2.12** Rozhodněte, zda následující algoritmus zvětší vstupní argument o jedna. Jestliže ano, dokažte korektnost algoritmu. Jestliže ne, uveďte příklad vstupu a vysvětlete, proč výpočet algoritmu pro daný vstup není korektní.

**Funkce INCREMENT( $y$ )**

```
vstup:  $y \in \mathbb{N}$   
výstup:  $y + 1$   
1  $x \leftarrow 0, c \leftarrow 1, d \leftarrow 1$   
2 while  $(y > 0) \vee (c > 0)$  do  
3    $a \leftarrow y \bmod 2$   
4   if  $a \oplus c$  then  
     //  $\oplus$  je operace xor  
5      $x \leftarrow x + d$   
6   fi  
7    $c \leftarrow a \wedge c$   
8    $d \leftarrow 2d$   
9    $y \leftarrow \lfloor y/2 \rfloor$   
10 od  
11 return  $x$ 
```

---

**2.13** Rozhodněte, zda následující algoritmus správně vypočítá sumu všech jedniček v binárním řetězci  $B$ . Jestliže ano, dokažte korektnost algoritmu. Jestliže ne, uveďte příklad vstupní posloupnosti a vysvětlete, proč výpočet algoritmu pro daný vstup není korektní a pokuste se algoritmus opravit.

**Funkce BITSUM( $B$ )**

```
vstup: pole  $B$  obsahující 0 a 1  
výstup: počet jedniček v poli  $B$   
1  $sum_1 \leftarrow 0$   
2 for  $i \leftarrow 1$  to  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  do  
3   if  $B[i] = 1$  then  
4      $sum_1 \leftarrow sum_1 + 1$   
5   fi  
6   if  $B[n - i] = 1$  then  
7      $sum_1 \leftarrow sum_1 + 1$   
8   fi  
9 od  
10 return  $sum_1$ 
```

---

**2.14** Rozhodněte, zda následující algoritmus správně vypíše horní (nad diagonálou) trojúhelník hodnot matice  $M$ . Jestliže ano, dokažte korektnost algoritmu. Jestliže ne, uveďte příklad vstupní posloupnosti a



vysvětlíte, proč výpočet algoritmu pro daný vstup není korektní a pokuste se algoritmus opravit.

Funkce TRIANGLEMATRIXPRINT( $M$ )	
<b>vstup:</b> matice $M$ rozměrů $x \times y$	
1	$i \leftarrow 1$
2	$j \leftarrow 1$
3	<b>while</b> $i \leq x$ <b>do</b>
4	<b>while</b> $j \leq y$ <b>do</b>
5	<b>if</b> $i = j$ <b>then</b>
6	<b>while</b> $i > 0$ <b>do</b>
7	PRINT( $M[i, j]$ )
8	$i \leftarrow i - 1$
9	<b>od</b>
10	$j \leftarrow j + 1$
11	$i \leftarrow i + 1$
12	<b>fi</b>
13	<b>od</b>
14	<b>od</b>

**2.15** Dokažte parciální korektnost algoritmu pro seřazení prvků v dvouprvkovém poli  $A$  indexovaném od jedničky vzhledem k následujícím podmínkám.

$$\varphi(A) \equiv A \text{ je dvouprvkové pole celých čísel}$$

$$\psi([x, y], [p, q]) \equiv p \leq q \wedge (p, q) \text{ je permutací } (x, y)$$

Výstupní podmínka není zadaná korektně pro jiné velikosti polí. Můžeme předpokládat, že pro případy nepokryté uvedeným vzorem vrací *false*.

Funkce SORT( $A$ )	
<b>vstup:</b> $A$ dvouprvkové pole	
<b>výstup:</b> seřazené pole $A$	
1	<b>if</b> $A[1] > A[2]$ <b>then</b>
2	$z \leftarrow A[1]$
3	$A[1] \leftarrow A[2]$
4	$A[2] \leftarrow z$
5	<b>fi</b>
6	<b>return</b> $A$

**2.16** Analýza algoritmu hledání maxima. Mějme následující algoritmus:

**Funkce** MAXIMUM( $A, n$ )**vstup:** ( $A, n$ ) //  $A$  je pole a  $n$  je počet prvků v poli**výstup:** maximum z pole  $A$ 

```

1  $max = A[1]$ 
2 for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
3   if  $A[i] > max$  then
4      $max \leftarrow A[i]$ 
5   fi
6 od
7 return  $max$ 

```

Dokažte parciální korektnost algoritmu MAXIMUM( $A, n$ ) vzhledem ke vstupní podmínce:

$$\varphi(A, n) \equiv A \text{ je neprázdné pole celých čísel délky } n$$

a výstupní podmínce

$$\psi(A, max) \equiv max \text{ leží v } A \text{ a pro všechna } q \text{ z pole } A \text{ platí } q \leq max.$$



**Daliborek vzkazuje:** Korektnost algoritmu je vhodné dokazovat pomocí nejslabší vstupní podmínky.

**2.17** Následující algoritmus vzestupně seřadí číselnou posloupnost  $a = (a_1, \dots, a_n)$  uloženou v poli  $A$ . Tedy na konci výpočtu bude v poli  $A$  posloupnost  $a' = (a'_1, \dots, a'_n)$ , která je permutací posloupnosti  $a$  a platí  $a'_1 \leq \dots \leq a'_n$ .

**Funkce** SORT( $A, n$ )**vstup:****výstup:**

```

1 for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
2    $x \leftarrow A[i]$ 
3    $j \leftarrow i - 1$ 
4   while  $(j > 0) \wedge (A[j] > x)$  do
5      $A[j + 1] \leftarrow A[j]$ 
6      $j \leftarrow j - 1$ 
7      $A[j + 1] \leftarrow x$ 
8   od
9 od

```

- Formulujte vstupní a výstupní podmínky a dokažte korektnost algoritmu vzhledem k těmto podmínkám.
- Napište invariant vnějšího cyklu. Napište mezilehlé podmínky pro začátek a konec těla vnějšího cyklu a pomocí nich a invariantu vnějšího cyklu dokažte správnost algoritmu.
- Formulujte invariant vnitřního cyklu. Pomocí něho a dříve napsaných mezilehlých podmínek ukažte správnost těla vnějšího cyklu vzhledem k těmto podmínkám.

## Kapitola 3

# Asymptotická notace a složitost algoritmů

**Složitost** vyjadřuje náročnost algoritmu na různé zdroje výpočtu: dobu výpočtu, velikost paměti, počet procesorů apod. Podle toho rozlišujeme různé míry složitosti.

**Délka výpočtu** konkrétního algoritmu na konkrétním vstupu je počet elementárních operací, ze kterých se tento výpočet skládá.

**Časová složitost algoritmu** je funkce  $f$  na množině přirozených čísel taková, že výpočet algoritmu pro každý vstup délky  $n$  má délku nejvýše  $f(n)$ . Složitost algoritmu obvykle vyjadřujeme asymptoticky.

**Asymptotická notace:** pro každou funkci  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  zavedeme následující množiny funkcí:

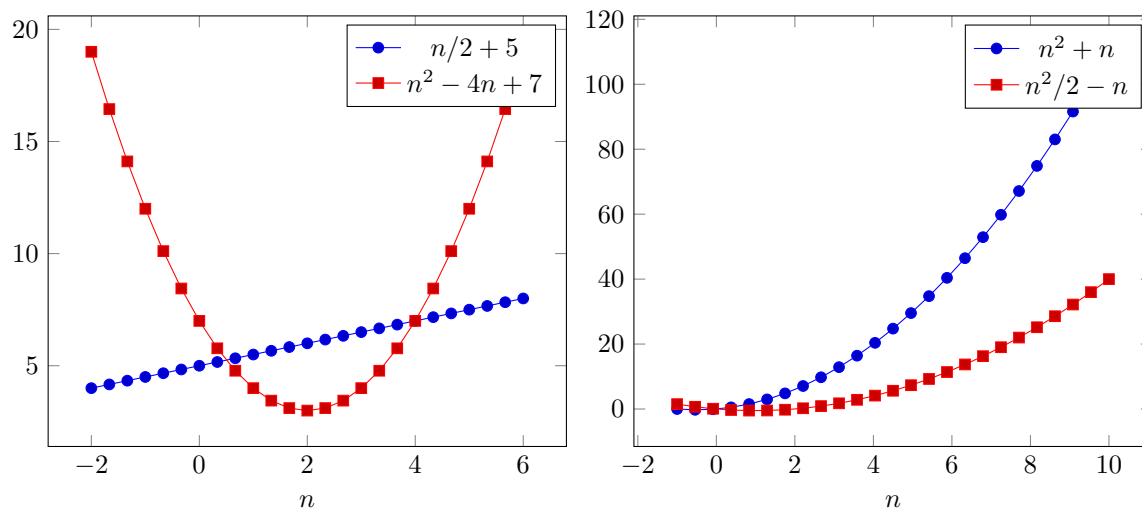
- $\mathcal{O}(g) = \{f \mid \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\}$   
Množina funkcí rostoucích „nejvýše tak rychle“ jako  $g$ .
- $\Omega(g) = \{f \mid \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n)\}$   
Množina funkcí rostoucích „alespoň tak rychle“ jako  $g$ .
- $\Theta(g) = \{f \mid \exists c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)\} = \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g)$   
Množina funkcí rostoucích „stejně rychle“ jako  $g$ .



**Daliborek vzkazuje:** Logaritmické funkce rostou exponenciálně pomaleji než lineární funkce. Libovolná polylogaritmická funkce tedy roste pomaleji než libovolná polynomiální funkce. Exponenciální logaritmickou funkci a logaritmickou exponenciální funkci však lze převést na polynomiální funkci.

---

**3.1** Pro následující funkce  $f$  a  $g$  určete dvojici konstant  $c$  a  $n_0$ , která je svědkem toho, že platí  $f \in \mathcal{O}(g)$ , resp.  $g \in \Omega(f)$ . Kolik existuje takových dvojic? Pro určení dvojice  $c$  a  $n_0$  použijte následující grafy.



a)  $f(n) = \frac{n}{2} + 5$ ;  $g(n) = n^2 - 4n + 7$

b)  $f(n) = n^2 + n$ ;  $g(n) = \frac{n^2}{2} - n$

**3.2** Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá:

1.  $3n^5 - 16n + 2 \in \mathcal{O}(n^5)$
2.  $3n^5 - 16n + 2 \in \mathcal{O}(n)$
3.  $3n^5 - 16n + 2 \in \mathcal{O}(n^{17})$
4.  $3n^5 - 16n + 2 \in \Omega(n^5)$
5.  $3n^5 - 16n + 2 \in \Theta(n^5)$
6.  $3n^5 - 16n + 2 \in \Theta(n)$

**3.3** Určete časovou složitost následujících algoritmů jako funkci délky pole  $A$ , resp. hodnot  $x$  a  $y$ .

**Procedura PRINTER1( $A, n$ )**  
**vstup:** pole  $A$  délky  $n$   
 1 **for**  $i \leftarrow 1$  **to** 100000 **do**  
 2     **if**  $i < n$  **then**  
 3         print  $A[i]$   
 4     **fi**  
 5 **od**

**Procedura PRINTER2( $A, n$ )**  
**vstup:** pole  $A$  délky  $n$   
 1 **for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $n - 1$  **do**  
 2     **for**  $j \leftarrow i$  **to**  $i + 1$  **do**  
 3         print  $A[j]$   
 4     **od**  
 5 **od**

	<b>Funkce</b> MAXIMUM( $A, n$ )
	<b>vstup:</b> pole $A$ délky $n$ <b>výstup:</b> maximum z pole $A$
c)	<pre> 1 <math>max \leftarrow A[1]</math> 2 <b>for</b> <math>i \leftarrow 2</math> <b>to</b> <math>n</math> <b>do</b> 3   <b>if</b> <math>A[i] &gt; max</math> <b>then</b> 4     <math>max \leftarrow A[i]</math> 5   <b>fi</b> 6 <b>od</b> 7 <b>return</b> <math>max</math> </pre>

	<b>Funkce</b> MULTIPLY( $x, y$ )
	<b>vstup:</b> $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}$ <b>výstup:</b> součin $x \cdot y$
d)	<pre> 1 <math>z \leftarrow 0</math> 2 <b>while</b> <math>y &gt; 0</math> <b>do</b> 3   <b>if</b> <math>y</math> is odd <b>then</b> 4     <math>z \leftarrow z + x</math> 5   <b>fi</b> 6   <math>x \leftarrow 2 \cdot x</math> 7   <math>y \leftarrow \lfloor y/2 \rfloor</math> 8 <b>od</b> 9 <b>return</b> <math>z</math> </pre>

Jakou časovou složitost mají jednotlivé aritmetické operace?

Časová složitost se počítá vzhledem k délce vstupu. Pokud tedy sčítáme nebo odčítáme dvě  $n$  bitů dlouhá čísla, provedeme  $n$  sčítání, respektive odečítání, pro dvojice číslic stejného řádu. Časová složitost sčítání a odčítání je tedy lineární.

Násobení, které umíme ze základní školy, má kvadratickou složitost, jelikož každý řád prvního čísla musíme vynásobit všemi řády druhého čísla. Stejnou časovou složitost má i dělení.

Určit obecně časovou složitost tohoto algoritmu by bylo mnohem komplikovanější. Vystačíme-li si s čísly v rozsahu typu integer, pak se dá říci, že procesor provádí dané operace v konstantním čase. Pokud neuvedeme v příkladě jinak, předpokládáme časovou složitost matematických operací za konstantní.

### 3.4 Určete časovou složitost různých verzí algoritmu POWER.

a) Základní iterativní verze:

**Funkce** `POWERITER`( $base, exp$ )**vstup:**  $base \in \mathbb{R}, exp \in \mathbb{N}$ **výstup:**  $base^{exp}$ 

```

1  $output \leftarrow 1$ 
2 for  $i \leftarrow 1$  to  $exp$  do
3    $output \leftarrow output \cdot base$ 
4 od
5 return  $output$ 

```

b) Binární umocňování:

**Funkce** `POWERBIN`( $base, exp$ )**vstup:**  $base \in \mathbb{R}, exp \in \mathbb{N}$ **výstup:**  $base^{exp}$ 

```

1  $output \leftarrow 1$ 
2 while  $exp > 0$  do
3   if  $exp \bmod 2 = 1$  then
4      $output \leftarrow output \cdot base$ 
5   fi
6    $base \leftarrow base \cdot base$ 
7    $exp \leftarrow \lfloor exp/2 \rfloor$ 
8 od
9 return  $output$ 

```

V domácím cvičení budete měřit čas výpočtu volání různých implementací funkce `POWER`. Jaké jsou vhodné hodnoty pro testování?

**3.5** Seřadte následující funkce podle rychlosti jejich růstu:

$n^2 + \log n$	$7n^5 - n^3 + n$	$n^2$
$\log \log n$	$2^n$	$\log n$
$(\frac{3}{2})^n$	$n \cdot \log n$	$n!$
$n$	$n^n$	6
$\log(n!)$	$\log^{14} n$	$\sqrt{\log n}$
$e^n$	$2^{\log_2 n}$	$2^{2^n}$

**3.6** Dokažte, že platí následující tvrzení:

$$2^{n+1} \in \mathcal{O}\left(\frac{3^n}{n}\right)$$



**Paní Bílá připomíná:** Třídy  $\mathcal{O}(2^n)$ ,  $\mathcal{O}(3^n)$ , ... jsou vlastní podmnožiny třídy  $2^{\mathcal{O}(n)}$ .

**3.7**

- a) Navrhnete algoritmus pro násobení matic. Určete vstupní a výstupní podmínky algoritmu a určete jeho časovou složitost.
- b) V současnosti víme o algoritmu, který násobí matice s časovou složitostí  $\Theta(n^{2.3727})$ . Proč je násobení matic v  $\Omega(n^2)$ ?



**Paní Bílá připomíná:** Jeden z komplikovanějších algoritmů násobení matic je Strassenův algoritmus, který provádí násobení asymptoticky rychleji než náš naivní algoritmus. Více se o tomto algoritmu můžete z vlastní iniciativy dozvědět v [doporučené literatuře](#) k tomuto předmětu.

Následující příklady jsou vhodné na domácí studium.

**3.8** Naměřte si dobu běhu různých verzí algoritmů POWER a FIB. Programátorskou přípravu najdete ve [studijních materiálech](#). Vaším úkolem je implementovat různé podoby algoritmů, dobu běhu naměří připravená funkce main.

**3.9** Porovnejte asymptotické chování následujících funkcí:

- a)  $\log n$  vs.  $\sqrt{n}$
- b)  $n^n$  vs.  $n!$  vs.  $2^n$

**3.10** Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá.

1.  $3n^2 + 5n \in \mathcal{O}(n^2 \log n)$
2.  $3n^2 + 5n \in \mathcal{O}(n)$
3.  $3n^2 + 5n \in \Omega(n \log n)$
4.  $3n^2 + 5n \in \Omega(0.05^n)$
5.  $3n^2 + 5n \in \Theta(n^{2.05})$

**3.11** Do tabulky doplňte symboly P a N podle toho, zda platí (P) nebo neplatí (N), že  $3n^2 + 5n \in \Omega(f)$ , resp.  $3n^2 + 5n \in \mathcal{O}(f)$  a  $3n^2 + 5n \in \Theta(f)$ , pro funkci  $f$  zadanou v prvním sloupci tabulky.

$f$	$3n^2 + 5n \in \Omega(f)$	$3n^2 + 5n \in \mathcal{O}(f)$	$3n^2 + 5n \in \Theta(f)$
$n$			
$n^2$			
$n^2 \log n$			
$n^3$			
$3^n$			

**3.12** Dokažte, že platí následující tvrzení:

$$\log(n) \in \mathcal{O}(n).$$

### 3.13

- a) Mějme algoritmus se složitostí v  $2^n$ . Při jeho řešení na starém počítači trval výpočet pro  $n = 36$  jeden den. Nyní máme k dispozici nový počítač, který je 1000krát rychlejší. Určete, pro jak velké  $n$  lze s novým počítačem algoritmus spustit, aby doba výpočtu nepřesáhla jeden den.
- b) Jaký bude rozdíl při  $n = 10$  pro algoritmy se složitostí  $n!$  a  $n^n$ ? Výsledek odhadněte.

Tabulka časů výpočtu algoritmů o složitostech  $\log n$ ,  $n$ ,  $n^2$ ,  $2^n$  a  $n^n$  pro vstup délky 10, 20, 50 a 1000. Předpokládejme, že jedna iterace algoritmu trvá 1  $\mu$ s.

	10	20	50	1000
$\log n$	0,000001 s	0,000001 s	0,000002 s	0,000003 s
$n$	0,00001 s	0,00002 s	0,00005 s	0,001 s
$n^2$	0,0001 s	0,0004 s	0,0025 s	1 s
$2^n$	0,001024 s	1,048576 s	35,7 let	$3,4 \cdot 10^{287}$ let*
$n^n$	2,8 hod	$3 \cdot 10^{12}$ let*		

\* Stáří vesmíru je odhadováno na  $13,7 \cdot 10^9$  let.



# Kapitola 4

## Rekurze

**Iterativní algoritmus** je takový, který spočívá v opakování určité své části (bloku).

**Rekurzivní algoritmus** opakuje kód prostřednictvím volání sebe sama (obvykle na podproblémech menší velikosti). Každý rekurzivní algoritmus lze převést do iterativní podoby.

**Rozděl a panuj** je přístup dělení problému na menší podproblémy. Sjedením částečných řešení vyřešíme původní problém. Takové algoritmy se často volají rekurzivně.

**Složitost rekurzivního algoritmu** nejsnadněji zapíšeme pomocí rekurentní rovnice, která vyjadřuje složitost výpočtu na vstupu velikosti  $n$  pomocí složitosti výpočtů na vstupech menší velikosti.

**Korektnost rekurzivního algoritmu** nejčastěji dokazujeme pomocí matematické indukce vedené vzhledem k počtu zanoření rekurze.

**Strom rekurzivních volání** zobrazuje jednotlivá rekurzivní volání.

**Pro řešení rekurentních rovnic** používáme:

**Master theorem** - používá „Kuchařkovou větu“.

**Substituční metodu** - uhodneme řešení a dokážeme správnost matematickou indukcí.

**Metodu stromu** - zkonstruujeme strom rekurzivních volání, jehož vrcholy ohodnotíme složitostí výpočtu na příslušné úrovni rekurze (tj. bez rekurzivně volaných podčástí). Výsledná složitost je součtem ohodnocení všech vrcholů stromu.



**Paní Bílá připomíná:** Dalším typem algoritmů jsou Greedy algorithms, které se opravdu nejmenují podle pana Greedyho. Tyto algoritmy hledají lokálně nejlepší řešení, které může být globálně nejlepším. Z toho pochází označení greedy, což do češtiny překládáme jako hladový, tedy hladové algoritmy.

---

**4.1** Mějme následující rekurzivní funkci. Nakreslete strom rekurzivních volání pro  $f(5)$  a určete hodnotu výstupu.

**Funkce  $f(n)$** **vstup:**  $n \in \mathbb{N}$ 

```

1 if  $n > 10$  then return  $n - 4$  fi
2 return  $2 * f(n + 5)$ 

```

**4.2** Mějme následující vzájemně rekurzivní funkce. Rozhodněte, zda výpočet  $g(n)$  pro  $n > 0$  je konečný. Pokud ano, nakreslete strom rekurzivních volání pro  $g(2)$  a určete hodnotu výstupu.

**Funkce  $f(n)$** **vstup:**  $n \in \mathbb{N}$ 

```

1 if  $n = 0$  then
2   return 1
3 fi
4 return  $f(n - 1) + g(n - 1)$ 

```

**Funkce  $g(n)$** **vstup:**  $n \in \mathbb{N}$ 

```

1 if  $n = 0$  then
2   return 3
3 fi
4 return  $g(n - 1) + f(n)$ 

```

**4.3** Navrhněte rekurzivní algoritmus, který dostane na vstup řetězec a obrátí v něm pořadí všech znaků. Můžete se inspirovat následujícím iterativním řešením. Uvažte dvě verze, jedna, která pracuje pouze se zadaným řetězcem, a druhá, která vytváří nový řetězec.

**Procedura REVERSEITERATIVE( $A, from, to$ )****vstup:**  $from, to \in \mathbb{N}$  jsou indexy a  $A$  je řetězec délky alespoň  $to$ **výstup:** řetězec stejný jako  $A$ , ale obrácený na prvcích  $\geq from$  a  $\leq to$ 

```

1 while  $from < to$  do
2   SWAP( $A[from]$ ,  $A[to]$ )
3    $from \leftarrow from + 1$ 
4    $to \leftarrow to - 1$ 
5 od

```

**4.4** Zapište rekurentní rovnici pro nejhorší případ počtu kroků výpočtu pro následující funkce.

**Procedura APPLE( $n$ )**

```

1 if  $n = 1 \vee n = 2$  then
2   print  $n$ 
3 else
4   APPLE( $n - 1$ )
5   APPLE( $n - 2$ )
6   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
7     print  $i$ 
8   od
9 fi

```

**Procedura BANANA( $n$ )**

```

1 if  $n = 1 \vee n = 2$  then
2   print  $n$ 
3 else
4   BANANA( $n - 1$ )
5   for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
6     BANANA( $n - 1$ )
7     print  $i$ 
8   od
9 fi

```

**Procedura ORANGE( $n$ )**

```

1 if  $n = 1 \vee n = 2$  then
2   print  $n$ 
3 else
4   ORANGE( $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ )
5   for  $i \leftarrow 1$  to  $n - 1$  do
6     ORANGE( $n - 1$ )
7   od
8 fi

```

Pro vyřešení rekurentní rovnice můžete použít master method z přednášky: Necht  $a \geq 1$ ,  $b > 1$  a  $d \geq 0$  jsou konstanty a funkce  $T(n)$  je definovaná na nezáporných číslech rekurentní rovnicí

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{pro } n = 1 \\ aT(n/b) + \mathcal{O}(n^d) & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak platí:

$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(n^d) & \text{pokud } a < b^d \\ \mathcal{O}(n^d \log n) & \text{pokud } a = b^d \\ \mathcal{O}(n^{\log_b a}) & \text{pokud } a > b^d \end{cases}$$

**4.5** Vyřešte následující rekurentní funkce pro  $T(1) = 1$ . Předpokládejte, že  $n$  je mocnina 2.

- a)  $T(n) = T(n/2) + 1$
- b)  $T(n) = 2T(n/2) + 1$
- c)  $T(n) = 2T(n/2) + n$
- d)  $T(n) = 4T(n/2) + 3$

Pomocí rekurse je možné psát kompaktní a elegantní programy, které ale mohou přestat fungovat za ne zcela zjevných okolností. Proto bychom si při psaní rekurse měli dávat pozor na následující běžné chyby:

- **Chybějící hraniční podmínka.** Následující funkce opakovaně volá sebe a nikdy nevrací hodnotu zpět.

Funkce $f(n)$
<b>1</b> <b>return</b> $f(n - 1) + 1/n$ ;

- **Negarantovaná konvergence.** Další běžný problém je volat v rekursivní funkci rekursivní volání pro řešení podproblému, který není menší.

Funkce $f(n)$	Funkce $f(n)$
<b>1</b> <b>if</b> $n = 1$ <b>then</b> <b>2</b> <b>return</b> 1 <b>3</b> <b>fi</b> <b>4</b> <b>return</b> $f(n) + 1/n$ ;	<b>1</b> <b>if</b> $n = 1$ <b>then</b> <b>2</b> <b>return</b> 1 <b>3</b> <b>fi</b> <b>4</b> <b>return</b> $f(n - 2) + 2$ ;

Rekursivní funkce  $f$  se dostane do nekonečné smyčky, když je volaná s hodnotou jinou než 1.

- **Překročení dostupné paměti.** Při volání rekursivní funkce je potřebné si každé volání uložit na zásobník. Proto jsme při používání rekurse omezeni velikostí zásobníku. I správně implementovaný program může spadnout jen proto, že mu došla dostupná paměť. Proto se při práci s většími daty preferují iterativní formy algoritmů.

- **Nadměrné počítání.** Při nepozorném psaní rekurze se může stát, že při pokusu o napsání čitelného algoritmu pro jednoduchý problém napíšeme až exponenciální algoritmus. Problém může nastat, když opakovaně počítáme stejné hodnoty. Například pro definici Fibonacciho čísel  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ,  $n \geq 2$  s  $f_0 = 0$  a  $f_1 = 1$  může triviální implementace vypadat následovně:

Funkce $f(n)$
<pre> 1 if <math>n = 0</math> then 2   return 0 3 fi 4 if <math>n = 1</math> then 5   return 1 6 fi 7 return <math>f(n - 1) + f(n - 2)</math>; </pre>

Což je exponenciální algoritmus, protože některé větve rekurze počítáme opakovaně (pro  $f(n)$  spočteme  $f(n - 2)$  a pro  $f(n - 1)$  opět počítáme  $f(n - 2)$  atd.).

**4.6** Najde následující algoritmus typu rozděluj a panuj maximální prvek v poli  $A$  délky  $n$ ? Pokud ano, dokažte korektnost algoritmu. Funkce  $\text{MAX}(a, b)$  vrací větší prvek z  $a$  a  $b$ .

Funkce $\text{MAXIMUM}(x, y, A)$
<p><b>vstup:</b> <math>x</math> a <math>y</math> jsou indexy pole <math>A</math>, kde <math>x \leq y</math>  <b>výstup:</b> maximum z pole <math>A</math> mezi indexy <math>x</math> a <math>y</math></p> <pre> 1 if <math>x = y</math> then 2   return <math>A[x]</math> 3 else 4   <math>max_1 \leftarrow \text{MAXIMUM}(x, \lfloor (x + y)/2 \rfloor, A)</math> 5   <math>max_2 \leftarrow \text{MAXIMUM}(\lfloor (x + y)/2 \rfloor, y, A)</math> 6   return <math>\text{MAX}(max_1, max_2)</math> 7 fi </pre>

**4.7** Napište rekurzivní algoritmus, který pro vstup  $n \in \mathbb{N}$  vypíše všechny  $n$ -ciferné binární řetězce.

**4.8** Napište rekurzivní algoritmus, který rozepíše vstupní číslo  $n \in \mathbb{N}$  jako všechny možné součty přirozených čísel. Algoritmus pro  $n = 4$  vrátí:  $4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 3, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1$ .

Následující příklady jsou vhodné na domácí studium.

**4.9** Jako programátorské cvičení implementujte vyhledávání pomocí binárního půlení v rekurzivní podobě. Následně jej převedte na nerekurzivní podobu. Jako druhé cvičení implementujte příklad na výpočet MIN a MAX. Podklady pro programování najdete už tradičně ve [studijních materiálech](#).

**4.10** Zapište rekurentní rovnici pro nejhorší případ počtu porovnání při volání  $\text{MAXIMUM}(1, n)$  z příkladu 4.6. Následně tuto rovnici vyřešte a určete z ní časovou složitost vzhledem k délce vstupu.

**4.11** Navrhněte a poté naprogramujte rekursivní algoritmus, který vypočítá hodnotu kombinačního čísla. Využijte znalost rekursivní formule:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \text{ pro } n, k : 1 \leq k \leq n-1$$

s hraničními hodnotami:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ pro } n \geq 0.$$

**4.12** Jaké znáte algoritmy pro nalezení největšího společného dělitele 2 čísel?

Jaký je rozdíl v časové složitosti „středoškolského“ algoritmu, který hledá společné prvočinitele, a Euklidova algoritmu?

Naprogramujte si Euklidův algoritmus (případně můžete implementovat oba pro možnost porovnání pomocí měření časů). O jaký typ algoritmu se jedná?

#### 4.13

- Navrhněte rekursivní algoritmus pro počítání faktoriálu.
- Převeďte předchozí rekursivní algoritmus na iterativní.
- Porovnejte tato 2 řešení. Liší se nějak ve výkonu? Pokud ano, čím je to způsobeno?

**4.14** Vyřešte následující rekurentní rovnice. Určete těsnou asymptotickou hranici pro každou funkci ve formě  $\Theta(f(n))$  pro rozpoznatelnou funkci  $f(n)$ . Jaké algoritmy by mohly rovnice popisovat?

- $A(n) = A(n/2) + n$
- $B(n) = 2B(n/2) + n$
- $C(n) = 3C(n/2) + n$
- $D(n) = \max_{n/3 < k < 2n/3} (D(k) + D(n-k) + n)$
- $E(n) = \min_{0 < k < n} (E(k) + E(n-k) + 1)$
- $F(n) = 4F(\lfloor n/2 \rfloor + 5) + n$
- $G(n) = G(n-1) + 1/n$
- $H(n) = H(n/2) + H(n/4) + H(n/6) + H(n/12) + n$  [nápověda:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$ .]
- $I(n) = 2I(n/2) + n/\log n$
- $J(n) = \frac{J(n-1)}{J(n-2)}$

**4.15** Mějme pole  $A[1 \dots n]$  seřazených přirozených čísel, které bylo cyklicky posunuto o  $k$  pozic doprava. Například pole  $[35, 42, 5, 15, 27, 29]$  je pole, které bylo cyklicky posunuto o  $k = 2$  pozic, zatímco  $[27, 29, 35, 42, 5, 15]$  bylo posunuto o  $k = 4$  pozic. V libovolném poli dokážeme najít maximální prvek v čase  $\mathcal{O}(n)$ . Pokud známe  $k$ , najdeme maximální prvek z pole  $A$  v čase  $\mathcal{O}(1)$ .

- a) Navrhněte algoritmus, který najde maximum v čase  $\mathcal{O}(\log(n))$ , pokud neznáme  $k$ .
  - b) Navrhněte algoritmus, který vyhledá zadanou hodnotu v poli v čase  $\mathcal{O}(\log(n))$  (pokud neznáme  $k$ ).
- 

**4.16** Mějme dvoudimenzionální pole, které obsahuje čísla 0 a 1. Navrhněte efektivní rekurzivní algoritmus, který prohodí za 0 všechny 1, které sousedí pouze s 1. Prvky spolu sousedí, pokud jsou v  $x$ -ové, nebo  $y$ -ové ose vzdáleny právě o 1, tedy sousedství neplatí po úhlopříčkách.

---

**4.17** Navrhněte rekurzivní algoritmus, který spočítá sumu všech čísel od 1 do  $n$ , kde  $n$  je daný argument algoritmu.

---

**4.18** Navrhněte rekurzivní algoritmus, který najde a vrátí nejmenší prvek v poli  $A$ , kde  $A$  a jeho velikost jsou dané argumenty.

---

**4.19** Navrhněte rekurzivní algoritmus, který vypočítá sumu všech prvků v poli  $A$ , kde  $A$  a jeho velikost jsou dané argumenty.

---

**4.20** Navrhněte rekurzivní algoritmus, který rozhodne, jestli vstupní řetězec  $S$  je palindrom.  $S$  a jeho velikost jsou dané argumenty.

---

**4.21** Mějme následující algoritmus:

Funkce RECURSION( $a, b$ )	
<b>vstup:</b> $a, b \in \mathbb{N}_0$	
1	<b>if</b> $b = 0$ <b>then</b>
2	<b>return</b> 0
3	<b>fi</b>
4	<b>if</b> $b \bmod 2 = 0$ <b>then</b>
5	<b>return</b> RECURSION( $a + a, \frac{b}{2}$ )
6	<b>fi</b>
7	<b>return</b> RECURSION( $a + a, \frac{b}{2}$ ) + $a$

- a) Určete, co je výstupem algoritmu.
  - b) Jak se změní výstup algoritmu, když nahradíme součet za součin a *return 0* za *return 1*?
- 

#### 4.22

- a) Napište algoritmus, který dostane na vstup číslo  $n$ , na základě kterého vypočítá a vypíše všech  $n!$  permutací  $n$  písmen začínajících od  $a$  (předpokládejte, že  $n$  je menší než 26). Na pořadí výsledných permutací nezáleží. Pro  $n = 3$  by jeden z možných výstupů algoritmu byl následovný:

$abc \ bac \ acb \ cab \ cba \ bca$

- b) Modifikujte předcházející algoritmus tak, aby vracel permutace délky  $k$ , tedy pro vstup  $n$  a  $k$  vrátí  $\frac{n!}{(n-k)!}$  permutací. Výstup pro  $n = 4$  a  $k = 2$ :

*ab ac ad ba bc bd ca cb cd da db dc*

- c) Napište algoritmus, který vypíše všechny kombinace délky  $k$ . Vstupem algoritmu jsou 2 argumenty  $n$  a  $k$  a výstupem je  $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$  kombinací. Například pro vstup  $n = 5$  a  $k = 3$  algoritmus vypíše:

*abc abd abe acd ace ade bcd bce bde cde*

**4.23** Mějme zásobník  $n$  palačinek různých velikostí. Navrhněte algoritmus, který uspořádá palačinky podle velikosti vzestupně tak, že největší palačinka je vespod a nejmenší na vrcholu. Pro manipulaci s palačkami jste schopni prohodit horních  $k$  palačinek tak, že obrátíte jejich pořadí. Vaším úkolem je utřídit palačinky v nejvíce  $2n - 3$  krocích.

**4.24** Mějme následující rekurzivní formuli pro aproximaci zlatého řezu:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } n = 0 \\ 1 + \frac{1}{f(n-1)} & \text{pokud } n > 0 \end{cases}$$

- a) Navrhněte a naprogramujte rekurzivní algoritmus počítající aproximaci zlatého řezu podle předchozí formule.
- b) Naprogramujte stejný algoritmus bez použití rekurze.

**4.25** Mějme následující algoritmus. Určete, zdali je algoritmus konvergentní. Pokud není, určete dvojici čísel  $a, b$ , pro které algoritmus neskončí.

Funkce RECURSION( $a, b$ )	
<b>vstup:</b> $a, b \in \mathbb{N}$	
<b>1</b>	<b>if</b> $a \neq b$ <b>then</b>
<b>2</b>	$m \leftarrow \frac{a+b}{2}$
<b>3</b>	RECURSION( $a, m - 1$ )
<b>4</b>	RECURSION( $m + 1, b$ )
<b>5</b>	<b>fi</b>

**4.26** Mějme následující rekurzivní funkci. Určete výstup volání  $f(0)$ .

Funkce $f(n)$	
<b>vstup:</b> $n \in \mathbb{N}$	
<b>1</b>	<b>if</b> $n > 100$ <b>then</b>
<b>2</b>	<b>return</b> $n - 4$
<b>3</b>	<b>fi</b>
<b>4</b>	<b>return</b> $f(f(n + 5))$

**4.27** Von Neumannova přirozená čísla jsou definována následovně: 0 je definována jako prázdná množina, každé další číslo  $i > 0$  je definováno jako množina obsahující von Neumannova přirozená čísla od 0 po  $i - 1$ . Příklad:

$$\begin{aligned} 0 &= \{\} = \{\} \\ 1 &= \{0\} = \{\{\}\} \\ 2 &= \{0, 1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\} \\ 3 &= \{0, 1, 2\} = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\} \end{aligned}$$

Napište algoritmus, který pro vstup  $n \in \mathbb{N}$  vrátí řetězec reprezentující číslo ve von Neumannově zápisu.

**4.28** Napište algoritmus, jehož vstupem je řetězec  $s$  a číslo  $k$ . Výstupem algoritmu budou všechny podřetězce  $s$  délky  $k$ .

**4.29** Mějme 2 řetězce různých znaků. Navrhněte algoritmus, který vrátí všechna možná proložení těchto 2 řetězců. Například mějme  $s = "ab"$  a  $t = "CD"$ , pak výstupem algoritmu bude:

$abCD \quad CabD \quad aCbD \quad CaDb \quad aCDb \quad CDab$

**4.30** Následující 3 funkce vrací  $n$ -té číslo z Fibonacciho posloupnosti. Určete jejich časovou složitost. Časovou složitost základních matematických operací (sčítání, násobení...) pro zjednodušení uvažujte konstantní.

Fibonacciho posloupnost je nekonečná řada čísel, kde je každé číslo součtem dvou předchozích. 0. člen řady je 0, první je 1. Prvních 10 členů je 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.



**Pan Usměvavý dodává:** Fibonacciho posloupnost můžeme také definovat pomocí populace králíčků. Předpokládáme, že první měsíc se narodí jediný pár, nově narozené páry jsou produktivní od druhého měsíce svého života, každý měsíc zplodí každý produktivní pár jeden další pár a pro realnost králíci nikdy neumírají, nejsou nemocní atd. Pak  $n$ -té Fibonacciho číslo popisuje počet párů v  $n$ -tém měsíci.

a) Základní rekurzivní varianta výpočtu Fibonacciho čísel:

Funkce FIBRECURSIVE( $n$ )	
<b>vstup:</b>	$n \in \mathbb{N}$
<b>výstup:</b>	$n$ -té číslo z Fibonacciho posloupnosti
1 <b>if</b> $n \leq 1$ <b>then</b>	
2 <b>return</b> $n$	
3 <b>else</b>	
4 <b>return</b> FIBRECURSIVE( $n - 1$ ) + FIBRECURSIVE( $n - 2$ )	
5 <b>fi</b>	

b) Iterativní podoba:



**Funkce FIBITER( $n$ )****vstup:**  $n \in \mathbb{N}$ **výstup:**  $n$ -té číslo z Fibonacciho posloupnosti

```

1 lower ← 0
2 higher ← 1
3 for i ← 1 to n do
4     tmp ← lower + higher
5     lower ← higher
6     higher ← tmp
7 od
8 return higher

```

c) Pomocí zlatého řezu:

**Funkce FIBCONST( $n$ )****vstup:**  $n \in \mathbb{N}$ **výstup:**  $n$ -té číslo z Fibonacciho posloupnosti

```

1 phi ←  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  // hodnota zlatého řezu, kterou si můžeme navíc předpočítat
2 return  $\lfloor \frac{\text{phi}^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \rfloor$ 

```



**Daliborek vzkazuje:** Pojem Fibonacciho čísel lze zobecnit spoustou způsobů. Lze zadefinovat pro záporná, reálná a komplexní čísla, lze zadefinovat i nad vektorovým prostorem a Abelovou grupou. Zadefinováním jiných základů, popřípadě jiného sčítání, můžeme získat jiné posloupnosti, například Lucasova čísla. Pokud budeme místo dvojice předchozích čísel posloupnosti sčítat čísel více, získáme tribonacciho, tetranacciho... čísla.

**4.31** Mějme algoritmus s časovou složitostí vyjádřenou funkcí  $T(n)$ . Rozhodněte, zda pro následující definice funkce  $T(n)$  platí:

a)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{jinak} \end{cases}$$

Platí, že  $T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$ ?

b)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1 \\ 2T(n-1) + n & \text{jinak} \end{cases}$$

Platí, že  $T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$ ?

c)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

Platí, že  $T(n) = \mathcal{O}(\log n)$ ?

## 4.32

- a) Určete časovou složitost následujícího algoritmu pro vyhledání klíče v zadaném poli (vstupní posloupnost je setříděná). Algoritmus binárního vyhledávání (vrátí index nalezeného prvku v poli  $D$ ):

Funkce $\text{BINARYSEARCH}(D, l, r, k)$	
<b>vstup:</b>	$D$ je setříděné pole, $l$ a $r$ jsou levý a pravý konec pole, $k$ je hledaný klíč
<b>výstup:</b>	nalezený index výskytu čísla $k$ , $-1$ v případě, že se $k$ v poli nevyskytuje
1	<b>if</b> $l > r$ <b>then</b>
2	<b>return</b> $-1$ ;
3	<b>else</b>
4	$m \leftarrow l + \lfloor \frac{r-l}{2} \rfloor$ // odpovídá $\lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$ , ale zabrání přetečení rozsahu <i>int</i>
5	<b>if</b> $k < D[m]$ <b>then</b>
6	<b>return</b> $\text{BINARYSEARCH}(D, l, m-1, k)$
7	<b>else if</b> $k > D[m]$ <b>then</b>
8	<b>return</b> $\text{BINARYSEARCH}(D, m+1, r, k)$
9	<b>else</b>
10	<b>return</b> $m$
11	<b>fi</b>
12	<b>fi</b>

- b) Naprogramujte si algoritmus vyhledávání pomocí binárního půlení v iterativní podobě.



**Karlík varuje:** Vyhledávání pomocí binárního půlení lze použít pouze na uspořádané pole. Nelze jej efektivně použít ani na zřetězený seznam, ani na neuspořádané pole.

Existuje i efektivnější vyhledávání tzv.  $\text{INTERPOLATIONSEARCH}$ , které funguje na způsob hledání ve slovníku. Algoritmus interpoluje, kde přibližně by měl posloupnost rozdělit, na základě hraničních hodnot. Průměrná časová složitost interpolačního vyhledávání je  $\log(\log(n))$ , ale v nejhorším případě může být

složitost až v  $\mathcal{O}(n)$  a to v případě, že hodnoty rostou exponenciálně. Algoritmus vypadá následovně:

Funkce INTERPOLATIONSEARCH( $D, k$ )	
<b>vstup:</b>	$D$ je setříděné pole, $k$ je hledaný klíč
<b>výstup:</b>	nalezený index výskytu čísla $k$ , $-1$ s případě, že se $k$ v poli nevyskytuje
1	$low \leftarrow 1$
2	$high \leftarrow  D $
3	<b>while</b> $D[low] \leq k \wedge D[high] \geq k$ <b>do</b>
4	$mid \leftarrow low + ((k - D[low]) \cdot (high - low)) / (D[high] - D[low])$
5	<b>if</b> $D[mid] < k$ <b>then</b>
6	$low \leftarrow mid + 1$
7	<b>else if</b> $D[mid] > k$ <b>then</b>
8	$high \leftarrow mid - 1$
9	<b>else</b>
10	<b>return</b> $mid$
11	<b>fi</b>
12	<b>od</b>
13	<b>if</b> $D[low] = k$ <b>then</b>
14	<b>return</b> $low$
15	<b>else</b>
16	<b>return</b> $-1$ ;
17	<b>fi</b>

**4.33** Napište rekurentní rovnici pro řešení problému batohu. V tomto problému je vaším úkolem vybrat objekty s nejvyšší možnou hodnotou tak, aby se vešly do batohu.

Vstupem je tedy  $n$  objektů, pro které zavedeme proměnné  $(x_1, \dots, x_n)$ , které značí, zdali jsme objekt do batohu vložili. Dále je vstupem maximální váha  $V$ , tedy kolik se toho do batohu vleze. Každému objektu  $i$  je přiřazena váha  $v_i$  a cena  $c_i$ . Úkolem je vybrat objekty s nejvyšší možnou cenou tak, aby jejich součet vah nepřekročil limit  $V$ . Formálně definováno:

$$\text{Maximalizujte } \sum_{i=1}^n c_i x_i \text{ přičemž platí } \sum_{i=1}^n v_i x_i \leq V, \quad x_i \in \{0, 1\}.$$

Vaším úkolem je napsat rekurentní rovnici pro zmíněný problém a na základě ní vymyslet rekurzivní algoritmus pro řešení problému. Určete jeho složitost a následně ho naprogramujte.



**Paní Bílá připomíná:** Problém je všeobecně známý jako problém batohu (Knapsack problem). V navazujících předmětech IV003 a IA101 můžete poznat spoustu různých algoritmů řešících tento problém.

## Kapitola 5

# Řadicí algoritmy

**Řadicí algoritmus** je algoritmus zajišťující seřazení daného souboru dat podle specifikovaného pořadí.

**Uspořádání** je dáno relací mezi prvky posloupnosti. Typicky řadíme podle hodnoty klíče vzestupně ( $A_n \leq A_{n+1}$ ), nebo sestupně. Můžeme si však zvolit vlastní relaci pro uspořádání.

**Stabilní řadicí algoritmus** je takový algoritmus, který po seřazení zachovává vzájemné pořadí prvků se stejným klíčem.

Stabilní algoritmus se často hodí při řazení podle více klíčů. Chceme-li seřadit studenty podle skupin abecedně, stačí, když seřazenou posloupnost studentů podle abecedy seřadíme podle skupiny pomocí stabilního algoritmu.

**Přirozený řadicí algoritmus** rychleji zpracuje již částečně seřazenou posloupnost.

**Prostorová složitost** se definuje analogicky jako časová, přičemž mírou složitosti je namísto počtu kroků výpočtu množství paměti, která je v průběhu výpočtu obsazena.

**In situ/in place** je algoritmus, který na svůj běh potřebuje kromě samotných řazených dat konstantní množství paměti.

**Online řadicí algoritmus** dokáže řadit posloupnost, která v době spuštění algoritmu není kompletní. Dokáže tedy do (částečně) seřazené posloupnosti zařadit další prvky.



**Daliborek vzkazuje:** Řekneme, že uspořádání je úplné, pokud se jedná o trichotomickou relaci.

### 5.1 Proč se vůbec řazením zabýváme? Proč chceme posloupnosti dat řadit?



**Pan Usměvavý dodává:** Chuck Norris umí řadit v konstantním čase pomocí algoritmu CHUCKSORT.

**5.2** S využitím principu binárního vyhledávání navrhnete algoritmus, který vrátí index prvního výskytu prvku  $k$  v seřazeném poli  $A[1 \dots n]$ . Jestli se prvek  $k$  v poli  $A$  nevyskytuje, pak algoritmus vrátí hodnotu  $-1$ .

**5.3** Modifikujte algoritmus z předchozího příkladu tak, aby vracel index prvního výskytu prvku většího než je dané číslo  $k$ . Pokud jsou všechny prvky menší než  $k$ , pak algoritmus vrátí  $-1$ .

**5.4** Mějme neuspořádané pole čísel. Navrhnete algoritmus, který v poli smaže duplicitní prvky v čase  $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ . Algoritmus musí být in situ, ale nemusí zachovat pořadí prvků.

**5.5** Mějme databázi lidí, ke kterým uchováváme jména a místo bydliště. Na jedné adrese typicky bydlí více lidí. Chceme seřadit lidi primárně podle adres a na každé adrese podle jména, jak na to?

**5.6** Zkuste podrobně popsat vlastními slovy postup, jak seřadit:

- 10 hracích karet do ruky při rozdávání (po jedné),
- nastoupenou fotbalovou jedenáctku v dresech, pokud má předstoupit o krok dopředu seřazená podle čísel na dresech,
- 200 písemek podle abecedy, jsou-li k dispozici 4 pomocníci,
- lidi stojící ve frontě v úzké chodbě podle data narození (pokud každý může mluvit jenom se svým sousedem),
- papírky s čísly v rozmezí 00-99, pokud si můžete vytvářet hromádky,
- soubory v adresáři tak, že primárně chceme řadit podle dne změny a sekundárně podle jména souboru.

## 5.7

- Navrhnete funkci, která spojí 2 seřazené posloupnosti tak, aby jejich spojením vznikla jedna výsledná seřazená posloupnost. Zamyslete se nad časovou i prostorovou náročností. Lze navrhnout asymptoticky optimálnější řešení? Je vaše funkce stabilní?
- Funguje vaše funkce i na neseřazené posloupnosti?
- Jak se změní složitost pro seřazení více posloupností  $(3, 4, \dots, k)$ ?

**5.8** Je dáno  $k$  seřazených posloupností  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ , kde každá má  $n$  prvků. Vytváříme seřazenou postupnost následovně:

$$\text{MERGE}(\dots \text{MERGE}(\text{MERGE}(\text{MERGE}(p_1, p_2), p_3), p_4), \dots, p_k)$$

Složitost výpočtu je:

- |                          |                              |
|--------------------------|------------------------------|
| a) $\Theta(n \cdot k^2)$ | b) $\Theta(n \cdot k)$       |
| c) $\Theta(n^2 \cdot k)$ | d) $\Theta(n \cdot \log(k))$ |

Navrhnete asymptoticky efektivnější řešení.

## 5.9

- Formulujte algoritmus MERGESORT (řazení slučováním). Rozeberte, zdali je stabilní a in situ, a poté určete jeho časovou a prostorovou složitost.



**Karlík varuje:** Doufám, že zvládnete víc než toto:

**Procedura** HALFHEARTEDMERGESORT(*List*)

```
1 if |List| < 2 then
2   return List
3 fi
4 pivot ← ⌊  $\frac{|List|}{2}$  ⌋
5 A ← HALFHEARTEDMERGESORT(List[: pivot])
6 B ← HALFHEARTEDMERGESORT(List[pivot :])
   // Co teď?
7 return [A, B] // víc nezvládnou
```

- b) Jak funguje MERGESORT na vzestupně a sestupně seřazené posloupnosti a na posloupnosti stejných čísel?
- c) Použijte algoritmus MERGESORT na tomto poli: 8 5 2 6 9 3.

---

**5.10** Navrhněte algoritmus, který přeuspořádá posloupnost  $n$  čísel tak, že všechna záporná čísla jsou před všemi kladnými čísly. Algoritmus by měl být časově i prostorově efektivní.

---

**5.11**

- a) Formulujte algoritmus QUICKSORT (řazení rozdělováním). Rozeberte, zdali je stabilní a in situ.
- b) Jakou roli hraje u algoritmu QUICKSORT volba pivotu? Určete časovou složitost pro náhodnou a uspořádanou posloupnost podle volby různého pivotu.
- c) Jak funguje algoritmus z přednášky na posloupnosti stejných prvků? Lze jej nějak optimalizovat?
- d) Napadají vás další optimalizace ukázkového pseudokódu, které by mohly řazení urychlit?
- e) Použijte algoritmus QUICKSORT na tomto poli: 8 5 2 6 9 3.

---

**5.12** Posloupnost  $n$  čísel obsahuje čísla z intervalu  $\langle 1 \dots k \rangle$ . Seřadte ji v čase  $\mathcal{O}(n \log(k))$ .

---

**5.13**

- a) Formulujte algoritmus COUNTINGSORT (řazení počítáním). Rozeberte, zdali je stabilní a in situ, a poté určete jeho časovou složitost.
- b) Použijte algoritmus COUNTINGSORT na tomto poli: 3 4 4 4 3 5 1 7 2 1.

---

**5.14** Který řadící algoritmus je nejefektivnější pro řešení následujících problémů?

1. Malé pole celých čísel,
2. velké pole obsahující náhodná čísla,
3. velké pole obsahující téměř seřazenou posloupnost čísel,
4. velká množina čísel, které jsou z malého intervalu.

**5.15** Jaký řadící algoritmus funguje nejlépe na seřazení spojovaného seznamu? Navrhněte různá řešení a porovnejte jejich výhody a nevýhody.

**5.16** Znalost probraných řadících algoritmů je důležitá, abyste věděli, jak s daty pracovat. V praxi však až na vzácné výjimky není programování vlastního řadícího algoritmu moudrá volba (připravené řadící algoritmy jsou velmi precizně optimalizovány a navíc máte jistotu, že na rozdíl od vašeho kódu jsou určité správně). Důležitá je tedy znalost řadících algoritmů v standardní knihovně vašeho oblíbeného programovacího jazyka. Zkuste si tedy přečíst manuálovou stránku a poté seřadit pole pomocí knihovních funkcí.

Zajímavé je vyhledat, jaké řadící algoritmy jsou používány v kterých knihovnách známých jazyků.

C má v knihovně `stdlib.h` hezky okomentovanou implementaci funkce `qsort`. Ta již podle jména napovídá, že využívá QUICKSORT. Pro volbu pivota využívá median-of-three, který určí medián z prvního, prostředního a posledního prvku. Samotný QUICKSORT je samozřejmě v iterativní podobě. Ve chvíli, kdy by měl v posloupnosti seřadit 4 a méně prvků, volá na uspořádání INSERTSORT. Pro některé vstupy (velmi speciálně uspořádané) však pracuje v kvadratickém čase.

C++ má v knihovně `algorithm` 3 různé řadící algoritmy. Nestabilní, stabilní a částečné řazení. První z nich používá k řazení INTROSORT, což je hybridní řadící algoritmus. Ten prvně zkusí pole utřídit algoritmem QUICKSORT podobným `qsortu` ze `stdlib`. Pokud QUICKSORT neskončí do  $2 \cdot \log_2(n)$  opakování, přepne se na algoritmus HEAPSORT.

Stabilní verze za cenu snížené rychlosti nebo větší paměťové náročnosti využívá MERGESORT.

Díky šablonám je verze v C++ výrazně rychlejší na primitivních datových typech (`int`), než verze z C.

Python používá TIMSORT, který je spojením algoritmů INSERTSORT a MERGESORT. Pro posloupnost méně než 64 prvků se používá jen INSERTSORT. Na větších posloupnostech se prvně hledají již seřazené části. Na neseřazených částech se zavolá INSERTSORT. Poté se tyto různé části začnou spojovat pomocí algoritmu MERGESORT. TIMSORT je velmi pěkně rozebrán na [Wikipedii](#).

Následující příklady jsou vhodné na domácí studium.

**5.17** Naprogramujte si jednotlivé řadící algoritmy. Ve studijních materiálech jsou k tomuto připravené zdrojové kódy.

### 5.18

- Použijte algoritmus INSERTSORT na tomto poli: 8 5 2 6 9 3.
- Rozeberte, zdali je INSERTSORT stabilní a in situ, a poté určete jeho časovou složitost. Kde byste použili INSERTSORT vzhledem k jeho výhodám, jaké má nevýhody?
- Jak funguje INSERTSORT na vzestupně a sestupně seřazené posloupnosti a na posloupnosti stejných čísel?

\* na začátku příkladu značí pokročilý příklad nad rámec tohoto předmětu.

- \* Lze podmínka `while` cyklu v algoritmu INSERTSORT redukovat tak, aby používala jen jedno porovnání?

**5.19** Mějme pole velkých objektů  $A$ . Navrhněte efektivní způsob, jak toto pole seřadit s co nejmenším počtem přesunů a kopírování v paměti. Zamyslete se také nad tím, jak by šlo dané pole seřadit efektivně vzhledem k práci s pamětí.

---

**5.20** Sekvenční vyhledávání se dá se stejnou složitostí realizovat na poli i na zřetěženém seznamu. Platí to i pro binární vyhledávání na seřazeném poli a seřazeném zřetěženém seznamu?

---

**5.21** Mějme pole, ve kterém se opakují pouze znaky  $B, E, G$ . Navrhněte lineární in situ algoritmus, který přeuspořádá vstupní pole do tvaru  $B^*E^*G^*$  (tedy všechny  $B$  se vyskytují před všemi  $E$  a ty se vyskytují před  $G$ ).

Lze řazení provést v jednom průchodu?

---

### 5.22

a) Formulujte algoritmus BUCKETSORT (příhrádkové řazení). Rozeberte, zdali je in situ, a poté určete jeho časovou složitost. Algoritmus předpokládá, že vstupní prvky jsou uniformě rozložené v intervalu  $[0, 1)$ .

b) Použijte algoritmus BUCKETSORT na tomto poli: 0,6 0,1 0,3 0,6 0,8 0,5 0,4 0,9 0,2.

---

### 5.23

a) Formulujte algoritmus RADIXSORT (číslíkové řazení). Rozeberte, zdali je stabilní a in situ, a poté určete jeho časovou složitost.

b) Použijte algoritmus RADIXSORT na tomto poli: 170 45 75 90 802 2 24 66

---

### 5.24

a) Formulujte algoritmus SELECTSORT (řazení výběrem). Rozeberte, zdali je stabilní a in situ, a poté určete jeho časovou složitost.

b) Použijte algoritmus SELECTSORT na tomto poli: 8 5 2 6 9 3.

---

### 5.25

a) Formulujte algoritmus BUBBLESORT. Rozeberte, zdali je stabilní a in situ, a poté určete jeho časovou složitost.

b) Použijte algoritmus BUBBLESORT na tomto poli: 8 5 2 6 9 3.

---



**Pan Usměvavý dodává:** STUPIDSORT (také nazývaný BOGOSORT) je řadicí algoritmus, jehož průměrná asymptotická složitost je  $\mathcal{O}((n-1) \cdot n!)$ .



**Paní Bílá připomíná:** Ovšem na kvantovém počítači by BOGOSORT běžel v lineárním čase.



---

**5.26** Jsou dána seřazená pole  $A$  a  $B$  délky  $m$  a  $n$ . Hledáme algoritmus, který vrátí pole  $C$  obsahující všechny prvky, které se nacházejí v obou polích (bez duplicit). Jaký postup zvolíme, když:

- a)  $A$  a  $B$  mají přibližně stejnou velikost,
  - b)  $A$  je výrazně větší než  $B$ .
- 

**5.27** Nech  $A$  je posloupnost  $n$  čísel, která obsahuje  $l$  inverzí (inverze je dvojice  $i, j$  taká, že  $A[i] > A[j]$ ). Jaká bude složitost algoritmu INSERTSORT na posloupnosti  $A$ ?

---

**5.28** Nech  $A$  je posloupnost  $n$  čísel, v které je každý prvek nanejvýš  $k$  pozicí od své pozice v seřazené postupnosti. Jaká bude složitost algoritmu INSERTSORT na posloupnosti  $A$ ?

## Kapitola 6

# Halda a prioritní fronta

**Kořenový strom** je strom s vyznačeným vrcholem, který nazýváme kořen stromu.

**Kořen stromu** nemá rodiče.

**List stromu** je uzel, který nemá potomky.

**Hloubka vrcholu**  $x$  v kořenovém stromě je délka cesty (počet hran) z kořene do  $x$ .

**Hloubka kořenového stromu** je délka nejdelší cesty od kořene k listu.

**Výška vrcholu**  $x$  je délka nejdelší cesty z  $x$  do listu, tj. hloubka kořenového stromu s kořenem  $x$ .

**Binární strom** je kořenový strom, ve kterém má každý vrchol nejvýše dva syny.

**Úplný binární strom** je takový binární strom, jehož všechny úrovně (hladiny) kromě poslední jsou úplně zaplněny a v poslední úrovni leží listy co nejvíce vlevo.

**Strom má vlastnost maximové haldy** právě tehdy, když pro každý jeho uzel platí, že jeho klíč je větší nebo roven klíčům všech svých potomků.

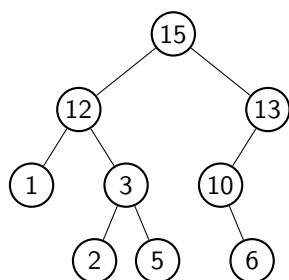
**Strom má vlastnost minimové haldy** právě tehdy, když pro každý jeho uzel platí, že jeho klíč je menší nebo roven klíčům všech svých potomků.

**Maximová binární halda** je úplný binární strom s vlastností maximové haldy.

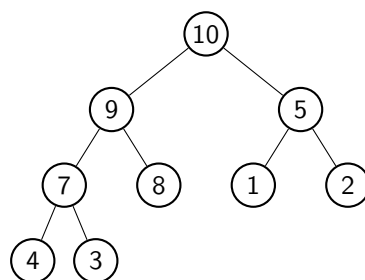
**Minimová binární halda** je úplný binární strom s vlastností minimové haldy.

**6.1** Jsou následující stromy binární haldy? Odpověď zdůvodněte.

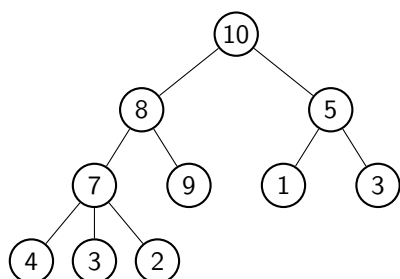
a)



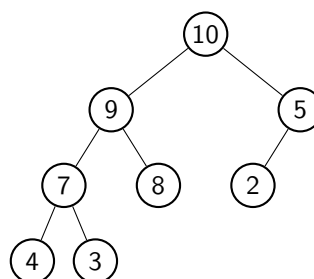
b)



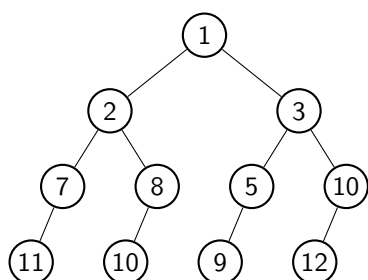
c)



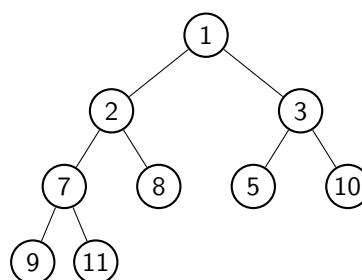
d)



e)



f)



**Paní Bílá připomíná:** V maximové haldě může existovat uzel, jehož vnučka je větší, než jeho strýc.

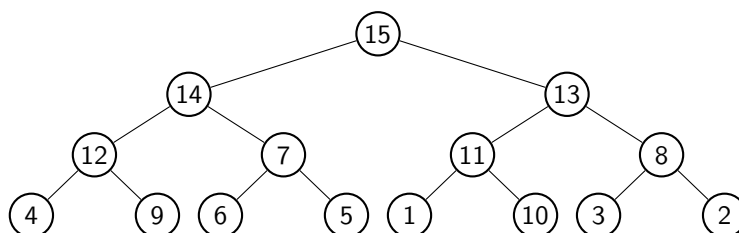
**6.2** Nakreslete všechny možné maximové binární haldy, které mohou vzniknout z prvků 1, 2, 3, 4 a 5.

### 6.3

- Jaký je maximální počet prvků v binární haldě hloubky  $h$ ?
- Jaký je minimální počet prvků v binární haldě hloubky  $h$ ?

### 6.4

- Přepište následující haldu do reprezentace polem.



- Je každé vzestupně seřazené pole minimová halda?
- Je každá minimová halda vzestupně seřazené pole?

---

**6.5** Na jakých pozicích se může nacházet nejmenší prvek v maximové binární haldě?

---

**6.6** Navrhněte algoritmus, který ověří, jestli je pole korektní maximová binární halda. Jaká je složitost vašeho algoritmu?

---

**6.7**

- a) Sestavte postupně minimovou haldu  $h$  vkládáním následujících prvků: 36 19 25 100 17 2 3 7 1.
  - b) Smažte z haldy 3 krát po sobě kořen. Použijte operaci  $\text{EXTRACTMIN}(h)$ .
- 

**6.8**

- a) Navrhněte algoritmus  $\text{HEAPIFY}()$  (kontrola shora dolů), který zkontroluje a opraví vlastnost minimové haldy z daného uzlu  $i$ . Předpokládáme, že na místech odpovídajících podstromům levého a pravého syna (pokud existují) jsou korektní minimové haldy.
  - b) Pomocí algoritmu  $\text{HEAPIFY}$  navrhněte způsob, jak z neseřazeného pole vytvořit haldu. Navrhněte tedy algoritmus  $\text{BUILDHEAP}$ .
  - c) Zamyslete se, jak byste museli operace změnit při uložení haldy do stromové struktury.
- 

**6.9** Mějme datové struktury – maximová halda, minimová halda, seřazené pole, seřazený seznam, neseřazené pole a neseřazený seznam. V tomto příkladu uvažujeme o tom, zda mohou být využity pro prioritní frontu.

- a) Určete časovou složitost operací *insert*, *remove* (s konkrétním ukazatelem na prvek ke smazání), *find maximum*, *remove maximum*, *change priority* (která změní prioritu zadaného prvku), *join* nad těmito datovými strukturami.
  - b) Mějme aplikaci, která provádí velký počet hledání maximálního prvku, ale málo vkládání a mazání maximálního prvku. Která datová struktura je nejefektivnější pro implementaci prioritní fronty?
  - c) V jakém případě je efektivnější použít seřazený seznam než seřazené pole?
- 

**6.10** Navrhněte datovou strukturu, která v konstantním čase vrací minimum i maximum. Složitost vkládání i odstraňování je v čase  $\mathcal{O}(\log(n))$ .

---

**6.11**

- a) Navrhněte algoritmus, který v čase  $\mathcal{O}(k \cdot \log(n))$  najde  $k$ -tý nejmenší prvek v minimové haldě obsahující  $n$  prvků.
- b) \* Navrhněte algoritmus, který problém řeší v čase  $\mathcal{O}(k \cdot \log(k))$ .

## 6.12

- a) Navrhněte algoritmus, který pomocí haldy seřadí pole.
- b) Jaká je časová složitost řazení haldou? Je HEAPSORT in situ? Porovnejte ho s již známými algoritmy.
- c) Je HEAPSORT stabilní řadící algoritmus? Své tvrzení dokažte.

Následující příklady jsou vhodné na domácí studium.

## 6.13 Navrhněte následující operace nad minimovou binární haldou a určete jejich časovou složitost.

- a) MINIMUM najde minimum v haldě.
- b) DECREASEKEY( $H, i, key$ ) sníží hodnotu prvku  $i$  na hodnotu  $key$ .
- c) INSERT vloží prvek do haldy.
- d) EXTRACTMIN smaže minimální prvek.

6.14 Naprogramujte operace nad haldou, pro implementaci využijte připravené šablony ve [studijních materiálech](#).

6.15 Dokažte pomocí indukce, že halda s  $n$  uzly má přesně  $\lceil n/2 \rceil$  listů.

6.16 Mějme pole  $A$  o  $n$  prvcích, které mají být vloženy do již existující haldy  $H$ . Necht  $|H|$  je počet prvků v haldě  $H$ . Navrhněte algoritmus, který celé vložení provede v čase

- a)  $\mathcal{O}(n * \log(|H| + n))$
- b)  $\mathcal{O}(n + |H|)$

## 6.17



**Paní Bílá připomíná:** Pro každou prababičku uzlu  $j$ á v maximové haldě platí, že neteř strýce uzlu  $j$ á je menší.

Největší prvek v maximové haldě se nachází na pozici 1. Druhý největší na pozici 2 nebo 3.

- a) Zamyslete se, kde se může v binární maximové haldě nacházet  $k$ -tý největší prvek.
- b) Určete konkrétní hodnoty pro  $k = 2, 3$  a  $4$ .

Můžete předpokládat, že hodnoty jsou vzájemně rozdílné.

6.18 Jaký typ prioritní fronty byste použili pro hledání 100 největších čísel v  $10^6$  náhodných číslech? Uveďte výhody a nevýhody jednotlivých typů.

---

**6.19** Navrhněte algoritmus, který vytvoří z minimové haldy maximovou haldu. Jakou má algoritmus složitost?

---

**6.20** Navrhněte efektivní reprezentaci  $k$ -ární haldy pomocí pole. Popište detailně, jak se dostat z rodiče k jeho  $k$  dětem.

---

**6.21** Navrhněte algoritmus HEAPSORT, který využívá  $k$ -ární haldu.

---

**6.22** Jaký řadící algoritmus je podobný algoritmu HEAPSORT, který využívá  $k$ -ární haldu, kde  $k = 1$ ?

## Kapitola 7

# Binární vyhledávací stromy

**Binární vyhledávací strom** je binární strom ve kterém platí, že klíč každého uzlu je větší nebo roven než všechny klíče v jeho levém podstromě a menší nebo roven všem klíčům v jeho pravém podstromě.

**Průchod inorder** prochází prvně uzly v levém podstromu, následně kořen a nakonec uzly pravého podstromu.

**Průchod preorder** prochází prvně kořen stromu a následně uzly v levém a pravém podstromu.

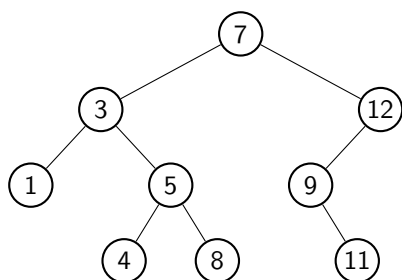
**Průchod postorder** prochází uzly v levém a pravém podstromu, teprve potom kořen stromu.



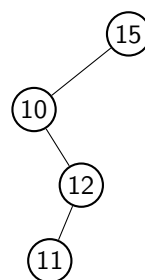
**Pan Usměvavý dodává:** Pařez nemůže být strom, jelikož obsahuje letokruhy.

**7.1** Rozhodněte, zdali jsou následující stromy BVS. Pokud ne, navrhňte, jak nejjednodušší stromy opravit:

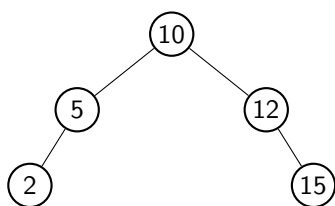
a)



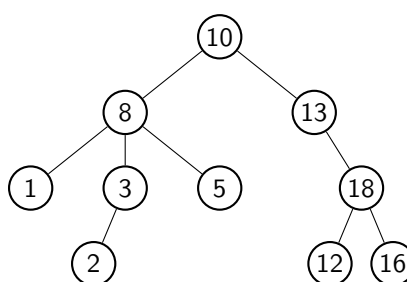
b)



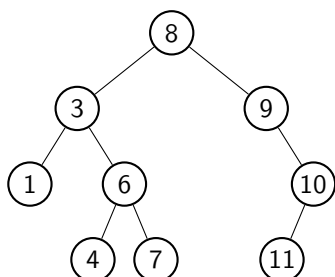
c)



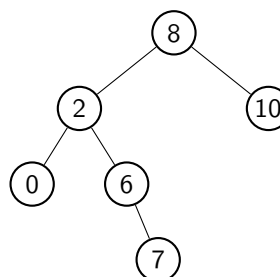
d)



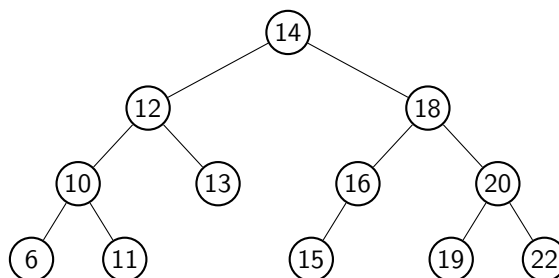
e)



f)



## 7.2 Mějme následující BVS:



Každý uzel obsahuje 4 atributy: ukazatele na rodiče *node.parent*, ukazatel na levého *node.left* a pravého *node.right* syna a klíč *node.key*. Necht' je *Node(x)* ukazatelem na uzel s klíčem *x*, tedy *Node(14)* je ukazatel na kořen našeho stromu. Prázdný ukazatel odpovídá hodnotě *nil*.

Čemu budou odpovídat následující výrazy?

- Node(20).parent.left.left.key*
- Node(13).parent.parent.parent*
- Node(14).left.left.right*
- Node(12).parent.right.right.left.key*

**7.3** Jak bude vypadat preorder, inorder a postorder výpis BVS z předchozího příkladu? Porovnejte, jak se liší a k čemu se který hodí.

## 7.4

- Vytvořte BVS postupným vkládáním prvků 3, 1, 7, 10, 4, 8, 9, 5, 6, 0 a 2.
- Nalezněte ve stromu minimum a maximum (algoritmicky).
- Postupně odstraňte z tohoto stromu prvky 10, 3 a 4.



**7.5** Navrhněte, v jakém pořadí musí být vkládány hodnoty 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7 tak, že výsledné stromy budou splňovat následující vlastnosti:

- a) Strom odpovídá lineárnímu seznamu (všechny prvky jsou v jedné větvi).
  - b) Strom obsahuje větev délky 5.
  - c) Strom bude mít hloubku 2. Kolik stromů může vzniknout?
- 

**7.6** Navrhněte algoritmus, který ověří, zdali je binární strom korektním binárním vyhledávacím stromem.

---

**7.7** Mějme BVS a v něm uzel obsahující číslo  $n$ . Kde všude v tomto BVS mohou být uzly s hodnotami menšími než  $n$ .

---

**7.8** Předpokládejme, že máme čísla mezi 1 a 1000 v BVS a hledáme číslo 363. Které z následujících sekvencí nemohou být sekvencemi uzlů při hledání této hodnoty?

- a) 2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363
  - b) 925, 202, 911, 240, 912, 245, 363
  - c) 924, 220, 911, 244, 898, 258, 362, 363
  - d) 2, 399, 387, 219, 266, 382, 381, 278, 363
  - e) 935, 278, 347, 621, 299, 392, 358, 363
- 

**7.9** Pro níže uvedené preorder výpisy zkonstruuje BVS, které se takto vypíší. Nejdříve řešte konkrétně, potom zkuste vymyslet algoritmické řešení.

- a) 55, 40, 45, 43, 60, 80
  - b) 2, 3, 4, 5, 6
  - c) 21, 35, 19, 42
- 

**7.10** Navrhněte funkci DEPTH, která vrátí hloubku pro zadaný kořenový strom. Pro prázdný strom vrátí -1. Určete její složitost.

---

**7.11** Lze efektivně (tedy lépe než v lineárním čase) spojit dva korektní binární vyhledávací stromy? Zamyslete se nad řešením a jeho složitostí.

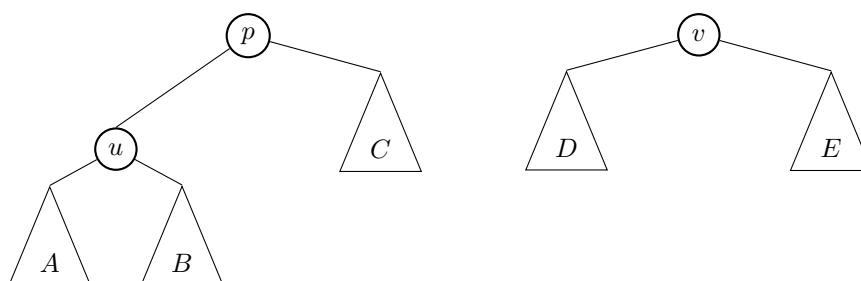
---

**7.12** Navrhněte efektivní postup, který pro každý uzel stromu vypočítá, kolik potomků se nachází v jeho levém a pravém podstromu. Určete časovou složitost algoritmu.

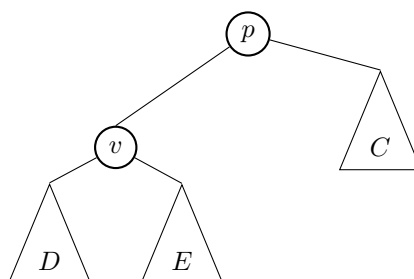
Následující příklady jsou vhodné pro domácí studium.

**7.13** Navrhněte následující metody nad BVS, analyzujte jejich složitost a poté je naprogramujte.

- a) SEARCH vrátí uzel s daným klíčem. Pokud se daný klíč ve stromě nenachází, vrátí *nil*.
- b) INSERT vloží prvek do stromu.
- c) MINIMUM vrátí minimum v stromě pod daným uzlem.
- d) TRANSPLANT nahradí podstrom s kořenem  $u$  podstromem s kořenem  $v$  tak, že otcem vrcholu  $v$  se stane otec vrcholu  $u$ . Tuto proceduru budete potřebovat u procedury DELETE, která musí nahradit vrchol  $u$  vrcholem  $v$  tak, aby se správně přepojily původní podstromy vrcholu  $u$  a pravý podstrom vrcholu  $v$  se musí napojit na správné místo v pravém podstromu vrcholu  $u$ . Operace TRANSPLANT z následující konfigurace stromů:



Vytvoří konfiguraci:



- e) DELETE smaže uzel ze stromu. Zamyslete se nad využitím už vymyšlených metod.

---

**7.14** Naprogramujte si operace nad binárním vyhledávacím stromem. Ve studijních materiálech jsou k tomuto připravené [zdrojové kódy](#).

---

**7.15** Najděte 2 prohozené prvky v BVS, který byl korektně vytvořen a následně mu byly 2 uzly prohozeny.

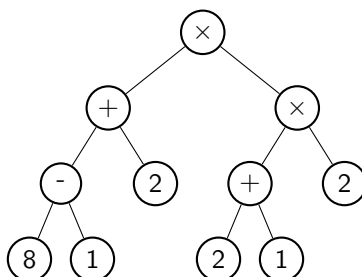
---

**7.16** Vytvořte alespoň 5 posloupností z následujících klíčů 1, 24, 3, 19, 5, 18 a 8 takové, že když je postupně budeme vkládat do binárního vyhledávacího stromu, vytvoří binární vyhledávací strom hloubky 2.

---

**7.17** Jak by se dal efektivně udržovat strom do kterého vkládáme vícero stejných klíčů?

**7.18** Napište výraz následujícího stromu pomocí všech možných způsobů průchodů stromů. Jakou výhodu nám dává prefixový a postfixový zápis proti infixovému?



**7.19** Mějme daný strom *tree* a interval  $[a, b]$ . Navrhněte postup jak získáte všechny uzly stromu *tree* kterých hodnota klíče se nachází v intervalu  $[a, b]$ .

**7.20** Navrhněte efektivní způsob jak najít nejbližšího společného předka dvou uzlů v stromě. Algoritmus naprogramujte.

**7.21** Mějme uzel *node*, navrhněte algoritmus, který vrací nejbližší (s nejmenší hloubkou) list v podstromě s kořenem *node*.

**7.22** Je operace DELETE komutativní – smazání uzlu *x* a pak *y* dává stejný výsledek jak smazání nejprve uzlu *y* a pak *x*?

**7.23** Navrhněte reprezentaci binárního vyhledávacího stromu pomocí 3 polí. V prvním poli budou uloženy klíče, v druhém poli jsou ukazatele na uzly nalevo a ve třetím poli ukazatele na uzly napravo. Diskutujte o výhodách a nevýhodách této reprezentace.

**7.24** Rozhodněte, zda následující algoritmus správně ověří, zdali je strom korektní binární vyhledávací strom. Pokud ano, dokažte korektnost algoritmu. Jinak uveďte příklad vstupní posloupnosti a vysvětlete, proč výpočet algoritmu pro daný vstup není korektní.

**Funkce** CHECKTREE(*node*)

**vstup:** *node* – uzel binárního stromu

**výstup:** *true* pokud je strom s kořenem *node* korektní binární vyhledávací strom, jinak *false*

```

1 if node = nil then
2   return true
3 fi
4 if node.left ≠ nil ∧ node.left.key > node.key then
5   return false
6 fi
7 if node.right ≠ nil ∧ node.right.key < node.key then
8   return false
9 fi
10 if not CHECKTREE(node.left) ∨ not CHECKTREE(node.right) then
11   return false
12 fi
13 return true
  
```

---

**7.25** Navrhněte algoritmus, který pomocí BVS seřadí posloupnost čísel. Analyzujte svůj algoritmus a porovnejte jej vůči známým řadícím algoritmům.

---

**7.26** Daný je BVS, klíče  $x$  a  $y$  a ukazatel na uzel, který obsahuje klíč  $x$ . Najděte (co nejefektivněji) uzel, který obsahuje klíč  $y$ .

## Kapitola 8

# Červeno-černé stromy

**Červeno-černý strom** je binární vyhledávací strom, kde každý uzel je obarven červenou, nebo černou barvou a splňuje následující pravidla:

1. kořen stromu je černý
2. listy stromu nenesou žádnou hodnotu, tj. jsou označeny *nil*, a mají černou barvu,
3. pokud je vrchol červený, jeho otec musí být černý a
4. každá cesta z libovolného vrcholu  $x$  do listu obsahuje stejný počet černých vrcholů.

**Rotace** jsou procedury sloužící k vyvažování vyhledávacích stromů. Musí tedy zachovávat vlastnost binárního vyhledávacího stromu.

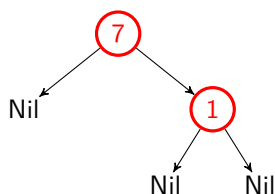
**Rank prvku** je takové číslo  $i$ , že existuje přesně  $i - 1$  menších prvků. Pokud pro výpočet ranku použijeme rozšířený červeno-černý strom (který je již vybudován), umíme rank prvku určit v logaritmickém čase.



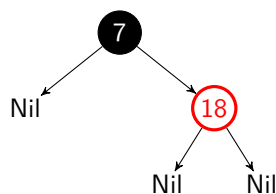
**Paní Bílá připomíná:** Pojem červeno-černé stromy pochází z článku „Dichromatické struktury pro vyvážené stromy“ Roberta Sedgewicka a Leonida J. Guibase, 1978. Jejich červená barva byla zvolena proto, že se nejlépe tiskla na laserové tiskárně, kterou autoři vlastnili.

**8.1** Rozhodněte, zdali jsou následující grafy červeno-černé stromy:

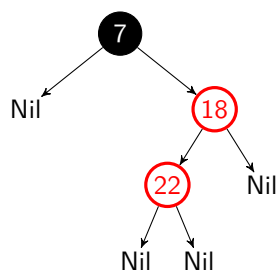
a)



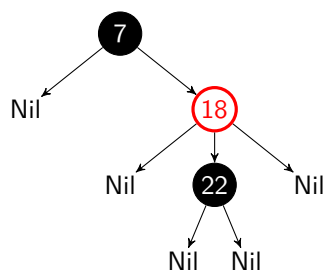
b)



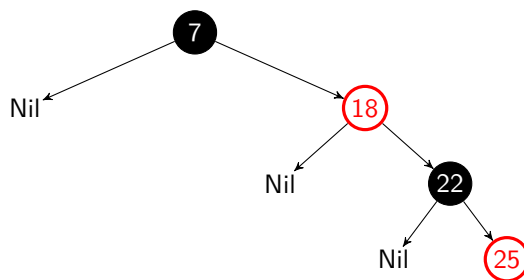
c)



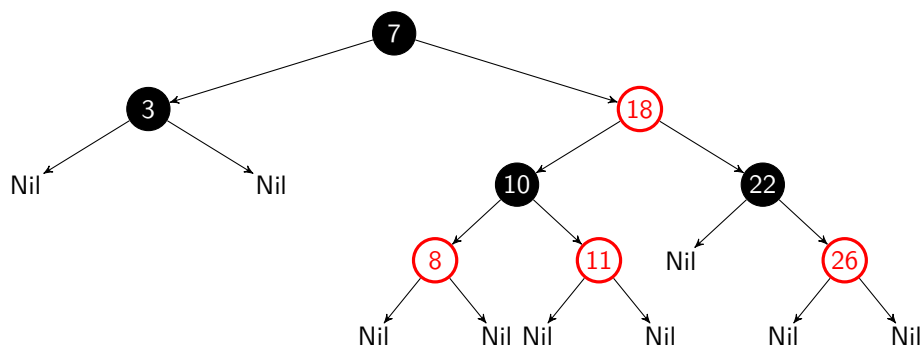
d)



e)

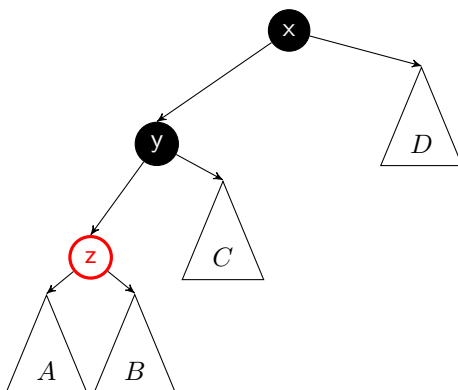


f)

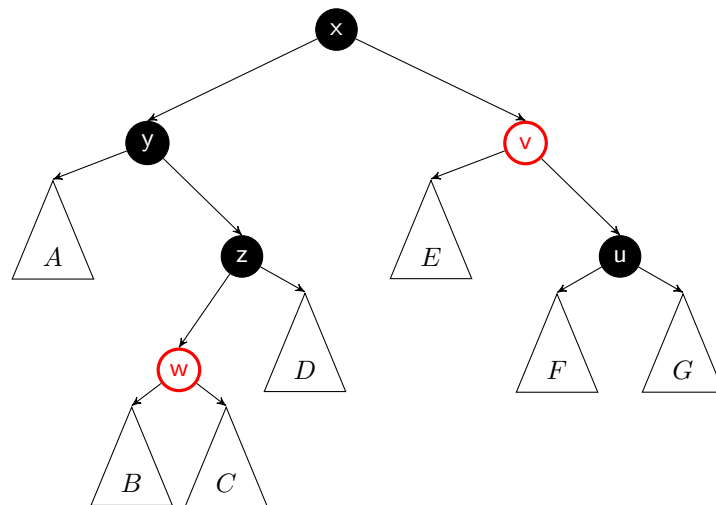


**8.2** Jak správně vyvážit stromy v následujících příkladech? Využijte rotaci doprava, doleva a správně obarvete stromy. Předpokládejme, že všechny podstromy  $A, B, C, D, E, F, G$  jsou korektní červeno-černé stromy se stejnou černou hloubkou.

a) Nevyvážený strom:

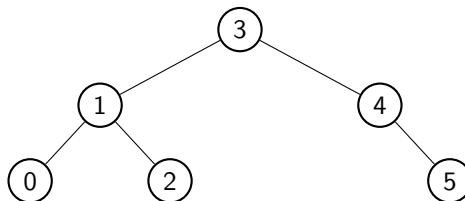


b) Nevyvážený strom:



**Pan Usměvavý dodává:** Praktický a přehledný zápis červeno-černých stromů je čistě pomocí bílých uzlů (takzvaných bílo-bílých stromů). Dává to prostor k fantazii a rozšiřuje to paměťové schopnosti studentů.

**8.3** Kolika způsoby je možné obarvit BVS z obrázku tak, aby zachovával pravidla červeno-černého stromu?



**8.4** Zkonstruuje červeno-černý strom postupným vkládáním uzlů 12, 5, 9, 18, 2, 15, 13, 19 a 17. Poté postupně odstraňte uzly 9, 5, 15 a 12. Nakonec vyhledejte uzly 17 a 9.

**8.5** Popište červeno-černý strom s  $n$  uzly takový, že:

- a) operace INSERT si vyžádá  $\Omega(\log(n))$  přebarvení uzlů.
- b) operace DELETE si vyžádá  $\Omega(\log(n))$  přebarvení uzlů.

**8.6** Jaká je složitost jednotlivých operací na červeno-černých stromech?



**Pan Usměvavý dodává:** Tužka a papír jsou nejlepší kamarádi programátora, když programuje dynamické datové struktury.

**8.7**

- a) Které operace dokážeme implementovat stejně jako nad BVS? Které budou rozdílné, a proč?
- b) Navrhněte operaci LEFTROTATE nad červeno-černým stromem a určete její složitost.
- c) Navrhněte operaci RIGHTROTATE nad červeno-černým stromem a určete její složitost.

Následující příklady jsou vhodné na domácí studium.

---

**8.8**

- a) Navrhněte operaci INSERT nad červeno-černým stromem a určete její složitost.
  - b) Navrhněte operaci DELETE nad červeno-černým stromem a určete její složitost.
- 

**8.9** Naprogramujte reprezentaci červeno-černého stromu a elementární operace nad ním. Ve studijních materiálech jsou k tomuto připravené [zdrojové kódy](#).

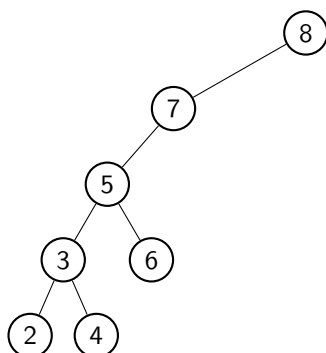
Díky nejhůře logaritmické složitosti vkládání, odstraňování a vyhledávání jsou červeno-černé stromy často využívány v real-time a jiných časově náročných aplikacích. Jsou využívány jako datové struktury pro výpočetní geometrii, také jsou integrovány do současných jader Linuxu, kde slouží jako datové struktury pro spravedlivý scheduler. Ve standardních knihovných jazyků jako C++, Java a C# jsou díky svým vlastnostem využívány pro implementaci (multi)množiny a asociativních polí.

Všeobecně se také používají pro implementaci stálých datových struktur (pamatují si svůj předchozí stav, když jsou modifikovány). Mimo dobré časové složitosti poskytují při stálých strukturách i dobrou prostorovou složitost, která je v  $\mathcal{O}(\log(n))$  pro každou provedenou operaci.

---

**8.10**

- a) Jak by šel vyvážit následující strom?



- b) \* Mějme na vstupu nekonečnou rostoucí posloupnost čísel, které vkládáme do binárního vyhledávacího stromu. Jak byste modifikovali operaci vkládání, abyste udržovali maximální hloubku stromu v  $\mathcal{O}(\log(n))$ ?

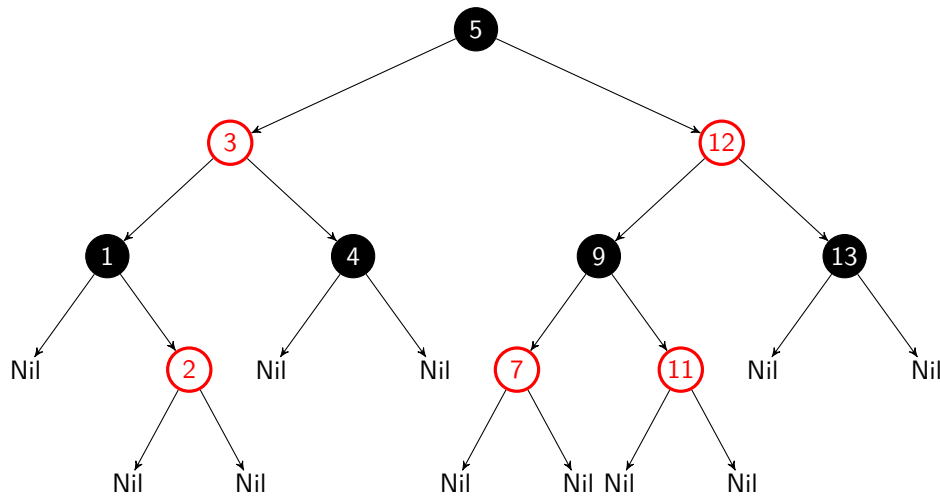


**8.11** Je možné transformovat libovolný BVS na libovolný jiný BVS se stejnou množinou klíčů jenom pomocí posloupnosti rotací doleva a doprava?

**8.12**

- S jakou časovou složitostí dokážeme z libovolné posloupnosti  $n$  prvků vybudovat červeno-černý vyhledávací strom?
- Mějme uspořádanou posloupnost klíčů. Popište, jak byste konstruovali červeno-černý strom tak, aby celková časová složitost vybudování stromu byla lineární.

**8.13** Určete posloupnost operací INSERT tak, že výsledný červeno-černý strom bude vypadat následovně:



**8.14** Vkládání seřazené posloupnosti:

- Nakreslete červeno-černý strom vzniklý vložení posloupnosti čísel  $[1, \dots, 11]$  do prázdného stromu.
- Jak bude strom vypadat, když posloupnost vložíme do stromu v opačném pořadí?
- Popište obecně, jak se bude tvořit červeno-černý strom z libovolné stoupající nebo klesající posloupnosti klíčů.

**8.15** Navrhněte metodu, která ověří, že strom splňuje následující pravidla modro-zeleného stromu:

- Kořen stromu je vždy zelený.
- Každý uzel se sudým klíčem je modrý.
- V případě, že je rodič uzlu modrý, pak je uzel zelený.

**8.16** Navrhněte metodu, která ověří, že strom splňuje následující pravidla červeno-modro-zeleného stromu:

- Pokud je rodič uzlu červený, pak je uzel modrý.
- Pokud je rodič uzlu modrý, pak je uzel zelený.
- Pokud je rodič uzlu zelený, pak je uzel červený.
- Pokud je počet listů sudý pak je kořen stromu červený, jinak je modrý.

**8.17** Upravme u červeno-černých stromů pravidlo „pokud je vrchol červený, jeho otec musí být černý“ dvěma různými způsoby:

- a) Zadané pravidlo změníme tak, že zakážeme pouze trojice následujících uzlů červené barvy (dvojice povolíme).
- b) Zadané pravidlo zrušíme úplně.

Takto upravený strom pojmenujme „relaxovaný červeno-černý strom“. Jaká z následujících tvrzení jsou potom pravdivá?

1. Každý červeno-černý strom je i „relaxovaný červeno-černý strom“.
2. Existuje „relaxovaný červeno-černý strom“, který není korektní červeno-černý strom.
3. Hloubka každého „relaxovaného červeno-černého stromu“ s  $n$  uzly je v  $\mathcal{O}(\log(n))$ .
4. Každý BVS může být přetvořen na „relaxovaný červeno-černý strom“ (pomocí nějakého obarvení).

# Kapitola 9

## B-stromy

**B-strom** je vyhledávací strom s následujícími vlastnostmi:

1. každý uzel obsahuje klíče v uspořádaném neklesajícím pořadí,
2. každý vnitřní uzel obsahuje ukazatele na všechny své syny,
3. klíče v uzlech oddělují intervaly možných hodnot v podstromech mezi nimi a
4. všechny listy mají stejnou hloubku.

**Vnitřní uzel B-stromu** s  $n$  klíči má  $n + 1$  následníků.

**Stupeň B-stromu**  $t \geq 2$  určuje následující vlastnosti B-stromu:

1. každý uzel kromě kořene obsahuje alespoň  $t - 1$  klíčů a
2. každý uzel může obsahovat nanejvýš  $2t - 1$  klíčů a  $2t$  následníků.

**Plný uzel** je takový, který má přesně  $2t$  následníků.

**Arita stromu** určuje kolik následníků daný uzel může maximálně mít. U B-stromu podle definice výše je arita  $2t$ .

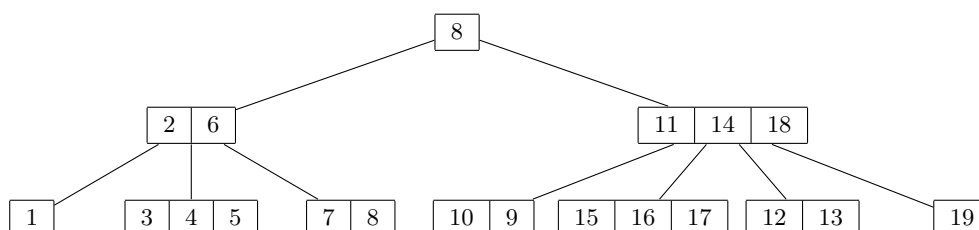
---

### 9.1

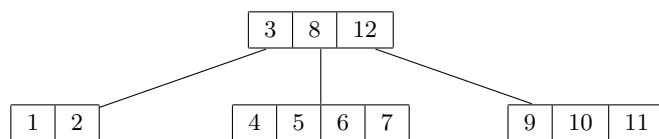
- a) Jaké důsledky má zvýšení arity vyhledávacího stromu?
  - b) Jaký bude poměr rychlosti vyhledávání v binárním a  $k$ -árním vyhledávacím stromu?
  - c) Kterých operací musíme provádět méně díky zvýšení arity a jak nám to pomůže?
- 

### 9.2

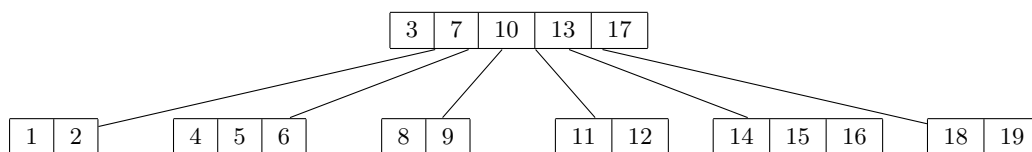
- a) Je následující graf korektní B-strom stupně 3? Pokud ne, opravte jej.



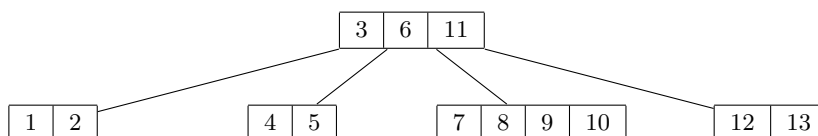
b) Je následující graf korektní B-strom stupně 3? Pokud ne, opravte jej.



c) Je následující graf korektní B-strom stupně 3? Pokud ne, opravte jej.



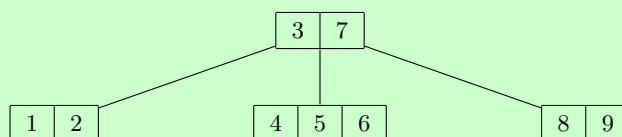
d) Je následující graf korektní B-strom stupně 2? Pokud ne, opravte jej.



**9.3** Ukažte všechny možnosti B-stromů se stupněm 2, které obsahují posloupnost 1, 2, 3, 4, 5.

**9.4** Určete z různých průchodů, jaký stupeň mají vypsane B-stromy a jak vypadají? Prodiskutujte, zdali existuje více možností.

Používáme následující průchody B-stromem:



- Preorder: 3, 7, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 (vypisuje se celý uzel)
- Inorder: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (vypisuje klíče vnitřních uzlů postupně)
- Postorder: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 3, 7 (vypisuje se celý uzel)

a) Preorder: 2, 6, 1, 3, 5, 9, 29, 42

b) Preorder: 7, 13, 16, 25, 33

c) Preorder: 4, 2, 1, 3, 6, 8, 5, 7, 9, 10

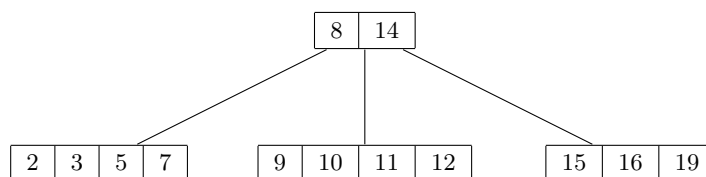
d) Postorder: 2, 3, 16, 8, 19, 23, 40, 20, 31, 17

e) Inorder: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

**9.5** Určete z výpisu, o který typ  $n$ -árního vyhledávacího stromu se jedná.

- a) Preorder: 15, 10, 12, 11.
- b) Preorder: 4, 8, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10.
- c) Postorder: 0, 2, 1, 5, 4, 3.
- d) Lze rozeznat typ stromu z inorder výpisu?

**9.6** Přetvořte pomocí štěpení následující B-strom stupně 4 na B-strom stupně 2.



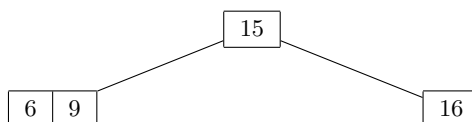
**9.7**

- a) Vložte do B-stromu se stupněm 2 následující klíče: 5, 3, 21, 9, 1, 13, 2, 7, 10, 12 a 4. Postupujte podle optimálního algoritmu, který prochází stromem jenom dolů.
- b) Z výsledného B-stromu smažte následující prvky: 4, 5, 1
- c) Opětovně vložte a smažte ze stromu hodnotu 1.

Pro testování operací na B-stromě můžete využít [applet B-Tree](#), kde pro naši implementaci B-stromu stupně 2 zvolte Max Degree = 4 a preemptivní rozdělování.

**9.8** Navrhněte B-strom s  $t = 2$  a hloubkou 4, který provede maximální počet štěpení uzlů při vkládání.

**9.9** Kolik hodnot můžeme vložit do následujícího B-stromu s  $t = 2$  bez toho, aby se štěpil kořen stromu?

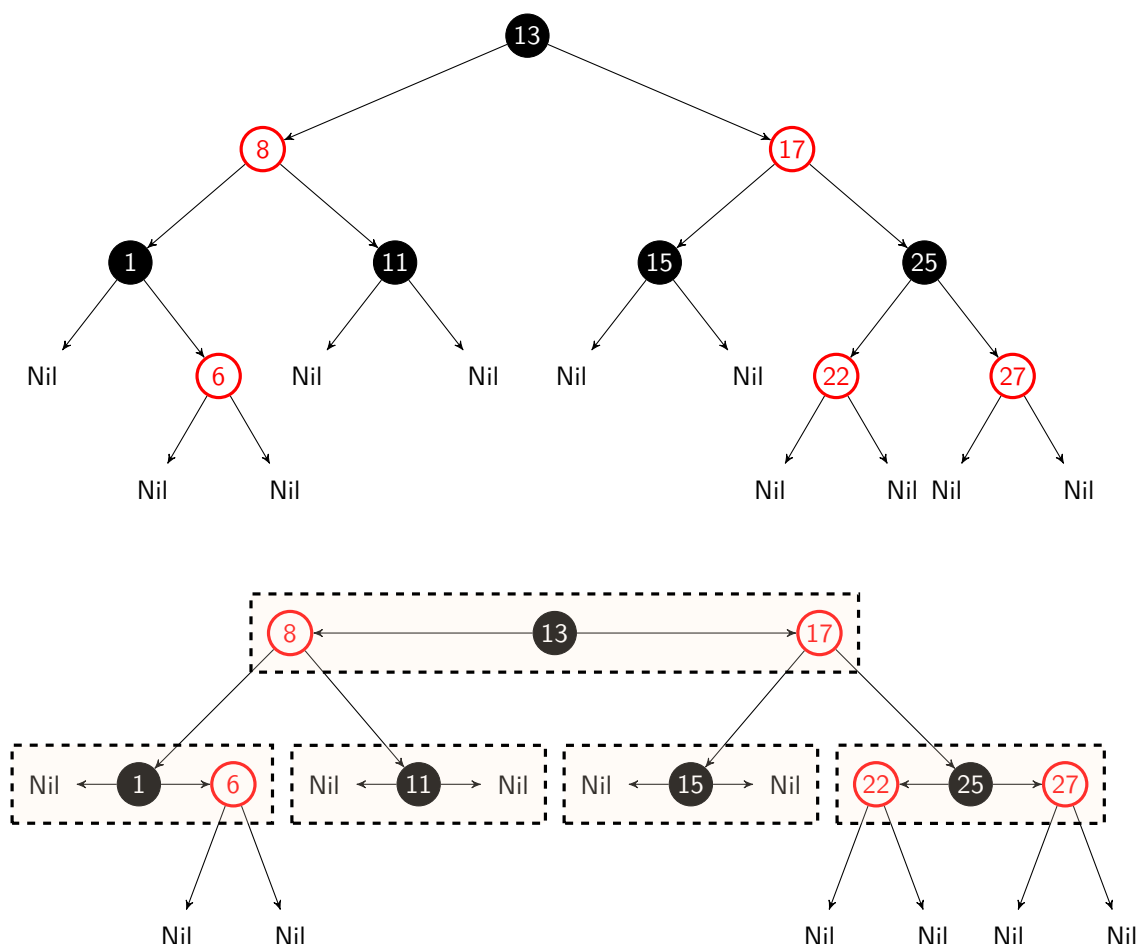


**9.10** Jak bude vypadat B-strom s  $t = 2$ , do kterého je vkládána seřazená posloupnost čísel  $[1, \dots, n]$ .

**9.11** Mějme B-strom stupně  $t = 32$  a hloubky 3. Jaký bude nejmenší a největší počet uzlů (a klíčů) v tomto stromě?

## 9.12

- a) Červeno-černý strom lze převést na takzvaný 2,3,4-strom, což je 4-ární B-strom. Příkladem převodu jsou následující červeno-černý strom a jeho ekvivalent v podobě B-stromu. Výsledný strom má vždy černý uzel jako středový klíč, postranní klíče odpovídají červeným uzlům (až na případ černých *nil* uzlů).



Zopakujte si pravidla červeno-černých stromů a podívejte se na ně v kontextu 2,3,4-stromu.

- b) Jaká je maximální hloubka červeno-černého stromu vzhledem k počtu klíčů (přesné číslo, ne jen v rámci  $\mathcal{O}$  notace) a jak se to dá ukázat na 2,3,4-stromu?



**Paní Bílá připomíná:** Odpověď na tuto otázku znáte z přednášky o červeno-černých stromech z věty 5.

- c) \* Zamyslete se, čemu odpovídají rotace červeno-černých stromů v kontextu 2,3,4-stromu.

**9.13** Lze urychlit operace nad B-stromy pomocí binárního vyhledávání místo sekvenčního průchodu? Kde lze řešení použít, kde ne a proč se používá/nepoužívá?

**9.14**

- a) Jak byste postupovali při hledání konkrétního prvku?
- b) Jak byste implementovali vložení prvku do B-stromu?
- c) Co všechno je nutné ošetřit při odstraňování prvku z B-stromu?

**9.15** Jak byste hledali minimum, předchůdce nebo následníka v B-stromě?

Následující příklady jsou vhodné pro domácí studium.

**9.16** Naprogramujte reprezentaci B-stromu a elementární operace nad ním. Ve studijních materiálech jsou k tomuto připravené [zdrojové kódy](#).

**9.17** Pro použití B-stromů jako datové struktury pro ukládání dat v souborových systémech se většinou B-stromy optimalizují ještě tím, že data ukládají pouze do listů, přičemž uzly ve vyšších patrech se používají pouze k vyhledání a indexaci. V listech navíc máme ukazatele na předchozí a další list. Takto upraveným B-stromům se říká B+ stromy.

- a) Jaké mají tyto změny důsledky? Popište, co se zlepší a co zhorší.
- b) Jak by probíhalo čtení bloku v B-stromě a B+ stromě?

**9.18** Porovnejte složitost operací *search*, *insert*, *delete* na binárním vyhledávacím stromě, červeno-černém stromě, B-stromě a poli při sekvenčním vyhledávání a binárním vyhledávání.

Zamyslete se, jaká je vhodná kombinace operací pro testování efektivity stromů a jejich operací INSERT, SEARCH a DELETE. Ve všeobecnosti efektivita závisí na aplikaci. Například rozhraní Java kolekcí je optimalizováno pro kombinaci 85% SEARCH, 14% INSERT a 1% DELETE.

**9.19** Vyhledávání v překrývajících se intervalech: navrhnete datovou strukturu, ve které budou uloženy číselné intervaly. Struktura bude schopná efektivně nalézt nejmenší interval, ve kterém se nějaká hodnota nachází.

**9.20** Jakou minimální a maximální hloubku bude mít B-strom stupně 4 po vložení  $n$  prvků? Jakou konkrétní hloubku bude mít B-strom při vkládání seřazené posloupnosti  $1, 2, \dots, n$ ?

**9.21** Navrhnete a poté naprogramujte algoritmus, který ověří jestli jsou dva B-stromy identické. Snažte se o co nejefektivnější řešení.

**9.22** Lze pomocí našeho algoritmu pro vkládání a odstraňování z B-stromu vytvořit libovolný zadaný B-strom?

Pokuste se například vytvořit plný B-strom stupně  $t = 2$  s výškou 2. Nebo naopak strom s minimem uzlů a stejnými parametry.

# Kapitola 10

## Hašovací tabulka

**Hašovací tabulka** je dynamická datová struktura, která umožňuje efektivní provádění operací INSERT, DELETE a SEARCH.

**Hašovací funkce** nám k zadanému prvku přiřadí hodnotu, kterou bereme jako index do hašovací tabulky.

**Kolize** je situace, když více prvkům odpovídá stejný index. Dochází k nim, jelikož hašovací funkce zobrazuje velkou množinu všech možných vstupů na menší množinu indexů. Kolize musíme v hašovací tabulce řešit (například pomocí seznamu hodnot se stejným indexem).

**Lavinový efekt** je vlastnost hašovací funkce, že malé změny vstupu znamenají velké změny výstupu. Je jedním z předpokladů pro uniformní hašovací funkci, tedy funkci, která nám minimalizuje počet kolizí.

**Univerzální hašování** je metoda hašování, při které se náhodně vybírá hašovací funkce ze skupiny hašovacích funkcí, které garantují nízký počet vzájemných kolizí.

---

**10.1** Jaká datová struktura se hodí pro použití v následujících případech? Svoji volbu okomentujte.

- a) Kontrola párovosti různých typů závorek v textu.
- b) Zpracování tiskových úloh na tiskárně.
- c) Rejstřík pojmů v knize.
- d) Řetězec v textovém editoru, který může být modifikován v libovolné pozici.
- e) Hierarchii zaměstnanců velké korporace.
- f) Seznam studentů, kteří mají zapsaný konkrétní předmět. V ideálním případě s konstantním přidáváním a odebíráním studentů z předmětu.

---

**10.2** Vybudujte hašovací tabulku, která využívá řetězení prvků. Do tabulky vložte hodnoty 10, 20, 30 a 40.

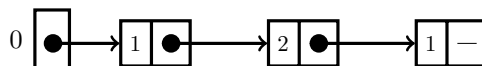
- a) Jako hašovací funkci použijte  $h(x) = x \bmod 7$ .
- b) Jako hašovací funkci použijte  $h(x) = x \bmod 5$ .
- c) Jakou má složitost nalezení prvku ve vaší hašovací tabulce?



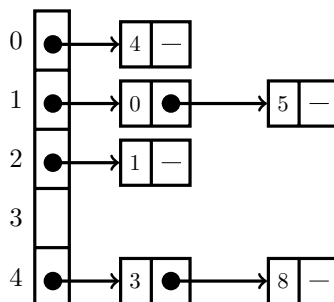
- d) Jak byste modifikovali hašovací tabulku, tak aby v ní byla složitost vyhledávání v nejhorším případě v  $\mathcal{O}(\log(n))$ ?

**10.3** Jaká hašovací funkce mohla být použita u následujících hašovacích tabulek? Hodnoty v uzlech jsou použity jako klíče.

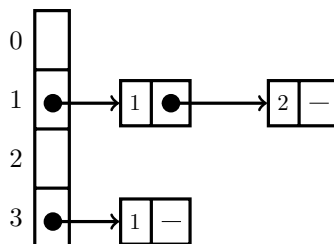
- a) Hašovací tabulka, která řeší kolize pomocí zřetězených seznamů:



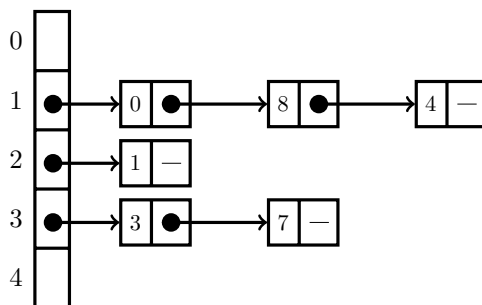
- b) Hašovací tabulka, která řeší kolize pomocí zřetězených seznamů:



- c) Hašovací tabulka, která řeší kolize pomocí zřetězených seznamů:



- d) Hašovací tabulka, která řeší kolize pomocí zřetězených seznamů:



#### 10.4

- a) Co nám hašovací tabulka nabízí oproti seznamu a poli? Jaké jsou výhody a jaké nevýhody?
- b) Kde byste hašovací tabulku použili vzhledem k jejím výhodám?
- c) Co je ovlivněno rozsahem výstupu hašovací funkce a jaký rozsah bychom tedy měli zvolit?

**10.5** Mějme následující hašovací funkce na hašování řetězců. Jaké jsou jejich výhody a nevýhody?

- a) Hašovací funkce, která sečte znaky řetězce.
  - b) Předchozí funkce, ale místo součtu znaků použijeme operaci *xor*.
  - c) Součin znaků modulo zadanou velikostí tabulky (velikost může být libovolná).
  - d) Suma  $znak \cdot pozice$  modulo zadanou velikostí tabulky (velikost může být libovolná).
  - e) Suma  $znak \cdot pozice$  modulo zadanou velikostí tabulky (velikost je prvočíslo).
- 

**10.6** Mějme hašovací tabulku a hašovací funkci  $h(x) = x \bmod 7$ . Řešte kolize v tabulce pomocí lineárního sondování.

Metoda lineárního sondování (otevřené adresování) funguje tak, že v případě kolize vložíme prvek do jiného volného slotu v tabulce. Pro hašovací funkci  $h(x)$  by hašovací funkce lineárního sondování byla  $h(x, i) = (h(x) + i) \bmod n$ , kde  $h(x)$  je počáteční hodnota,  $i$  počet kolizí, které nám již při vkládání tohoto klíče nastaly.

- a) Vložte do tabulky následující hodnoty: 14, 16, 21, 18, 29, 15.
  - b) Jak budeme postupovat při hledání prvku a jaká bude složitost hledání?
  - c) Jak byste detekovali, že je už hašovací tabulka plná? Jak byste tuto tabulku předělali?
- 

**10.7** Mějme hašovací tabulku a hašovací funkci  $h(x) = x \bmod 7$ . Řešte kolize v tabulce pomocí kvadratického sondování, kde budou konstanty  $c_1 = 2$  a  $c_2 = 1$ .

Metoda kvadratického sondování je rozšíření metody lineárního sondování, kde předpis funkce hašování je  $h(x, i) = (h(x) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod n$ , kde  $c_2 \neq 0$ . Pro  $c_2 = 0$  by funkce degradovala na lineární sondování. Výhoda kvadratického sondování proti lineárnímu je, že se lépe vyhýbá hromadění klíčů na jednom místě.

- a) Vložte do tabulky následující hodnoty: 17, 24, 16, 13.
- b) Jakou bude mít složitost vyhledání a smazání prvku?

Kvadratické sondování se využívá i pro hledání volných bloků paměti v adresových schématech souborových systémů. Jeho výhodou je skákání po velkých blocích a v případě plných bloků je přeskočí mnohem rychleji než lineární přístup.

---

**10.8** Navrhněte datovou strukturu pro reprezentaci množiny prvků. Datová struktura by měla mít všechny operace jako INSERT, DELETE, SEARCH efektivní. Množina prvků nesmí obsahovat duplikáty.

**10.9** Navrhněte datovou strukturu, která podporuje následující operace:

- INSERT v čase  $\mathcal{O}(\log(n))$ .
- DELETE v čase  $\mathcal{O}(\log(n))$ .
- Nalezení většího a menšího prvku (hodnotou, ne časem vložení) v čase  $\mathcal{O}(\log(n))$ .
- NEXT( $x$ ) – najde první prvek, který byl vložený po prvku  $x$  a ještě se nachází v datové struktuře v čase  $\mathcal{O}(1)$ .

**10.10** Navrhněte datovou strukturu, která reprezentuje hierarchii zaměstnanců. Datová struktura musí umět nejhůře v lineárním čase vzhledem k počtu zaměstnanců najít ke dvěma zaměstnancům jejich nejnižšího společného nadřízeného.

**10.11** Navrhněte následující metody nad hašovací tabulkou, které využívá nějakou z předchozích hašovacích funkcí. Vhodně také řešte kolize, které mohou nastat.

- INSERT vloží objekt do hašovací tabulky.
- SEARCH ( $k$ ) metoda vrací index slotu obsahující klíč  $k$  nebo hodnotu *nil*, pokud daný slot neexistuje.
- DELETE smaže klíč z hašovací tabulky.

Následující příklady jsou vhodné na domácí studium.

**10.12** Naprogramujte si funkční hašovací tabulku, která bude řešit kolize pomocí seznamů. Pro seznamy můžete využít již naprogramované své nebo knihovní funkce. Ve studijních materiálech jsou k tomuto připravené [zdrojové kódy](#).

**10.13**

- Jaké jsou výhody a nevýhody metody dělení, kde  $h(k) = k \bmod (m)$ ? Jaké hodnoty  $m$  je vhodné používat?
- Jak funguje multiplikativní metoda a jaké má výhody a nevýhody proti metodě dělení?

**10.14**

- Co bychom chtěli po dobré hašovací funkci? Jak by měla zobrazovat zadané hodnoty?
- Jak byste hašovali složitější objekty, které obsahují více jednoduchých objektů?

**10.15** Mějme hodnoty 10, 13, 18, 3, 8, 40, 28, hašovací tabulku o velikosti 7 a hašovací funkci  $h(x) = x \bmod 7$ . Zapište výsledek vkládání hodnot pro každou z kolizních strategií.

**10.16** Navrhněte datovou strukturu, která umožňuje řazení pomocí více klíčů. Podle primárního klíče však dochází k častým kolizím, takže potřebujete řadit i podle dalších klíčů. Vaše struktura umožňuje v nejhůře logaritmickém (vzhledem k počtu unikátních primárních klíčů) čase vrátit všechny hodnoty se stejným primárním klíčem, přičemž prvky jsou seřazeny podle sekundárního klíče.

**10.17** Navrhněte datovou strukturu (nebo modifikujte již známou), která podporuje vrácení hodnot z intervalu v čase  $\mathcal{O}(\log(n))$  (struktura vrácených hodnot závisí na vás, lineární množství hodnot nelze samozřejmě „vypsat“ v  $\mathcal{O}(\log(n))$ ).

---

**10.18** Navrhněte datovou strukturu, která umožňuje vkládání prvku s klíčem v  $\{0, 1\}$ . Po struktuře dále chceme, aby uměla vrátit v konstantním čase všechny prvky, které mají pouze klíč 1 nebo prvky s klíčem pouze 0.

---

**10.19** Navrhněte datovou strukturu pro množinu, ve které operace jsou INSERT, DELETE a SEARCH v čase  $\mathcal{O}(1)$ . Můžete předpokládat, že prvky jsou hodnoty z intervalu  $[1, 2, \dots, n]$ .

---

**10.20** Necht  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}$  a  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  jsou dvě množiny přirozených čísel takových, že  $1 \leq s_i, t_j \leq n$  pro všechny  $1 \leq i \leq l$  a  $1 \leq j \leq m$ . Navrhněte algoritmus, který rozhodne, zdali platí  $S = T$  v čase  $\mathcal{O}(l + m)$ .

---

**10.21** Navrhněte datovou strukturu, která poskytuje operace:

- INSERT( $x, D$ ) vloží  $x$  do  $D$ .
- DELETE( $k, D$ ) smaže  $k$ -tý nejmenší prvek z  $D$ .
- MEMBER( $x, D$ ) vrátí *true* pokud  $x \in D$ .

Všechny operace musí být v čase  $\mathcal{O}(\log(n))$ .

---

**10.22** Navrhněte datovou strukturu množiny, která poskytuje operace:

- INSERT( $x, D$ ) vloží  $x$  do  $D$ .
- DELETE( $x, D$ ) smaže  $x$  z  $D$ .
- MEMBER( $x, D$ ) vrátí *true* pokud  $x \in D$ .
- NEXT( $x, D$ ) vrátí nejmenší prvek v  $D$  větší než  $x$ .
- UNION( $S, D$ ) spojí struktury  $S$  a  $D$ .

Všechny operace musí být v čase  $\mathcal{O}(\log(n))$ , kromě operace UNION, která má být v čase  $\mathcal{O}(n)$ .

---

**10.23** Mějme datovou strukturu  $D$  a operaci  $\oplus$ , kde  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$ . Navrhněte datovou strukturu, která umožňuje sečíst  $(d_i \oplus d_{i+1} \oplus \dots \oplus d_j)$  pro libovolné  $i \leq j$  s  $\mathcal{O}(\log(n))$  operací  $\oplus$ .

---

**10.24** Navrhněte datovou strukturu, která implementuje množinu uspořádaných dvojic  $(p, k)$ , kde  $k$  je klíč a  $p$  je priorit. Vaše struktura musí umět následující operace v čase  $\mathcal{O}(\log(n))$ :

- INSERT( $p, k$ ) vloží prvek s prioritou  $p$  a klíčem  $k$ .
- MEMBER( $k$ ) vrátí prvek s nejmenší prioritou mezi prvky, které mají klíč menší nebo roven  $k$ .
- DELETE( $k$ ) smaže všechny prvky s klíčem  $k$ .

---

**10.25** Navrhněte datovou strukturu, která je tvořená z  $n$  hodnot  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Struktura dokáže rychle vrátit nejmenší hodnotu z intervalu  $x_i, \dots, x_j$ , pro  $i \leq j$ . Struktura splňuje následující podmínky.

1. Využívá  $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$  prostoru a vrací nejmenší hodnotu z intervalu v čase  $\mathcal{O}(\log(n))$ .
  2. Využívá  $\mathcal{O}(n)$  prostoru a vrací nejmenší hodnotu z intervalu v čase  $\mathcal{O}(\log(n))$ .
- 

**10.26** Rozhodněte, jestli platí následující tvrzení:

Kolekce  $H = \{h_1, h_2, h_3\}$  hašovacích funkcí je univerzální, pokud hašovací funkce mapují universum  $\{A, B, C, D\}$  klíčů na rozsah hodnot  $\{1, 2, 3\}$  vzhledem k následující tabulce:

$x$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$
$A$	1	0	2
$B$	0	1	2
$C$	0	0	0
$D$	1	1	0

# Kapitola 11

## Průzkum grafů

**Neorientovaná hrana** je dvouprvková množina  $\{u, v\}$ , která značí, že vrcholy  $u$  a  $v$  spolu sousedí.

**Orientovaná hrana** je uspořádaná dvojice vrcholů  $(u, v)$ , která značí, že z vrcholu  $u$  vychází hrana do vrcholu  $v$ .

**Ohodnocená hrana** má přiřazenou hodnotu. Pokud je délka kladné celé číslo, pak lze graf s ohodnocenými hranami převést na graf s hranami neohodnocenými (tedy ohodnocenými jedničkou), hranu délky  $n$  nahradíme  $n$  po sobě jdoucími hranami délky 1.

V případě, že jednu dvojici vrcholů spojuje více hran, hovoříme o paralelních hranách (a multigrafu).

**Výstupní stupeň vrcholu** je počet hran, které z vrcholu vychází.

**Graf** je uspořádaná dvojice množiny vrcholů a množiny hran.

1. **Orientovaný graf** má orientované hrany.
2. **Neorientovaný** má neorientované hrany.

V **bipartitní grafu** lze vrcholy rozdělit do dvou skupin, přičemž hrany mohou existovat jen z jedné skupiny do druhé, ne v rámci jedné skupiny.

**Reprezentace grafu** v paměti počítače lze provést různými způsoby, které volíme podle typu grafu plánovaného využití.

1. **Seznam sousedů v neorientovaném grafu** – ke každému vrcholu  $u$  udržujeme seznam vrcholů  $v$  tak, že  $\{u, v\}$  je hrana. Hodí se zejména pro řídké grafy, pro které má menší prostorovou složitost.
2. **Seznam následníků v orientovaném grafu** – ke každému vrcholu  $u$  udržujeme seznam následníků  $v$  tak, že  $(u, v)$  je hrana.
3. **Matice sousednosti v neohodnoceném grafu** je matice rozměrů  $|V| \times |V|$ , kde se přítomnost hrany reprezentujeme hodnotou  $A_{uv} = 1$  v případě, že existuje hrana z  $u$  do  $v$ , a 0 v případě, že neexistuje.
4. **Matice vzdáleností v ohodnoceném grafu** je matice rozměrů  $|V| \times |V|$ , hranu  $(u, v)$  délky  $d$  reprezentujeme hodnotou  $A_{uv} = d$  v případě, že mezi uzly  $u$  a  $v$  hrana není, pak klademe  $A_{uv} = \infty$ .

**Transponovaný graf** je graf obsahující hrany opačně orientované než graf původní. Má smysl jej definovat pouze pro orientovaný graf. Pro reprezentaci pomocí matice sousednosti je transponování grafu totožné s transponováním matice, která graf popisuje.

### Průchody grafem

1. **BFS** (breadth-first search), tedy prohledávání do šířky. Používá datovou strukturu fronta (ve které uchováváme vrcholy čekající na zpracování) a hodí se pro hledání nejkratší cesty nebo testování, zdali je graf bipartitní.
2. **DFS** (depth-first search), tedy prohledávání do hloubky. Používá datovou strukturu zásobník (ve kterém ukládáme cestu). Používá se k hledání cyklů v grafu, nalezení topologického uspořádání grafů nebo rozdělení grafu na silně souvislé komponenty. K těmto aplikacím využívá časové známky, které popisují, kdy jsme vrchol objevili ( $u.d$ ) a kdy jsme jej opustili ( $u.f$ ).

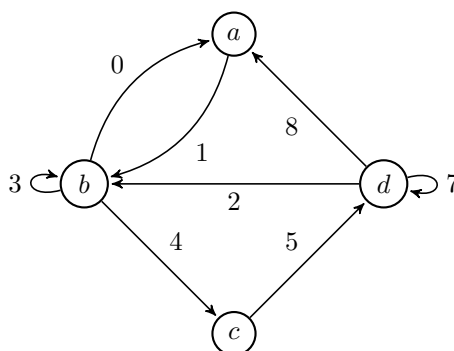
**Typy hran** lze na základě DFS průchodu z konkrétního vrcholu klasifikovat na:

1. **Stromová hrana** (tree edge) je hrana  $(u, v)$ , která odpovídá hraně v DFS stromě.
2. **Zpětná hrana** (back edge) je hrana  $(u, v)$ , která spojuje vrchol s jeho předkem v DFS stromě.
3. **Dopředná hrana** (forward edge) je hrana  $(u, v)$ , která spojuje uzel s některým z jeho potomků, ale není hranou výsledného DFS lesa (tím se liší od stromové hrany – vrchol který jsme s její pomocí objevili už byl objeven dříve).
4. **Příčná hrana** (cross edge) je hrana  $(u, v)$  je hrana, které neodpovídá žádná z jiných klasifikací.

**Topologické uspořádání** definujeme na orientovaném acyklickém grafu a jedná se o lineární uspořádání, ve kterém se může vrchol  $u$  vyskytovat před vrcholem  $v$  jedině pokud z  $v$  do  $u$  nevede hrana. Používá se pro vyjadřování závislostí (prerekvizity předmětů), řazení procesů...

**Silně souvislá komponenta** orientovaného grafu je maximální množina vrcholů taková, že z každého vrcholu této množiny se lze dostat do libovolného jiného vrcholu této množiny.

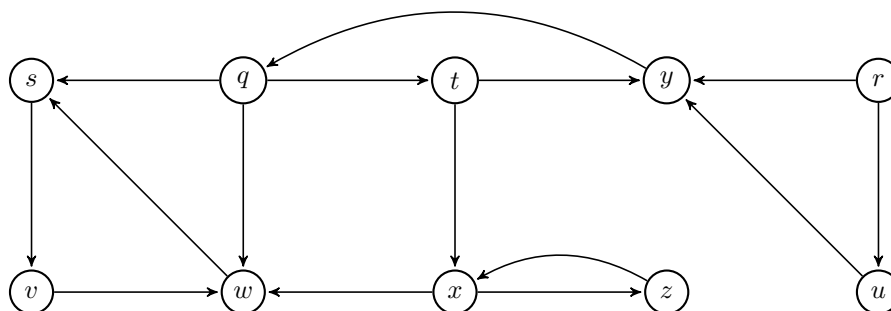
**11.1** Zapište tento graf pomocí matice vzdáleností a seznamu následníků:



**11.2** Mějme orientovaný graf zadaný seznamem následníků.

- a) Jakou má složitost určení počtu výstupních hran ze zadaného vrcholu?
- b) Jaká bude složitost pro vstupní hrany?

**11.3** Graf, se kterým budete v tomto cvičení pracovat:



Pokud vám algoritmus umožní volit z více vrcholů, pak je berte podle abecedy.

- Zjistěte pomocí BFS, zdali existuje cesta z  $q$  do  $y$  a určete její délku.
- Jaké vrcholy jste navštívili? Jaký vrchol musíte zvolit jako počáteční, abyste prošli celý graf?
- Určete typ všech hran grafu pomocí průchodu DFS všech silně souvislých komponent. Pokud vám algoritmus umožní volit z více vrcholů, vybírejte je v abecedním pořadí (začněte tedy z vrcholu  $q$ ).
- Lze z časových známek získaných z průchodu v minulém příkladu zjistit, zda je z vrcholu  $u$  dosažitelný vrchol  $w$ ? Jak obecně pouze z časových známek určíte, jaké vrcholy jsou dosažitelné ze zadaného vrcholu?
- V kolika krocích navštívíte vrchol  $z$  z vrcholu  $q$  pomocí BFS a DFS? Jde se před započítáním prohledávání rozhodnout, který typ prohledávání bude výhodnější?
- Porovnejte časovou i prostorovou složitost BFS a DFS. Jak se liší v závislosti na podobě grafu? Zadejte graf, ve kterém se složitosti liší.
- Jaký graf projdou průchody do šířky a do hloubky ve stejném pořadí?

**11.4** Mějme graf  $G$ , který obsahuje vrchol  $x$ , ze kterého jsou dostupné všechny vrcholy grafu  $G$ . Pro vrcholy  $u$  a  $v$  určíme časové známky DFS průchodem z vrcholu  $x$ . Která z následujících tvrzení jsou pravdivá, své rozhodnutí zdůvodněte?

- Pokud je  $u.d < v.d$ , pak neexistuje hrana z  $u$  do  $v$ .
- Pokud je  $u.f < v.f$ , pak neexistuje hrana z  $v$  do  $u$ .
- Pokud je  $u.f < v.f$ , pak neexistuje hrana z  $u$  do  $v$ .
- Pokud je  $u.f < v.f \wedge u.d < v.d$ , pak neexistuje cesta z  $u$  do  $v$ .
- Pokud je  $u.f < v.d$ , pak neexistuje cesta z  $u$  do  $v$ .
- Pokud je  $u.f < v.d$ , pak neexistuje hrana z  $u$  do  $v$ .



## 11.5

- Jaký je maximální počet hran v orientovaném grafu s  $n$  vrcholy?
- Jaký je minimální počet hran, pokud je celý orientovaný graf dosažitelný z jednoho vrcholu?
- Kolik hran je třeba přidat do grafu z příkladu b), aby byl celý orientovaný graf silně souvislou komponentou?

## 11.6 Navrhněte graf, který bude obsahovat po prohledání do hloubky:

- 2 dopředné hrany,
- 2 zpětné hrany,
- 2 příčné hrany a
- 4 stromové hrany.

Pořadí v rámci prohledávání je dáno abecedně.

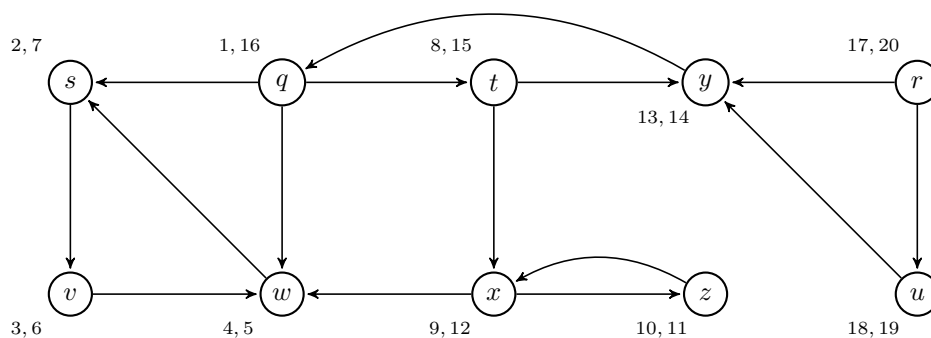
11.7 Mějme strom minimálních vzdáleností z počátečního vrcholu, který vznikl průchodem BFS neorientovaného grafu (BFS strom). Co lze ze stromu určit o vzdálenosti 2 vrcholů, z nichž není ani jeden kořenem stromu (počátečním vrcholem)?

## 11.8

- Kterým z algoritmů BFS nebo DFS byste hledali cyklus v orientovaném grafu a jak?
- Navrhněte algoritmus, který určí délku nejkratšího cyklu v neohodnoceném orientovaném grafu. Pokud graf neobsahuje cykly, vrací  $\infty$ .

## 11.9

- Určete silně souvislé komponenty v následujícím grafu:



- Jak byste hledali silně souvislé komponenty v grafu  $G$ ?

11.10 Dokažte, že z každého souvislého neorientovaného grafu, lze odebrat jeden vrchol tak, že nedojde k rozpojení grafu na samostatné části. Jak byste takový vrchol našli?

**11.11** Porovnejte následující 2 DFS algoritmy, které pracují nad jednou komponentou grafu. Předpokládejme, že oba algoritmy voláme na neorientovaném grafu, který má u všech vrcholů nainicializovanou bílou barvu.

**Procedura** RECDFS( $u, time$ )

**vstup:** vrchol  $u$ , časová známka  $time$ , při prvním volání inicializována na nulu

```
1  $time \leftarrow time + 1$ 
2  $u.d \leftarrow time$ 
3  $u.color \leftarrow gray$ 
4 for  $v \in u.successors$  do
5   if  $v.color = white$  then
6      $u.color \leftarrow gray$ 
7     RECDFS( $v$ )
8   fi
9 od
10  $u.color \leftarrow black$ 
11  $time \leftarrow time + 1$ 
12  $u.f \leftarrow time$ 
```

**Procedura** ITERDFS( $u$ )

**vstup:** vrchol  $u$

```
1  $stack \leftarrow empty\ stack$ 
2 PUSH( $stack, u$ )
3  $time \leftarrow time + 1$ 
4  $u.d \leftarrow time$ 
5 while  $stack$  is not empty do
6    $u \leftarrow POP(stack)$ 
7    $time \leftarrow time + 1$ 
8    $u.d \leftarrow time$ 
9    $u.color \leftarrow gray$ 
10  for  $v \in u.successors$  do
11    if  $v.color = white$  then
12       $v.color \leftarrow gray$ 
13      PUSH( $stack, v$ )
14    fi
15  od
16   $u.color \leftarrow black$ 
17   $time \leftarrow time + 1$ 
18   $u.f \leftarrow time$ 
19 od
```

**11.12** U následujících algoritmů určete, zda se jedná o korektní DFS/BFS algoritmus. Pokud ne, popište proč a co dělá špatně. Předpokládejme, že všechny algoritmy voláme na neorientovaném grafu, který má u všech vrcholů nainicializovanou bílou barvu.

a) První algoritmus:

<b>Procedura PRUCHODA(<math>u</math>)</b>
<b>vstup:</b> vrchol $u$ 1 $u.color \leftarrow gray$ 2 <b>for</b> $v \in u.successors$ <b>do</b> 3 <b>if</b> $v.color = white$ <b>then</b> 4         PRUCHODA( $v$ ) 5 <b>fi</b> 6 <b>od</b> 7 $u.color \leftarrow black$

b) Druhý algoritmus:

<b>Procedura PRUCHODB(<math>u</math>)</b>
<b>vstup:</b> vrchol $u$ 1 $queue \leftarrow empty\ queue$ 2 ENQUEUE( $queue, u$ ) 3 <b>while</b> $queue$ is not empty <b>do</b> 4 $u \leftarrow$ DEQUEUE( $queue$ ) 5 <b>for</b> $v \in u.successors$ <b>do</b> 6         ENQUEUE( $queue, v$ ) 7 <b>od</b> 8 <b>od</b>

c) Třetí algoritmus:

<b>Procedura PRUCHODC(<math>u</math>)</b>
<b>vstup:</b> vrchol $u$ 1 $stack \leftarrow empty\ stack$ 2 PUSH( $stack, u$ ) 3 <b>while</b> $stack$ is not empty <b>do</b> 4 $u \leftarrow$ POP( $stack$ ) 5 $u.color \leftarrow gray$ 6 <b>for</b> $v \in u.successors$ <b>do</b> 7         PUSH( $stack, v$ ) 8 <b>od</b> 9 $u.color \leftarrow black$ 10 <b>od</b>

d) Čtvrtý algoritmus:

<b>Procedura PRUCHODD(<math>G</math>)</b>
<b>vstup:</b> graf $G$ 1 $queue \leftarrow \text{empty queue}$ 2 $\text{ENQUEUE}(queue, \forall u \in G)$ 3 <b>while</b> $queue$ is not empty <b>do</b> 4 $u \leftarrow \text{DEQUEUE}(queue)$ 5 $u.color \leftarrow \text{black}$ 6 <b>for</b> $v \in u.successors$ <b>do</b> 7 $\text{ENQUEUE}(queue, v)$ 8 <b>od</b> 9 <b>od</b>

e) Pátý algoritmus:

<b>Procedura PRUCHODE(<math>u</math>)</b>
<b>vstup:</b> graf $u$ 1 $priorityQueue \leftarrow \text{empty queue}$ // uspořádaná podle abecedního pořadí vrcholů 2 $\text{ENQUEUE}(priorityQueue, u)$ 3 <b>while</b> $priorityQueue$ is not empty <b>do</b> 4 $u \leftarrow \text{DEQUEUE}(priorityQueue)$ 5 $u.color \leftarrow \text{black}$ 6 <b>for</b> $v \in u.successors$ <b>do</b> 7 $\text{ENQUEUE}(priorityQueue, v)$ 8 <b>od</b> 9 <b>od</b>

Následující příklady jsou vhodné na domácí studium.

**11.13** Naprogramujte přidání hrany do matice sousednosti. Dále implementujte hledání nejkratší cesty z  $u$  do  $v$  pomocí BFS. Pomocí DFS otestujte, zdali graf obsahuje cykly. Také naprogramujte převod mezi reprezentacemi grafů. Můžete použít reprezentaci seznamů z předchozích cvičení. Postupujte podle pokynů v komentářích. Zdrojové kódy jsou dostupné ve [studijních materiálech](#).

Tento příklad je opakováním přednášky. Detailněji popisuje pojmy z úvodu cvičení.

**11.14** Jaké reprezentace grafů znáte? Jaké jsou jejich nevýhody a výhody? Kdy se která reprezentace hodí? Jak se vaše navržené reprezentace změní u ohodnoceného grafu?

**11.15** Mějme úplný binární strom hloubky 7 reprezentovaný pomocí seznamu následníků. Převeďte jej do reprezentace pomocí matice sousednosti.

**11.16** Čtverec orientovaného grafu  $G = (V, E)$  je graf  $G^2 = (V, E^2)$  takový, že  $(u, v) \in E^2$  právě tehdy, když  $G$  obsahuje cestu s maximálně dvěma hranami mezi  $u$  a  $v$ . Navrhněte efektivní algoritmus, který vytvoří graf  $G^2$  z grafu  $G$  pro obě reprezentace – seznam následníků a matice sousednosti. Analyzujte složitost vašeho algoritmu.

**11.17** Matice sousednosti orientovaného grafu  $G = (V, E)$  bez smyček je  $|V| \times |V|$  matice  $B = b_{ue}$  taková, že:

$$b_{ue} = \begin{cases} -1 & \text{pokud hrana } e \text{ směřuje z vrcholu } u, \\ 1 & \text{pokud hrana } e \text{ směřuje do vrcholu } u, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Popište, co bude reprezentovat výstupní matice produktu  $BB^T$ , kde  $B^T$  je transponovaná matice  $B$ .

### 11.18

- Strom je jednoduchý souvislý neorientovaný graf, který neobsahuje kružnice. Popište souvislost pre/in/post order výpisu s DFS průchodem.
- Lze preorder výpis použít na graf za předpokladu, že by každý uzel měl maximálně 2 následníky a to pod ukazateli LEFT a RIGHT?
- Jakým průchodem je vhodné procházet nekonečný (ale spočetný) strom konečné arity (strom, kde existuje alespoň jedna nekonečná (ale spočetně dlouhá) větev)?



**Daliborek vzkazuje:** Existenci nekonečně dlouhé větve v nekonečném grafu konečné arity máme zaručenu Königovým lemmatem (které však nelze dokázat v Zermelově-Fraenkelově teorii množin bez axiomu výběru).

- \*\* Jakým průchodem je vhodné procházet nekonečný (ale spočetný) strom nekonečné (ale spočetně) arity?



**Karlík varuje:** Přemýšlení nad problémy reálného života pomocí DFS často nevede ke správnému výsledku: viz [xkcd 761](#).

**11.19** Navrhněte graf, který po libovolném prohlédání do hloubky nebude obsahovat žádnou dopřednou hranu.

**11.20** Kolik existuje různých grafů s  $n$  vrcholy a  $m$  neorientovanými hranami?

**11.21** Použijme algoritmus BFS, pouze u něj nahradme frontu zásobníkem. Nalezne algoritmus stále nejkratší cesty v grafu?

**11.22** Excentricita vrcholu  $v$  je nejdelší vzdálenost z  $v$  do jiného vrcholu grafu. Průměr grafu je největší excentricita jeho vrcholů. Naopak nejmenší excentricita vrcholů je poloměr. Centrum je vrchol, jehož excentricita je rovna poloměru.

Navrhněte funkce, které určí excentricitu, průměr, poloměr a centrum.

**11.23** Eulerovský tah je posloupnost neopakujících se hran, kterými procházíme zadaný graf. Hamiltonovský cyklus je cesta, která prochází přes všechny vrcholy.

Určete, kdy graf může mít Eulerovský tah a Hamiltonovský cyklus.

Jak byste problém řešili algoritmicky?

**11.24** Dokažte, že graf obsahující kružnici liché délky nemůže být bipartitní. Platí také tvrzení, že každý graf, který obsahuje pouze cykly sudé délky je bipartitní?

---

**11.25** Mějme obrázek, ve kterém chceme ze zadaného pixelu najít všechny pixely, které mají stejnou barvu a sousedí buďto s počátečním pixelem, nebo pixelem, který je již v množině sousedů.

Jak budete reprezentovat obrázek grafem a jaký grafový algoritmus se k problému hodí?

---

**11.26** Jaká bude složitost algoritmu BFS, pokud použijeme pro reprezentaci grafu matici sousedů? Modifikujte algoritmus tak, aby byl schopen pracovat s maticí jako vstupem.

---

**11.27** Existují dva typy wrestlerů: „babyfaces“ („good guys“) a „heels“ („bad guys“). Mezi každou dvojicí profesionálních wrestlerů je či není rivalita. Předpokládejme, že máme  $n$  profesionálních wrestlerů a máme seznam  $r$  párů rivalů. Navrhněte algoritmus, který v čase  $\mathcal{O}(n + r)$  rozhodne, zdali je možné přiřadit wrestlerům typ „babyface“ a ostatním typ „heel“ tak, že všechny dvojice rivalů jsou dvojice „babyface“ a „heel“ wrestlerů. Pokud takové přiřazení existuje, váš algoritmus by měl toto přiřazení vrátit.

---

**11.28** Nechť  $G = (V, E)$  je souvislý, neorientovaný graf. Navrhněte algoritmus, který v čase  $\mathcal{O}(V + E)$  spočítá cestu v  $G$ , která projde každou hranu právě jednou v každém směru. Představte si problém jako bludiště, jak byste našli cestu ven, pokud byste mohli použít neomezený počet mincí na značení cesty?

---

**11.29** Mějme algoritmus BFS, který nepoužívá šedou barvu pro indikaci, že již je vrchol přidán do fronty. Jak se změní složitost algoritmu?

## Kapitola 12

# Cesty v grafech

**Cesta** v grafu  $G = (V, E)$  je posloupnost vrcholů  $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$  taková, že  $(v_{i-1}, v_i) \in E$  pro  $i = 1, \dots, k$ .

**Jednoduchá cesta** je cesta, která neobsahuje dva stejné vrcholy.

**Trojúhelníková nerovnost** – pro každou hranu  $(u, v) \in E$  a  $\forall(s) \in V$  platí  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$ , kde  $w(u, v)$  je ohodnocení hrany  $(u, v)$ .

**Bellmanův–Fordův algoritmus** je algoritmus pro hledání nejkratších cest ze zadaného vrcholu do všech ostatních vrcholů. Je schopen pracovat s grafem s hranami záporné délky a v případě existence záporného cyklu jej umí detekovat.

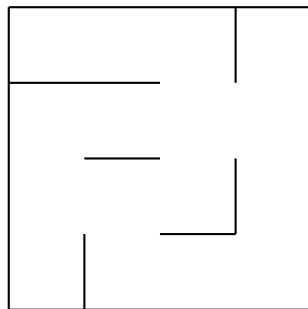
**Dijkstrův algoritmus** je algoritmus pro hledání nejkratších cest ze zadaného vrcholu do všech ostatních vrcholů. Oproti Bellmanovu–Fordovu algoritmu neumí projít graf s hranami záporné délky. Výhodou oproti Bellmanovu–Fordovovu algoritmu je lepší časová složitost.

**Relaxace cesty** je procedura volaná na dvojici vrcholů, která v případě existence kratší cesty, než kterou zatím známe, aktualizuje vzdálenost vrcholu na novou kratší hodnotu.

**Strom nejkratších cest** grafu  $G$  definujeme jako strom, kde od fixního kořene  $v$  k libovolnému vrcholu  $u$  je cesta ve stromě nejkratší cestou v grafu  $G$ .

---

**12.1** Mějme následující bludiště.

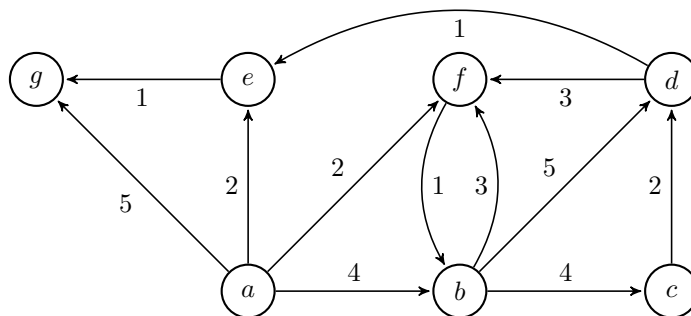


- Převedte bludiště na graf.
- Navrhněte algoritmus pro nalezení nejkratší cesty v bludišti z levého horního rohu do pravého dolního rohu. Pokud cesta neexistuje, vrátí *false*. Algoritmus proveďte.

- c) Upravte graf tak, aby v něm nešlo odbočovat doleva a vracet se. Co vrátí váš algoritmus po této úpravě?

**12.2**

- a) Zkonstruuje pomocí Bellmanova–Fordova algoritmu strom nejkratších cest z vrcholu  $a$  v následujícím grafu. Jaká je délka cesty z  $a$  do  $c$ ?



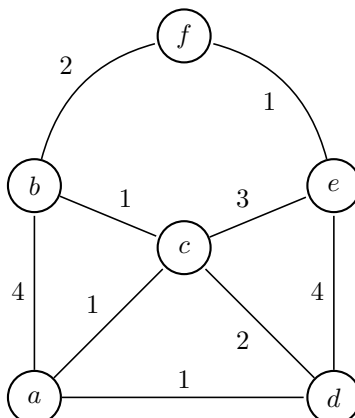
- b) Jaká je časová složitost Bellmanova–Fordova algoritmu?
- c) Jak pomocí Bellmanova–Fordova algoritmu určíte, že graf obsahuje cyklus záporné délky?
- d) Modifikujte algoritmus BELLMAN-FORD tak, že algoritmus vrátí  $v.d = -\infty$  pro všechny vrcholy  $v$ , pro které existuje cyklus se zápornou délkou na cestě z počátečního vrcholu do  $v$ .

**12.3** V tabulce máme přehled nejkratších cest mezi dvojicemi českých vesnic. Navrhněte algoritmus, který nalezne v tabulce chyby. (Nápověda: graf reprezentující silniční síť musí splňovat trojúhelníkovou nerovnost).

	Peklo	Ráj	Hrob	Onen Svět	Záhrobí
Peklo		149	223	197	230
Ráj	150		84	129	139
Hrob	222	84		265	165
Onen Svět	197	129	264		41,4
Záhrobí	230	139	164	41,4	

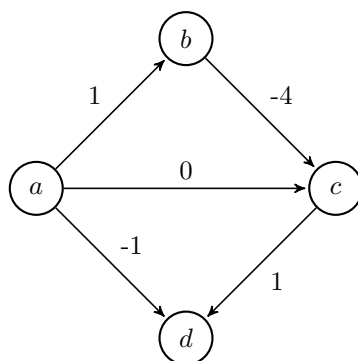
**12.4**

- a) Nalezněte pomocí Dijkstrova algoritmu nejkratší cestu z vrcholu  $a$  do vrcholu  $f$  v tomto neorientovaném grafu:





b) Projděte následující graf z bodu  $a$  pomocí Dijkstrův algoritmu.



c) Navrhněte graf s hranami záporné délky, které Dijkstrův algoritmus zpracuje, a přesto vrátí správný výsledek.

d) Jak bychom mohli vylepšit Dijkstrův algoritmus, aby sám detekoval, že vlivem záporných hran nevrací korektní výsledek?

**12.5** Předpokládejme, že chceme vyřešit problém nejdelší jednoduché cesty mezi dvěma vrcholy. Co dělá algoritmus DIJKSTRA, pokud zaměníme operaci *minimum* za *maximum*? Pokud bude korektně hledat délky nejdelších cest, pak to dokažte. Pokud ne, tak sestavte protipříklad.

**12.6** Jak byste řešili následující problémy hledání cest:

- Nejkratší cesta z jednoho vrcholu do všech ostatních vrcholů.
- Nejkratší cesta, která přechází přes konkrétní vrcholy v daném pořadí.
- Nejkratší cesty ze všech vrcholů do jednoho vrcholu.
- Identifikování vrcholů do zadané vzdálenosti (hledání měst v určitém okolí na mapě).
- Nalezení nejdelší cesty z daného vrcholu v acyklickém grafu (se zápornými hranami).
- \* Nejkratší cesty mezi všemi dvojicemi vrcholů.
- \* Nejkratší cyklus přes všechny vrcholy.

**12.7** Použijte a modifikujte Dijkstrův algoritmus k nalezení nejkratší cesty z více výchozích vrcholů do všech ostatních vrcholů v orientovaném grafu, který neobsahuje záporné hrany.

**12.8** Navrhněte algoritmus k nalezení nejkratší cesty, která je rostoucí. Rostoucí cesta musí obsahovat hrany, jejichž délky tvoří rostoucí posloupnost.

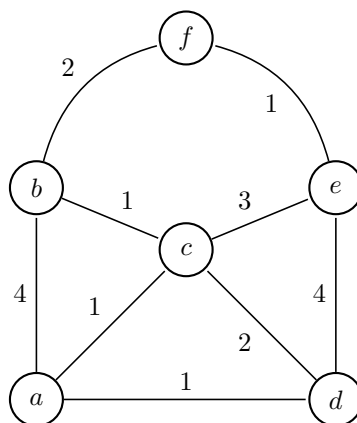
Následující příklady jsou vhodné na domácí studium.

**12.9** Příklad zaměřen na pseudokódy Bellmanova–Fordova a Dijkstrova algoritmu.

- Jak provádíme inicializaci algoritmů, které hledají nejkratší cesty z jednoho zdroje?
- Relaxace hrany  $(u, v)$  slouží jako test, zdali existuje kratší cesta do vrcholu  $v$  přes vrchol  $u$ . Navrhněte metodu RELAX s argumenty vrcholů  $u$  a  $v$ . Nezapomeňte na udržení informace o předchůdci.
- Pomocí předchozích metod zkonstruuje algoritmus Bellman–Ford. Tedy inicializujte algoritmus, použijte relaxaci hran a nezapomeňte ověřit, jestli graf obsahuje záporné cykly.

Dále se příklad věnuje Dijkstrovu algoritmu včetně úvah o jeho odvození.

- Přepište hrany délky  $x$  na  $x$  hran přes pomocné vrcholy tak, aby zůstala délka cest zachována a na tomto grafu proveďte průchod do šířky. Ten ukončete při nalezení vrcholu  $f$ . Co jste zjistili?

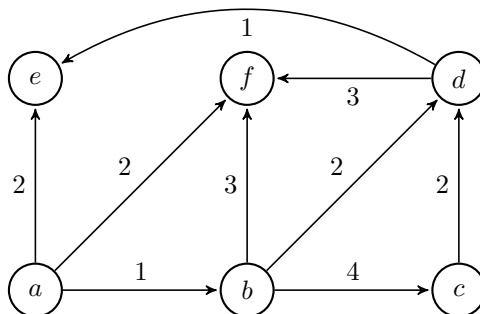


- Kdy BFS prohledává původní vrcholy? Dá se vrcholům přiřadit nějaká metrika, podle které bychom mohli provést BFS na ohodnoceném grafu?
- Kdy bude BFS na grafu s pomocnými vrcholy zpracovávat jaký vrchol?
- Převod grafu s ohodnocenými hranami na graf s hranami délky 1 pomocí přidání vrcholů tedy umožňuje procházení (kladně) ohodnoceného grafu pomocí BFS. Je nalezená vzdálenost vrcholu finální po prvním nalezení vrcholu, nebo se může měnit? Zamyslete se nad tím v kontextu obarvování vrcholů.
- Zkuste formulovat Dijkstrův algoritmus, pomocí úvah o BFS. Můžete k tomu použít funkce INITIALIZE a RELAX, které jste použili u Bellmanova–Fordova algoritmu.
- Jaký je vhodný způsob výběru vrcholu, který máte zpracovat? Jaká datová struktura se k tomuto účelu hodí? Jaká bude složitost algoritmu podle zvolené datové struktury?

**12.10** Naprogramujte hledání nejkratších cest v orientovaném ohodnoceném grafu pomocí Bellmanova–Fordova a Dijkstrova algoritmu. Pro Dijkstrův algoritmus použijte připravenou strukturu prioritní fronty. Postupujte podle pokynů v komentářích. Zdrojové kódy jsou dostupné ve [studijních materiálech](#).

## 12.11

a) Určete nejdelší cestu z vrcholu  $a$  na tomto grafu:



**Paní Bílá připomíná:** Pro výpočet minimální kostry libovolného grafu je možné použít hladové algoritmy, protože pro graf můžeme sestavit odpovídající matroid, jehož báze jsou tvořeny množinami hran koster tohoto grafu.

**12.12** Mějme ohodnocený orientovaný graf  $G = (V, E)$  s cyklem se zápornou délkou. Navrhněte efektivní algoritmus, který vypíše vrcholy záporného cyklu. Dokažte, že váš algoritmus je korektní.

**12.13** Ukažte, že strom nejkratších cest z jednoho zdroje vytvořený pomocí algoritmu DIJKSTRA v neorientovaném grafu netvoří nutně minimální koster.

**12.14** Nacházíte se v  $n$  dimenzionální síti na pozici  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Dimenze sítě jsou  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ . V jednom kroku můžete udělat jeden krok dopředu nebo dozadu v kterékoliv z  $n$  dimenzí (tedy vždy existuje  $2 \cdot n$  možných pohybů). Kolika způsoby můžete udělat  $m$  kroků tak, že nikdy neopustíte síť v žádném vrcholu? Síť opustíte pokud pro nějaké  $x_i$  platí, že  $x_i \leq 0 \vee x_i > d_i$ .

**12.15** Dokažte, že v grafu s unikátními váhami hran existuje právě jedna minimální koster. Kolik minimálních koster lze najít v grafu s hranami stejné vzdálenosti?

**12.16** Jak se změní strom nejkratších cest do všech vrcholů z předem daného vrcholu, když obrátíme všechny hrany?

**12.17** Jak byste našli průměr ohodnoceného orientovaného grafu?

**12.18** Co se stane s Bellmanovým–Fordovým algoritmem, pokud je na cestě mezi zadanými dvěma vrcholy negativní cyklus? Bude některá hrana nekorektně relaxovaná?

**12.19** Jaký algoritmus byste použili pro nalezení nejkratšího cyklu v grafu?

**12.20** Mějme orientovaný graf bez záporných hran. Vrcholy tohoto grafu jsou rozděleny do dvou množin. Nalezněte nejkratší cestu mezi všemi dvojicemi vrcholů v různých množinách.

**12.21** Navrhněte algoritmus k nalezení sousedů v určité vzdálenosti od zadaného vrcholu. Algoritmus by měl mít časovou složitost závislou na zadané vzdálenosti.

---

**12.22** Navrhněte algoritmus k nalezení kritické hrany v orientovaném grafu bez záporných hran. Kritická hrana je hrana, jejíž odstranění maximálně zvětší délku nejkratší cesty mezi dvěma vrcholy.

---

**12.23**

- a) Co bude počítat Bellmanův–Fordův algoritmus, pokud neprovedeme relaxaci pro každou hranu, ale pouze pro všechny hrany z výchozího vrcholu?
  - b) Co bude počítat v případě, že budeme relaxovat každou hranu pouze jednou, ne  $|V| - 1$ -krát?
- 

**12.24** Co se stane s Bellmanovým–Fordovým a Dijkstrovým algoritmem, pokud znegujeme podmínku v relaxaci? Počítá algoritmus délku nejdelší cesty?

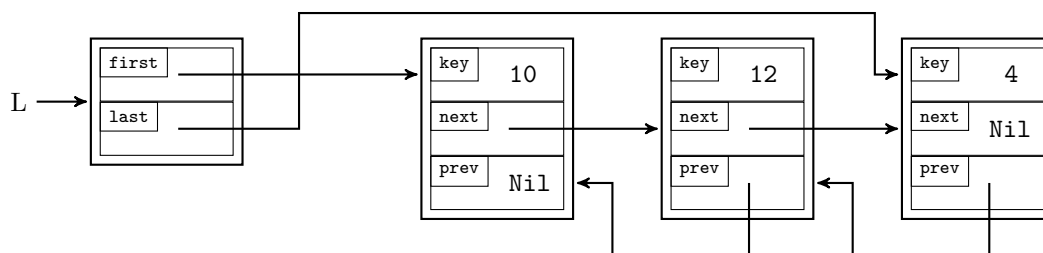


**Pan Usměvavý dodává:** Takto modifikovaný algoritmus se nejmenuje RELAX, ale DŘINA.

## Řešení některých příkladů

# Spojovaný seznam, fronta a zásobník

## 1.1



a)

Náš seznam typu *List* bude obsahovat ukazatele *first* a *last* ukazující na první a poslední prvek v seznamu. Pokud je seznam prázdný, jsou tyto ukazatele inicializovány na *nil*. V případě jediného prvku v seznamu jsou ukazatele na první a poslední prvek shodné.

Každý prvek seznamu obsahuje klíč *key*, ukazatel na následující prvek *next* a ukazatel na předchozí prvek *prev*. Pokud je prvek poslední, pak hodnota v *next* odpovídá *nil*. Obdobně je pro první prvek *prev = nil*. Nový prvek seznamu vytvoříme pomocí `NEW Node(key)`, tato funkce nám vrátí ukazatel na nový prvek typu *Node* a nastaví hodnotu jeho klíče dle parametru *key*. Prvek seznamu může také obsahovat prvek *data*, který reprezentuje data přiřazená k danému klíči. Pro jednoduchost implementace se daty nemusíme zabývat.

- b)
- nesmysl
  - nesmysl
  - 10
  - druhý prvek seznamu obsahující klíč 12, odkaz na první prvek v *prev* a odkaz na poslední prvek v *next*
  - 10
  - error, snažíme se vyhodnotit *Nil.next.key*
  - *true*, ale pozor toto není kontrola, že seznam má délku 3, protože v seznamu může být více stejných klíčů
  - *true*, toto je kontrola, že seznam má délku 3, ale na krátkých seznamech může způsobit chybu
  - uloží 10 jako klíč druhého prvku seznamu
  - rozbije seznam, protože do *next* prvního prvku uloží odkaz na první prvek

c) Funkce `INSERT` vytvoří z klíče nový prvek a správně aktualizuje ukazatele v seznamu.

<b>Procedura</b> INSERT( $L, key$ )
<b>vstup:</b> seznam $L$ typu $List$ , vkládaný klíč $key$ <b>výstup:</b> ukazatel na nově přidáný prvek 1 $new \leftarrow \text{NEW Node}(key)$ // vytvoří nový prvek seznamu 2 $new.next \leftarrow nil$ // následující prvek není 3 $new.prev \leftarrow L.last$ // předchozí prvek je bývalý poslední prvek 4 <b>if</b> $L.first = nil$ <b>then</b> 5 $L.first \leftarrow new$ // případ prázdného seznamu 6 <b>else</b> 7 $L.last.next \leftarrow new$ 8 <b>fi</b> 9 $L.last \leftarrow new$ // nový poslední prvek 10 <b>return</b> $new$

- d) Funkce DELETE ( $L, node$ ) smaže prvek ze seznamu a upraví ukazatele sousedních prvků.

<b>Procedura</b> DELETE( $L, node$ )
<b>vstup:</b> seznam $L$ typu $List$ , ukazatel $node$ na prvek seznamu, který chceme odstranit 1 <b>if</b> $node = nil$ <b>then</b> 2 <b>return</b> Chyba, byl zadán prázdný ukazatel 3 <b>fi</b> 4 <b>if</b> $node.prev = nil$ <b>then</b> 5 $L.first \leftarrow node.next$ // nemá předchůdce 6 <b>else</b> 7 $node.prev.next \leftarrow node.next$ 8 <b>fi</b> 9 <b>if</b> $node.next = nil$ <b>then</b> 10 $L.last \leftarrow node.prev$ // nemá následníka 11 <b>else</b> 12 $node.next.prev \leftarrow node.prev$ 13 <b>fi</b> 14 <b>RELEASE</b> ( $node$ ) // až po úpravě ukazatelů uvolňujeme prvek z paměti

Výhoda oproti obyčejnému poli je, že nám stačí upravit jenom sousední prvky, abychom zachovali strukturu seznamu. V poli bychom museli posunout v paměti všechny prvky následující za smazaným prvkem. Proto se v aplikacích, kde se často mění prostřední prvky dat, používají seznamy místo polí.

- e) Funkce bude muset projít lineárně celý seznam, dokud nenajde hledaný prvek.

<b>Procedura</b> SEARCH( $L, key$ )
<b>vstup:</b> seznam $L$ typu $List$ , hledaný klíč $key$ <b>výstup:</b> ukazatel na nalezený prvek s daným klíčem; $nil$ , pokud neexistuje 1 $node \leftarrow L.first$ 2 <b>while</b> $node \neq nil \wedge node.key \neq key$ <b>do</b> 3 $node \leftarrow node.next$ 4 <b>od</b> 5 <b>return</b> $node$

f) Jelikož prvky v poli jsou v paměti uspořádány za sebou, můžeme přímo přistupovat (s konstantní složitostí) ke konkrétnímu prvku. V seznamu to nelze, protože nevíme, kde se přesně  $i$ -tý prvek nachází. Proto přístup k  $i$ -tému prvku může být až lineární vzhledem k délce seznamu (musíme projít celý seznam, abychom prvek našli).

g) U některých aplikací se můžeme chtít odvolávat na předchozí prvky. Jak jsme už v předchozím příkladu zjistili, přístup k  $(i - 1)$ -tému prvku by mohl mít až lineární složitost v jednosměrně spojovaném seznamu. V obousměrně spojovaném seznamu se však z  $i$ -tého prvku na předchozí prvek dostaneme v konstantním čase pomocí ukazatele *prev*. Toto vylepšení nám ovšem klade nároky na paměť pro udržování dalšího ukazatele.

**1.2** Mějme strukturu *Stack*, která obsahuje ukazatel na vrchol zásobníku *top*. Pokud je zásobník prázdný, je ukazatel *top* nastaven na *nil*.

Procedura PUSH( <i>stack</i> , <i>key</i> )
---

<b>vstup:</b> struktura <i>stack</i> , klíč <i>key</i>
--

1 <i>added</i> $\leftarrow$ NEW <i>Node</i> ( <i>key</i> ) 2 <i>added.below</i> $\leftarrow$ <i>stack.top</i> 3 <i>stack.top</i> $\leftarrow$ <i>added</i>
--

Procedura POP( <i>stack</i> )
-------------------------------

<b>vstup:</b> struktura <i>stack</i>
--------------------------------------

<b>výstup:</b> hodnota odstraněného vrcholu
---

1 <b>if</b> <i>stack</i> je prázdný <b>then</b> 2 <b>return</b> zásobník je prázdný 3 <b>fi</b> 4 <i>key</i> $\leftarrow$ <i>stack.top.key</i> 5 <i>tmp</i> $\leftarrow$ <i>stack.top</i> // abychom neztratili ukazatele na prvek, který se má smazat 6 <i>stack.top</i> $\leftarrow$ <i>stack.top.below</i> 7 RELEASE( <i>tmp</i> ) // až po úpravě ukazatelů uvolňujeme prvek z paměti 8 <b>return</b> <i>key</i>
---

**1.3** Na rozdíl od fronty se mohou u zásobníku prvky přeházet. Prvky zachovávají vlastnost, že pokud již byly vloženy vyšší prvky, můžou být odebrány až po odebrání vyšších čísel. Nemůžou tedy nastat situace b) – problém je s poslední dvojicí čísel, f) – problém u 1 7 2 a g) – zase poslední dvojice.

Vzorově ještě rozeberme případ c). Posloupnost příkazů je PUSH(0), PUSH(1), PUSH(2), POP() 2, PUSH(3), PUSH(4), PUSH(5), POP() 5, PUSH(6), POP() 6, PUSH(7), POP() 7, POP() 4, PUSH(8), POP() 8, PUSH(9), POP() 9, POP() 3, POP() 1, POP() 0.

**1.4** Mějme strukturu *Queue*, která obsahuje ukazatel na první (*first*) a poslední (*last*) prvek fronty.



**Procedura ENQUEUE(*queue*, *key*)****vstup:** struktura *queue*, klíč *key*

```

1  added ← NEW Node(key)
2  added.left ← nil
3  if queue.last = nil then
4      queue.first ← added
5  else
6      queue.last.left ← added
7  fi
8  queue.last ← added

```

**Procedura DEQUEUE(*queue*)****vstup:** struktura *queue***výstup:** hodnota odstraněného prvku

```

1  if queue.first = nil then
2      return fronta je prázdná
3  fi
4  key ← queue.first.key
5  tmp ← queue.first // abychom neztratili ukazatele na prvek, který se má smazat
6  if queue.first = queue.last then
7      queue.first ← nil
8      queue.last ← nil
9  else
10     queue.first ← queue.first.left
11 fi
12 RELEASE(tmp)
13 return key

```

1.5 Jelikož je fronta datová struktura typu FIFO a prvky dáváme v pořadí od 0, pak jediný případ, který může nastat je, že tyto prvky budeme ve stejném pořadí i odebírat. Tedy případy a) a c) nikdy nenastanou.

1.8

a) Vhodným datovým typem může být například následující struktura:

**Struktura OSOBA***věk* // celé kladné číslo*jméno* // řetězec

b) Rozhodně není vhodné u každé osoby dělat kopie objektu pro každého přítele. Kdybychom totiž chtěli aktualizovat nějaké údaje, tak bychom aktualizaci museli provést nejen u originálního objektu, ale následně bychom museli vyhledat i všechny kopie, které by bylo třeba také aktualizovat. Dalším problémem je velká paměťová náročnost. Ideální je tedy na každého přítele nějak odkázat, k čemuž se hodí v C ukazatel a v Pythonu odkaz.

Naše struktura tedy výsledně vypadá takto:

**Struktura OSOBA***věk* // celé kladné číslo*jméno* // řetězec*přátelé* // seznam/pole odkazů/ukazatelů na proměnné typu OSOBA

# Algoritmy a korektnost

**2.1** Ne, protože 31. 12. 2008 (přestupný rok) došlo k zacyklení (hodnota *days* byla 10593 – můžete si to vyzkoušet sami). V iteraci, která měla být poslední, proměnná *days* byla 366. Byla splněna podmínka cyklu i první podmínka **if**, ale druhá podmínka **if** nebyla splněna a tedy nedošlo ke snížení hodnoty *days*. Řešením je přidat **else** větev pro tento případ, který cyklus zastaví.

S touto chybou se museli vypořádat programátoři Zune z Microsoftu.

## 2.2

- a) Algoritmus cyklí právě tehdy, když je hodnota  $x$  na počátku menší než 0. Proto algoritmus není konvergentní vzhledem k podmínkám a) a c). Vzhledem ke zbylým podmínkám je konvergentní.
- b) Algoritmus pro nezáporná čísla spočítá hodnotu  $z = x[x]$ , což se rovná  $x^2$  právě pro celá čísla  $x$ . Proto je parciálně korektní vzhledem ke vstupní podmínce c) a také k d). Algoritmus je proto totálně korektní vzhledem k uvedené výstupní podmínce a vstupní podmínce d).
- c) Vstupní podmínka musí vstup omezit i o reálná a racionální čísla, takže zůstane pouze množina přirozených čísel, tedy  $\varphi(x) \equiv x \in \mathbb{N}$ .

## 2.3

- a) Algoritmus není totálně korektní, jelikož není pro všechny vstupy konečný.
- b) Vstupy, pro které algoritmus nefunguje, jsou všechny vstupy sudé délky. Na těchto vstupech totiž algoritmus není konečný.

Algoritmus můžeme opravit tak, že na řádku 3 zapíšeme podmínku  $i < j$ . Pokud máme extra smysl pro humor, můžeme opravu provést nastavením vstupní podmínky na řetězec  $S$  s lichou délkou. Takové řešení je totálně korektní, ale není to to, co bychom od algoritmu očekávali.

## 2.4

V důkazu jsou  $A$ ,  $s$  a  $i$  proměnné z algoritmu, odkazují tedy na hodnoty těchto proměnných v diskutovaném místě algoritmu. V řešení budeme používat  $A[k \dots l]$  pro označení části pole  $A$  od prvku  $A[k]$  po prvek  $A[l]$  včetně;  $A[1 \dots 0]$  tedy bude prázdné pole.

**Vstupní podmínka:**  $\varphi(A) \equiv$  „V proměnné  $A$  je pole celých čísel, které obsahuje nulu.“

**Výstupní podmínka:**  $\psi(A, s) \equiv$  „V  $s$  je suma čísel z pole  $A$  od začátku po první výskyt nuly.“

**Invariant while cyklu:** „V  $s$  jen suma čísel z  $A[1 \dots i - 1]$  a v  $A[1 \dots i - 1]$  není žádná nula.“

Před vstupem do cyklu je  $i = 1$  a  $s = 0$ . Invariant platí, protože  $A[1 \dots 0]$  je prázdné pole (není tam žádná nula a součet prvků je 0). Nyní ukážeme, že když provedeme průchod cyklem, invariant zůstane v platnosti (tj. platí po průchodu, pokud platil před). Probereme dvě možnosti.

1. Necht  $A[i] \neq 0$ . Označme si  $s'$  a  $i'$  hodnoty po průchodu, ať je odlišíme od hodnot před průchodem. Víme, že  $i' = i + 1$  a předpokládáme, že  $s$  je suma  $A[1 \dots i - 1]$ . Invariant platí i po průchodu, protože

$$s' = s + A[i] = \text{suma } A[1 \dots i - 1] + A[i] = \text{suma } A[1 \dots i] = \text{suma } A[1 \dots i' - 1].$$

Nemůže se nám dostat nula do  $A[1 \dots i' - 1]$ ? Nemůže, viz podmínka této odrážky.

2. Necht  $A[i] = 0$ . Nic neměníme a ukončujeme cyklus, proto se zachovává i platnost invariantu.

**Korektnost algoritmu:** Bezprostředně za cyklem platí invariant a navíc  $A[i] = 0$ , z čehož přímo plyne platnost výstupní podmínky. Tím jsme dokázali parciální korektnost. **Totální korektnost** plyne z toho, že dle vstupní podmínky v poli  $A$  nějaká nula je,  $i$  se od 0 zvedá vždy jen o jedna.

Alternativní důkaz v exaktnějším hávu.

Označení  $A$ ,  $s$  a  $i$  používáme pro proměnné z algoritmu. Index  $k$  odpovídá pozici první nuly v poli  $A$ . Index  $j$  bude používán ve spojení s nějakým kvantifikátorem. V sumách budeme používat index  $h$ .

**Vstupní podmínka:**

$$\varphi(A) \equiv (\forall j. A[j] \in \mathbb{Z}) \wedge \exists k \geq 1. A[k] = 0$$

Přepis vstupní podmínky do češtiny: všechna čísla v posloupnosti jsou celá a je tam někde nula.

**Výstupní podmínka:**

$$\psi(A, s) \equiv \exists k \geq 1. A[k] = 0 \wedge (\forall j. 1 \leq j < k \Rightarrow A[j] \neq 0) \wedge s = \sum_{h=1}^k A[h]$$

Přepis výstupní podmínky do češtiny: výstupem algoritmu je suma čísel po první výskytu nuly v posloupnosti.

**Invariant while cyklu:**

V textu dále budeme používat  $k$  k označení indexu první nuly. Chcete-li vidět další zápisy matematicky přesně, představte si na začátku každé formule  $\exists k \geq 1. A[k] = 0 \wedge \forall j. 1 \leq j < k \Rightarrow A[j] \neq 0 \wedge$ .

$$i \leq k \wedge s = \sum_{h=1}^{i-1} A[h]$$

Před vstupem do cyklu je  $i = 1$  a  $s = 0$ . Víme, že  $k \geq 1$  a  $\sum_{h=1}^0 A[h]$  je prázdná suma, která se tradičně klade rovna 0. Invariant tedy před cyklem platí.

Nyní ukážeme, že když provedeme průchod cyklem, invariant zůstane v platnosti (tj. platí po průchodu, pokud platil před). Podíváme se nejdříve na  $i \leq k$ . Při každém průchodu cyklem se nám  $i$  zvětší o 1. Nemůže nám vyrůst nad  $k$ ? Nemůže, protože při  $i = k$  je  $A[i] = 0$  a další průchod cyklem už se neprovede. Teď se podívejme na  $s$ . Označme si  $s'$  a  $i'$  hodnoty po průchodu, ať je odlišíme od hodnot před průchodem. Víme, že  $i < k$ ,  $i' = i + 1$  a předpokládáme  $s = \sum_{h=1}^{i-1} A[h]$ . Invariant platí, protože

$$s' = s + A[i] = \sum_{h=1}^{i-1} A[h] + A[i] = \sum_{h=1}^i A[h] = \sum_{h=1}^{i'-1} A[h].$$

**Korektnost algoritmu:**

Oproti vstupní podmínce je ve výstupní podmínce navíc zesílená podmínka pro  $k$ , aby to byl index první nuly v řetězci, a přidána návratová hodnota  $s = \sum_{h=1}^k A[h]$ . Jakou hodnotu algoritmus vrací? Hodnotu  $s$  po posledním průchodu cyklem, tj. v situaci, kdy  $A[i] = 0$ , a tedy  $i = k$ . Invariant cyklu platí i po posledním průchodu, proto  $s = \sum_{h=1}^{i-1} A[h]$ , a tedy  $\sum_{h=1}^{k-1} A[h]$ . Protože  $A[k] = 0$ , je tato suma rovna

$\sum_{h=1}^k A[h]$ . Tím jsme dokázali parciální korektnost. **Totální korektnost** plyne z toho, že dle vstupní podmínky  $k$  existuje. Na začátku cyklu je  $i \leq k$ ,  $i$  se zvedá vždy jen o jedna a při  $i = k$  je cyklus ukončen.

## 2.5

- a) Algoritmus není totálně korektní, jelikož u obdélníkové matice, která má více řádků než sloupců (větší rozměr na ose  $x$ ), nekorektně přeskakuje k diagonále a následně vypisuje hodnotu mimo rozměry matice.

- b) Vstupem může být například  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ . Výstupem by mělo být 1 2 4, ale na 3. řádku není chování algoritmu definováno (bude záležet na konkrétním jazyce a implementaci v něm – v C by pravděpodobně došlo k přístupu mimo paměť příslušející matici  $M$ , Python kontroluje přístup mimo rozsah, takže by vyhodil výjimku „list index out of range“).

Opravu lze provést změnou řádku **3** na  $j \leftarrow i$  a smazáním řádků **5** až **7**.

## 2.6 Podmínky jsou následující:

$$\varphi(A, n) \equiv n = |A| \wedge n \geq 1$$

$$\psi(A, n, A') \equiv A'_1 \leq \dots \leq A'_n \wedge A' \text{ je permutací } A.$$

Jako invariant **for** cyklu zvolme tvrzení, že posledních  $n - i$  prvků posloupnosti je vzestupně uspořádaných a zároveň jsou větší, než všechny zbylé prvky posloupnosti. Nerovnost v invariantu je neostrá, stejně jako v důkazu níže (v posloupnosti samozřejmě může být více stejných prvků).

**Před prvním průchodem** cyklem platí  $i = n$ , a proto je tvrzení triviálně splněno.

**Zachování invariantu.** Podíváme se, jestli nám průchod cyklem nepokazí invariant. Před průchodem předpokládáme platnost invariantu, tedy posledních  $n - i$  prvků je vzestupně seřazených a zároveň jsou větší než zbytek posloupnosti. Zbytek posloupnosti je prvních  $i$  prvků. V cyklu se v tomto zbytku provede hledání maxima a prvek s indexem maxima je následně prohozen s prvkem na pozici  $i$ . Tím je prodloužen blok posledních seřazených a zachována platnost invariantu pro další průchod cyklem se sníženým  $i$ .

**Korektnost algoritmu.** Algoritmus vrací pole  $A$  hned, jak cyklus skončí. Dle invariantu je po posledním průchodu posledních  $n - 1$  prvků seřazených a zbývajících první prvek je jím menší nebo roven. Pole  $A$  je tedy celé seřazené. Tím jsem dokázali parciální korektnost. **Totální korektnost** plyne z toho, že běh **for** cyklu je vždy konečný (pokud nezasahujeme do proměnné  $i$ ).

**2.8** Pro každý algoritmus platí, že když je totálně korektní, tak je také parciálně korektní – to je důsledek definice korektnosti. Naopak z parciální korektnosti vyplývá totální korektnost jen u konvergentních algoritmů. Celkem tedy, parciální korektnost je ekvivalentní totální korektnosti právě pro algoritmy, které jsou konvergentní (tedy zastaví na každém vstupu splňujícím vstupní podmínku).

**2.9** Jelikož můžeme vytvořit výstupní podmínku typu  $\psi \equiv false$ , zdánlivě neexistuje žádná vstupní podmínka, pro kterou by byl algoritmus korektní. Navíc náš algoritmus musí být parciálně korektní pro libovolnou vstupní podmínku, tedy i pro *true*. To zní vražedně. Avšak vzhledem k tomu, že vyžadujeme jen parciální korektnost, stačí mít jistotu, že algoritmus bude vždy cyklit a nikdy neskončí, např. **while 1 = 1 do od.**

**2.15** Podmínky se doplní následovně (postupujte po krocích shora dolů).

**Funkce** SORTCOMMENTED( $A$ )**vstup:**  $A$  dvouprvkové pole**výstup:** seřazené pole  $A$ 

```

1 if  $A[1] > A[2]$  then
    //  $A[1] = x, A[2] = y, x > y$ 
2    $z \leftarrow A[1]$ 
    //  $A[1] = x, A[2] = y, z = x, x > y$ 
3    $A[1] \leftarrow A[2]$ 
    //  $A[1] = y, A[2] = y, z = x, x > y$ 
4    $A[2] \leftarrow z$ 
    //  $A[1] = y, A[2] = x, z = x, x > y$ 
    //  $A[1] = x, A[2] = y, x \leq y$ 
5 fi
6 return  $A$  //  $[p, q], p \leq q \wedge ((p = x \wedge q = y) \vee (p = y \wedge q = x))$ 

```

**2.17**

- a)  $\varphi(A, n) \equiv n = |A| \wedge n \geq 1, \psi(A, A', n) \equiv |A'| = n \wedge A'[1] \leq \dots \leq A'[n] \wedge A'$  je permutací  $A$ .  
Invariant vnějšího cyklu platící na jeho začátku: Úsek pole  $A[1], \dots, A[i-1]$  je permutací prvních  $i-1$  prvků vstupní posloupnosti a tento úsek je neklesající, tj.  $A[1] \leq \dots \leq A[i-1]$ .  
Invariant vnitřního cyklu platící na jeho začátku:  $\forall k. j \leq k \leq i \implies A[k] \leq x$ .
- b) Invariant platící na konci těla vnějšího cyklu (ještě před dalším zvýšením proměnné  $i$ ):  $A[1] \leq A[2] \leq \dots \leq A[i]$  a současně  $\forall j. i < j \leq n \implies A[i] \leq A[j]$  a současně posloupnost  $A$  je permutací vstupní posloupnosti  $A$ .

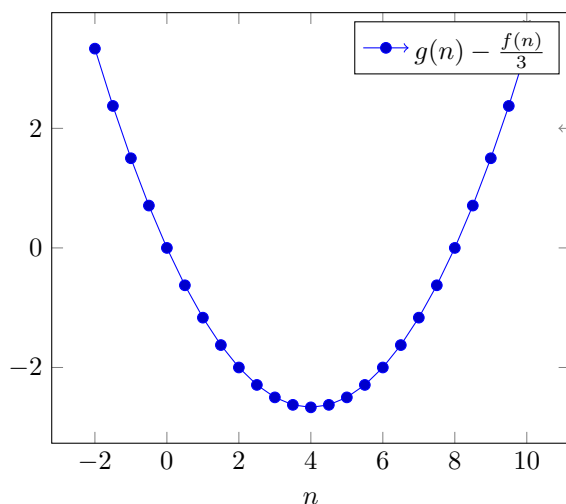
Vztahuje-li se invariant ke konci těla cyklu, je pro důkaz korektnosti důležité, že tělo cyklu bude provedeno aspoň jednou. To je v našem případě zaručeno kladností  $n$  vyplývající ze vstupní podmínky.

Důkaz korektnosti je pak snadný. Po posledním průchodu tělem vnějšího cyklu je hodnota proměnné  $i$  rovna číslu  $n$ . Po dosazení  $n$  za  $i$  v invariantu dostaneme výstupní podmínku.

# Asymptotická notace a složitost algoritmů

## 3.1

- a) Graf funkce  $f$  má průsečíky s osami v bodech  $[0, 5]$  a  $[-10, 0]$ , funkce  $g$  je konvexní parabola s vrcholem v bodě  $[2, 3]$ . Řešením je např. dvojice  $c = 1$  a  $n_0 = 5$ .
- b) Byť je rozdíl funkcí  $f(n) - g(n)$  s rostoucím  $n$  rostoucí, jsou obě v složitostní třídě  $\mathcal{O}(n^2)$ . Pro dokázání  $f \in \mathcal{O}(g)$  je třeba použít  $c > 2$ . Například dvojice  $c = 3$  a  $n_0 = 10$  pro tento důkaz postačuje.



**3.1** Dvojic konstant  $c, n_0$ , které jsou svědky toho, že  $f \in \mathcal{O}(g)$ , resp.  $g \in \Omega(f)$ , je nekonečně mnoho.

## 3.2

1. ano
2. ne (rozhodující člen je  $n^5$  a ten je jistě větší než  $n$ )
3. ano ( $n^{17}$  je větší než  $n^5$ )
4. ano
5. ano (zřejmé z předchozích)
6. ne ( $n^5$  je větší než  $n$ )

## 3.3

- a) Složitost procedury `PRINTER1` je v  $\Theta(1)$ , protože cyklus proběhne vždy 100000krát bez ohledu na velikost  $n$ .
- b) Složitost procedury `PRINTER2` je v  $\Theta(n)$ , protože vnitřní cyklus proběhne vždy pouze dvakrát.
- c) Složitost algoritmu `MAXIMUM` je v  $\mathcal{O}(n)$ . Řádek 1 je proveden v čase  $\mathcal{O}(1)$ . Stejně tak řádky 3 a 4 jsou provedeny v čase  $\mathcal{O}(1)$ . Cyklus (řádky 2–4) se provede  $(n - 1)$ -krát, tedy v čase  $\mathcal{O}(n)$ , protože algoritmus musí projít celé pole  $A$ .
- d) Prvně rozebereme, kolikrát se které řádky volají.  
 Řádek č. 1 je volán jen jednou. V cyklu se v každém průchodu zmenšuje hodnota  $y$  na polovinu, klesá tedy logaritmicky. Podle počtu „instrukcí“ by tedy šlo usoudit, že algoritmus pracuje v čase  $\mathcal{O}(\log y)$ . Uvědomte si ale, že ve skutečnosti aritmetické operace netrvají konstantní čas.

### 3.4

- a) Algoritmus vypočítá mocninu pomocí postupného přinásobování čísla  $base$  k průběžnému výsledku, což vede k lineární složitosti  $\Theta(exp)$ .
- b) Algoritmus má logaritmickou složitost  $\Theta(\log exp)$  díky půlení čísla  $exp$ . Nepřinásobujeme tedy postupně po jednom  $base$ , ale výsledek se po mocninách kumuluje v proměnné  $output$ .

### 3.5 Výsledné seřazení je následující:

$$\begin{aligned}
 &6 \\
 &\log \log n \\
 &\sqrt{\log n} \\
 &\log n \\
 &\log^{14} n \\
 &n = 2^{\log_2 n} \\
 &\Theta(\log(n!)) = \Theta(n \log n) \\
 &\Theta(n^2) = \Theta(n^2 + \log n) \\
 &7n^5 - n^3 + n \\
 &\left(\frac{3}{2}\right)^n \\
 &2^n \\
 &e^n \\
 &n! \\
 &n^n \\
 &2^{2^n}
 \end{aligned}$$

Detailní porovnání asymptotického růstu některých funkcí.

$$\Theta(\log(n!)) = \Theta(n \log n).$$

Součin funkcí v logaritmu lze přepsat na součet logaritmů těchto funkcí. Rozepsáním tedy získáme  $\log(n!) = \log 1 + \log 2 + \dots + \log n$ . To je ohraničeno shora funkcí  $n \log n$ . Je potřeba

určit ještě dolní hranici. Pokud zanedbáme první polovinu sčítanců, zůstane pouze součet  $\log(n!) \geq \log \frac{n}{2} + \log(\frac{n}{2} + 1) + \dots + \log n \geq \log \frac{n}{2} + \log \frac{n}{2} + \dots + \log \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \log \frac{n}{2}$ . Funkce  $\log n!$  tedy může být pouze v rozsahu funkcí  $n \log n$  a  $\frac{n}{2} \log \frac{n}{2}$ , tj.  $\mathcal{O}(\frac{n}{2} \log \frac{n}{2}) \subseteq \mathcal{O}(\log n!) \subseteq \mathcal{O}(n \log n)$ , přičemž obě ohraničující funkce jsou asymptoticky stejné, protože  $\frac{n}{2} \log \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(\log n - \log 2) = \frac{1}{2}(n \log n - n)$ .

Pokud však porovnáváme funkce  $n^n$  a  $n!$  bez aplikace logaritmu, pak se funkce asymptoticky liší o  $\sqrt[n]{n}$ . Zvědavější z vás si mohou vyhledat Stirlingův vzorec (Stirling's approximation), jenž vyjadřuje přesnější odhad funkce faktoriál.

Proč je  $2^{2^n}$  rychlejší než  $n^n$ ?  $n^n \leq 2^{2^n} \iff \log(n^n) \leq \log 2^{2^n} \iff n \cdot \log n \leq 2^n \log 2 = 2^n$ .

**3.6** Důkaz provedeme pomocí matematické indukce. Chceme ukázat, že pro všechna  $n \geq 7$  platí

$$2^{n+1} \leq \frac{3^n}{n}$$

Pro  $n = 7$ :  $2^{n+1} = 2^8 = 256$ ,  $\frac{3^n}{n} = \frac{3^7}{7} = 312$ . Tedy tvrzení platí.

Pro  $n \geq 7$ : Předpokládejme, že  $2^{n+1} \leq \frac{3^n}{n}$  a chceme dokázat  $2^{n+2} \leq \frac{3^{n+1}}{n+1}$ . Z předpokladu dostáváme  $2^{n+2} = 2 \cdot 2^{n+1} \leq 2 \cdot \frac{3^n}{n}$  a potřebujeme ještě ukázat, že  $2 \cdot \frac{3^n}{n} \leq \frac{3^{n+1}}{n+1}$ . Abychom to lépe viděli, nerovnost zjednodušíme, tj. vynásobíme obě strany  $\frac{n(n+1)}{3^n}$ . Dostaneme  $2 \cdot (n+1) \leq 3n$ , což je  $2 \leq n$ , a to pro  $n \geq 7$  platí.

### 3.7

a) Intuitivní algoritmus násobení matic může vypadat následovně:

<b>Procedura</b> MULTIPLYMATRIX( $A, B, n$ )	
<b>vstup:</b>	$A$ je matice $n \times n$ , $B$ je matice $n \times n$
<b>výstup:</b>	matice $C$ rozměrů $n \times n$
<pre> 1  for <math>i \leftarrow 1</math> to <math>n</math> do 2      for <math>j \leftarrow 1</math> to <math>n</math> do 3          <math>C[i, j] \leftarrow 0</math> 4          for <math>k \leftarrow 1</math> to <math>n</math> do 5              <math>C[i, j] \leftarrow C[i, j] + A[i, k] \cdot B[k, j]</math> 6          od 7      od 8  od 9  return <math>C</math> </pre>	

Vstupní a výstupní podmínky jsou:

$\varphi(A, B, n) \equiv A$  je matice rozměrů  $n \times n$  a  $B$  je matice rozměrů  $n \times n$ .

$\psi((A, B, n), C) \equiv C$  je matice rozměrů  $n \times n$  rovnající se násobku matic  $A$  a  $B$ .

Časovou složitost algoritmu můžeme určit ze 3 zanořených cyklů. Jelikož každý z cyklů proběhne  $n$ -krát, ze zanoření cyklů vidíme, že každý běh prvního cyklu vynutí  $n$  běhů druhého cyklu a ten taky vynutí  $n$  běhů třetího cyklu. V součtu máme tedy  $n \cdot n \cdot n$  běhů. Aritmetické operace v cyklech můžeme brát jako operace s konstantní časovou složitostí, což nám ve výsledku dává složitost  $\Theta(n^3)$ .

b) Jelikož algoritmus pro násobení dvou matic velikosti  $n \times n$  musí zpracovat alespoň  $2 \times n^2$  vstupů, je jasné, že algoritmus nikdy nebude lepší než se složitostí  $n^2$ , tudíž násobení matic je v  $\Omega(n^2)$ .



## 3.9

- a) Funkce  $\log n$  je asymptoticky pomalejší než  $\sqrt{n}$ , tj.  $\mathcal{O}(\log n) \subsetneq \mathcal{O}(\sqrt{n})$ . Začneme intuitivním vysvětlením. Asi se shodneme, že  $2^n$  roste rychleji než  $n^2$ . Proto s inverzními funkcemi to bude naopak. Zvládnete exaktní důkaz z definice?
- b)  $\mathcal{O}(2^n) \subsetneq \mathcal{O}(n!) \subsetneq \mathcal{O}(n^n)$ , protože pro  $n > 2$  platí  $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 < 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n < n \cdot n \cdot \dots \cdot n$ . Zvládnete exaktní důkaz, že podmnožiny jsou vlastní?

**3.12** Pomocí matematické indukce ukážeme, že pro všechna  $n \geq 1$  platí

$$\log n \leq n.$$

Pro  $n = 1$ :  $\log n = 0$  a tedy tvrzení platí.

Pro  $n \geq 1$ : Předpokládejme, že  $\log n \leq n$ . Chceme dokázat, že  $\log(n+1) \leq n+1$ .

$$\log(n+1) \leq \log 2n = \log 2 + \log n \leq 1 + n$$

## 3.13

- a) Nejprve odhadneme dobu jedné iterace.

$$i \cdot 2^{36} = 60 \cdot 60 \cdot 24 \text{ s}$$

$$i = \frac{86400}{2^{36}} \text{ s}$$

$$i \approx 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Nyní dobu jedné iterace vydělíme 1000, protože máme 1000krát rychlejší počítač.

$$i' = 1.3 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

$$i' \cdot 2^n = 60 \cdot 60 \cdot 24 \text{ s}$$

$$2^n = \frac{86400 \text{ s}}{1.3 \cdot 10^{-9} \text{ s}}$$

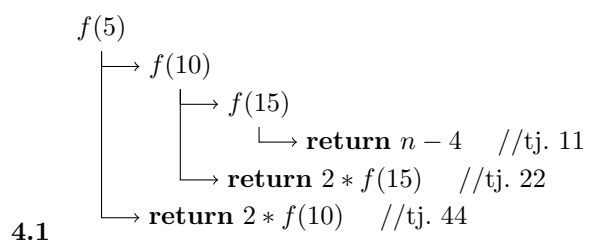
$$n = \left\lceil \log_2 \frac{86400}{1.3 \cdot 10^{-9}} \right\rceil$$

$$n = 45$$

- b) Pro algoritmus se složitostí  $n!$  bychom pro  $n = 12$  zvládli výpočet provést za méně než 3,5 hodiny, zatímco pro  $n = 13$  bychom potřebovali 1,716 dne.

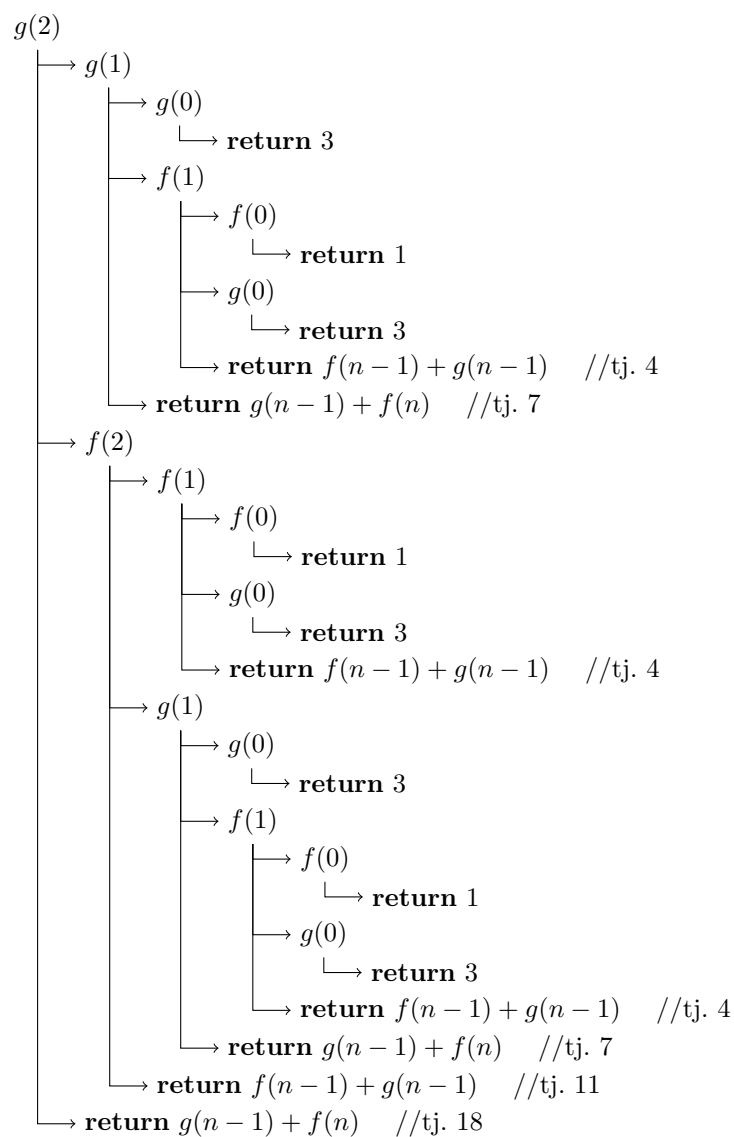
Pro algoritmus se složitostí  $n^n$  bychom pro  $n = 12$  zvládli výpočet provést za téměř 21,5 hodiny, zatímco pro  $n = 13$  by výpočet trval více než 30 dní.

# Rekurze



**4.2** Výpočet je konečný, protože při přímém rekurzivním volání  $g$  (pro  $n > 0$ ) se zmenšuje hodnota o 1 a v nepřímé rekurzi přes  $f$  se (pro  $n > 0$ ) zmenšuje hodnota pro volané  $f$  i  $g$ . Obě funkce jsou pro nezáporná čísla a při rekurzivních voláních vstupy postupně klesají až k explicitně zpracovávané 0.

Strom rekurzivního volání vypadá následovně.



## 4.3

**Procedura** REVERSERECURSIVEINPLACE( $A, from, to$ )**vstup:**  $from, to \in \mathbb{N}$  jsou indexy a  $A$  je řetězec délky alespoň  $to$ **výstup:** řetězec stejný jako  $A$ , ale obrácený na prvcích  $\geq from$  a  $\leq to$ 

```

1 if  $from < to$  then
2   SWAP( $A[from]$ ,  $A[to]$ )
3   REVERSERECURSIVEINPLACE( $A, from + 1, to - 1$ )
4 fi
```

**Funkce** REVERSERECURSIVE( $A, from, to$ )**vstup:**  $from, to \in \mathbb{N}$  jsou indexy a  $A$  je řetězec délky alespoň  $to$ **výstup:** řetězec stejný jako  $A$ , ale obrácený na prvcích  $\geq from$  a  $\leq to$ 

```

1 if  $from < to$  then
2   return  $A[to] + \text{REVERSERECURSIVE}(A, from + 1, to - 1) + A[from]$ 
3 else if  $from = to$  then
4   return  $A[from]$ 
5 else
6   return "" // tj. prázdný řetězec
7 fi
```

## 4.4

- APPLE( $n$ )

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{pro } n = 1 \text{ nebo } 2 \\ T(n-1) + T(n-2) + \mathcal{O}(n) & \text{jinak} \end{cases}$$

- BANANA( $n$ )

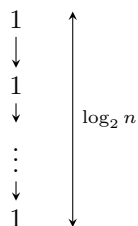
$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{pro } n = 1 \text{ nebo } 2 \\ n * T(n-1) + \mathcal{O}(n) & \text{jinak} \end{cases}$$

- ORANGE( $n$ )

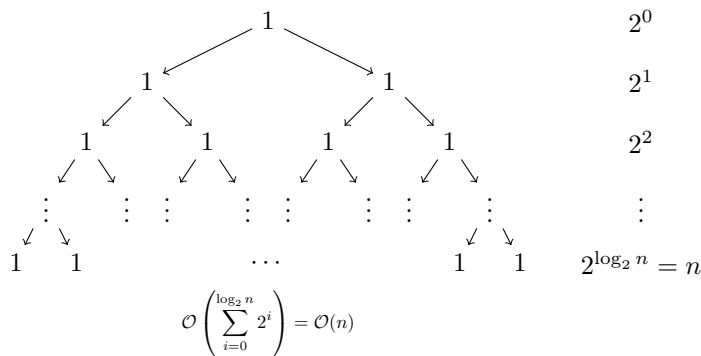
$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{pro } n = 1 \text{ nebo } 2 \\ T(n/2) + (n-1) * T(n-1) + \mathcal{O}(n) & \text{jinak} \end{cases}$$

## 4.5

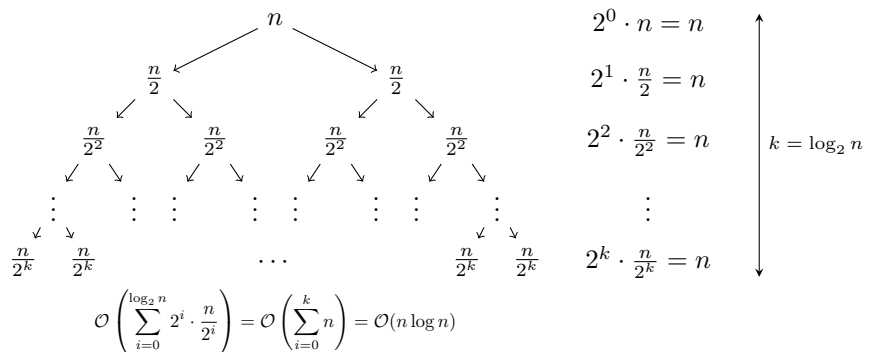
- a) Řešením je  $\mathcal{O}(\log n)$ . Konstanty pro master theorem máme  $a = 1, b = 2, d = 0$ , jedná se tedy o druhý případ, kdy  $a = b^d$ , a proto  $T(n) = \mathcal{O}(n^d \log n) = \mathcal{O}(n^0 \log n) = \mathcal{O}(\log n)$ . Strom rekursivního volání vypadá následovně.



- b) Řešením je  $\mathcal{O}(n)$ . Konstanty pro master theorem máme  $a = 2, b = 2, d = 0$ , jedná se tedy o třetí případ, kdy  $a > b^d$ , a proto  $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) = \mathcal{O}(n^{\log_2 2}) = \mathcal{O}(n^1)$ . Strom rekursivního volání vypadá následovně.

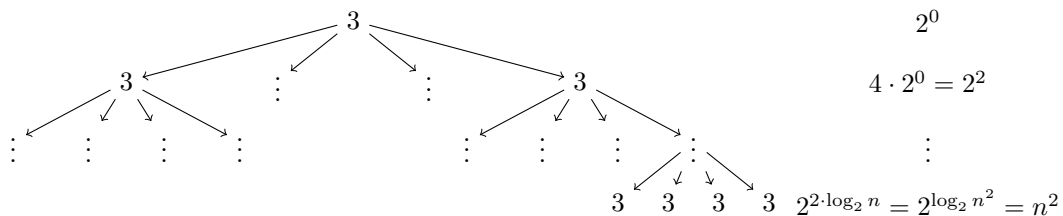


- c) Řešením je  $\mathcal{O}(n \log n)$ . Konstanty pro master theorem máme  $a = 2, b = 2, d = 1$ , jedná se tedy o druhý případ, kdy  $a = b^d$ , a proto  $T(n) = \mathcal{O}(n^d \log n) = \mathcal{O}(n^1 \log n) = \mathcal{O}(n \log n)$ . Strom rekurzivního vo-



lání vypadá následovně.

- d) Řešením je  $\mathcal{O}(n^2)$ . Konstanty pro master theorem máme  $a = 4, b = 2, d = 0$ , jedná se tedy o třetí případ, kdy  $a > b^d$ , a proto  $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a}) = \mathcal{O}(n^{\log_2 4}) = \mathcal{O}(n^2)$ .



**4.6** Algoritmus není konvergentní, pro  $y = x + 1$  cyklí voláním na **5.** řádku. Oprava může vypadat například takto:

**Funkce** MAXIMUM( $x, y, A$ )

**vstup:**  $x$  a  $y$  jsou indexy pole  $A$ , kde  $x \leq y$

**výstup:** maximum z pole  $A$  mezi indexy  $x$  a  $y$

```

1 if  $y - x \leq 1$  then
2   return MAX( $A[x], A[y]$ )
3 else
4    $max_1 \leftarrow$  MAXIMUM( $x, \lfloor (x + y)/2 \rfloor, A$ )
5    $max_2 \leftarrow$  MAXIMUM( $\lfloor (x + y)/2 \rfloor + 1, y, A$ )
6   return MAX( $max_1, max_2$ )
7 fi
```

**Intuitivní zdůvodnění korektnosti:** Potřebujeme zkontrolovat, zdali je algoritmus konvergentní, to znamená, že musíme ověřit, zdali dojde k zastavení rekurze. To je zajištěno podmínkou na řádcích 1 a 2 a postupným sblížováním indexů, se kterými se funkce volá. Záleží tedy jen na tom, zdali kvůli

zaokrouhlení nedojde k opakovanému volání se stejnými argumenty, k čemuž však dojde jedině v případě, že  $x = y - 1$ . V takovém případě se však splní podmínka, která rekursivní zanořování ukončí.

Dalším krokem je ověření, zdali algoritmus počítá, co má. V našem případě by byl problém, kdyby algoritmus přeskočil některé hodnoty v poli. K tomu však nedojde, protože rekurze se volá na interval, který je rozdělen korektně.

**Formálně:** Následující řešení platí i pro  $n$ , které není mocnina 2. Velikost problému je počet vstupů v poli, tedy  $y - x + 1$ . Dokážeme indukcí, že pro  $n = y - x + 1$  vrátí  $\text{MAXIMUM}(x, y, A)$  maximální hodnotu z pole  $A$ . Algoritmus je zjevně korektní pro  $n \leq 2$ . Nyní předpokládejme  $n > 2$  a to, že  $\text{MAXIMUM}(x, y, A)$  vrátí maximální hodnotu v  $A[x, y]$  vždy, když  $y - x + 1 < n$ . Abychom mohli využít indukční předpoklad pro první rekursivní volání, musíme dokázat  $\lfloor (x + y)/2 \rfloor - x + 1 < n$ . Existují dva případy. Když  $y - x + 1$  je sudé, potom  $y - x$  je liché, a tudíž  $y + x$  je liché. Proto

$$\left\lfloor \frac{x + y}{2} \right\rfloor - x + 1 = \frac{x + y - 1}{2} - x + 1 = \frac{y - x + 1}{2} = \frac{n}{2} < n.$$

Nerovnost platí pro  $n > 2$ . Jestli je  $y - x + 1$  liché, potom  $y - x$  je sudé. Pak

$$\left\lfloor \frac{x + y}{2} \right\rfloor - x + 1 = \frac{x + y}{2} - x + 1 = \frac{y - x + 2}{2} = \frac{n + 1}{2} < n.$$

Abychom mohli použít indukční předpoklad na druhé rekursivní volání, musíme dokázat, že  $y - (\lfloor (x + y)/2 \rfloor + 1) + 1 < n$ . Znovu nastávají dva případy. Když  $y - x + 1$  je sudé, pak

$$y - \left( \left\lfloor \frac{x + y}{2} \right\rfloor + 1 \right) + 1 = y - \frac{x + y - 1}{2} = \frac{y - x + 1}{2} = \frac{n}{2} < n.$$

Pokud je  $y - x + 1$  liché, pak

$$y - \left( \left\lfloor \frac{x + y}{2} \right\rfloor + 1 \right) + 1 = y - \frac{x + y}{2} = \frac{y - x + 1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} < n.$$

Funkce  $\text{MAXIMUM}$  rozděluje pole do dvou částí. Dle indukčního předpokladu rekursivní volání korektně najdou maximum v těchto částech. A jelikož funkce vrátí maximum ze dvou maxim, vrátí i korektní výsledek.

**4.7** Budeme si navíc předávat i vypisovaný prefix. Zadání tedy dostaneme jako  $\text{BINPRINT}("", n)$ .

**Procedura**  $\text{BINPRINT}(pref, n)$

```

1 if  $n = 0$  then
2   print  $pref$ 
3 else
4    $\text{BINPRINT}(pref + "0", n - 1)$ 
5    $\text{BINPRINT}(pref + "1", n - 1)$ 
6 fi
```

**4.8** Budeme si navíc předávat i vypisovaný prefix a musíme si dát pozor na vypisování  $+$ . Zadání tedy dostaneme jako  $\text{SUMPRINT}("", n)$ .

**Funkce JOIN(*pref*, *n*)**

```

1 if pref = "" then
2   return n
3 else
4   return pref + "+" + n
5 fi

```

**Procedura SUMPRINT(*pref*, *n*)**

```

1 print JOIN(pref, n)
2 for i ← 1 to n - 1 do
3   SUMPRINT(JOIN(pref, n - i), i)
4 od

```

**4.10** Necht  $T(n)$  je počet porovnání ve funkci  $\text{MAXIMUM}(x, y)$ , kde  $n = y - x + 1$  je délka zpracovávané části pole. Pro  $n = 1$  a  $n = 2$  provádíme jedno porovnání na řádku 1 a druhé ve funkci  $\text{MAX}$  na řádku 2, čili  $T(1) = T(2) = 2$ . Pokud  $n > 2$ , tj.  $y - x \not\leq 1$ , tak provedeme dvě rekurzivní volání, každé na cca poloviční délce pole, a následně jedno porovnání ve funkci  $\text{MAX}$ . Dohromady získáváme rovnici  $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 1$ . Na vyřešení rekurentních rovnic použijeme master theorem pro  $a = 2$ ,  $b = 2$  a  $d = 0$ , tedy  $a > b^d$ . Složitost vyjádřená rekurentní rovnicí bude  $\mathcal{O}(n^{\log_b a}) = \mathcal{O}(n)$ , protože  $\log_2 2 = 1$ .

**4.12** Zmíněný „středoškolský“ algoritmus, který rozkládá obě čísla na prvočinitele a z nich pak vybírá ty společné, má lineární složitost (počtem kroků vzhledem k  $n = \max(a, b)$ ). Euklidův algoritmus patří do  $\mathcal{O}(\log(n))$ . Toto vyjádření složitosti vzhledem k hodnotě  $a$  ne délce vstupu je však velmi zjednodušené.

Pseudokód Euklidova algoritmu:

**Funkce GCD(*a*, *b*)**

**vstup:**  $a, b \in \mathbb{N}$  jsou čísla, pro která hledáme největšího společného dělitele

**výstup:** největší společný dělitel  $a$ ,  $b$

```

1 while b ≠ 0 do
2   t ← b
3   b ← a mod b
4   a ← t
5 od
6 return a

```

Euklidův algoritmus patří mezi iterativní algoritmy.



**Daliborek vzkazuje:** Algoritmus jde napsat i hezčím způsobem (čti funkcionálním způsobem):

```

1 gcd a 0 = a
2 gcd a b = gcd b (a 'mod' b)

```

**4.13**

a) Algoritmus by šel zapsat například takto:

**Procedura RECURSIVEFACT(*n*)**

**vstup:**  $n \in \mathbb{N}$ , jehož faktoriál hledáme

**výstup:**  $n!$

```

1 if n ≤ 1 then
2   return 1
3 fi
4 return RECURSIVEFACT (n - 1) · n

```

- b) Algoritmus by šel zapsat například takto:

<b>Procedura</b> ITERATIVEFACT( $n$ )
<b>vstup:</b> $n \in \mathbb{N}$ , jehož faktoriál hledáme <b>výstup:</b> $n!$ 1 $output \leftarrow 1$ 2 <b>for</b> $i \leftarrow 2$ <b>to</b> $n$ <b>do</b> 3 $output \leftarrow output \cdot i$ 4 <b>od</b> 5 <b>return</b> $output$

- c) V tomto případě velmi záleží na jazyce a překladači, který by neměl být náplní tohoto předmětu. Přesto většinou platí, že rekursivní algoritmy jsou pomalejší, protože každé funkční volání znamená vytvoření nového rámce na zásobníku. To znamená zbytečnou režii s pamětí. Tomuto zpomalení často zabraňují překladače, které rekursivní algoritmy přeloží do iterativní podoby (minimálně u jednodušších programů). Programátor by si toho však měl být vědom a neměl by se vždy na překladač spoléhat. Výhoda rekursivního zápisu je často čitelnost a stručnost, má tedy smysl přemýšlet, který zápis má v dané situaci větší význam.

#### 4.30

- a) Funkce FIBRECURSIVE patří do  $2^{\mathcal{O}(n)}$ . Důkaz:

Označme si časovou složitost funkce zavolané s parametrem  $n$  jako  $T(n)$ . Jelikož v cyklu provádíme 4 aritmetické operace (porovnávání, 2 odečítání a jedno sčítání), lze výslednou časovou složitost zapsat jako

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 4,$$

dále hodnoty  $T(0) = T(1) = 1$ .

Pro zjednodušení také počítejme dolní hranici, tím, že předpokládáme  $T(n-1) \approx T(n-2)$ .

Tedy  $T(n) = 2T(n-2) + 4$ , což můžeme zjednodušit na výraz

$$T(n) = 2^{\frac{n}{2}} \cdot T(0) + (2^{\frac{n}{2}} - 1) \cdot 4.$$

Zde už máme exponenciální člen, který je z asymptotického hlediska převládající.

- b) Funkce FIBITER patří do  $\mathcal{O}(n)$ . V každém průchodu for cyklu se rozdíl  $n - i$  sníží o jedna a když dosáhne nuly, cyklus končí. Operace v cyklu dle zadání považujeme za konstantní.
- c) Funkce FIBCONST žádný cyklus neobsahuje, pouze volá funkce POWER a SQRT při výpočtu mocniny a odmocniny, výsledná časová složitost tedy záleží na časové složitosti těchto funkcí. Pokud si algoritmus naimplementujete, možná budete překvapeni, že není výrazně rychlejší než předchozí iterativní algoritmus. To je dáno prací s typy pro reálná čísla, na nichž jsou operace výrazně pomalejší. Výpočet by mohl být rychlejší až na velmi vysokých hodnotách, pro které už je již kvůli zaokrouhlování mírně nepřesný.

#### 4.32

- a) Algoritmus na základě půlení intervalu nalezne daný prvek v čase  $\mathcal{O}(\log n)$ , kde  $n$  je délka prohledávaného pole.

Intuitivní důkaz: algoritmus končí, když je rozdíl indexů  $l$  a  $r$  roven nule. V každém průchodu cyklu se rozdíl dělí dvěma, v horším případě je vždy zaokrouhlen dolů. Počet těchto dělení vyjádříme pomocí funkce  $\log_2 n$ .



**4.33** Problém můžeme rozdělit na menší podproblémy a následně z jejich řešení zkonstruovat původní řešení. Intuitivně:

1. Vezmeme prvek  $x_i$  a rozhodneme, jestli ho ještě můžeme přidat k vybraným prvkům.
2. Řešíme podproblém na prvcích  $(x_1, \dots, x_{i-1})$  pro oba případy, tedy že jsme  $x_i$  vybrali i nevybrali.
3. Vrátime optimální řešení.

Postup můžeme popsat rekurentní rovnicí, která vrátí optimální řešení následovně:

$$\text{OPT}(i, V) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } i = 0 \\ \text{OPT}(i-1, V) & \text{pokud } i \geq 1 \text{ a } V < v_i \\ \max\{c_i + \text{OPT}(i-1, V - v_i), \text{OPT}(i-1, V)\} & \text{pokud } i \geq 1 \text{ a } V \geq v_i \end{cases}$$

Což dokážeme algoritmicky popsat rekurzí:

<b>Funkce</b> PROBLEMBATOHU( $v, c, V, i$ )	
<b>vstup:</b> pole $v$ obsahující $n$ vah objektů, pole $c$ obsahující $n$ cen objektů, $V$ maximální váha, rozhodujeme se, zdali do batohu vložit objekt s indexem $i \in \mathbb{N}$ <b>výstup:</b> optimální cena objektů v batohu	
1	<b>if</b> $i = 0$ <b>then</b>
2	<b>return</b> 0
3	<b>else if</b> $i \geq 1 \wedge V < v[i]$ <b>then</b>
4	<b>return</b> PROBLEMBATOHU( $v, c, V, i - 1$ )
5	<b>else</b>
6	<b>return</b> $\max(c[i] + \text{PROBLEMBATOHU}(v, c, V - v[i], i - 1), \text{PROBLEMBATOHU}(v, c, V, i - 1))$
7	<b>fi</b>

Prozkoumáním všech možných řešení dostáváme algoritmus o složitosti  $2^{\mathcal{O}(n)}$ .

# Řadicí algoritmy

**5.1** Smyslem je urychlit přístup k datům dané posloupnosti. Například pro možnost využití binárního vyhledávání, které vyžaduje na vstupu seřazené pole.

Aplikace, které provádějí častá vyhledávání, mohou seřazením dat dramaticky urychlit svoji činnost. Je možné ukázat rozdíl ve složitosti (rychlosti) sekvenčního hledání a hledání např. půlením intervalů v seřazeném poli (viz příklad 4.32).

**5.2** Binárně nalezneme  $k$ . Od tohoto výskytu by šlo sekvenčně postupovat doleva, dokud nenarazíme na menší prvek. Takové řešení by však mělo lineární složitost (pro případ posloupnosti stejných čísel).

Správný postup je tedy použití binárního vyhledávání, ale nespokojíme se s pouhým nálezem  $k$ . Naše modifikované binární půlení se zastaví až v případě, že narazí na prvek  $k$ , který je buďto prvním prvkem pole, nebo se před ním nachází menší prvek. V případě, že narazíme na  $k$ , které toto pravidlo nesplňuje, pak pokračujeme ve hledání v intervalu nalevo od zkoumaného prvku.

**5.3** Oproti předchozímu příkladu se řešení liší jen tím, že hledáme prvek na pravé straně od nalezeného  $k$ .

**5.4** Můžeme se opřít o to, že dokážeme řadit v čase  $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ , tudíž vstupní pole nám stačí seřadit a pak v lineárním čase vyházet duplicity jedním během přes seřazené pole. Časová složitost takového algoritmu je  $\mathcal{O}(n \cdot \log(n)) + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ . Pseudokód by mohl vypadat následovně:

**Funkce** ERASEDUPLICATES( $A, n$ )

**vstup:** Pole  $A$  délky  $n$

**výstup:** Pole bez duplicitních prvků

```
1 sort(A) // seřadíme pole A řadicím algoritmem, který pracuje v čase  $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ 
2 index  $\leftarrow$  1
3 for  $i \leftarrow 2$  to  $n$  do
4     if  $A[\text{index}] \neq A[i]$  then
5         index  $\leftarrow$  index + 1
6         SWAP( $A[\text{index}], A[i]$ )
7     fi
8 od
// duplicity zůstanou v poli za indexem index
9 return  $A[1 \dots \text{index}]$ 
```

**5.5** Potřebujeme stabilní řadicí algoritmus. Prvně seřadíme libovolným algoritmem podle jména a pak stabilním řadicím algoritmem podle bydliště. Celková složitost  $\Theta(n \log(n))$ .

Druhá možnost je seřadit lidi podle adresy a pak pro jednotlivé adresy ještě řadit podle jména. Řešení má stejnou asymptotickou složitost a je složitější na správné naprogramování, proto se v databázích běžně používá první přístup.

## 5.6

- INSERTSORT – vezmeme kartu a procházíme karty na ruce tak dlouho, dokud nenajdeme správnou pozici. Zařazením na danou pozici se posunou následující prvky.
- SELECTSORT – trenér nechává postupně předstoupit hráče podle čísel na dresech.
- MERGESORT – paralelizovatelný, každý uspořádá čtvrtinu a ty následně spojuje.
- BUBBLESORT – ideálně paralelní a obousměrný, ale stačí princip porovnávání sousedních dvojic.
- BUCKETSORT
- Prvně seřadíme soubory podle jména libovolným řadicím algoritmem, a potom je seřadíme stabilním řadicím algoritmem podle data změny. Na obojí lze použít MERGESORT.  
Na malé množství souborů by také šlo použít RADIXSORT.

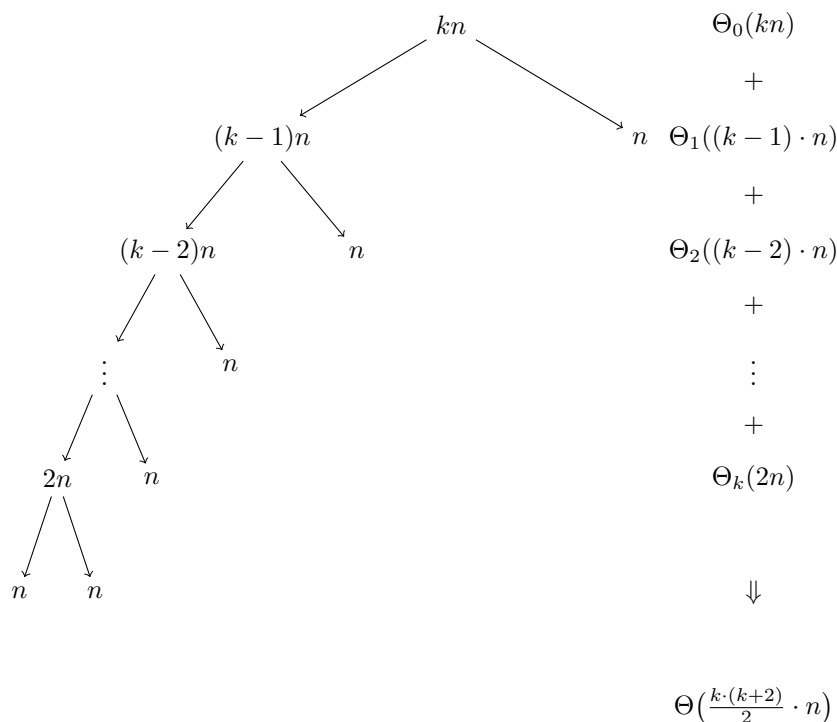
## 5.7

- Funkce MERGE používá pomocné pole *aux*. Do něj nejprve zkopíruje obě části pole *A* a poté z pomocného pole bere postupně nejmenší prvky a ukládá je do původního pole *A*. Pomocné pole může být pro snížení paměťové složitosti globální pro všechna volání funkce MERGE. Pověšměte si, že funkce MERGE zachovává pořadí prvků v poli, jde o předpoklad stability algoritmu MERGESORT.

Funkce MERGE( <i>A</i> , <i>from</i> , <i>mid</i> , <i>to</i> )	
<b>vstup:</b>	Pole <i>A</i> , které obsahuje 2 seřazené posloupnosti. Jedna je v rozsahu $A[\textit{from} \dots \textit{mid}]$ , druhá v $A[\textit{mid} + 1 \dots \textit{to}]$
<b>výstup:</b>	seřazené pole <i>A</i> obsahující prvky z původního pole
<pre> 1  <i>aux</i> ← <i>A</i> // vytvoříme kopii pole <i>A</i> 2  <i>leftIndex</i> ← <i>from</i> // index aktuálního porovnávaného prvku v levém poli 3  <i>rightIndex</i> ← <i>mid</i> + 1 // index aktuálního porovnávaného prvku v pravém poli 4  <b>for</b> <i>k</i> ← <i>from</i> <b>to</b> <i>to</i> <b>do</b> 5      <b>if</b> <i>leftIndex</i> &gt; <i>mid</i> <b>then</b> 6          <i>A</i>[<i>k</i>] ← <i>aux</i>[<i>rightIndex</i>] 7          <i>rightIndex</i> ← <i>rightIndex</i> + 1 8      <b>else if</b> <i>rightIndex</i> &gt; <i>to</i> <b>then</b> 9          <i>A</i>[<i>k</i>] ← <i>aux</i>[<i>leftIndex</i>] 10         <i>leftIndex</i> ← <i>leftIndex</i> + 1 11     <b>else if</b> <i>aux</i>[<i>leftIndex</i>] ≤ <i>aux</i>[<i>rightIndex</i>] <b>then</b> 12         <i>A</i>[<i>k</i>] ← <i>aux</i>[<i>leftIndex</i>] 13         <i>leftIndex</i> ← <i>leftIndex</i> + 1 14     <b>else</b> 15         <i>A</i>[<i>k</i>] ← <i>aux</i>[<i>rightIndex</i>] 16         <i>rightIndex</i> ← <i>rightIndex</i> + 1 17     <b>fi</b> 18 <b>od</b> 19 <b>return</b> <i>A</i> </pre>	

- b) Ano, funkce umí pracovat i s neseřazenými posloupnostmi, ale výsledek spojování neseřazených posloupností nemůže být seřazený. Pokud jsou v jedné posloupnosti 2 prohozené prvky, pak i ve výsledné posloupnosti musí být jejich pořadí špatně, jen mezi ně můžou přibýt další prvky.
- c) Asymptoticky se nezmění, avšak kvůli většímu množství porovnávání se zvětší konstanty funkce. MERGE musí mít vždy alespoň lineární složitost.

**5.8** Složitost zadané posloupnosti volání MERGE je  $\Theta(n \cdot k^2)$ . Důvodem je, že spojujeme po každém volání delší posloupnost, takže při posledních voláních spojujeme posloupnost délky  $n \cdot (k - 1)$  s posloupností délky  $n$ . Tyto poslední volání ve složitosti převažují. Strom rekurzivního volání se délkami posloupností v jednotlivých uzlech vypadá následovně:



Problém lze vyřešit i asymptoticky rychleji. Chceme volat funkci MERGE na co nejmenších posloupnostech, proto chceme spojovat nejdříve dvojice posloupností délky  $n$ . Takto vzniklé posloupnosti chceme spojovat v druhém kroku. Postupně chceme spojovat dvojice stejně dlouhých posloupností. Počet volání MERGE bude stále  $k - 1$ , ale budeme častěji spojovat posloupnosti malé délky. Výsledná složitost je  $\Theta(k \cdot n \cdot \log(k))$ . Strom volání vypadá takto:

109

## 5.11

- a) QUICKSORT je algoritmus typu rozděl a panuj. V první fázi vybereme z posloupnosti pivotu, podle kterého budeme pole dělit na část menších prvků než pivot a část větších prvků, než je pivot. Podrobný popis tohoto rozdělení najdete ve slidech z přednášky.

Po rozdělení následuje rekurzivní volání na podproblémy, tedy zvlášť na podpole menších hodnot než pivot a podpole větších hodnot než pivot.

Třetí část je spojení obou částí pole. Pokud pracujeme v rámci jednoho pole, tak tato fáze odpadá.

QUICKSORT ve variantě z přednášky není stabilní, jelikož při přehození prvků mezi částmi větší a menší než pivot může jeden ze stejných prvků přeskočit jiný.

Procedura QUICKSORT( $A, from, to$ )
<b>vstup:</b> $A$ je pole délky $ to - from  + 1$ <b>výstup:</b> $A'$ je pole délky $ to - from  + 1$ , pro které platí, že pro všechna $i \in \{from, \dots, to\} : A'[i] \leq A'[i + 1]$
1 <b>if</b> $from < to$ <b>then</b> 2 $pivotIndex \leftarrow \text{PARTITION}(A, from, to)$ 3     QUICKSORT( $A, from, pivotIndex - 1$ ) 4     QUICKSORT( $A, pivotIndex + 1, to$ ) 5 <b>fi</b> 6 <b>return</b> $A$

Funkce rozdělení pole může vypadat následovně:

Funkce PARTITION( $A, from, to$ )
<b>vstup:</b> pole $A$ a indexy $from, to$ , budeme zpracovávat $A[from \dots to]$ <b>výstup:</b> pozice $index$ a pole prvků $A$ je přeskádané v úseku mezi indexy $from$ a $to$ tak, že pro všechna $i \in \{from, \dots, index - 1\}$ platí $A[i] \leq A[index]$ a pro všechna $j \in \{index, \dots, to\}$ platí $A[index] \leq A[j]$
1 $pivot \leftarrow A[to]$ 2 $index \leftarrow from - 1$ 3 <b>for</b> $i \leftarrow from$ <b>to</b> $to$ <b>do</b> 4 <b>if</b> $A[i] \leq pivot$ <b>then</b> 4         // prvky $\leq$ pivotu se dávají před pozici $index$ 5 $index \leftarrow index + 1$ 6         swap( $A[index], A[i]$ ) 7 <b>fi</b> 8 <b>od</b> 9 <b>return</b> $index$

- b) Časová složitost algoritmu QUICKSORT se odvíjí od volby pivotu. Pokud volíme za pivotu medián, pak se vždy pole rozdělí na 2 poloviny a celkový počet rekurzivního volání bude  $\log(n)$ . Naopak v případě výběru okrajového prvku (minima nebo maxima) bude počet porovnání  $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ . QUICKSORT tedy patří do  $\mathcal{O}(n^2)$ , avšak u náhodně seřazeného pole je průměrná složitost  $\Theta(n \cdot \log(n))$ .

Algoritmus z přednášky volí za pivotu poslední prvek posloupnosti. To je v pořádku u náhodně uspořádaných posloupností, kde se může medián posloupnosti vyskytovat se stejnou pravděpodobností v celé posloupnosti. Avšak v případě uspořádané (byť jen částečně) posloupnosti budeme vybírat velmi často maximum. To je pro volbu pivotu naprosto nevhodné a časová složitost bude až kvadratická.

Vzhledem k tomu, že v praxi často pracujeme s částečně uspořádanou posloupností, je vhodné vybírat pivota jinak než vybráním posledního členu posloupnosti. Často dosáhneme velmi dobrého výsledku výběrem prvku ze středu posloupnosti.

Existuje algoritmus, který umí vybírat medián v lineárním čase. S jeho použitím pro volbu pivota se QUICKSORT stává algoritmem se složitostí  $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ . Algoritmus se jmenuje MEDIANOFMEDIANS a pro výběr pivota u algoritmu QUICKSORT se nepoužívá z důvodu velkých konstant u časové složitosti.

- c) Algoritmus z přednášky pro pole stejných prvků pracuje v kvadratickém čase. První podpole bude obsahovat všechny prvky až na pivota, takže rekurze se bude volat jen na posloupnost o 1 menší. Opravit tento problém lze vytvářením 3 podpolí, podpole menších hodnot než medián, podpole hodnot stejných jako medián a podpole hodnot větších než medián.
- d) Nejvýraznější optimalizace se týkají výběru pivota, což už jsme rozebrali výše. Další zrychlení lze získat přepsáním z rekurzivní na iterativní podobu. Poslední v praxi používanou optimalizací je uspořádání velmi malých celků jiným řadicím algoritmem – INSERTSORT. Ten má na malých posloupnostech výrazně rychlejší běh než QUICKSORT.

**5.12** Využijeme QUICKSORT. Jako pivot používáme postupně středy intervalu, tedy  $k/2, k/4$  a  $3k/4 \dots$

### 5.13

- a) COUNTINGSORT předpokládá, že vstupní pole obsahuje čísla z intervalu  $\langle 1, \dots, k \rangle$  (pole indexujeme od 1). Algoritmus si spočítá počet prvků, které mají rozdílné klíče, a použitím aritmetiky rozhodne, kde který klíč bude mít svou pozici ve výsledném poli. Jeho časová složitost je lineární v závislosti na počtu prvků a rozdílu mezi nejmenším a největším klíčem. To nám ukazuje, že algoritmus je vhodný jenom v případech, kde variabilita v klíčích není výrazně větší než počet prvků vstupu. COUNTINGSORT je ale používán jako subrutina v jiných řadicích algoritmech jako například radix sort, který se umí vypořádat s většími klíči efektivněji. Složitost algoritmu je  $\Theta(k + n)$  (nejde o řadicí algoritmus založený na porovnávání, tedy na něj neplatí dolní ohraničení složitosti  $\Omega(n \cdot \log(n))$ ) jak bylo dokázáno na přednášce. Algoritmus je stabilní, jelikož zachovává relativní pozici objektů se stejnými klíči. Tato vlastnost je předpokladem i pro aplikaci algoritmu COUNTINGSORT v algoritmu

RADIXSORT. Vzhledem k potřebě pomocného pole není COUNTINGSORT in situ.

Funkce COUNTINGSORT( $A, n, k$ )	
<b>vstup:</b>	pole $A$ délky $n$ s hodnotami z intervalu $\langle 1, \dots, k \rangle$
<b>výstup:</b>	vzestupně seřazené pole $A$ původních prvků
<pre> 1 <b>for</b> <math>i \leftarrow 1</math> <b>to</b> <math>k</math> <b>do</b> 2   <math>count[i] \leftarrow 0</math>; 3 <b>od</b> 4 <b>for</b> <math>i \leftarrow 1</math> <b>to</b> <math>n</math> <b>do</b> 5   <math>count[A[i]] \leftarrow count[A[i]] + 1</math> 6 <b>od</b> 7 <b>for</b> <math>i \leftarrow 2</math> <b>to</b> <math>k</math> <b>do</b> 8   <math>count[i] \leftarrow count[i] + count[i - 1]</math> 9 <b>od</b> 10 <b>for</b> <math>i \leftarrow n</math> <b>downto</b> <math>1</math> <b>do</b> 11   <math>B[count[A[i]]] \leftarrow A[i]</math> 12   <math>count[A[i]] \leftarrow count[A[i]] - 1</math> 13 <b>od</b> 14 <b>return</b> <math>B</math> </pre>	

**5.15** INSERTSORT funguje pro zřetěžený seznam téměř stejně jako na poli. Navíc ušetří počet přesunů v paměti.

Ještě vhodnější je však MERGESORT.

**5.18**

- b) INSERTSORT rozdělí vstupní pole na seřazenou a neseřazenou část. V každém kroku vezmeme první prvek z neseřazené části a zařadíme ho na správné místo v první části posloupnosti. To může být uděláno například tak, že budeme seřazenou posloupnost procházet pozpátku (od nového prvku) a dokud je nový prvek větší, než prvek nalevo od něj, tak je prohodíme.

Ve zmíněné variantě je INSERTSORT stabilní.

INSERTSORT je in situ, jelikož potřebuje jen  $\mathcal{O}(1)$  místa navíc (1 místo pro prohození prvků).

Oproti algoritmu SELECTSORT má INSERTSORT několik výhod. Pro seřazené pole pracuje v čase  $\mathcal{O}(n)$ , je tedy přirozený. Nejvýraznější výhodou je to, že umí řadit posloupnosti, které mu teprve během řazení přicházejí na vstup. Algoritmům s touto vlastností se říká online algoritmy. INSERTSORT může být vhodnou volbou například pro řazení paketů, které může řadit průběžně a nemusí čekat,



až získá celou posloupnost.

Funkce INSERTSORT( $A, n$ )	
<b>vstup:</b>	pole $A$ délky $n$
<b>výstup:</b>	vzestupně seřazené pole $A$ původních prvků
<pre> 1 <b>for</b> <math>i \leftarrow 1</math> <b>to</b> <math>n</math> <b>do</b> 2   <math>j \leftarrow i</math> 3   <math>tmp \leftarrow A[i]</math> 4   <b>while</b> <math>j &gt; 1 \wedge A[j-1] &gt; tmp</math> <b>do</b> 5     <math>A[j] \leftarrow A[j-1]</math> // posune větší prvek doprava 6     <math>j \leftarrow j-1</math> 7   <b>od</b> 8   <math>A[j] \leftarrow tmp</math> // zařadí <math>i</math>-tý prvek na správné místo 9 <b>od</b> 10 <b>return</b> <math>A</math> </pre>	

- d) Ano, stačí přidat tzv. sentinel – hlídač, který je na pozici  $A[0]$  (tedy před vstupním polem) a nabývá hodnoty, která je určitě menší, než všechny prvky posloupnosti. Pak lze z cyklu odstranit podmínku  $j > 1$ .

**5.19** Vzhledem k velikosti objektů v poli se budeme snažit minimalizovat práci s pamětí, tedy řadit objekty řadicím algoritmem, který používá co nejméně swapů a snaží se pracovat jenom ve vstupním poli, tudíž je in situ. Takovým řadicím algoritmem je SELECTSORT, který je in situ a vykoná právě  $n$  swapů.

Oproti předcházejícímu řešení však existuje vzhledem ke kopírování objektů i efektivnější způsob řazení. Nemusíme totiž přesouvat celé objekty v paměti, ale můžeme jednoduše seřadit jenom pole ukazatelů. Vzhledem k tomu, že v paměti už budeme pracovat pouze s ukazateli, které mají minimální velikost, je vhodné je řadit co nejrychlejším algoritmem, třeba pomocí algoritmu QUICKSORT.

## 5.22

- a) BUCKETSORT je řadicí algoritmus, který pro řazení využívá rozdělování vstupního pole klíčů do „příhrádek“. Každou příhrádku pak seřadíme individuálně pomocí jiného řadicího algoritmu, nebo rekurzivním aplikováním bucket sortu. BUCKETSORT můžeme rozdělit do 4 (popřípadě 6) kroků:

1. (pokud není vstup v intervalu  $[0, 1)$ , poděl vstup velikostí maximálního prvku),
2. inicializace příhrádek,
3. rozdělení vstupu do příhrádek,
4. seřazení každé neprázdné příhrádky,
5. spojení příhrádek v pořadí do jednoho výstupu,
6. (pokud vstup nebyl v intervalu  $[0, 1)$ , vrať hodnoty zpět (vynásobením maximálním prvkem)).

Jelikož BUCKETSORT není porovnávací řadicí algoritmus, nemůžeme použít  $\Omega(n \log n)$  jako spodní odhad složitosti. Složitost můžeme odhadnout pomocí počtu příhrádek, na přednášce bylo dokázáno, že příhrádek je průměrně  $\Theta(n)$ . Vzhledem na paměť potřebnou pro příhrádky není algoritmus in

situ.

<b>Funkce</b> BUCKETSORT( $A, n$ )	
<b>vstup:</b>	pole $A$ délky $n$
<b>výstup:</b>	vzestupně seřazené pole $A$ původních prvků
1	$bucket \leftarrow$ pole délky $n$ // indexované od 0
2	<b>for</b> $i \leftarrow 0$ <b>to</b> $n - 1$ <b>do</b>
3	$bucket[i] \leftarrow$ prázdný seznam
4	<b>od</b>
5	<b>for</b> $i \leftarrow 1$ <b>to</b> $n$ <b>do</b>
6	vlož $A[i]$ do seznamu $bucket[\lfloor n \cdot A[i] \rfloor]$
7	<b>od</b>
8	<b>for</b> $i \leftarrow 0$ <b>to</b> $n - 1$ <b>do</b>
9	INSERTSORT ( $bucket[i]$ )
10	<b>od</b>
11	spoj seznamy $bucket[0], \dots, bucket[n - 1]$ do jednoho seznamu

### 5.23

- a) RADIXSORT je vhodný algoritmus pro řazení podle různých klíčů a lexikální řazení řetězců. Položky posloupnosti se neporovnávají jako celek, nýbrž se rozdělí na části a řadí se postupně ve skupinách. Rozlišujeme 2 základní rozdílné přístupy, řazení zprava (most significant digit/bit = MSD) a zleva (least significant digit/bit = LSD). Řazení zprava se hodí pro lexikografické řazení (vezmi slova začínající na A a seřaď je rekurzivně, pak slova na  $B \cdot \dots$ ), zleva se jedná o stabilní řazení. Často se používá v kombinaci s jiným stabilním řadícím algoritmem, například COUNTINGSORT, alternativně se volá rekurzivně.

### 5.24

- a) SELECTSORT řadí pole vybíráním maxima (popřípadě minima). Pole se projde  $n$ -krát, přičemž při každém průchodu vyhledáme maximum ze zatím neuspořádané části posloupnosti. Toto maximum prohodíme s posledním prvkem neuspořádané části.

SELECTSORT není stabilní, protože při prohození nalezeného maxima s aktuálním nejpravějším prvkem měníme pořadí tohoto prvku. Nicméně toto řešení je in situ. Za cenu větší prostorové složitosti však lze SELECTSORT napsat stabilně.

Časová složitost algoritmu SELECTSORT je kvadratická, odvození jste měli na druhém cvičení.

Procedura SELECTSORT( $A, n$ )
<b>vstup:</b> pole $A$ délky $n$ <b>výstup:</b> vzestupně seřazené pole $A'$ původních prvků 1 <b>for</b> $i \leftarrow n$ <b>downto</b> 2 <b>do</b> 2 $j \leftarrow \text{MAXIMUM}(A, i)$ 3     swap( $A[i], A[j]$ ) // přehodí prvky 4 <b>od</b> 5 <b>return</b> $A$

Funkce MAXIMUM( $A, n$ )
<b>vstup:</b> $A$ je pole a $n$ je počet prvků v poli <b>výstup:</b> maximum z prvních $n$ prvků pole $A$ 1 $max = A[1]$ 2 <b>for</b> $i \leftarrow 2$ <b>to</b> $n$ <b>do</b> 3 <b>if</b> $A[i] > max$ <b>then</b> 4 $max \leftarrow A[i]$ 5 <b>fi</b> 6 <b>od</b> 7 <b>return</b> $max$

## 5.25

- a) Algoritmus BUBBLESORT, neboli bublinkové řazení, je založen na kvadratickém počtu průchodů posloupností, přičemž při každém průchodu porovnává sousední prvky a pokud je prvek napravo menší než prvek nalevo, tak je prohodí. Tímto způsobem se v každém průchodu největší prvek posouvá napravo, zatímco menší se posunou o 1 doleva. Největší hodnoty tedy "probublávají" na konec posloupnosti, z čehož plyne jméno BUBBLESORT.

BUBBLESORT je stabilní a in situ a má kvadratickou časovou složitost. Oproti algoritmu INSERTSORT má však výrazně horší skutečnou časovou složitost, oproti algoritmu SELECTSORT zase výrazně více swapů. I jeho intuitivnost, pro kterou se někdy učí, je zpochybnitelná. Jedinou možnou výhodou zůstává paralelizovatelnost porovnávání sousedních prvků. Nicméně pokud hledáme paralelizovatelné řadící algoritmy, je snazší vybírat mezi algoritmy typu rozděl a panuj.

Funkce BUBBLESORT( $A, n$ )
<b>vstup:</b> pole $A$ délky $n$ <b>výstup:</b> vzestupně seřazené pole $A$ původních prvků 1 <b>for</b> $i \leftarrow 0$ <b>to</b> $n$ <b>do</b> 2 <b>for</b> $j \leftarrow 0$ <b>to</b> $n - i - 1$ <b>do</b> 3 <b>if</b> $A[j] > A[j + 1]$ <b>then</b> 4             swap( $A[j], A[j + 1]$ ) // přehodí prvky 5 <b>fi</b> 6 <b>od</b> 7 <b>od</b> 8 <b>return</b> $A$

- b)

**5.26** Řešení seřazená postupně podle jednoduchosti:

- a) Triviální řešení je lineárně vyhledat každý prvek z  $A$  v poli  $B$ , tj.  $\mathcal{O}(m \cdot n)$ .
- b) Pole  $B$  je seřazené, a proto můžeme vyhledávat binárně, tj.  $\mathcal{O}(n \cdot \log(m))$ .
- c) Pokud uvážíme, které pole je kratší, složitost bude menší z hodnot  $\mathcal{O}(n \cdot \log(m))$  a  $\mathcal{O}(m \cdot \log(n))$ .
- d) V případě přibližně stejně velkých polí můžeme použít MERGE, tj.  $\mathcal{O}(m + n)$ .

**5.27** Složitost algoritmu bude  $\mathcal{O}(n + l)$ .

**5.28** Složitost algoritmu bude  $\mathcal{O}(n \cdot k)$  – stačí spočítat počet inverzí.

# Halda a prioritní fronta

## 6.1

- a) není úplný strom, obsahuje neuspořádanou větev 15, 12, 3, 5 a není nalevo zarovnaná
- b) je maximová halda
- c) není, obsahuje neuspořádanou větev 10, 8, 9 a uzel 7 obsahuje 3 listy
- d) není úplný strom
- e) není nalevo zarovnaná
- f) je minimová halda

**6.2** Možností je 8. Strom má stále stejnou strukturu, je to úplný binární strom (mimo spodní vrstvu s listy zarovnanými doleva). V kořeni je vždy 5. V levém synovi kořene je buď 4 nebo 3. Když 4, tak zbývající čísla mohou být libovoně (6 možností). Když 3, tak 4 musí být sourozenec (2 možnosti pro umístění 1 a 2).

## 6.3

- a) Bude to úplný strom hloubky  $h$ . Víme, že počet prvků v každé vrstvě je dvakrát větší než v předcházející vrstvě. Strom hloubky  $h$  má  $h + 1$  vrstev, tudíž počet uzlů je  $n_{max} = 2^{h+1} - 1$ .
- b) Aby měla halda hloubku  $h$ , musí mít  $h$  pater, přičemž z definice haldy víme, že poslední patro nemusí být plné. Aby byl počet prvků minimální, poslední patro bude obsahovat 1 prvek a zbylých  $h - 1$  pater budou plné. Z předchozího dostáváme, že  $n_{min} = (2^h - 1) + 1 = 2^h$ .

## 6.4

- a)  $A = [15, 14, 13, 12, 7, 11, 8, 4, 9, 6, 5, 1, 10, 3, 2]$
- b) Ano.
- c) Ne.

**6.5** Podle vlastnosti haldy víme, že si uchovává uspořádání na svých prvcích. Tudíž nejmenší prvky v maximové haldě se nacházejí v listech stromu.

**6.6** Je potřeba si uvědomit, že halda je reprezentovaná polem. Proto není potřeba kontrolovat, že je to úplný binární strom. Je ale potřeba zkontrolovat vlastnost haldy, kde je komplikovanější (než při naivním uvažování nad stromy) najít, na jakých pozicích bude při reprezentaci binární haldy polem rodič prvku, pravý a levý potomek.

Můžeme psát následující funkce pro získání rodiče a potomků v haldě:

**Funkce** PARENT( $i$ )

**vstup:** index uzlu  $i$

**výstup:** index rodiče uzlu s indexem  $i$

1 **return**  $\lfloor i/2 \rfloor$

**Funkce** LEFT( $i$ )

**vstup:** index uzlu  $i$

**výstup:** index levého potomka uzlu s indexem  $i$

1 **return**  $2i$

**Funkce** RIGHT( $i$ )

**vstup:** index uzlu  $i$

**výstup:** index pravého potomka uzlu s indexem  $i$

1 **return**  $2i + 1$

Vlastnost haldy ověřujeme takto:

**Funkce** ISMAXBINHEAP( $A, n$ )

**vstup:** pole  $A$  délky  $n$

**výstup:** *true* pokud pole  $A$  korektní maximová binární halda, jinak *false*

1 **for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $\lfloor n/2 \rfloor$  **do**

2     **if**  $(\text{LEFT}(i) \leq n \wedge A[\text{LEFT}(i)] > A[i]) \vee (\text{RIGHT}(i) \leq n \wedge A[\text{RIGHT}(i)] > A[i])$  **then**

3         **return** *false*

4     **fi**

5 **od**

6 **return** *true*

Připomínáme, že v pseudokódu indexujeme pole od 1 do  $n$ . Při implementaci buď funkce přepočítáme, nebo můžeme prvek na pozici nula ignorovat.

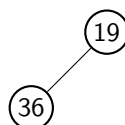
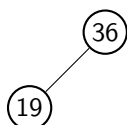
## 6.7

1. INSERT( $H, 36$ )

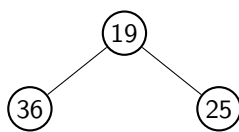
a)



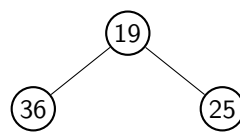
2. INSERT( $H, 19$ )



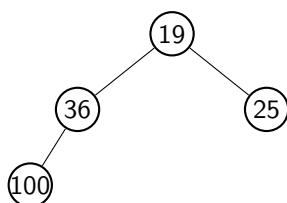
1. vložení    2. po kontrole zdola nahoru

3.  $\text{INSERT}(H, 25)$ 


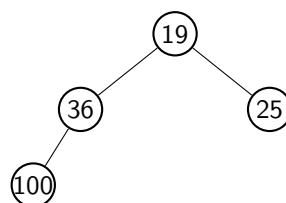
1. vložení



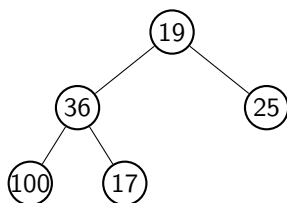
2. po kontrole zdola nahoru

 4.  $\text{INSERT}(H, 100)$ 


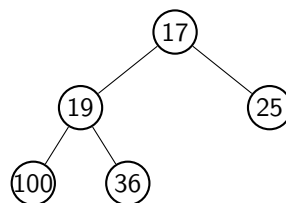
1. vložení



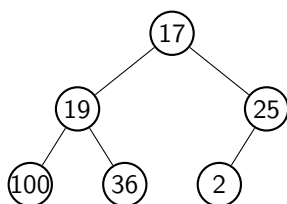
2. po kontrole zdola nahoru

 5.  $\text{INSERT}(H, 17)$ 


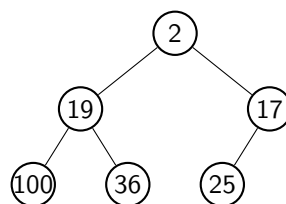
1. vložení



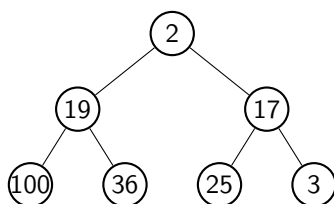
2. po kontrole zdola nahoru

 6.  $\text{INSERT}(H, 2)$ 


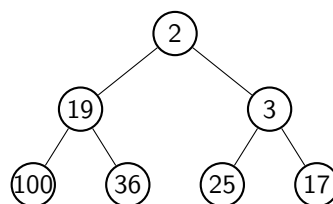
1. vložení



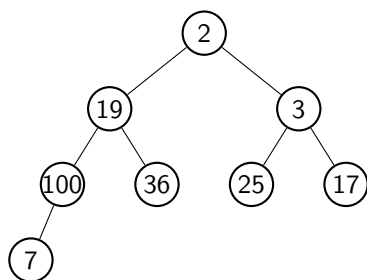
2. po kontrole zdola nahoru

 7.  $\text{INSERT}(H, 3)$ 


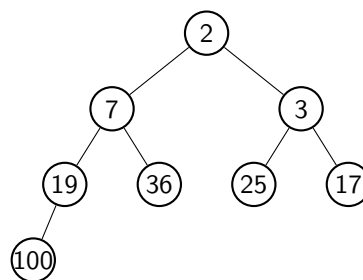
1. vložení



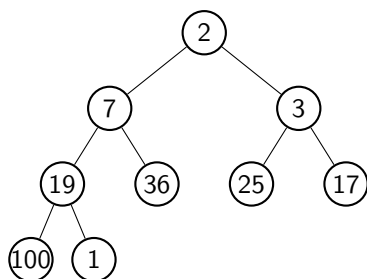
2. po kontrole zdola nahoru

8.  $\text{INSERT}(H, 7)$ 


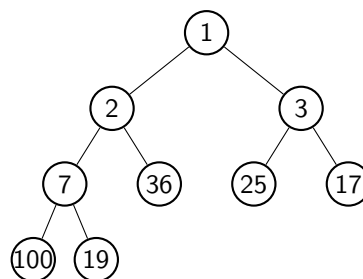
1. vložení



2. po kontrole zdola nahoru

 9.  $\text{INSERT}(H, 1)$ 


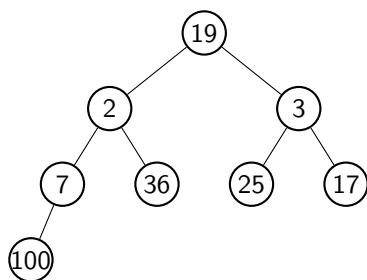
1. vložení



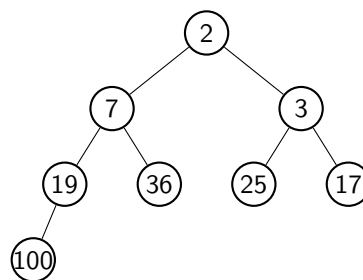
2. po kontrole zdola nahoru

 1.  $\text{EXTRACTMIN}(H)$ 

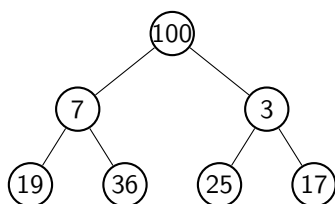
b)



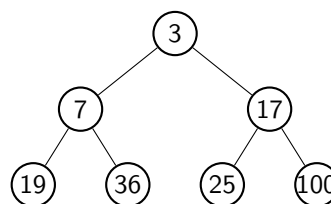
1. odstranění kořene



2. po kontrole shora dolu

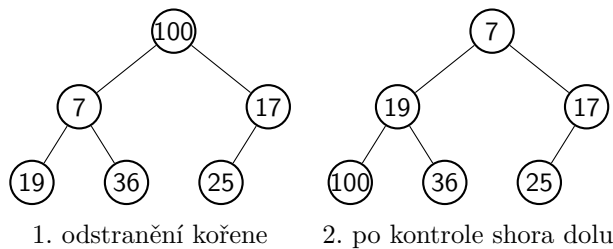
 2.  $\text{EXTRACTMIN}(H)$ 


1. odstranění kořene



2. po kontrole shora dolu



3. EXTRACTMIN( $H$ )

## 6.8

a) Možné řešení může vypadat následovně:

<b>Procedura</b> HEAPIFY( $h, i$ )	
<b>vstup:</b> pole $h$ reprezentující haldu a index $i$ uzlu, kterého podstrom se má kontrolovat	
<i>// následujících 7 řádků pouze hledá index nejmenší hodnoty z uzlu <math>i</math> a jeho potomků</i>	
1	$smallest \leftarrow i$
2	<b>if</b> LEFT( $i$ ) $\leq h.size \wedge h[LEFT(i)] < h[i]$ <b>then</b>
3	$smallest \leftarrow LEFT(i)$
4	<b>fi</b>
5	<b>if</b> RIGHT( $i$ ) $\leq h.size \wedge h[RIGHT(i)] < h[smallest]$ <b>then</b>
6	$smallest \leftarrow RIGHT(i)$
7	<b>fi</b>
<i>// smallest je index minima, pokud je to index uzlu <math>i</math>, ukonči rekursi</i>	
8	<b>if</b> $smallest \neq i$ <b>then</b>
9	SWAP( $h[i], h[smallest]$ )
10	HEAPIFY( $h, smallest$ )
11	<b>fi</b>

Procedura HEAPIFY nám zajišťuje dodržení základní vlastnosti haldy. Musíme vybrat nejmenší z uzlů  $i$ , LEFT( $i$ ) a RIGHT( $i$ ). Pokud je nejmenší uzel v některém z potomků, pak daného potomka s uzlem  $i$  prohodíme a následně provedeme kontrolu na potomku. Toto rekurzivní volání nám zaručuje, že se opraví libovolná nově vzniklá dvojice porušující pravidlo haldy. Operace proběhne v logaritmickém čase, jelikož maximální počet kroků je délka dané větve. Této proceduře se někdy říká top-down check.

b) Možné řešení může vypadat následovně:

<b>Procedura</b> BUILDHEAP( $A, n$ )	
<b>vstup:</b> pole $A$ délky $n$	
1	<b>for</b> $i \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$ <b>downto</b> 1 <b>do</b>
2	HEAPIFY( $A, i$ )
3	<b>od</b>

Intuitivní postup, jak z pole vytvořit haldu, by bylo postupné vkládání prvků od začátku pole a stavění haldy „shora“. Tento postup by měl časovou složitost  $n \cdot \log(n)$ , jelikož bychom museli  $n$ -krát vložit prvek do haldy se složitostí  $\log(n)$ .

Algoritmus BUILDHEAP buduje haldu „zdola nahoru“. Tento algoritmus prvně prohlásí dolních  $\lfloor n/2 \rfloor$  uzlů za korektní jednoprvkové haldy. V dalším kroku je začne spojovat přes uzly v předposledním patře, přičemž vždy provede kontrolu a opravu procedurou HEAPIFY.

Časová složitost je lineární, což se zdá možná trochu překvapivé (co se změnilo oproti intuitivnějšímu algoritmu?).

Nechť  $n = 2^{h+1} - 1$ , kde  $h$  je hloubka haldy, předpokládáme tedy plně zaplněnou haldu. Na nejspodnější patro se HEAPIFY nevolá, cena je tedy 0. Na předposledním patře je cena HEAPIFY pro jeden uzel 1, uzlů je  $2^h$ , celková cena pro patro je  $2^h$ , na vyšších patrech je cena vždy počet uzlů krát vzdálenost k listům, tedy  $2^{h-k+1} \cdot k$ . Celková složitost je dána součtem složitostí jednotlivých pater, tedy

$$T(n) = \sum_{k=0}^{h+1} k \cdot 2^{h+1-k} = \sum_{k=0}^{h+1} k \cdot \frac{2^{h+1}}{2^k} = 2^{h+1} \sum_{k=0}^{h+1} \frac{k}{2^k}.$$

Součet sumy  $\sum_{k=0}^{h+1} \frac{k}{2^k}$  jde limitně k 2 (je to harmonická řada, kterou znáte z předášky), celková složitost tedy je  $2^{h+1+1} = 2n + 2 \in \Theta(n)$ .

- c) Uvědomte si, že potřebujeme vkládat na konec pole. To ve stromové struktuře jde velmi obtížně. V důsledku by se časová složitost nezměnila, ale implementace by byla náročnější.

## 6.9

- a) Efektivnost jednotlivých operací na prioritní frontě reprezentované různými datovými strukturami znázorňuje následující tabulka:

	<i>insert</i>	<i>remove</i>	<i>find</i> <i>maximum</i>	<i>remove</i> <i>maximum</i>	<i>change</i> <i>priority</i>	<i>join</i>
maximová halda	$\log(N)$	$\log(N)$	1	$\log(N)$	$\log(N)$	$N$
minimová halda	$\log(N)$	$\log(N)$	$N$	$N$	$\log(N)$	$N$
seřazené pole	$N$	$N$	1	1	$N$	$N$
seřazený seznam	$N$	1	1	1	$N$	$N$
neseřazené pole	1	1	$N$	$N$	1	$N$
neseřazený seznam	1	1	$N$	$N$	1	1

Za detailnější zmínku stojí join na haldách, který si nelze představovat na stromech. Haldy v implementaci polem musíme do sebe nakopírovat. Uvědomte si, kde v poli jsou umístěny prvky jednotlivých podstromů. K remove v neseřazeném poli dodejme, že nemusíme překopírovávat zbytek pole, stačí umazaný prvek nahradit posledním prvkem pole.

- b) Pro zadanou aplikaci stačí, aby byla prioritní fronta implementována datovou strukturou se složitostí FINDMAXIMUM v  $\mathcal{O}(1)$ . To jsou všechny seřazené posloupnosti a halda.
- c) Z porovnání datových struktur je seřazený seznam efektivnější v případě, že se ze struktury často odebírají prvky.

**6.10** Řešení může vypadat tak, že si udržujeme paralelně dvě haldy – jednu minimovou a druhou maximovou. Při vkládání vložíme prvek do obou hald. Pro případ mazání si musíme s každým prvkem pamatovat referenci na tentýž prvek v druhé haldě. Pak při mazání odstraníme prvek z obou hald za využití reference.

## 6.11

- a) Prvek najdeme pomocí  $(k - 1)$ -krát zavolané operace EXTRACTMIN. To nám přesune hledaný prvek na vrchol haldy. Odstraněné prvky můžeme dočasně uchovávat v jiné datové struktuře a po nalezení  $k$ -tého prvku je znovu do haldy vložit, což nám složitost nepokazí (provedeme  $k$  vložení). Celková složitost tedy bude  $\mathcal{O}(k \cdot \log(n))$ .

## 6.12

Procedura HEAPSORT( $A, n$ )	
<b>vstup:</b> pole $A$ délky $n$	
<b>výstup:</b> vzestupně seřazené pole $A$ původních prvků	
a)	<pre> 1 BUILDHEAP(<math>A, n</math>) 2 <math>A.heapsize \leftarrow n</math> 3 <b>for</b> <math>i \leftarrow n</math> <b>downto</b> 2 <b>do</b> 4     SWAP(<math>A[1], A[i]</math>) 5     <math>A.heapsize \leftarrow A.heapsize - 1</math> 6     HEAPIFY(<math>A, 1</math>) 7 <b>od</b></pre>

- b) HEAPSORT má časovou složitost  $n \cdot \log(n)$ . V lineárním čase vybuduje maximovou haldu pomocí BUILDHEAP, pak vždy prohodí kořen s posledním uzlem haldy (kořen je maximum, takže se zařadí na správné místo) a následně v logaritmickém čase haldu opraví pomocí kontroly shora dolů. Tato časová složitost vede ke srovnání s algoritmy MERGESORT a QUICKSORT.

HEAPSORT je narozdíl od algoritmu MERGESORT in situ.

Díky nulové extrasekvenční složitosti se HEAPSORT hodí do slabších počítačů. Dříve fungoval rychleji než MERGESORT, ale díky rychlejší paměťové hierarchii dnešních PC už převládá lepší časová složitost algoritmu MERGESORT (MERGESORT a HEAPSORT se liší jen v konstantách). MERGESORT je navíc snadno paralelizovatelný.

- c) Neří. Protipříklad můžeme být například pole obsahující dvě jedničky (jejich pořadí se změní).

## 6.13

- a) Procedura vrátí klíč v kořeni haldy. Tedy operace má konstantní časovou složitost.

Procedura MINIMUM( $h$ )	
<b>vstup:</b> halda reprezentovaná polem $h$	
<b>výstup:</b> minimální hodnota v haldě $h$	
1	<b>return</b> $h[1]$

b) Možné řešení může vypadat následovně:

<b>Procedura</b> DECREASEKEY( $h, i, key$ )
<b>vstup:</b> pole $h$ reprezentující haldu, $key$ reprezentující vkládanou hodnotu na pozici $i$ <b>1 if</b> $key > h[i]$ <b>then</b> <b>2     return</b> nová hodnota je větší než vkládaná <b>3 fi</b> <b>4</b> $h[i] \leftarrow key$ <b>5 while</b> $i > 1 \wedge h[\text{PARENT}(i)] > h[i]$ <b>do</b> <b>6     SWAP</b> ( $h[i], h[\text{PARENT}(i)]$ ) <b>7     <math>i \leftarrow \text{PARENT}(i)</math></b> <b>8 od</b>

Pokud snižujeme hodnotu nějakého uzlu, musíme následně provést kontrolu od tohoto prvku směrem nahoru, abychom mu dali možnost „vybublat“ až na místo kořene, pokud byla uzlu přiřazena hodnota menší než kořen. Kontrolujeme, zdali není hodnota v uzlu menší než rodič uzlu. Pokud je, pak je prohodíme a rekurzivně voláme DECREASEKEY (v pseudokódu výše je rekurze převedena na iteraci). Maximální počet volání funkce je  $\log(n)$ , což je maximální délka větve.

Této proceduře se také někdy říká bottom-up check.

c) Možné řešení může vypadat následovně:

<b>Procedura</b> INSERT( $h, key$ )
<b>vstup:</b> pole $h$ reprezentující haldu, $key$ reprezentující vkládanou hodnotu <b>1</b> $h.size \leftarrow h.size + 1$ <b>2</b> $h[h.size] \leftarrow \infty$ <b>3</b> DECREASEKEY( $h, h.size, key$ )

Do haldy vždy vkládáme na první prázdnou pozici, tedy za poslední prvek v poli, kterým haldu reprezentujeme. Vložíme prvek a provedeme kontrolu od tohoto prvku směrem nahoru. Abychom využili už existující kód, tak můžeme vložit klíči  $\infty$  a spustit na daný prvek proceduru DECREASEKEY.

d) Možné řešení může vypadat následovně:

<b>Procedura</b> EXTRACTMIN( $h$ )
<b>vstup:</b> pole $h$ reprezentující haldu <b>výstup:</b> minimum (tedy bývalý kořen) haldy <b>1 if</b> $h.size < 1$ <b>then</b> <b>2     return</b> prázdná halda <b>3 fi</b> <b>4</b> $min \leftarrow h[1]$ <b>5</b> $h[1] \leftarrow h[h.size]$ <b>6</b> $h.size \leftarrow h.size - 1$ <b>7</b> HEAPIFY( $h, 1$ ) <b>8 return</b> $min$

Pokud bychom měli odstranit nějaký uzel haldy, pak na jeho místo dáváme vždy poslední uzel, aby byla halda stále zarovnaná. Pokud odstraňujeme minimum (což potřebujeme například pro HEAPSORT), pak po vložení posledního prvku musíme provést kontrolu shora dolů, tedy HEAPIFY.

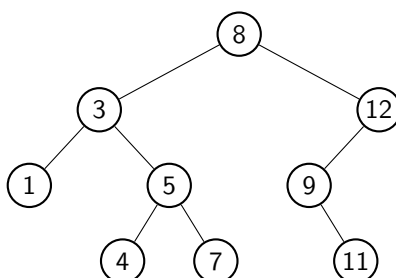
- a) Provedeme  $n$  vložení prvku do haldy. Protože halda bude na konci o  $n$  prvků větší, je složitost každého vložení v  $\mathcal{O}(\log(|H| + n))$ .
- b) Vezmeme prvky pole  $A$  a haldy  $H$  a vytvoříme z nich pomocí BUILDHEAP novou haldu.

**6.19** Změnu haldy lze nejsnáze provést vytvořením nové haldy. Pomocí BUILDHEAP to lze udělat v lineárním čase (lépe to nejde).

# Binární vyhledávací stromy

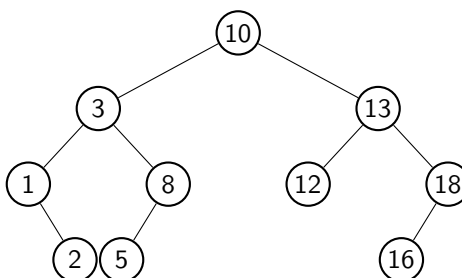
## 7.1

- a) Tento binární strom obsahuje uzel s klíčem 8 na levé straně od kořenu s klíčem 7. Nejsnazší opravou je tedy prohození těchto dvou klíčů.

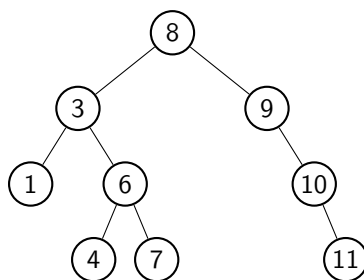


- b) Jedná se o korektní BVS.
- c) Jedná se o korektní BVS.
- d) Tento strom porušuje celou řadu pravidel. Nejzřetelnější je, že se nejedná o binární, ale ternární strom. Další chybou je špatná pozice uzlů s klíči 5, 12 a 16. Díky více chybám existuje více možností opravení chyb.

V levém podstromu by bylo vhodné najít jiný kořen. Ideální je medián, aby byl strom alespoň trochu vyvážený. Proto zvolíme za kořen číslo 3. 2 zavěsíme za uzel 1, dvojici uzlů 8 - 5 můžeme nechat, ale musíme 5 zavěsit jako levého potomka. Tím je levý podstrom vyřešen. V pravém podstromu musíme 12 zavěsit doleva pod 13 a uzel 16 přesuneme na místo levého potomka pod 18.



- e) Zde je jen uzel s klíčem 11 zavěšen na špatné straně stromu. Stačí jej přesunout na pravou stranu a získáváme BVS.



f) Jedná se o korektní BVS.

## 7.2

a) 15

b) *nil*

c) *Node(11)*

d) 19

**7.3** Výstupní sekvence průchodu preorder obsahuje informaci o struktuře stromu. Toho lze s výhodou využít pro snadné kopírování stromu, kdy stačí v tomto pořadí prvky vložit do nového BVS.

Inorder výpis bude vždy vzestupně seřazená posloupnost, nezáleží na „tvaru stromu“. Můžeme ho použít například k výpisu seřazené posloupnosti, nebo ke kontrole validity stromu.

Postorder průchod je vhodný například jako pořadí pro mazání stromu. Jelikož se prochází strom od listů ke kořeni, máme zaručeno, že vždy budeme umazávat právě listy.

Průchod stromem preorder v rekurzivní podobě:

**Procedura** PREORDERRECURSIVE(*root*)

**vstup:** *root* – kořen stromu/podstromu

```

1 if root = nil then
2   return
3 fi
4 vypiš root.key
5 PREORDERRECURSIVE(root.left)
6 PREORDERRECURSIVE(root.right)
  
```

Průchod stromem inorder v rekurzivní podobě:

**Procedura** INORDERRECURSIVE(*root*)

**vstup:** *root* – kořen stromu/podstromu

```

1 if root = nil then
2   return
3 fi
4 INORDERRECURSIVE(root.left)
5 vypiš root.key
6 INORDERRECURSIVE(root.right)
  
```

Průchod stromem postorder v rekurzivní podobě:

**Procedura** POSTORDERRECURSIVE(*root*)

**vstup:** *root* – kořen stromu/podstromu

```

1 if root = nil then
2   return
3 fi
4 POSTORDERRECURSIVE(root.left)
5 POSTORDERRECURSIVE(root.right)
6 vypiš root.key
```

Pro zajímavost průchod stromem preorder v iterativní podobě:

**Procedura** PREORDERITERATIVE(*root*)

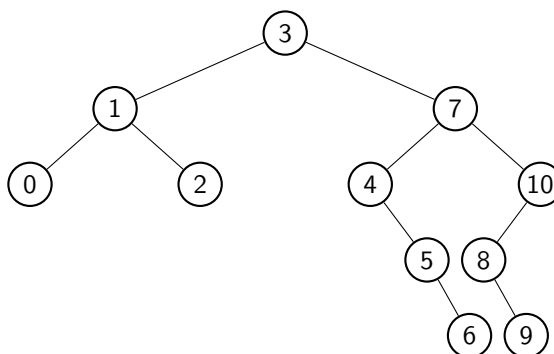
**vstup:** *root* – kořen stromu/podstromu

```

1 stack ← prázdný zásobník
2 PUSH(stack, root)
3 while stack není prázdný do
4   root ← POP(stack)
5   vypiš root.key
6   if root.right ≠ nil then
7     PUSH(stack, root.right)
8   fi
9   if root.left ≠ nil then
10    PUSH(stack, root.left)
11  fi
12 od
```

## 7.4

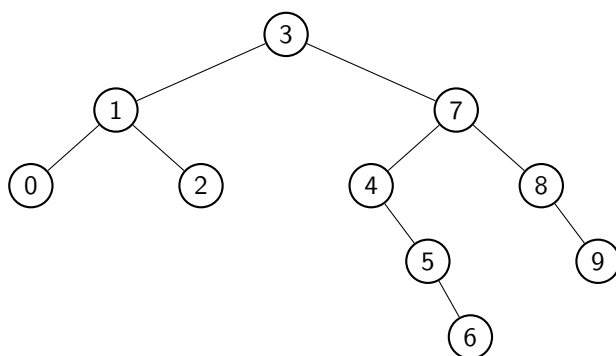
- a) Pro ověření vašeho řešení můžete použít [online nástroj](#). Výsledný strom vypadá následovně:



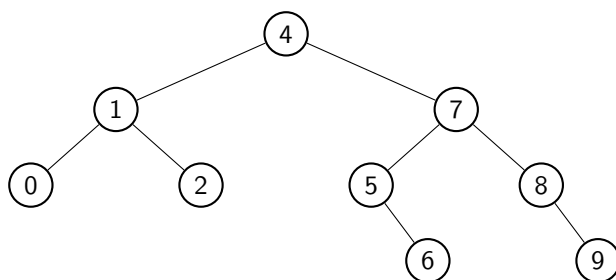
- b) Minimum je vždy v nelevějším uzlu, musíme tedy postupovat tak dlouho doleva, dokud to jde, což nám dává uzel s klíčem 0. Obdobně funguje funkce maximum, která najde nejpravější uzel s klíčem 10.
- c) Pro ověření vašeho řešení můžete použít [online nástroj](#). (Pozor nástroj nefunguje přesně podle přednáškové implementace)



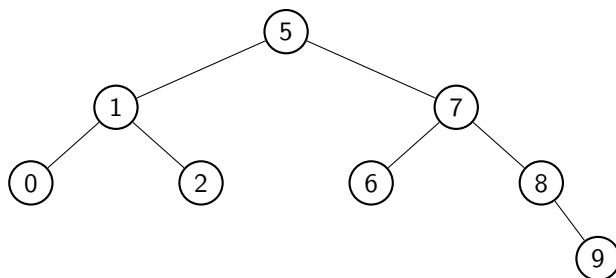
- Smazání hodnoty 10:



- Smazání hodnoty 3:



- Smazání hodnoty 4:



## 7.5

- Vkládaná posloupnost bude seřazená. Například posloupnost hodnot 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7.
- Posloupnost si můžeme rozdělit v tom bodu, kde pravá strana bude obsahovat 6 prvků. Jako kořen zvolíme například klíč 2 a ten vložíme jako první. Posloupnost tedy bude: 2, 1, 3, 4, 5, 6 a 7.
- Posloupnost hodnot musí být v takovém pořadí, že nejprve se vloží kořen výsledného stromu následně jeho děti atd. (vkládáme prvky postupně po patrech výsledného stromu). Posloupnost hodnot tedy bude 4, 2, 6, 1, 3, 5 a 7. Výsledný strom je však vždy stejný.

**7.6** Od kořene rekurzivně ověříme, zdali uzly splňují vlastnost binárního vyhledávacího stromu. Strom můžeme procházet například pomocí *inorder* průchodu.

Důležité je také správně předávat návratovou hodnotu. Pověsimněte si tedy, že listy jsou korektní vyhledávací stromy, od nich se předává informace *true*. Ale jakmile se nalezne uzel, který nějak pravidla

porušuje, je okamžitě propagována informace *false*, kterou již nelze změnit.

**Funkce** CHECKTREE(*node*, *min*, *max*)

**vstup:** *node* – kořen binárního stromu, *min* a *max* jsou hranice možného intervalu pro klíče  
**výstup:** *true* pokud je strom s kořenem *node* korektní binární vyhledávací strom, jinak *false*

```

1 if node = nil then
2   return true
3 else
4   if node.key < min ∨ node.key > max then
5     return false
6   fi
7   return CHECKTREE(node.left, min, node.key) ∧ CHECKTREE(node.right, node.key, max)
8 fi

```

Pro kontrolu celého stromu voláme funkci s následujícími parametry CHECKTREE(*root*,  $-\infty$ ,  $\infty$ ).

**7.7** Pozor, že pouze v levém podstromu zadaného uzlu je chybná odpověď. V případě, že zadaný uzel je pravým potomkem svého otce, hledaná čísla jsou i v otci a celém jeho levém podstromu (levém bratrovi zadaného uzlu). A rekurzivně to platí dál, jestli otec je pravým potomkem ...

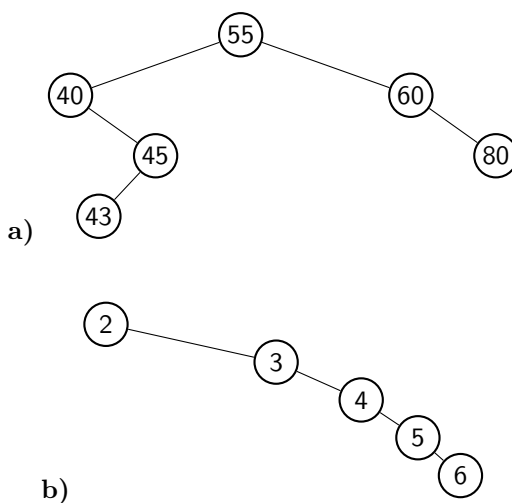
**7.8**

Daná sekvence uzlů představuje binární strom tvořený jednou větví. Cílem je rozhodnout, zda je tento strom BVS.

Sekvence uzlů b) netvoří BVS – uzel 912 leží v levém podstromu uzlu 911.

Stejně tak sekvence e) netvoří BVS – uzel 299 leží v pravém podstromu uzlu 347.

**7.9**



c) BVS strom neexistuje. Když vypíšu 35 po 21, nemohu už vypisovat čísla menší než 21.

**7.10** Rekurzivní řešení může vypadat následovně:

Funkce $\text{DEPTH}(node)$	
<b>vstup:</b>	$node$ – kořen binárního stromu
<b>výstup:</b>	hloubka stromu s kořenem $node$
<pre> 1 if <math>node = nil</math> then 2   return -1 3 fi 4 return 1 + MAX(<math>\text{DEPTH}(node.left)</math>, <math>\text{DEPTH}(node.right)</math>) </pre>	

**7.11** Nejjednodušší algoritmus je postupně vkládat hodnoty z menšího stromu do většího. Složitost tohoto algoritmu odpovídá součinu velikostí obou stromů ( $\mathcal{O}(n \cdot m)$ , kde  $n$  je velikost prvního stromu a  $m$  druhého).

Lepší algoritmus by postupoval takto. Z každého stromu bychom vytvořili uspořádaný seznam (k tomu nám stačí inorder průchod), to je v čase  $\mathcal{O}(n + m)$ . Následně bychom použili proceduru MERGE, která nám spojí oba seznamy podobně jako spojení polí v Merge sortu (složitost znovu  $\mathcal{O}(n + m)$ ). Ze seřazeného seznamu lze vytvořit binární vyhledávací strom v lineárním čase (už samotný seznam může být BVS pokud si jej představíme jako jednu jedinou větev).

Algoritmus nelze provést lépe než v  $\mathcal{O}(n + m)$ . Musíme totiž projít všechny uzly stromu.

**7.13**

a) Procedura SEARCH může vypadat následovně:

Procedura $\text{SEARCH}(node, key)$	
<b>vstup:</b>	prohledávaný podstrom s kořenem $node$ , hledaný klíč $key$
<pre> 1 if <math>node = nil \vee key = node.key</math> then 2   return <math>node</math> 3 fi 4 if <math>key &lt; node.key</math> then 5   return <math>\text{SEARCH}(node.left, key)</math> 6 else 7   return <math>\text{SEARCH}(node.right, key)</math> 8 fi </pre>	

Nejsnadněji se algoritmus SEARCH zapisuje rekurzivně. V každém průchodu porovnáme hledaný klíč s klíčem aktuálního uzlu, pokud je hledaný klíč menší, pokračujeme doleva, jinak pokračujeme doprava. Rekurzivní zářížkou je nalezení hledaného uzlu, nebo nalezení  $nil$ . Časová složitost závisí na délce větve. Jelikož je délka větve až  $n$ , složitost hledání patří do  $\mathcal{O}(n)$ .

b) Procedura INSERT může vypadat následovně:

Procedura INSERT( <i>tree</i> , <i>key</i> )	
<b>vstup:</b> vkládaný klíč <i>key</i> do stromu <i>tree</i>	
1	<i>tmp</i> $\leftarrow$ <i>nil</i>
2	<i>node</i> $\leftarrow$ NEW Node( <i>key</i> )
3	<i>actual</i> $\leftarrow$ <i>tree.root</i>
4	<b>while</b> <i>actual</i> $\neq$ <i>nil</i> <b>do</b>
5	<i>tmp</i> $\leftarrow$ <i>actual</i>
6	<b>if</b> <i>node.key</i> < <i>actual.key</i> <b>then</b>
7	<i>actual</i> $\leftarrow$ <i>actual.left</i>
8	<b>else</b>
9	<i>actual</i> $\leftarrow$ <i>actual.right</i>
10	<b>fi</b>
11	<b>od</b>
12	<i>node.parent</i> $\leftarrow$ <i>tmp</i>
13	<b>if</b> <i>tmp</i> = <i>nil</i> <b>then</b>
14	<i>tree.root</i> $\leftarrow$ <i>node</i>
15	<b>else</b>
16	<b>if</b> <i>node.key</i> < <i>tmp.key</i> <b>then</b>
17	<i>tmp.left</i> $\leftarrow$ <i>node</i>
18	<b>else</b>
19	<i>tmp.right</i> $\leftarrow$ <i>node</i>
20	<b>fi</b>
21	<b>fi</b>

Procedura INSERT se skládá ze dvou částí. V první části musíme vyhledat pozici, na kterou daný prvek budeme vkládat, aby nebyla porušena vlastnost vyhledávacího stromu. To provedeme tak, že ve smyčce porovnáváme klíč vkládaného prvku s klíčem aktuálního uzlu. Pokud je klíč vkládaného prvku menší, postupujeme na levého syna, pokud je větší, postupujeme na pravého syna. Tento cyklus se zastaví s nalezením prázdného uzlu, což je místo, kam stačí uzel vložit (což už proběhne v konstantním čase). První část algoritmu má časovou složitost závislou na délce stromu. V případě nevyváženého BVS může být délka větve až  $n$ , takže složitost vkládání patří do  $\mathcal{O}(n)$ .

c) Procedura MINIMUM může vypadat následovně:

Procedura MINIMUM( <i>node</i> )	
<b>vstup:</b> <i>node</i> je kořen podstromu od kterého hledáme minimum	
1	<b>if</b> <i>node</i> = <i>nil</i> <b>then</b>
2	<b>return</b> <i>nil</i>
3	<b>fi</b>
4	<b>while</b> <i>node.left</i> $\neq$ <i>nil</i> <b>do</b>
5	<i>node</i> $\leftarrow$ <i>node.left</i>
6	<b>od</b>
7	<b>return</b> <i>node</i>

Minimum se nachází v nejlevějším uzlu každého stromu. Náš algoritmus se tedy musí zanořovat doleva a v případě, že nějaký uzel levého následníka nemá, algoritmus tento uzel vrátí. Časová složitost se zase odvíjí od délky největší větve, je tedy v  $\mathcal{O}(n)$ .

d) Procedura TRANSPLANT může vypadat následovně:

<b>Procedura</b> TRANSPLANT( <i>tree</i> , <i>u</i> , <i>v</i> )	
	<b>vstup:</b> strom <i>tree</i> , podstrom <i>u</i> a podstrom <i>v</i>
1	<b>if</b> <i>u.parent</i> = <i>nil</i> <b>then</b>
2	<i>tree.root</i> $\leftarrow$ <i>v</i>
3	<b>else if</b> <i>u</i> = <i>u.parent.left</i> <b>then</b>
4	<i>u.parent.left</i> $\leftarrow$ <i>v</i>
5	<b>else</b>
6	<i>u.parent.right</i> $\leftarrow$ <i>v</i>
7	<b>fi</b>
8	<b>if</b> <i>v</i> $\neq$ <i>nil</i> <b>then</b>
9	<i>v.parent</i> $\leftarrow$ <i>u.parent</i>
10	<b>fi</b>

Popis této procedury je součástí popisu DELETE.

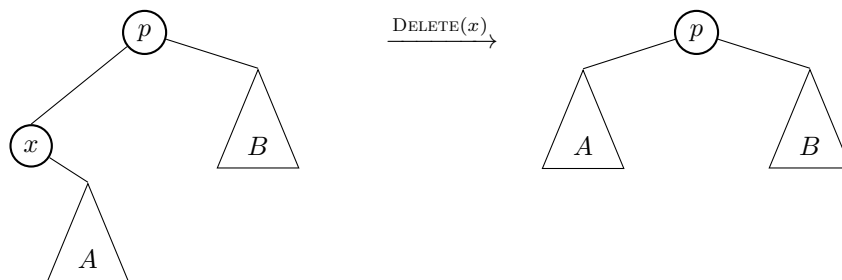
e) Procedura DELETE může vypadat následovně:

<b>Procedura</b> DELETE( <i>tree</i> , <i>node</i> )	
	<b>vstup:</b> uzel <i>node</i> k odstranění ze stromu <i>tree</i>
1	<b>if</b> <i>node.left</i> = <i>nil</i> <b>then</b>
2	TRANSPLANT( <i>tree</i> , <i>node</i> , <i>node.right</i> )
3	<b>else if</b> <i>node.right</i> = <i>nil</i> <b>then</b>
4	TRANSPLANT( <i>tree</i> , <i>node</i> , <i>node.left</i> )
5	<b>else</b>
6	<i>y</i> $\leftarrow$ MINIMUM( <i>node.right</i> )
7	<b>if</b> <i>y.parent</i> $\neq$ <i>node</i> <b>then</b>
8	TRANSPLANT( <i>tree</i> , <i>y</i> , <i>y.right</i> )
9	<i>y.right</i> $\leftarrow$ <i>node.right</i>
10	<i>node.right.parent</i> $\leftarrow$ <i>y</i>
11	<b>fi</b>
12	TRANSPLANT( <i>tree</i> , <i>node</i> , <i>y</i> )
13	<i>y.left</i> $\leftarrow$ <i>node.left</i>
14	<i>node.left.parent</i> $\leftarrow$ <i>y</i>
15	<b>fi</b>

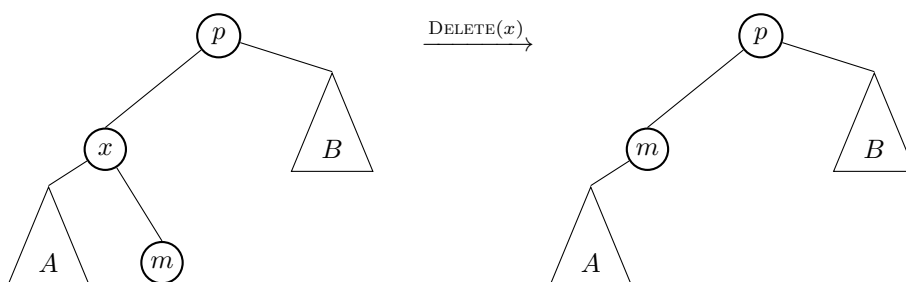
Procedura DELETE je závislá na procedurách TRANSPLANT pro správné spojení stromů a MINIMUM pro nalezení náhradního uzlu za ten, který jsme smazali.

Procedura se dá podle situace rozdělit na 3 případy. Prvním je, že uzel nemá žádného potomka, druhým případem je uzel s právě jedním potomkem a třetím případem je uzel s oběma potomky. Náš pseudokód to však díky využití TRANSPLANT řeší trochu jinak. Rozdělení podle pseudokódu vypadá spíše takto:

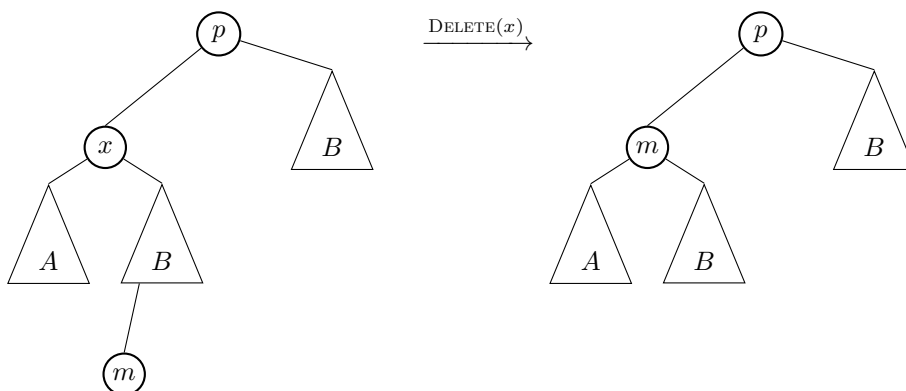
1. Pokud uzel, který chceme odstranit, nemá levého nebo pravého potomka, pak můžeme rovnou zavolat TRANSPLANT s parametry původní strom, uzel pro odstranění a druhá větev.



2. Pokud má uzel oba potomky, pak musíme v pravém potomkovi najít minimum. Pokud je toto minimum synem odstraňovaného uzlu, situace se zjednoduší v prosté posunutí minima na místo odstraněného potomka.



3. Pokud se minimum nachází někde jinde, musíme v TRANSPLANT minimum na místo odstraňovaného uzlu přesunout a pravý podstrom minima se přesune na původní místo minima.



Časová složitost je v  $\mathcal{O}(n)$ , což zabere vyhledání prvku a následné hledání minima od tohoto prvku.

**7.15** Předpokládejme, že v poli  $a$  máme inorder průchod stromu. Pak můžou nastat 2 případy.

1. Byly prohozeny sousední klíče. Pak platí, že existuje jenom jeden index  $p$  takový, že  $a[p] > a[p+1]$ .
2. Byly prohozeny klíče, které nejsou na sousedních pozicích. Pak existuje dvojice indexů  $p$  a  $q$  takové, že platí  $a[p] > a[p+1]$  a  $a[q-1] > a[q]$ . Což znamená, že jsou prohozeny klíče  $a[p]$  a  $a[q]$ .

**7.16** Řešením jsou všechny posloupnosti splňující následující vlastnosti:

1. začínají prvkem 8,
2. prvek 3 se v nich vyskytuje před oběma prvky 1 a 5,
3. prvek 19 se v nich vyskytuje před oběma prvky 18 a 24.

Všechny posloupnosti, které začínají číslem 8. Číslo 3 se musí vkládat dříve než čísla 1 a 5. Stejně tak číslo 19 musíme vložit dříve než 18 a 24.

**7.18** Infixově:  $((8 - 1) + 2) \times ((2 + 1) \times 2)$

Prefixově:  $\times + - 8 1 2 \times + 2 1 2$

Postfixově:  $8 1 - 2 + 2 1 + 2 \times \times$

Jak lze vidět ze zápisů, infixový zápis je jediný, který je nutno závorkovat. Ačkoliv je tedy pro člověka možná nejintuitivnější (protože se jej učíme celý život), ostatní zápisy rovnici popisují jednodušeji.

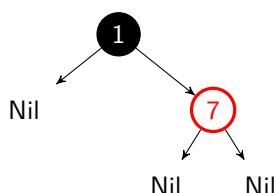
**7.24** Algoritmus je chybný, protože nekontroluje, že prvky jsou menší/větší v celém podstromu, ale pouze ve kořenech těchto podstromů. Zamyslete se, proč to teď vadí, když v haldě to takto stačilo.

**7.25** Výhody řazení stromem jsou: je online, správná implementace je stabilní, pro vyvážené stromy má optimální složitost  $\mathcal{O}(n \log(n))$ .

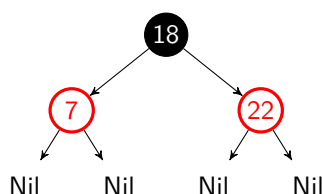
# Červeno-černé stromy

## 8.1

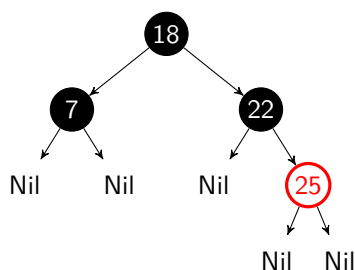
- a) Tento strom porušuje pravidla 1 (kořen je červený), 2 (uzel 1 je červený a má červeného rodiče) a zároveň se kvůli špatnému pořadí nejedná ani o vyhledávací strom. Opravený strom může vypadat tedy takto:



- b) Jedná se o korektní červeno-černý strom.
- c) Tento strom není BVS, jelikož uzel 22 je levým synem uzlu 18. Také jsou oba tyto uzly obarveny červeně, což porušuje pravidlo 2. Stačí provést obdobu levé rotace a přebarvení, formálně bychom však měli říci, že prvně musíme vyměnit klíče uzlů 18 a 22, pak provést pravou rotaci těchto dvou uzlů a nakonec provést levou rotaci, aby se 18 dostala do kořene. 18 bude mít tedy černou barvu, 7 a 22 budou mít stejnou barvu, přičemž je jedno, zdali budou červené nebo černé.



- d) Toto není binární strom (je ternární). Dále je porušena černá hloubka jelikož uzlu 22 chybí synové *nil*. Opravou vznikne stejný strom jako je ten předchozí ze zadání c).
- e) Malou chybou je, že uzel 25 nemá listy *nil*. Dále je porušeno pravidlo 3., černá hloubka se liší u levé a pravé větve od kořene. Je potřeba provést levou rotaci, aby se uzel 18 stal kořenem a následně jej přebarvíme na černo.

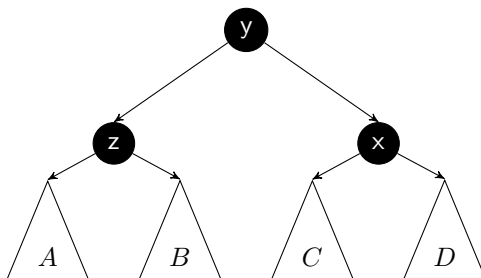




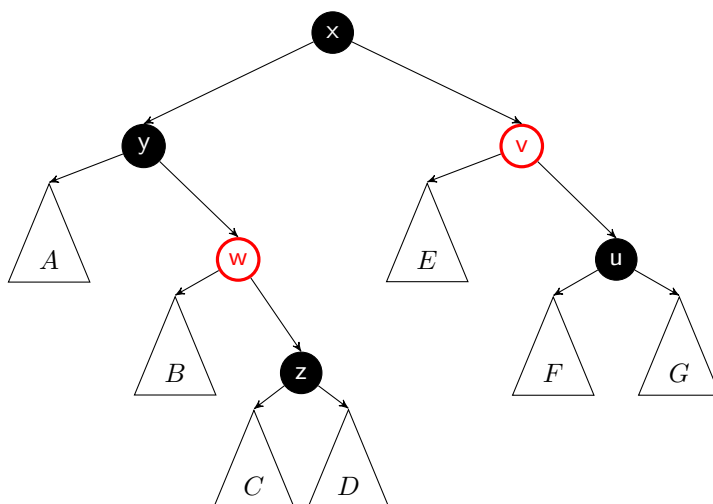
f) Jedná se o korektní červeno-černý strom.

## 8.2

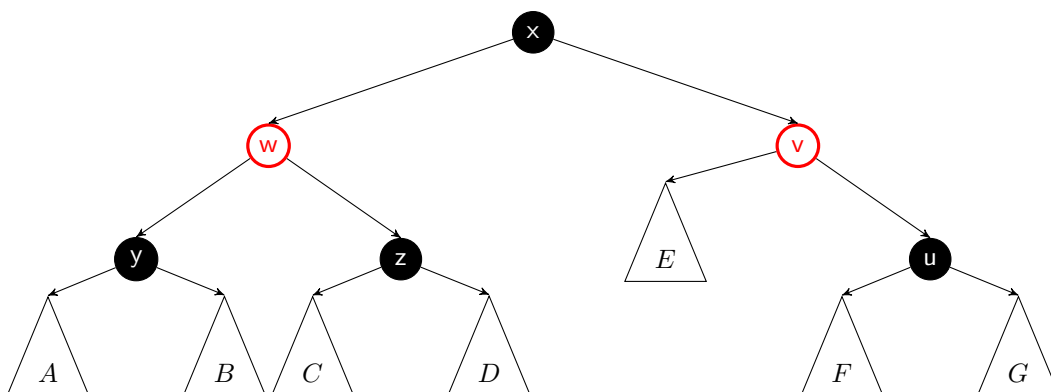
a) Provedeme rotaci doprava kolem uzlu  $x$  a abychom uchovali černou hloubku změníme barvu uzlu  $z$  na černou.



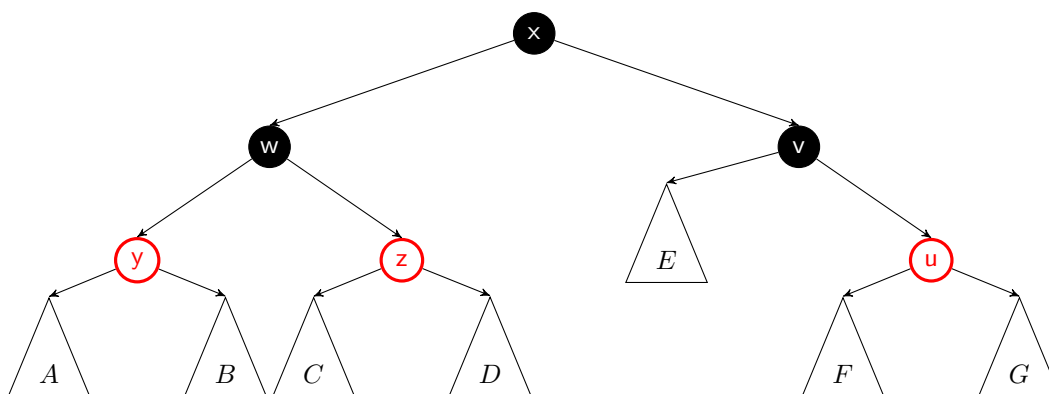
b) Nejprve rotujeme doprava okolo  $z$ :



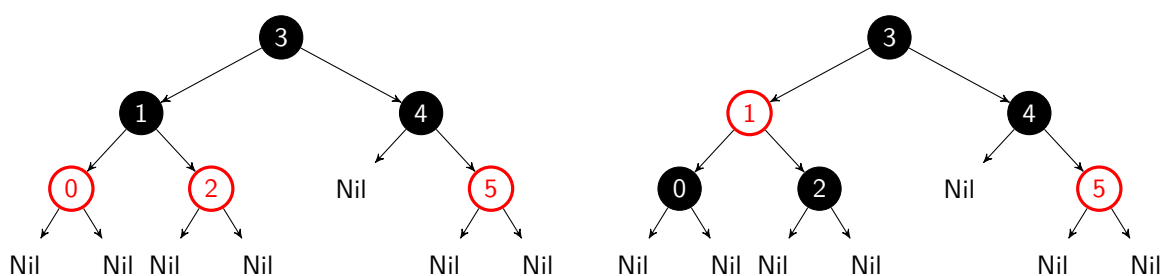
Teď můžeme rotovat doleva okolo  $y$ :



A upravíme obarvení tak, aby v každé větvi byly 2 černé uzly a 1 podstrom:



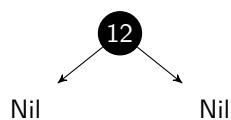
8.3 Existují 2 obarvení, viz obrázky níže.



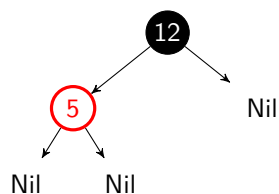
Obarvení se pokoušíme najít pomocí nejkratší větve, kterou obarvíme na černo. V tomto případě je tou větví: 3 – 4 – *nil*. Jelikož uzly 3 a 4 jsou také součástí větve 3 – 4 – 5 – *nil*, která je delší, víme, že vrchol 5 musí být červený, abychom neporušili pravidla červeno-černého stromu. Zbylé větve obarvíme podobně tak, abychom zachovali všude stejnou černou hloubku.

8.4

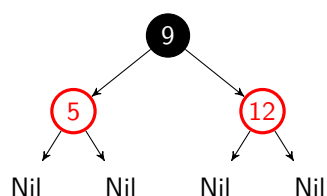
INSERT(12)



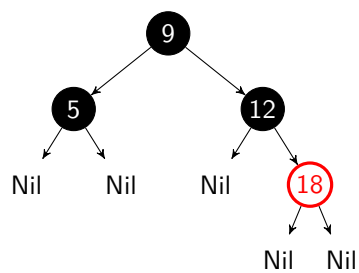
INSERT(5)



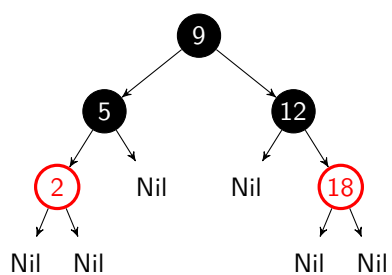
INSERT(9)



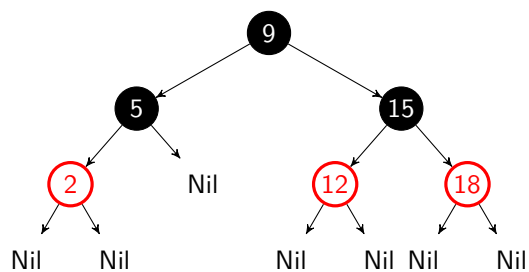
INSERT(18)



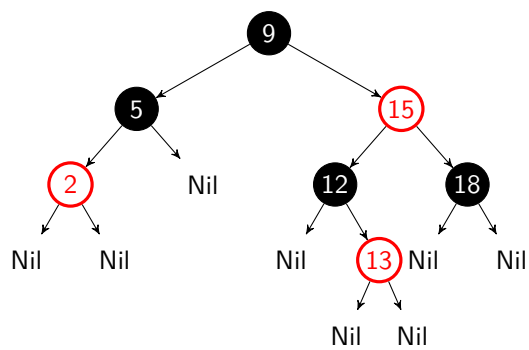
INSERT(2)



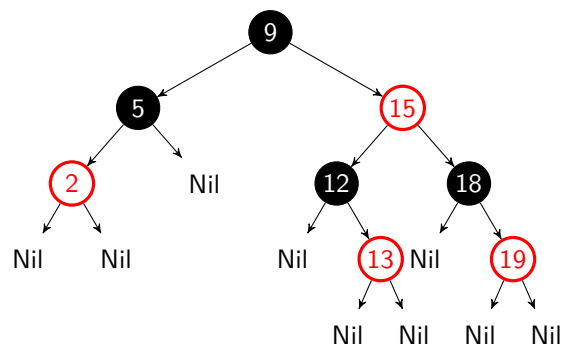
INSERT(15)



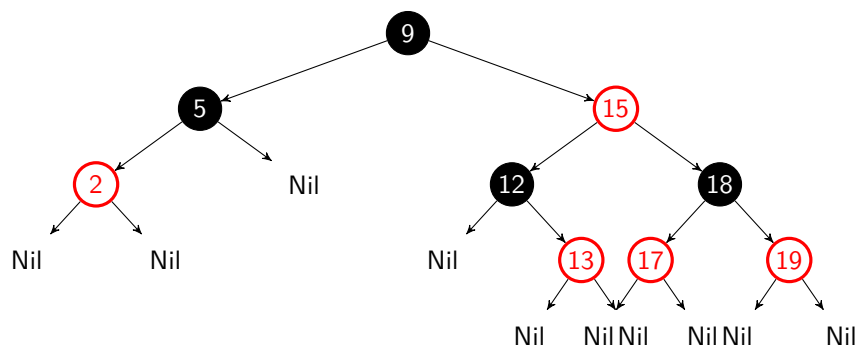
INSERT(13)



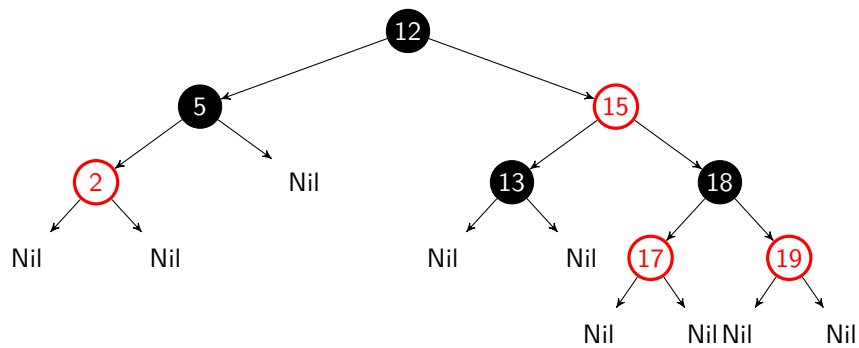
INSERT(19)



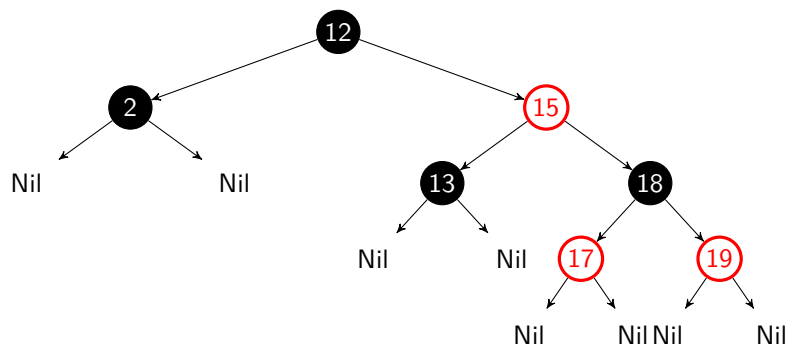
INSERT(17)



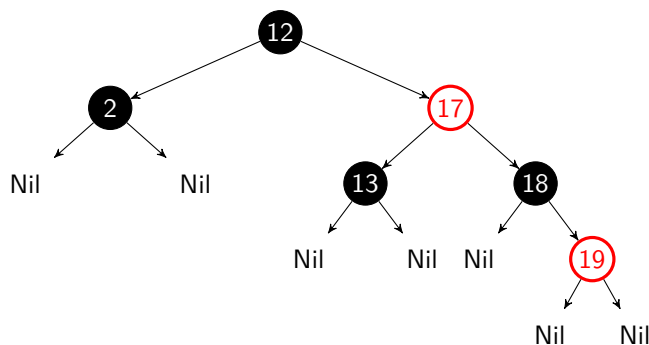
DELETE(9)



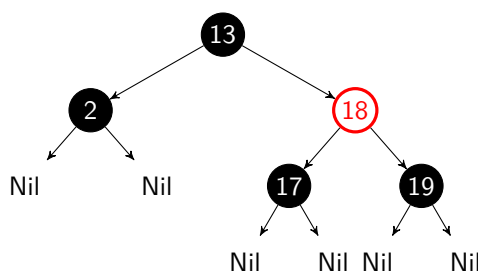
DELETE(5)



DELETE(15)



DELETE(12)



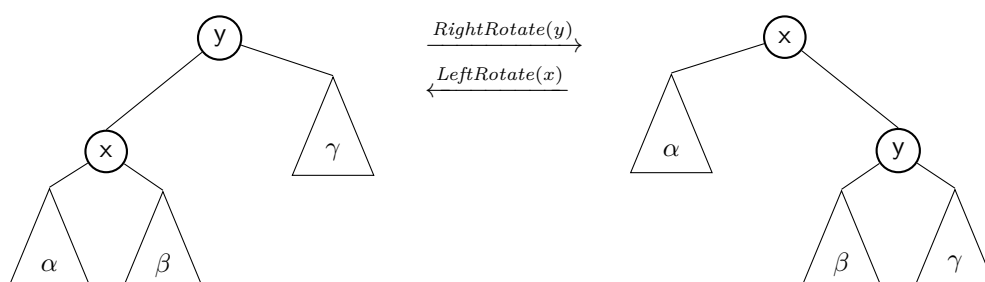
## 8.5

- Řešením je úplný binární strom se sudým počtem úrovní, kde uzly na liché úrovni jsou černé a na sudé úrovni červené. Vkládaný prvek se vloží jako červený list.
- Řešením je úplný binární strom se sudým počtem úrovní, kde všechny uzly jsou černé. Odstraňuje se list.

8.6 Funkce INIT má složitost opět ve třídě  $\Theta(1)$ . Ostatní funkce mají složitost  $\mathcal{O}(\log n)$ , protože hloubka červeno-černých stromů patří do třídy  $\mathcal{O}(\log n)$ .

## 8.7

- Operace, které nemodifikují strom, můžeme implementovat stejně jako ve vyhledávacím binárním stromě. Rozdílné ale budou ty, které nějak mění strukturu stromu, tedy DELETE a INSERT. Implementace je rozdílná proto, že vkládáním a mazáním prvků dochází k porušování červeno-černé hierarchie, proto potřebujeme mít při operacích také opravu stromu, při které se také strom vyvažuje.
- Rotování vypadá následovně:



Algoritmus rotace vlevo:

<b>Procedura LEFTROTATE(<i>tree</i>, <i>x</i>)</b>	
<b>vstup:</b> strom <i>tree</i> a jeho uzel <i>x</i> , který je kořenem rotace	
1	<i>y</i> ← <i>x.right</i>
2	<i>x.right</i> ← <i>y.left</i>
3	<b>if</b> <i>y.left</i> ≠ <i>nil</i> <b>then</b>
4	<i>y.left.parent</i> ← <i>x</i>
5	<b>fi</b>
6	<i>y.parent</i> ← <i>x.parent</i>
7	<b>if</b> <i>x.parent</i> = <i>nil</i> <b>then</b>
8	<i>tree.root</i> ← <i>y</i>
9	<b>else if</b> <i>x</i> = <i>x.parent.left</i> <b>then</b>
10	<i>x.parent.left</i> ← <i>y</i>
11	<b>else</b>
12	<i>x.parent.right</i> ← <i>y</i>
13	<b>fi</b>
14	<i>y.left</i> ← <i>x</i>
15	<i>x.parent</i> ← <i>y</i>

Časová složitost rotací je konstantní. Dojde maximálně ke změně 7 ukazatelů (+ nějaké v pomocných proměnných) a otestování 3 podmínek. Rotace se nijak dále ve stromě nepropagují.

c) Algoritmus rotace vpravo:

<b>Procedura RIGHTROTATE(<i>tree</i>, <i>x</i>)</b>	
<b>vstup:</b> strom <i>tree</i> a jeho uzel <i>x</i> , který je kořenem rotace	
1	<i>y</i> ← <i>x.left</i>
2	<i>x.left</i> ← <i>y.right</i>
3	<b>if</b> <i>y.right</i> ≠ <i>nil</i> <b>then</b>
4	<i>y.right.parent</i> ← <i>x</i>
5	<b>fi</b>
6	<i>y.parent</i> ← <i>x.parent</i>
7	<b>if</b> <i>x.parent</i> = <i>nil</i> <b>then</b>
8	<i>tree.root</i> ← <i>y</i>
9	<b>else if</b> <i>x</i> = <i>x.parent.right</i> <b>then</b>
10	<i>x.parent.right</i> ← <i>y</i>
11	<b>else</b>
12	<i>x.parent.left</i> ← <i>y</i>
13	<b>fi</b>
14	<i>y.right</i> ← <i>x</i>
15	<i>x.parent</i> ← <i>y</i>

Časová složitost RIGHTROTATE je konstantní, podobně jak LEFTROTATE v podpříkladu b).

## 8.8

- a) Prvně provedeme vložení pomocí INSERT pro BVS. Následně obarvíme vložený uzel na červeně, aby se nezměnila barevná hloubka a poté provádíme kontrolu a úpravy tak, aby zůstaly zachovány

základní pravidla červeno-černého stromu.

Procedura INSERT( <i>tree</i> , <i>node</i> )
<p><b>vstup:</b> strom <i>tree</i> a vkládaný uzel <i>node</i></p> <pre> 1  <i>y</i> ← nil 2  <i>x</i> ← <i>tree.root</i> 3  <b>while</b> <i>x</i> ≠ nil <b>do</b> 4      <i>y</i> ← <i>x</i> 5      <b>if</b> <i>node.key</i> &lt; <i>x.key</i> <b>then</b> 6          <i>x</i> ← <i>x.left</i> 7      <b>else</b> 8          <i>x</i> ← <i>x.right</i> 9      <b>fi</b> 10 <b>od</b> 11 <i>node.parent</i> ← <i>y</i> 12 <b>if</b> <i>y</i> = nil <b>then</b> 13     <i>tree.root</i> ← <i>node</i> 14 <b>else if</b> <i>node.key</i> &lt; <i>y.key</i> <b>then</b> 15     <i>y.left</i> ← <i>node</i> 16 <b>else</b> 17     <i>y.right</i> ← <i>node</i> 18 <b>fi</b> 19 <i>node.left</i> ← nil 20 <i>node.right</i> ← nil 21 <i>node.color</i> ← red 22 INSERTFIXUP(<i>tree</i>, <i>node</i>) </pre>

Bottom-up oprava vlastností BVS:

Procedura INSERTFIXUP( <i>tree</i> , <i>node</i> )
<p><b>vstup:</b> strom <i>tree</i> a opravovaný uzel <i>node</i></p> <pre> 1  <b>while</b> <i>node</i> ≠ <i>tree.root</i> ∧ <i>node.parent.color</i> = red <b>do</b> 2      <b>if</b> <i>node.parent</i> = <i>node.parent.parent.left</i> <b>then</b> 3          <i>d</i> ← <i>node.parent.parent.right</i> 4          <b>if</b> <i>d.color</i> = red <b>then</b> 5              // případ 1 6              <i>node.parent.color</i> ← black 7              <i>d.color</i> ← black 8              <i>node.parent.parent.color</i> ← red 9              <i>node</i> ← <i>node.parent.parent</i> 10         <b>else if</b> <i>node</i> = <i>node.parent.right</i> <b>then</b> 11             // případ 2 12             <i>node</i> ← <i>node.parent</i> 13             LEFTROTATE(<i>tree</i>, <i>node</i>) 14         <b>else</b> 15             // případ 3 16             <i>node.parent.color</i> ← black 17             <i>node.parent.parent.color</i> ← red 18             RIGHTROTATE(<i>tree</i>, <i>node.parent.parent</i>) 19         <b>fi</b> 20     <b>else</b> 21         // podobně jako při then bloku, jenom prohodíme right za left 22     <b>fi</b> 23 <b>od</b> 24 <i>tree.root.color</i> ← black </pre>

b) Obdobně pro umazání:

**Procedura** DELETE(*tree*, *node*)

**vstup:** strom *tree* a smazávaný uzel *node*

```
1 y ← node
2 originalColor ← node.color
3 if node.left = nil then
4     x ← node.right
5     TRANSPLANT(tree, node, node.right)
6 else if node.right = nil then
7     x ← node.left
8     TRANSPLANT(tree, node, node.left)
9 else
10    y ← MINIMUM(node.right)
11    originalColor ← y.color
12    x ← y.right
13    if y.parent = node then
14        x.parent ← y
15    else
16        TRANSPLANT(tree, y, y.right)
17        y.right ← node.right
18        y.right.parent ← y
19    fi
20    TRANSPLANT(tree, node, y)
21    y.left ← node.left
22    y.left.parent ← y
23    y.color ← node.color
24 fi
25 if originalColor = black then
26    DELTEFIXUP(tree, x)
27 fi
```

Kde DELTEFIXUP opravuje problematickou barvu následujícím způsobem. Pseudokód zapisuje



postup uvedený na přednášce, proto se zase odkazujeme na odpovídající případy 1 až 4.

<b>Procedura</b> DELETETFIXUP( <i>tree</i> , <i>node</i> )	
<b>vstup:</b> strom <i>tree</i> a opravovaný uzel <i>node</i>	
1	<b>while</b> <i>node</i> $\neq$ <i>tree.root</i> $\wedge$ <i>node.color</i> = <i>black</i> <b>do</b>
2	<b>if</b> <i>node</i> = <i>node.parent.left</i> <b>then</b>
3	<i>sibling</i> $\leftarrow$ <i>node.parent.right</i>
4	<b>if</b> <i>sibling.color</i> = <i>red</i> <b>then</b>
	// případ 1
5	<i>sibling.color</i> $\leftarrow$ <i>black</i>
6	<i>node.parent.color</i> $\leftarrow$ <i>red</i>
7	LEFTROTATE( <i>tree</i> , <i>node.parent</i> )
8	<i>sibling</i> $\leftarrow$ <i>node.parent.right</i>
9	<b>fi</b>
10	<b>if</b> <i>sibling.left.color</i> = <i>black</i> $\wedge$ <i>sibling.right.color</i> = <i>black</i> <b>then</b>
	// případ 2
11	<i>sibling.color</i> $\leftarrow$ <i>red</i>
12	<i>node</i> $\leftarrow$ <i>node.parent</i>
13	<b>else if</b> <i>sibling.right.color</i> = <i>black</i> <b>then</b>
	// případ 3
14	<i>sibling.left.color</i> $\leftarrow$ <i>black</i>
15	<i>sibling.color</i> $\leftarrow$ <i>red</i>
16	RIGHTROTATE( <i>tree</i> , <i>sibling</i> )
17	<i>sibling</i> $\leftarrow$ <i>node.parent.right</i>
18	<b>else</b>
	// případ 4
19	<i>sibling.color</i> $\leftarrow$ <i>node.parent.color</i>
20	<i>node.parent.color</i> $\leftarrow$ <i>black</i>
21	<i>sibling.right.color</i> $\leftarrow$ <i>black</i>
22	LEFTROTATE( <i>tree</i> , <i>node.parent</i> )
23	<i>node</i> $\leftarrow$ <i>tree.root</i>
24	<b>fi</b>
25	<b>else</b>
	// podobně jako při then bloku, jenom prohodíme right za left
26	<b>fi</b>
27	<b>od</b>
28	<i>node.color</i> = <i>black</i>

## 8.10

- Pokud můžeme konstruovat stromy ručně, pak je nejvýhodnější jako kořen stromu volit medián všech hodnot, které se ve stromě nacházejí. To v našem případě odpovídá uzlu 5. Stejně pravidlo aplikujeme i na podstromy a získáme strom hloubky 2.
- Nejjednodušším nápadem je po každém druhém vložení provést levou rotaci na úrovni kořene a jeho pravého syna. To nám však strom sníží pouze na polovinu (vzniknou 2 větve), hloubka tedy stále zůstává v  $\mathcal{O}(n)$ . Rotace tedy musíme dělat i na nižších úrovních.

Nechť číslujeme patra stromu zdola, takže patro nejnižšího listu odpovídá 0. patru, nad ním je vrchol v 1. patře atd. až po kořen. Pak při vkládání do našeho stromu bychom vždy po každém druhém vložení provedli levou rotaci v 1. patře (v nejpravějším vrcholu – to je místo, kde tento strom roste), po každém 4. vložení levou rotaci v 2. patře a obecně po každém  $2^i$  vložení levou rotaci v patře  $i$ . Strom, který by vznikl, by nebyl perfektně vyvážený, ale přesto by měl logaritmickou hloubku.

Tímto jsme vytvořili vlastní samovyvažující se binární vyhledávací strom, který však funguje jen pro vkládání stále větších a větších čísel. Mohli jsme samozřejmě použít jiný samovyvažující se strom, třeba červeno-černý strom.

**8.11** Přibližný postup je následující: orotujme nejmenší uzel prvního BVS až ke kořeni a postupně rotujme následující uzly tak, abychom dostali strom s hloubkou  $n$ , kde každý levý potomek je NIL. Udělejte totéž s druhým BVS. Z toho vidíme, že existuje posloupnost rotací, která dokáže převést jeden BVS na druhý.

Není znám polynomiální algoritmus, který by určil minimální počet rotací na přeměnu jednoho BVS na druhý (i když „vzdálenost“ rotací je nanejvýš  $2n - 6$  pro BVS s alespoň 11 uzly).

**8.12**

- a) Z libovolné posloupnosti vytvoříme červeno-černý strom postupným vkládáním, tudíž jedno vložení nám zabere  $\mathcal{O}(\log n)$  a těchto vkládání bude  $n$ . Složitost vytvoření stromu je tedy  $\mathcal{O}(n \log(n))$ .
- b)

**8.17**

- a) Nepravdivé je tvrzení 4.
- b) Nepravdivé je tvrzení 3.

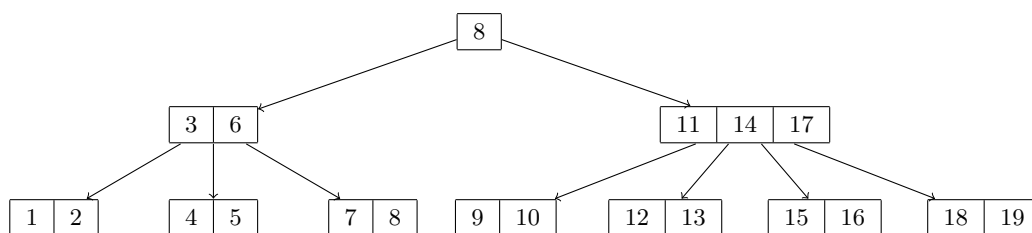
# B-stromy

## 9.1

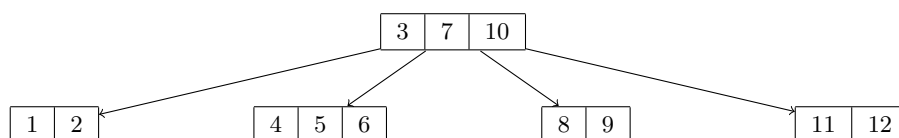
- Hloubka stromu se zmenší o konstantní faktor (z binárního na  $k$ -ární je to  $\log_k 2$ ). Alternativně se dá říct, že do stromu stejné hloubky můžeme uložit více klíčů. Konstantu lze odvodit takto:  $k$ -ární strom o  $n$  prvcích má hloubku minimálně  $\log_k n = \frac{\log_2 n}{\log_2 k}$ . To je tedy minimální hloubka binárního stromu ( $\log_2 n$ ) vynásobená  $\frac{1}{\log_2 k} = \log_k 2$ , což je číslo menší než 1.
- Hloubka stromu se sníží poměrem  $\log_k 2$ , ale při vyhledávání budeme muset projít všechny klíče v uzlu, což nám dává u binárního stromu jedno porovnání, u  $k$ -árního až  $k - 1$  porovnání. Nejhorší čas vyhledání do  $k$ -árního stromu je nejhorší čas vyhledání do binárního stromu vynásobený  $(k - 1) \cdot \log_k 2$ . Všimněte si, že kdybychom v rámci uzlu vyhledávali pomocí půlení intervalu, budeme mít stejný počet porovnání jako v binárním stromě.
- Snížíme počet čtení a zápisů celých uzlů. Pokud bychom vždy museli načíst znovu každý klíč v uzlu, pak by nám zvýšení arity moc nepomohlo, ale vhodnou implementaci nám zajistí menší počet I/O operací, což se nám hodí například při přístupu na disk typu HDD.

## 9.2

- Není korektní. Podle definovaného B-stromu na přednášce musí mít každý uzel kromě kořene stupeň alespoň  $t$ , tj.  $t - 1$  klíčů (uzly 1 a 19 mají jen jeden klíč, musíme je opravit například posunem prvků z vedlejších uzlů, ale tato úprava bude provedena až po následujících úpravách). Podle pravidel B-stromu jsou hodnoty v uzlech uspořádány. Je tedy nutné uspořádat hodnoty uzlu 10, 9. Dále uzly s hodnotami 15, 16, 17 a 12, 13 jsou špatně zařazeny. Uzly je třeba prohodit tak, aby 12, 13 byly mezi hodnotami 11 a 14 u rodiče a 15, 16, 17 mezi hodnotami 14 a 18 u rodiče.

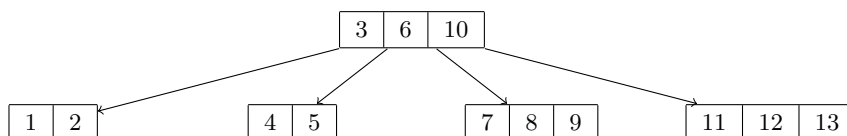


- Není korektní, protože kořen obsahuje 3 klíče, ale má jen 3 potomky (měl by mít 4). Je tedy potřeba vytvořit větev napravo od 12, k tomu potřebujeme přesunout prvky. Opravit strom lze třeba takto:



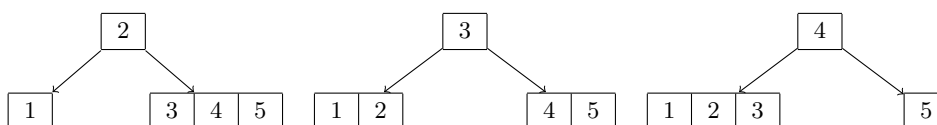
- Je to korektní B-strom.

- d) Není, B-strom stupně 2 nemůže obsahovat uzly s víc než 3 klíči. Proto uzel rozdělíme do sousedních uzlů.

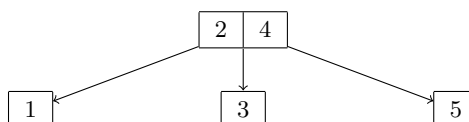


**9.3** Můžeme si jednotlivé případy rozdělit podle toho, kolik prvků bude v kořeni.

1. Kořen s jedním klíčem:



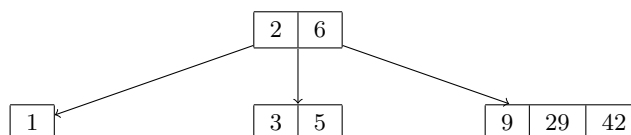
2. Kořen se dvěma klíči:



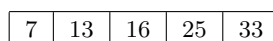
3. V kořeni nemůžeme mít tři klíče, jelikož bychom už neměli dost klíčů pro 4 potomky.

**9.4**

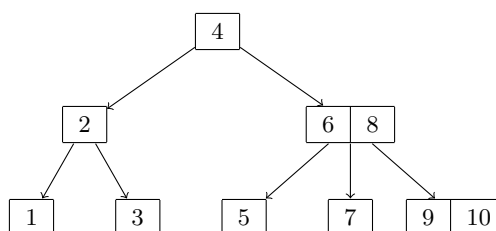
- a) Vypsaný B-strom musí být stupně  $t = 2$  a vypadá následovně:



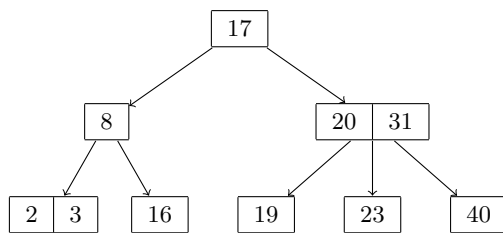
- b) Vypsaný B-strom musí být stupně alespoň  $t = 3$  a vypadá následovně:



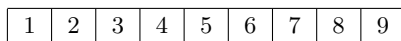
- c) Vypsaný B-strom musí mít stupeň právě  $t = 2$  a vypadá následovně:



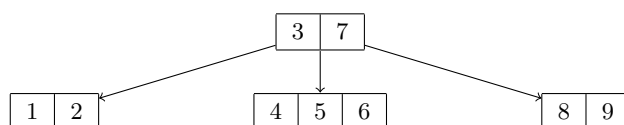
- d) Vypsaný B-strom musí mít stupeň právě  $t = 2$  a vypadá následovně:



- e) Z inorder průchodu máme několik možností, jak může zadaný strom vypadat. Jedno z řešení je například B-strom se stupněm alespoň  $t = 5$ :

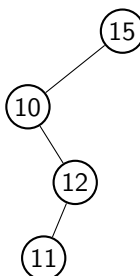


Nebo pro  $t = 2$  například:

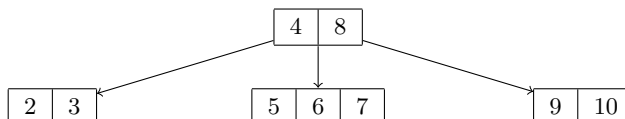


## 9.5

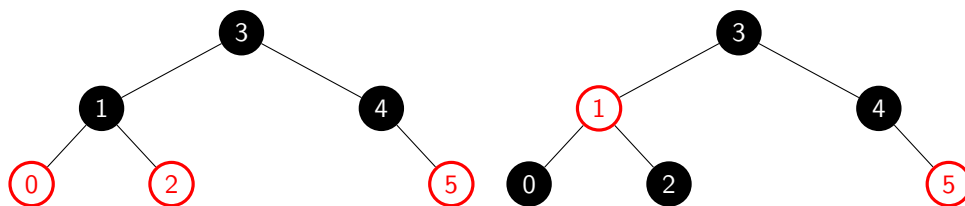
- a) Strom musí mít hloubku 4. První klíč je větší než druhý, takže nejde o uzel s více klíči. Dvojice 10 a 12 by mohla tvořit uzel B-stromu, ale jelikož neexistuje žádný klíč větší než klíč v kořeni, nemůže být strom B-stromem, protože by kořen neměl druhého potomka. Stejné tvrzení, jen s černou hloubkou lze aplikovat na červeno-černý strom, jelikož vidíme, že tento strom nemůže být vyvážený. Jedná se tedy o obecný binární vyhledávací strom:



- b) Trojice 4, 8 a 2 určuje, že nemůže jít o binární vyhledávací strom. Klíč 8 by musel být pravým potomkem klíče 3, ale následně nemáme kam zavěsit klíč 2, protože je menší než 4, ale už se musí nacházet v pravé větvi od 4. Jedná se tedy o následující B-strom, jehož stupeň je 3 nebo 4.

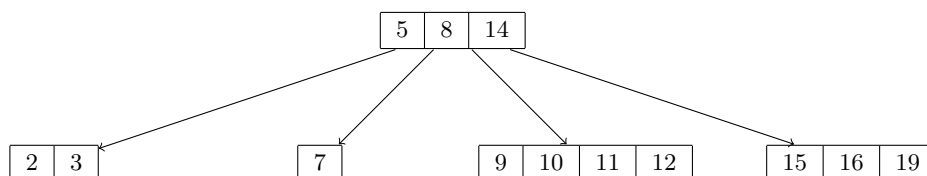


- c) Zde budujeme strom zdola nahoru. Prvně musíme ověřit, zdali se může jednat o B-strom. Ten by musel mít v poslední  $n$ -tici čísel rostoucí posloupnost klíčů, jediná možnost je tedy kořen s jedním klíčem – 3. Aby měl strom všude stejnou hloubku, museli bychom zbytek posloupnosti rozdělit na 2 listy, což nelze, protože se v nich nenachází 2 rostoucí posloupnosti. Jedná se tedy o binární strom s klíčem 3 v kořeni. Pak lze zbylé klíče seřadit jen dvěma způsoby, z nichž jeden by porušoval pravidlo vyhledávacího stromu. Vzhledem k tomu, že výsledný strom je vyvážený, je možné jej obarvit tak, aby se jednalo o červeno-černý strom:

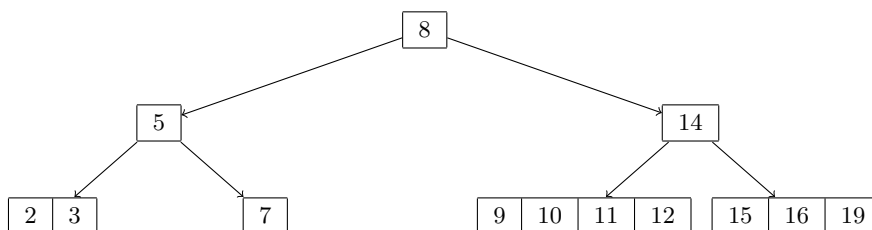


- d) Ne, všechny vyhledávací stromy se stejnou množinou klíčů mají inorder výpis stejný (vzestupnou množinu klíčů).

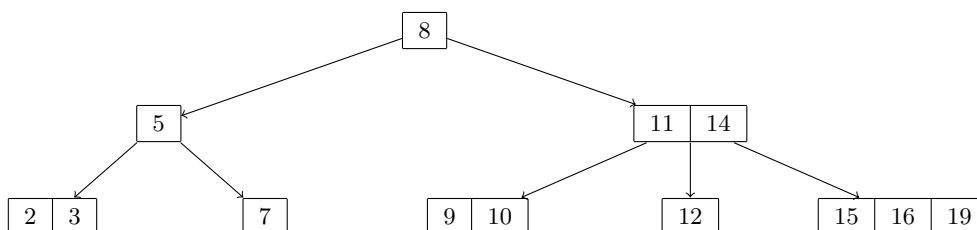
**9.6** Pro řešení můžeme zvolit několik postupů. Pokud začneme štěpit uzly od kořene po patrech až do listů, garantuje nám algoritmus, že projdeme všechny uzly. Algoritmus si můžeme představit, jako bychom vkládali prvky do každého z listů a při průchodu plným uzlem ho rozštěpili. Výsledek v tomto případě vypadá následovně. Nejdříve rozštěpíme levý uzel:



Kořen je plný, musíme ho tudíž štěpit:



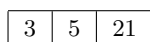
Následně můžeme rozštěpit poslední nekorektní uzel:



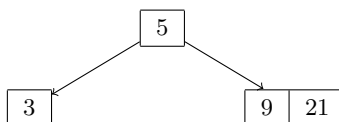
## 9.7

- a) V řešení jsou vysázeny pouze konfigurace, kdy bylo třeba nějaký uzel rozdělit a také výsledná konfigurace.

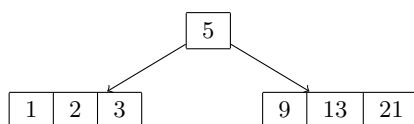
- Vytvoření stromu a vložení prvků 5, 3 a 21:



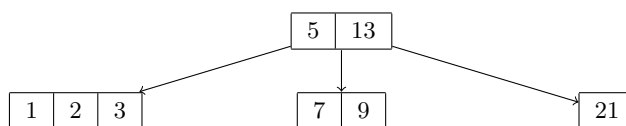
- Vložení 9:



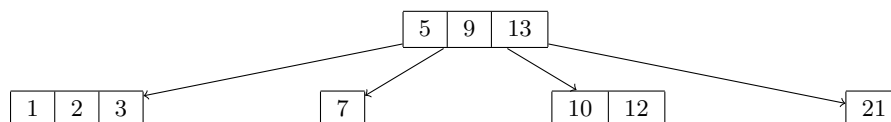
- Vložení 1, 13 a 2:



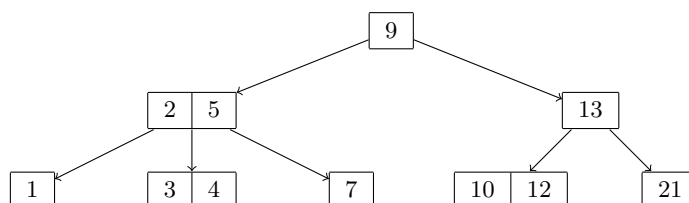
- Vložení 7:



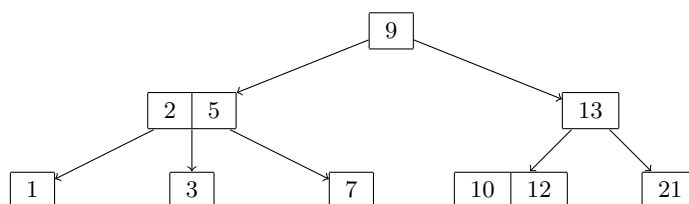
- Vložení 10 a 12:



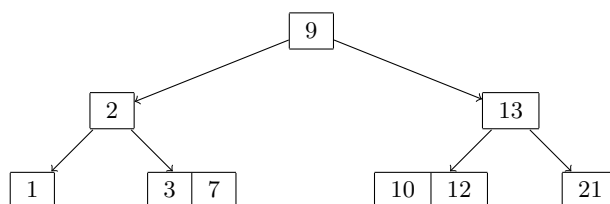
- Vložení 4:



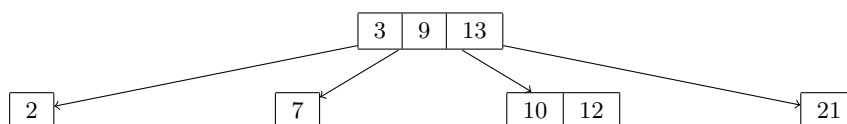
- b) 1. Smazání 4:



2. Smazání 5:

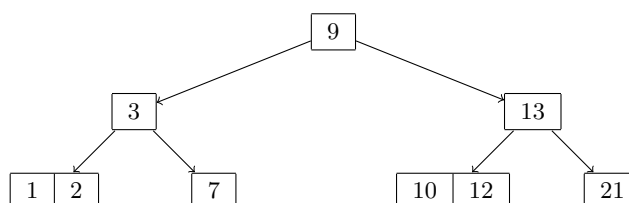


3. Smazání 1:

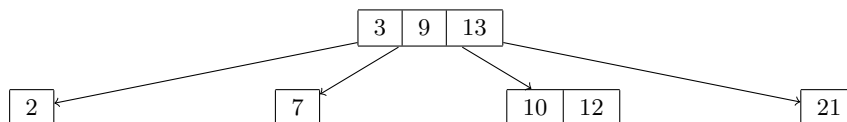


## 9.7

1. Vložení 1:

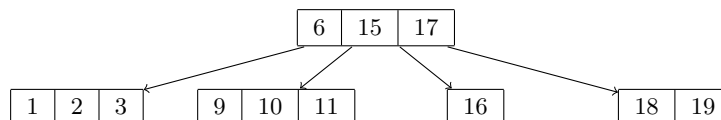


2. Smazání 1:



9.8 Strom bude mít plné uzly ve větvi, do které se vkládá nový prvek.

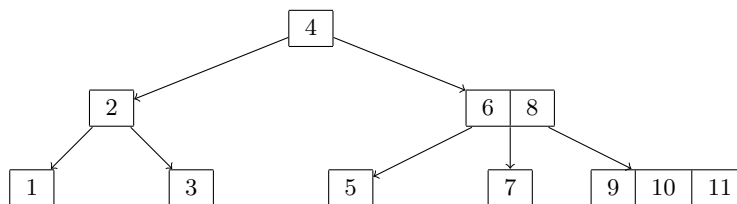
9.9 Aby se uzly v stromu nerozštěpili můžeme vkládat hodnoty jenom dokud se kořen nezaplní, např.



Maximálně jsme mohli doplnit 8 prvků. Pak se nám zaplnil kořen. Následným pokusem o vložení (třeba klíče 20) bychom procházeli přes plný kořen, který bychom dle algoritmu štěpili.

9.10 Uzly se budou plnit a štěpit pouze v pravé části stromu. Uzly v levé části stromu budou mít minimální aritu a budou se postupně „posouvat dolů“ (budou nad nimi vznikat stále výše nové kořeny).

Pro B-strom se stupněm 2 a posloupnost čísel  $[1, \dots, 11]$ , vypadá strom následovně:



9.11 Minimální B-strom bude takový, jehož každý uzel bude obsahovat minimální počet potomků. Tedy můžeme uvažovat v kořeni 2 potomky a ve zbylých uzlech 32 potomků. Tedy sčítáním postupně po vrstvách spočítáme celkový počet uzlů, tedy první vrstva má 1 uzel a ve druhé vrstvě máme 2 uzly. V další vrstvě je opět počet uzlů možné spočítat násobením počtu uzlů v předchozím patře větvicím faktorem (tedy stupeň stromu  $t = 32$ ). Minimální počet uzlů je tedy  $1 + 2 + 2 \cdot 32 + 2 \cdot 32 \cdot 32 = 2115$  uzlů. Zachyceno tabulkou pro počet uzlů a klíčů (celkový počet je suma sloupce):

Patro	Počet uzlů	Počet klíčů
1	1	1
2	2	$2 \cdot 31$
3	$2 \cdot 32$	$2 \cdot 32 \cdot 31$
4	$2 \cdot 32 \cdot 32$	$2 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 31$

Podobnou úvahou můžeme spočítat maximální počet uzlů s tím, že budeme násobit maximálním větvicím faktorem, což je  $2t$ , tedy 64, což je  $1 + 64 + 64 \cdot 64 + 64 \cdot 64 \cdot 64 = 266305$  uzlů. Zachyceno tabulkou pro počet uzlů a klíčů (celkový počet je suma sloupce):

Patro	Počet uzlů	Počet klíčů
1	1	63
2	64	$64 \cdot 63$
3	$64 \cdot 64$	$64 \cdot 64 \cdot 63$
4	$64 \cdot 64 \cdot 64$	$64 \cdot 64 \cdot 64 \cdot 63$

9.12



- a) Na 2,3,4-stromu je jasnější význam všech tří základních pravidel pro červeno-černé stromy.

Pravidlo „kořen je vždy černý“ odpovídá tomu, že prostřední klíč kořene je vždy černý.

Do červeného uzlu (okrajový klíč) se dostaneme jedině z černého uzlu (středový klíč), proto musí mít každý červený uzel černého otce.

Stejná černá hloubka všech větví znamená stejnou celkovou hloubku vzniklého B-stromu (všechny listy B-stromu jsou ve stejném patře).

- b) Maximální hloubka červeno-černého stromu je  $2 \cdot \log_2(n + 1)$ . U našeho 2,3,4-stromu hloubka odpovídá černé hloubce červeno-černého stromu, tj.  $\leq \log_2(n + 1)$ , tedy v každém uzlu necháme minimu klíčů a dostáváme tak binární strom.

- c) Rotace jsou důsledkem štěpení, spojování a změn pozic v uzlech 2,3,4-stromu.

**9.13** Binární vyhledávání zrychlí vyhledávání klíče v uzlu, ale nelze použít v případě, že chceme do vkládat do listu, či z něj potřebujeme odstraňovat. Zrychlení není vzhledem k velikosti stromu, ale vzhledem k aritě stromu.

#### 9.14

- a) Při prohledávání B-stromu na rozdíl od binárních stromů musíme procházet také všemi klíči v uzlu abychom našli správnou větev, kam se zanořit. Pseudokód může vypadat následovně:

<b>Procedura</b> SEARCH( <i>node</i> , <i>k</i> )	
<b>vstup:</b>	uzel <i>node</i> , který má <i>n</i> potomků, pod kterým hledáme hodnotu <i>k</i>
<b>výstup:</b>	nalezený uzel a index hledaného prvku, nebo <i>nil</i> , pokud neexistuje
<pre> 1  <i>i</i> ← 1 2  <b>while</b> <i>i</i> ≤ <i>node.n</i> ∧ <i>k</i> &gt; <i>node.key<sub>i</sub></i> <b>do</b>     // hledání správné větve 3      <i>i</i> ← <i>i</i> + 1 4  <b>od</b> 5  <b>if</b> <i>i</i> ≤ <i>node.n</i> ∧ <i>k</i> = <i>node.key<sub>i</sub></i> <b>then</b>     // klíč se nachází v uzlu <i>node</i> 6      <b>return</b> (<i>node</i>, <i>i</i>) // vrátí uzel a index hledaného prvku 7  <b>fi</b> 8  <b>if</b> <i>node</i> je list <b>then</b>     // klíč se nenachází v <i>node</i> a <i>node</i> je list 9      <b>return</b> <i>nil</i> 10 <b>else</b>     // klíč se nenachází v <i>node</i> 11     <b>return</b> SEARCH(<i>node.child<sub>i</sub></i>, <i>k</i>) 12 <b>fi</b></pre>	

- b) Při vkládání je nutné dát si pozor, kam vkládáme. Může se nám stát, že bychom chtěli vložit klíč do už plného uzlu, proto je nutné jej rozdělit. Na přednášce byl představený optimalizovaný algoritmus, který při průchodu dolů preventivně rozděluje všechny plné uzly, aby po vložení do uzlu nemusel opět procházet stromem nahoru a opravovat jej, pokud vyvolal štěpení v dolním uzlu, které by se muselo propagovat nahoru. Pro jednoduchost kódu využijeme metodu SPLITCHILD, která rozdělí

uzel s  $2t$  potomky na 2 uzly s  $t$  potomky a INSERTNONFULL, která vloží klíč do uzlu, který není plný. Algoritmus vkládání je tedy následovný:

<b>Procedura</b> INSERT( $T, k$ )	
	<b>vstup:</b> strom $T$ do kterého vkládáme klíč $k$
1	$node \leftarrow T.root$
2	<b>if</b> $node.n = 2t - 1$ <b>then</b>
	<i>// kořen je plný a má <math>2t</math> potomků</i>
3	$s \leftarrow \text{NEW Node}()$
4	$T.root \leftarrow s$ <i>// vytvoříme nový kořen</i>
5	$s.leaf \leftarrow \text{false}$
6	$s.n \leftarrow 0$
7	$s.child_1 \leftarrow node$
8	SPLITCHILD( $s, 1$ ) <i>// rozdělíme prvního potomka</i>
9	INSERTNONFULL( $s, k$ ) <i>// vložíme prvek do nového uzlu</i>
10	<b>else</b>
11	INSERTNONFULL( $node, k$ ) <i>// vložíme prvek do node</i>
12	<b>fi</b>

Pomocná procedura SPLITCHILD:

<b>Procedura</b> SPLITCHILD( $node, i$ )	
	<b>vstup:</b> uzel $node$ a pozice $i$ , na které se nachází dítě k rozdělení
1	$z \leftarrow \text{NEW Node}()$
2	$y \leftarrow node.child_i$
3	$z.leaf \leftarrow y.leaf$
4	$z.n \leftarrow t - 1$
5	<b>for</b> $j \leftarrow 1$ <b>to</b> $t - 1$ <b>do</b>
6	$z.key_j \leftarrow y.key_{j+t}$
7	<b>od</b>
8	<b>if</b> not $y.leaf$ <b>then</b>
9	<b>for</b> $j \leftarrow 1$ <b>to</b> $t$ <b>do</b>
10	$z.child_j \leftarrow y.child_{j+t}$
11	<b>od</b>
12	<b>fi</b>
13	$y.n \leftarrow t - 1$
14	<b>for</b> $j \leftarrow node.n + 1$ <b>downto</b> $i + 1$ <b>do</b>
15	$node.child_{j+1} \leftarrow node.child_j$
16	<b>od</b>
17	$node.child_{i+1} \leftarrow z$
18	<b>for</b> $j \leftarrow node.n$ <b>downto</b> $i$ <b>do</b>
19	$node.key_{j+1} \leftarrow node.key_j$
20	<b>od</b>
21	$node.key_i \leftarrow y.key_t$
22	$node.n \leftarrow node.n + 1$

Pomocná procedura INSERTNONFULL:

<b>Procedura</b> INSERTNONFULL( <i>node</i> , <i>k</i> )	
	<b>vstup:</b> vloží hodnotu <i>k</i> do stromu s kořenem <i>node</i> , kde uzel <i>node</i> není plný
1	$i \leftarrow node.n$
2	<b>if</b> <i>node.leaf</i> <b>then</b>
3	<b>while</b> $i \geq 1 \wedge k < node.key_i$ <b>do</b>
4	$node.key_{i+1} \leftarrow node.key_i$
5	$i \leftarrow i - 1$
6	<b>od</b>
7	$node.key_{i+1} \leftarrow k$
8	$node.n \leftarrow node.n + 1$
9	<b>else</b>
10	<b>while</b> $i \geq 1 \wedge k < node.key_i$ <b>do</b>
11	$i \leftarrow i - 1$
12	<b>od</b>
13	$i \leftarrow i + 1$
14	<b>if</b> $node.child_i.n = 2t - 1$ <b>then</b>
15	SPLITCHILD( <i>node</i> , <i>i</i> )
16	<b>if</b> $k > node.key_i$ <b>then</b>
17	$i \leftarrow i + 1$
18	<b>fi</b>
19	<b>fi</b>
20	INSERTNONFULL( <i>node.child<sub>i</sub></i> , <i>k</i> )
21	<b>fi</b>

Preemptivní štěpení uzlů optimalizuje počet čtení z disku za cenu mírného zvýšení paměťových nároků. Preemptivní štěpení lze aplikovat jenom na B-stromy sudé arity. Sudou aritu máme zajištěnou tím, že B-strom definujeme pomocí stupně  $t$  a arita je  $2t$ .

- c) Při odstranění klíče z uzlu musíme dbát na dodržení pravidla o minimálním počtu klíčů ve stromě. Triviální implementace by postupovala tak, že najdeme klíč, ten smažeme a následně strom opravíme průchodem ke kořeni. Operaci opět dokážeme optimalizovat tím, že si strom při průchodu dolů budeme upravovat (stlačovat) abychom po mazání už nemuseli nic opravovat. Mazání klíče si můžeme rozdělit na vícero podpřípadů:

1. pokud klíč je v listu, odstraň klíč a
2. pokud klíč je ve vnitřním vrcholu:
  - (a) pokud má potomek v intervalu mezi klíči  $k$  a  $k + 1$  dostatek klíčů, tedy  $t$ , nahraď  $k$  jeho předchůdcem a rekurzivně opakuj odstraňování na původní pozici předchůdce,
  - (b) pokud má potomek méně klíčů, tak podobně prozkoumej potomka, který je v intervalu  $k$  a  $k + 1$ . Pokud podmínku splňuje, nahraď  $k$  za jeho následníka a následníka smaž a
  - (c) pokud ani jeden z potomků nevyhovoval, spoj oba potomky, přesuň  $k$  do jejich spojení a rekurzivně smaž  $k$  z nového uzlu.

**9.15** Všechny tři procedury jsou u B-stromů obdobné jako u binárního vyhledávacího stromu.

**Procedura** MINIMUM(*node*)**vstup:** uzel *node* – kořen stromu, jehož minimum hledáme**výstup:** ukazatel na uzel s minimálním klíčem

```

1 if node.leaf then
2   return node
3 fi
4 return MINIMUM (node.child0)

```

**Procedura** SUCCESSOR(*node, key*)**vstup:** uzel *node* a jeho klíč *key*, jehož následníka hledáme**výstup:** ukazatel na uzel s minimálním klíčem

```

1 i ← 1
2 while i ≤ node.n ∧ key > node.keyi do
    // hledání správné větve
3   i ← i + 1
4 od
5 return MINIMUM(node.childi+1)

```

Algoritmus k dohledání předchůdce je symetrický k následníkovi (tedy volá se maximum na levý podstrom, který je pod o 1 menším indexem).

**9.17**

- a) Mírně se zvedne paměťová složitost, jelikož klíče vnitřních uzlů jsou jen pomocné, data se v nich fyzicky neukládají.

Ukládání do listů nám však dá možnost rozlišit klíče od dat. Klíče nemusí být stejného typu jako data. Dále jednodušeji získáme předchůdce a následníka, což se hodí, pokud chceme číst data v nějakém intervalu, což odpovídá například čtení souboru, kde ukládaná data jsou jen částí (což může být třeba 4kB) souboru, takže pro přečtení celého souboru potřebujeme přečíst více listů.

- b) Zatímco v B+ stromě stačí najít počátek bloku a pak sekvenčně číst, dokud nejsme na konci, u B-stromu potřebujeme po každém přečtení celého listu vyjít do rodiče, do dat přidat daný klíč a jít do dalšího listu. Zatímco v B+ stromě se tedy čtení podobá čtení zřetězeného seznamu, v B-stromě se jedná o inorder výpis.

**9.18** Následující tabulka shrnuje složitost operací z vyhledávacích datových struktur.

datová struktura	<i>search</i>	<i>insert</i>	<i>delete</i>	<i>search</i> průměr
pole – sekvenční hledání	$n$	$n$	$n$	$n/2$
pole – binární hledání	$\log n$	$n$	$n$	$\log n$
binární vyhledávací strom	$n$	$n$	$n$	$1.39 \cdot \log n$
červeno-černý strom	$2 \cdot \log n$	$4 \cdot \log n$	$4 \cdot \log n$	$\log n$
B-strom	$2t \cdot \log_{2t} n$	$2t \cdot \log_{2t} n$	$2t \cdot \log_{2t} n$	$t \cdot \log_{2t} n$

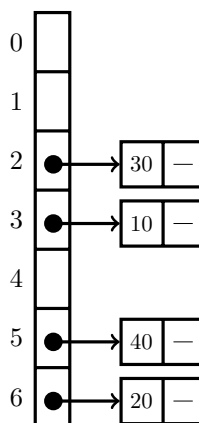
# Hašovací tabulka

## 10.1

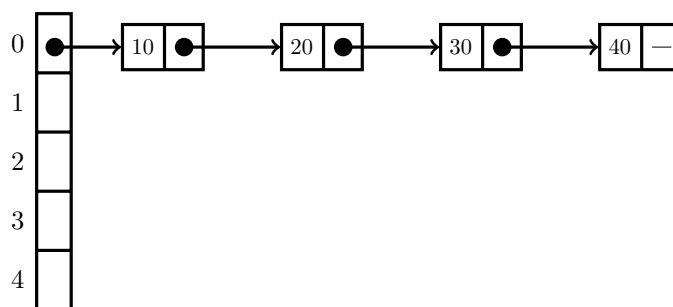
- a) Zásobník. Otevírací závorka se vkládá na zásobník, uzavírací maže z vrcholu zásobníku.
- b) Fronta. Chceme, aby byly dokumenty tisknuty v pořadí, v jakém do tiskárny přišly.
- c) Rejstřík je seřazené pole dvojic pojmu a čísel stránek s výskytem. Právě díky odkazu na příslušnou stránku se dá rejstřík považovat za hašovací tabulku, ačkoliv vyhledávání v rejstříku pro člověka není v konstantním čase (ale pro počítač může být, pokud řetězec převedeme na číslo).
- d) Pro řetězce, u kterých je možná modifikace z libovolného místa, nelze efektivně použít pole (lineární čas pro vkládání i odstraňování uprostřed). Zřetěžený seznam by zvládal tyto operace v konstantním čase, ale na druhou stranu by musel lineárně vyhledávat pozici v řetězci. V textových editorech se tedy používají stromy, kterým se říká lano (rope). Jsou to stromy s omezenou hloubkou a v listech se nenachází jednotlivé znaky, ale různě dlouhé části řetězce.
- e) Strom, kde rodičem bude šéf a zaměstnanci budou potomky.
- f) Pro zajištění konstantního přístupu by šlo použít pole všech studentů, kde by bylo indexem UČO. V poli bychom uchovávali informaci, zdali má student daný předmět zapsaný. Takové pole je vlastně hašovací tabulkou, kde hašovací funkcí je přímo UČO a velikost tabulky je počet studentů MUNI (450000 studentů, což jsou velké nároky na paměť). Proto je lepší použít hašovací tabulku, která bude uchovávat studenty na základě haše jejich identifikačního čísla.

## 10.2

- a) Výsledná tabulka vypadá následovně:



- b) Výsledná tabulka vypadá následovně:



- c) Složitost může být v nejhorším případě až lineární vzhledem k počtu prvků.
- d) Můžeme namísto zřetěženého seznamu budovat vyvážený vyhledávací strom. Alternativou je použití vnořených tabulek pro políčka s hodně kolizemi (takové řešení však může být v nejhorším případě lineární). Vnořenou tabulku musíme hašovat jinou funkcí.

### 10.3

- a) Libovolná hašovací funkce, která vrací pouze hodnotu 0.
- b) Řešením je například hašovací funkce  $h(x) = (x + 1) \bmod 5$ .
- c) Nejedná se o hašovací tabulku, hašovací funkce v tomto případě není funkce, protože zobrazuje stejné vzory na 2 různé obrazy.
- d) Řešením je například následující hašovací funkce:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in \{0, 4, 8\} \\ 2 & \text{pokud } x \in \{1\} \\ 3 & \text{pokud } x \in \{3, 7\} \end{cases}$$

Což může být například  $h(x) = (2^x) \bmod 5$ . Taková funkce by mimochodem nikdy nevyužila pozici 0, protože žádná mocnina dvojky nekončí číslicí 0 ani 5.

### 10.4

- a) V ideálním případě umožňuje hašovací tabulka konstantní přístup k prvku danému klíčem. Přístupem je zde myšleno vkládání, odstraňování a vyhledávání. Cenou je paměťová náročnost dána velikostí použité tabulky.
- b) Hašovací tabulka se hodí v situacích, kdy potřebujeme rychlý přístup k prvku. Příklady použití tedy mohou být vyhledávání řetězce (rejstřík, slovník) a routovací tabulka.
- c) Rozsahem hodnot hašovací funkce určujeme, jak časté budou kolize proti paměťové složitosti. Velký rozsah hodnot znamená málo kolizí ale i spoustu volných slotů. Malý obor hodnot zase znamená menší paměťové nároky ale více kolizí a z toho pramenící větší časovou složitost přístupu. Ideální je rozsah roven očekávanému počtu prvků, což však většinou nevíme předem.

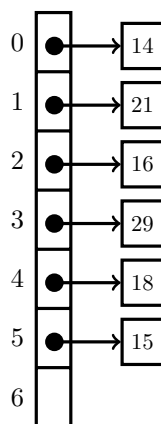
Dobrým řešením, používaným v praxi, je proměnlivá velikost hašovací tabulky. Pokud počet prvků přeroste hranici zaplnění tabulky (většinou přibližně  $\frac{3}{4}$ ), vytvoříme tabulku novou s větším rozsahem hodnot hašovací funkce a tabulku postupně znovu zaplníme. Toto přepočítání je drahá operace, která je provedena v lineárním čase, takže získáváme časovou složitost pro vložení  $\mathcal{O}(n)$ . Pokud budeme velikost tabulky vždy zdvojnásobovat, pak bude průměrná složitost stejná jako vložení normálního prvku.

## 10.5

- a) Tato funkce vrací pro různé řetězce stejné hodnoty – pouhá změna pořadí znaků v řetězci zachovává stále stejný haš.  
Také je její obor hodnot příliš velký, není shora omezen.
- b) Stále vrací pro různé permutace stejných znaků stejnou hodnotu. Obor hodnot je již omezen, a to na velikost abecedy (řekněme 256 hodnot). To může být velmi málo a vést k častým kolizím.
- c) Stále vrací pro různé permutace stejných znaků stejnou hodnotu. Obor hodnot je nastaven podle nás. Problémem však je, že pokud se v řetězci nachází znak s hodnotou 0, pak už výsledek stále zůstane 0. Stejně tak se k 0 lze dostat posloupností násobení, kde se v součinu prvočinitelů bude vyskytovat hodnota modula. Obor hodnot tedy není uniformně rozdělen.
- d) Už téměř ideální řešení, problémem zůstává jen případ, kdy pozice znaku je násobkem velikosti tabulky, pak se hodnota znaku do řešení nezapočítá. Druhým problémem je, že pozice, které mají vysokého největšího společného dělitele s velikostí tabulky mají vysokou pravděpodobnost, že jejich znaky můžou být vyhodnoceny stejně pro různé symboly.
- e) Napravuje 2. problém předchozího řešení.

## 10.6

- a) Výsledná tabulka vypadá následovně:

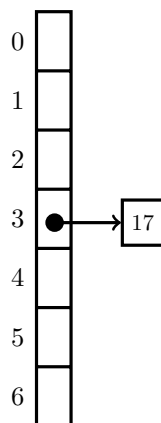


- b) Při nepříznivých podmínkách dostáváme až lineární složitost, kdy musíme projít celou tabulku, abychom našli náš prvek.
- c) Všimněme si, že naše lineární sondování ukládá hodnotu při kolizi na první volné místo za pozici s kolizí. Pokud se při hledání volného místa vrátíme na počáteční místo v tabulce, pak prohlásíme, že je tabulka plná. Pro nápravu můžeme zvětšit  $n$  v hašovací funkci, čím se zvětší rozsah tabulky a můžeme přkopírovat hodnoty z menší tabulky do větší (znovu za použití hašovací funkce, aby se hodnoty nacházely na správných pozicích).

## 10.7

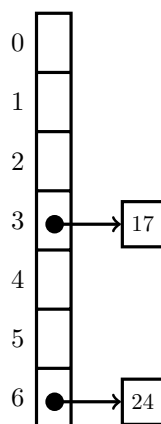
- a) Postupně vkládáme hodnoty:

1. Vložíme 17: Tedy  $h(x, 0) = h(x) + 0 = 3$ .

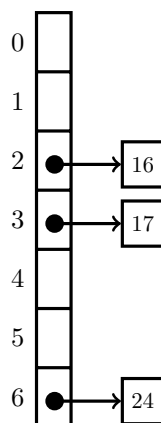


2. Vložíme 24: Jelikož je už pozice 3 zabraná zvětšíme krok na  $i = 1$  pak

$$h(x, i) = (h(x) + 2i + i^2) \bmod 7 = 6$$



3. Vložíme 16: Tedy  $h(x, 0) = h(x) + 0 = 2$ .



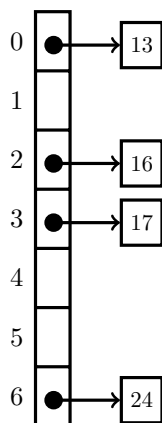
4. Vložíme 13: Jelikož je už pozice 6 zabraná zvětšíme krok na  $i = 1$ , pak

$$h(x, i) = (h(x) + 2i + i^2) \bmod 7 = 2$$

Což je ale opět zabraná pozice, proto musíme zvětšit krok na  $i = 2$ , pak

$$h(x, i) = (h(x) + 2i + i^2) \bmod 7 = (h(x) + 4 + 4) \bmod 7 = 0$$





- b) Při nepříznivých podmínkách opět dostáváme až lineární složitost, kdy musíme projít celou tabulku, abychom našli náš prvek.

**10.8** Množinu lze v knihovnách programovacích jazyků najít v různých implementacích. Dříve se pro malou paměťovou složitost preferovaly červeno-černé stromy, dnes se díky větším kapacitám paměti rozšiřují hašovací tabulky, jelikož mohou mít menší časovou složitost.

**10.9** Vyvážený vyhledávací strom – například červeno-černý strom. Navíc však všechny uzly musíme spojit do obostranně spojovaného seznamu. K němu si budeme udržovat poslední vložený prvek a v případě vkládání na nový prvek odkážeme z bývalého posledního prvku. Při odstraňování budeme odstraňovat nejen ze stromu, ale musíme i napravit ukazatele seznamu.

**10.10** Obecný  $n$ -ární strom (ne vyhledávací). Byt podstromem je stejná relace jako být podřízeným. Nalezení nadřízeného pak znamená nalezení nejmenšího společného předka.

Ne vždy však jde o strom, jeden zaměstnanec může zastávat více rolí a tak mít různé nadřízené, nebo si sám může být nadřízeným. Obecným řešením je tedy orientovaný acyklický graf.

#### 10.11

- a) Použití seznamu k řešení kolizí:

<b>Procedura</b> INSERT( $T, (k, v)$ )
<b>vstup:</b> tabulka $T$ , $(k, v)$ je dvojice klíče a hodnoty <b>1</b> $h \leftarrow \text{HASH}(k) \bmod  T $ <b>2</b> vlož $(k, v)$ do seznamu $T[h]$

Použití kvadratické sondovací metody pro řešení kolizí:

<b>Procedura</b> INSERT( $T, (k, v)$ )
<b>vstup:</b> tabulka $T$ , $(k, v)$ je dvojice klíče a hodnoty 1 $i \leftarrow 0$ 2 $h \leftarrow \text{HASH}(k) \bmod  T $ 3 <b>while</b> $i <  T $ <b>do</b> 4 <b>if</b> $T[h]$ je prázdný slot <b>then</b> 5 $T[h] \leftarrow (k, v)$ 6 <b>return</b> 7 <b>fi</b> 8 $i \leftarrow i + 1$ 9 $h \leftarrow (\text{HASH}(k) + i^2) \bmod  T $ 10 <b>od</b> 11 <b>return</b> tabulka je plná

b) Použití seznamu na řešení kolizí:

<b>Procedura</b> SEARCH( $T, k$ )
<b>vstup:</b> tabulka $T$ , klíč $k$ 1 $h \leftarrow \text{HASH}(k) \bmod  T $ 2 <b>if</b> $(k, v)$ je v seznamu $T[h]$ <b>then</b> 3 <b>return</b> $v$ 4 <b>else</b> 5 <b>return</b> <i>nil</i> 6 <b>fi</b>

Použití kvadratické sondovací metody pro řešení kolizí:

<b>Procedura</b> SEARCH( $T, k$ )
<b>vstup:</b> tabulka $T$ , klíč $k$ 1 $i \leftarrow 0$ 2 $h \leftarrow \text{HASH}(k) \bmod  T $ 3 <b>while</b> $i <  T $ <b>do</b> 4 <b>if</b> $T[h]$ je plný a $T[h].k = k$ <b>then</b> 5 <b>return</b> $v$ 6 <b>fi</b> 7 $i \leftarrow i + 1$ 8 $h \leftarrow (\text{HASH}(k) + i^2) \bmod  T $ 9 <b>od</b> 10 <b>return</b> <i>nil</i>

c) Použití seznamu na řešení kolizí:

<b>Procedura</b> DELETE( $T, k$ )
<b>vstup:</b> tabulka $T$ , klíč $k$ 1 $h \leftarrow \text{HASH}(k) \bmod  T $ 2 smaž $(k, v)$ ze seznamu $T[h]$

Pokud chceme odstranit prvek z hašovací tabulky, která používá lineární sondování pro řešení kolizí, pak musíme vyřešit problém, že nám v tabulce vznikla díra. Tedy potencionálně už nedokážeme

najít prvky, které v důsledku kolize s mazaným prvkem byly v tabulce odsunuty na jinou nekolizní pozici. Takovou situaci můžeme řešit více způsoby. Jednoduchým, zato ale časově náročným způsob je přehašování všech prvků, které byly v souvislém bloku za mazaným prvkem.

<b>Procedura DELETE(<math>T, k</math>)</b>	
<b>vstup:</b> tabulka $T$ , klíč $k$	
1	$h \leftarrow \text{SEARCH}(T, k)$ // <i>upravený SEARCH vrací index</i>
2	<b>if</b> $h \neq \text{nil}$ <b>then</b>
3	$T[h] \leftarrow \text{nil}$
4	$i \leftarrow (h + 1) \bmod  T $
5	<b>while</b> $T[i] \neq \text{nil}$ <b>do</b>
6	$(k, v) \leftarrow T[i]$
7	$T[i] \leftarrow \text{nil}$
8	INSERT( $T, (k, v)$ )
9	$i \leftarrow (i + 1) \bmod  T $
10	<b>od</b>
11	<b>fi</b>

Jiné řešení může smazanou pozici označovat – vytvořením takzvaného *zombie prvku*. Při následném vyhledávání budeme políčko se *zombie prvkem* považovat za obsazené, ale při vkládání jej můžeme jednoduše přepsat jako prázdnou pozici.

### 10.13

- a) Výhodou metody dělení je její rychlost, protože vyžaduje jenom jednu operaci dělení. Naopak zase nevýhodou je potřeba se vyhýbat některým konstantám  $m$ , pro které hašovací funkce není efektivní. To platí například pro  $m$  jako mocniny dvou, kdy  $h(k)$  vrací spodní bity klíče  $k$ . Výhodné klíče jsou naopak prvočísla vzhledem k jejich nesoudělnosti. Abychom se vyhnuli problému s mocninou dvou, je dobré vybírat prvočísla dále od těchto mocnin.
- b) Multiplikativní metodu můžeme nadefinovat takto:

1. Zvolíme konstantu  $A$  v rozsahu  $0 < A < 1$ .
2. Vynásobíme klíč  $k$  konstantou  $A$ .
3. Necháme si desetinnou část z výsledku.
4. Tuhle část vynásobíme  $m$ .
5. Zaokrouhlíme dolů.

Ve zkratce  $h(k) = \lfloor m(kA \bmod 1) \rfloor$ , kde  $kA \bmod 1 = kA - \lfloor kA \rfloor$  = desetinná část z  $kA$ .

Nevýhodou multiplikativní metody je menší rychlost oproti metodě dělení. Ale naopak výhodou je, že hodnota  $m$  není kritická.

### 10.14

- a) Ideální hašovací funkce by měla zachovávat uniformnost hašování. Tedy pro náhodnou množinu vstupů by jednotlivé haše měly mít stejnou pravděpodobnost výskytu, čímž zajistíme minimální počet kolizí. Tato vlastnost také souvisí s lavinovým efektem, který říká, že malé změny vstupu znamenají velké změny výstupu.

V praxi tahle podmínka ale nemusí být postačující, vzhledem k tomu, že nevíme nic o pravděpodobnostním rozložení množiny klíčů. Pro lepší výsledky se v praxi využívají heuristické funkce, které vycházejí z vědomostí o doméně klíčů.

Dále od funkce očekáváme jednoduchost a rychlost výpočtu.

- b) Jedním z možných způsobů je spočítat si haše pro jednodušší podobъекty a následně xorovat, nebo sčítat haše daných podobъекtů.

**10.15** Hašujeme vstupní klíče:

$10 \bmod 7 = 3$ ;  $13 \bmod 7 = 6$ ;  $18 \bmod 7 = 4$ ;  $3 \bmod 7 = 3$ ;  $8 \bmod 7 = 1$ ;  $40 \bmod 7 = 5$ ;  $28 \bmod 7 = 0$

Prvky tabulky	Metoda řetězení	Metoda lineárního sondování	Metoda kvadratického sondování
T[0]	[28]	[40]	[3]
T[1]	[8]	[8]	[8]
T[2]	[]	[28]	[28]
T[3]	[10, 3]	[10]	[10]
T[4]	[18]	[18]	[18]
T[5]	[40]	[3]	[40]
T[6]	[13]	[13]	[13]

**10.16** Vybážený binární vyhledávací strom řadící podle primárního klíče, který v uzlu kromě ukazatelů na potomky obsahuje i ukazatel na BVS řadící podle sekundárních klíčů, který obsahuje všechny hodnoty se zadaným primárním klíčem. Pro další klíče lze postupovat obdobně.

**10.17** Vybážený vyhledávací strom – například červeno-černý strom.

**10.18** 2 seznamy, jeden pro prvky s klíčem 0, druhý pro prvky s klíčem 1.

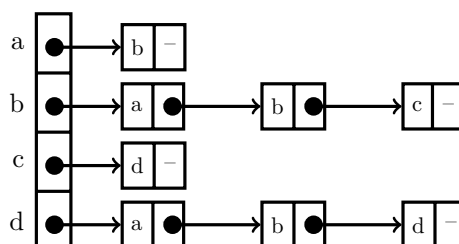
**10.26** Tvrzení platí.

# Průzkum grafů

11.1 Matice pro tento graf vypadá následovně:

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$
$b$	0	3	4	$\infty$
$c$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5
$d$	8	2	$\infty$	7

Seznam následníků bude tedy (přicházíme o ohodnocení hran):



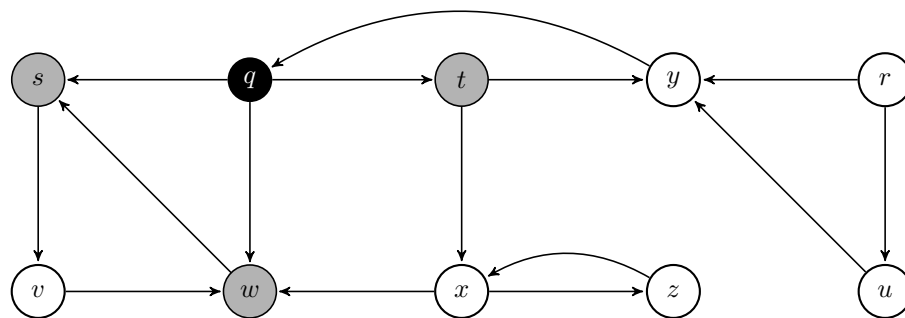
## 11.2

- K zadanému vrcholu se dostaneme s konstantní složitostí, počet výstupních hran pak určíme jako velikost seznamu následujících vrcholů. To má buďto lineární složitost vzhledem k počtu hran ze zadaného vrcholu, nebo konstantní složitost, pokud si pamatujeme velikost seznamu.
- Abychom našli všechny vstupní hrany do zadaného vrcholu, musíme projít všechny hrany grafu. Složitost je tedy lineární vzhledem k počtu hran celého grafu. V grafu reprezentovaném maticí by složitost vstupních i výstupních hrany byla lineární vzhledem k počtu vrcholů v grafu.

## 11.3

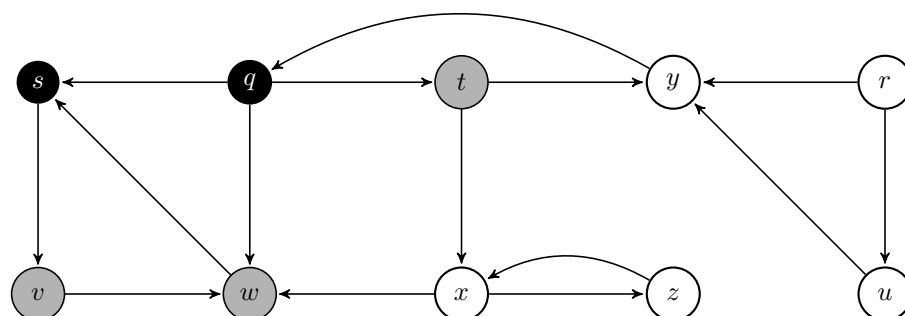
- Provedeme BFS průchod. Bílou barvou značíme nenavštívené vrcholy, šedou vrcholy, které máme ve frontě a černou již zpracované vrcholy.

- (a) Začneme prohledávat z vrcholu  $q$ :



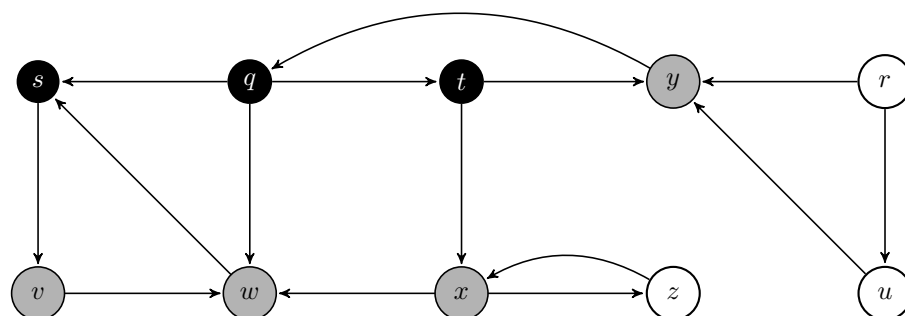
Fronta obsahuje  $s, t, w$ .

- (b) Pokračujeme lexikograficky do  $s$ :



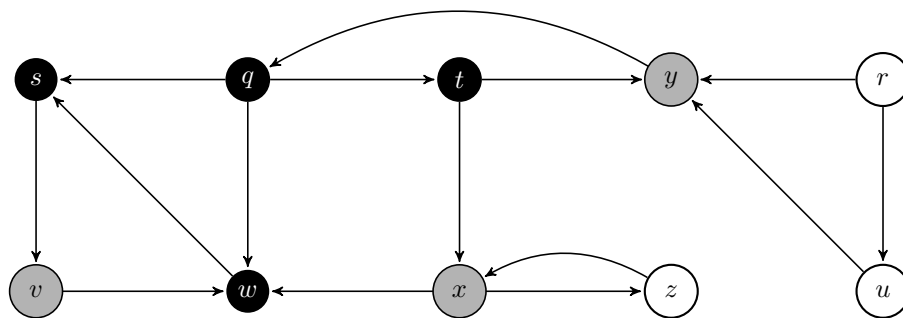
Fronta obsahuje  $t, w, v$ .

- (c) Pokračujeme do  $t$ , který je prvním prvkem fronty:



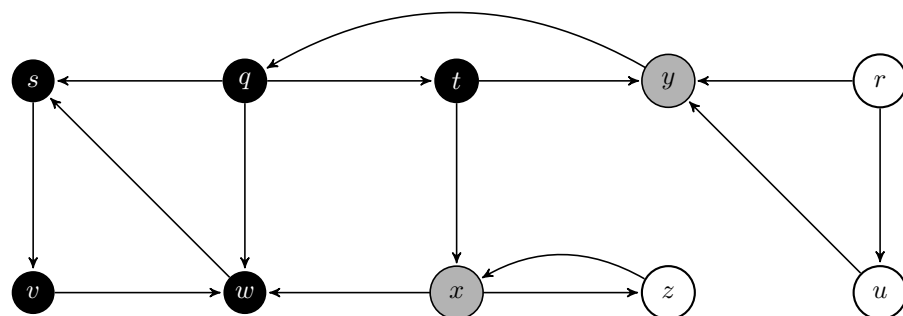
Fronta obsahuje  $w, v, x, y$ .

(d) Pokračujeme do  $w$ :



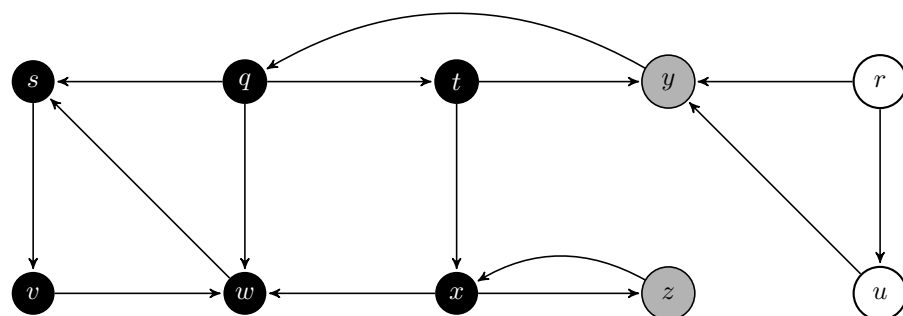
Fronta obsahuje  $v, x, y$ .

(e) Pokračujeme do  $v$ :



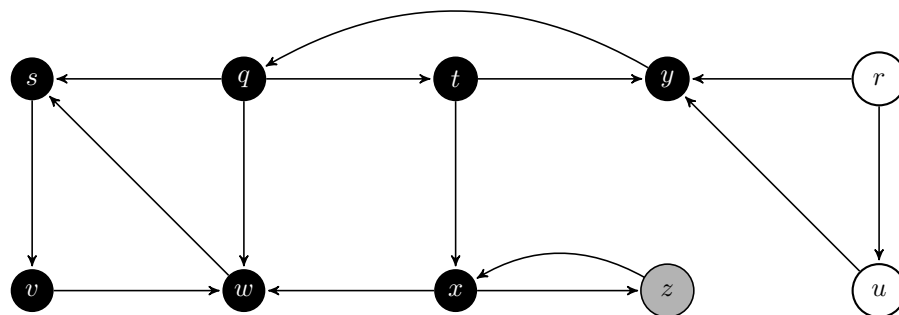
Fronta obsahuje  $x, y$ .

(f) Pokračujeme do  $x$ :



Fronta obsahuje  $y, z$ .

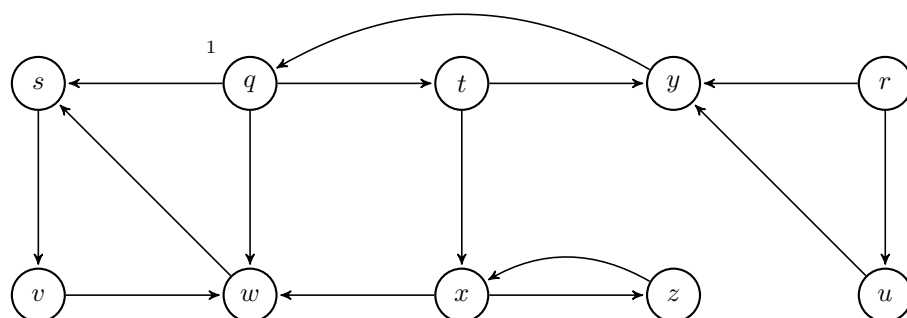
(g) Nalezneme  $y$ , ve vzdálenosti 2 zanoření z  $q$ :



b) Všechny kromě vrcholů  $r$  a  $u$ . Právě z vrcholu  $r$  lze celý graf projít, jelikož se z  $r$  vede hrana do  $u$  a také se přes  $y$  lze dostat do  $q$ , ze kterého jsme našli zbytek grafu.

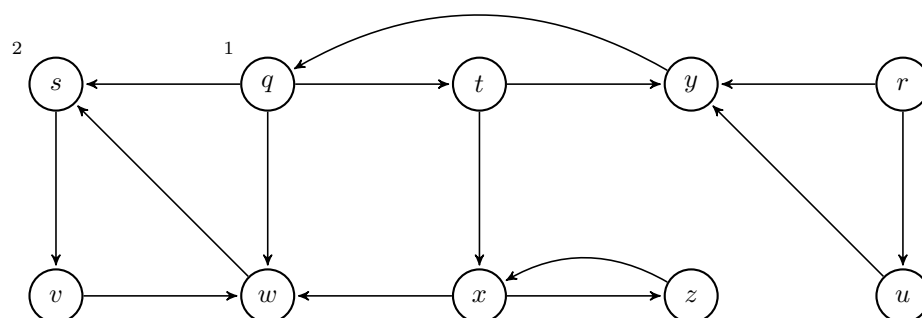
c) Provedeme DFS průchod, přičemž budeme značit časové známky.

(a) Začneme z vrcholu  $q$ :



Zásobník obsahuje  $q$ .

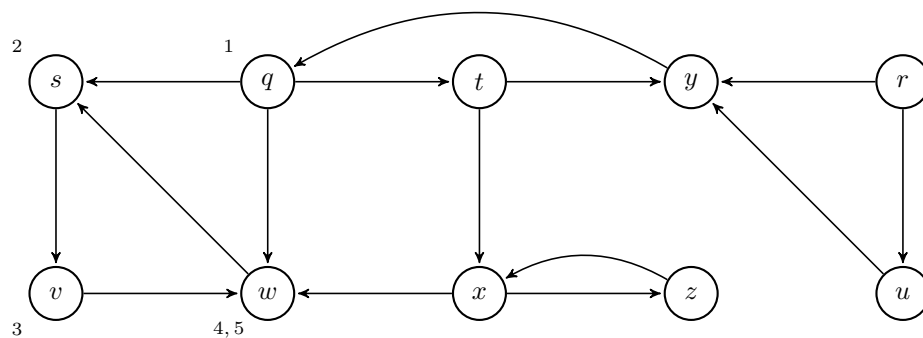
(b) Pokračujeme do  $s$ :



Zásobník obsahuje  $s, q$  (dno je vpravo).

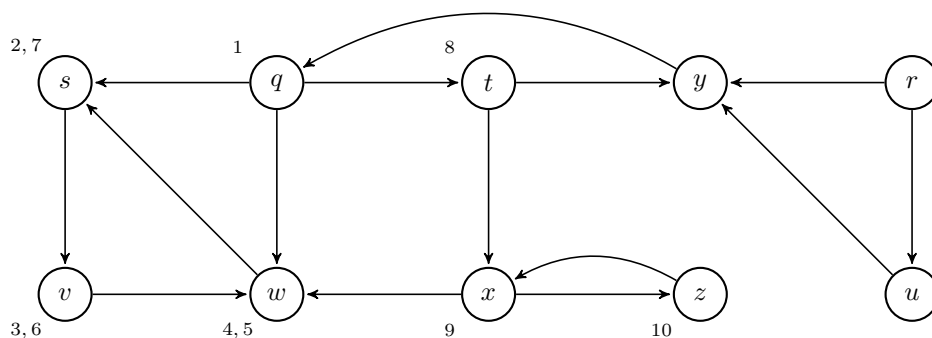


- (c) Pokračujeme do  $v$  (zásobník obsahuje  $v, s, q$ ) a  $w$  (zásobník obsahuje  $w, v, s, q$ ), pak  $w$  opouštíme:



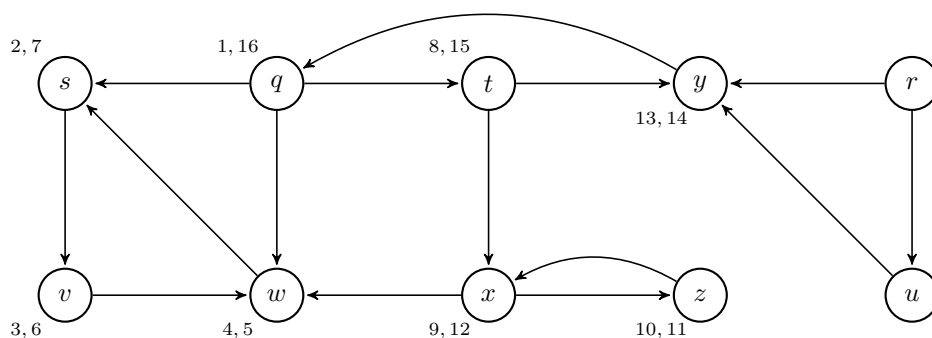
Zásobník obsahuje  $v, s, q$  (dno je vpravo).

- (d) Opustíme vrchol  $v$ , poté  $s$  a pokračujeme do  $t, x$  a  $z$ :



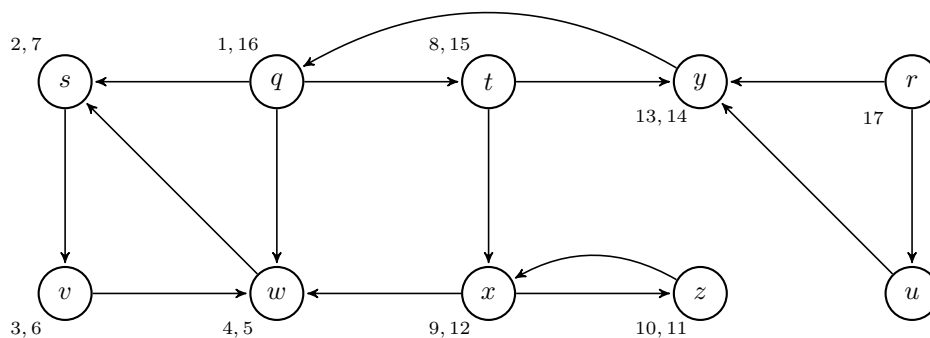
Zásobník obsahuje  $z, x, t, q$  (dno je vpravo).

- (e) Opustíme vrchol  $z$ , poté  $x$  a pokračujeme do  $y$  (zásobník obsahuje  $y, t, q$  a pak jej vyprázdníme):



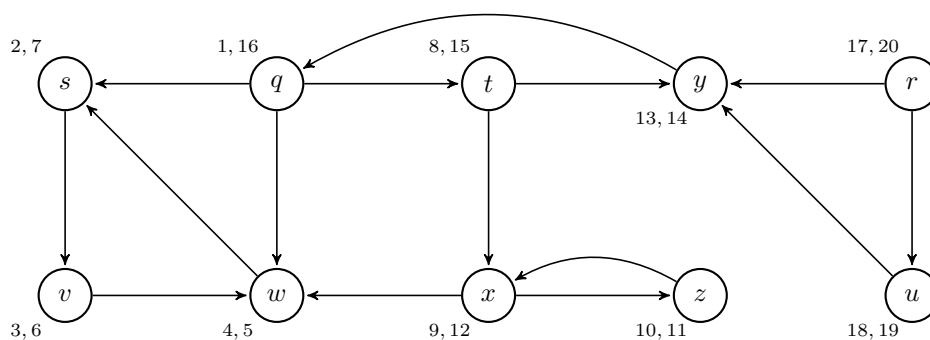
Zásobník je prázdný.

(f) Pokračujeme novým průchodem z  $r$ :

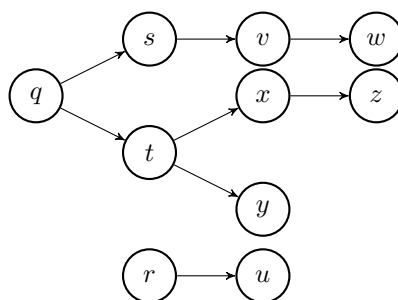


Zásobník obsahuje  $r$ .

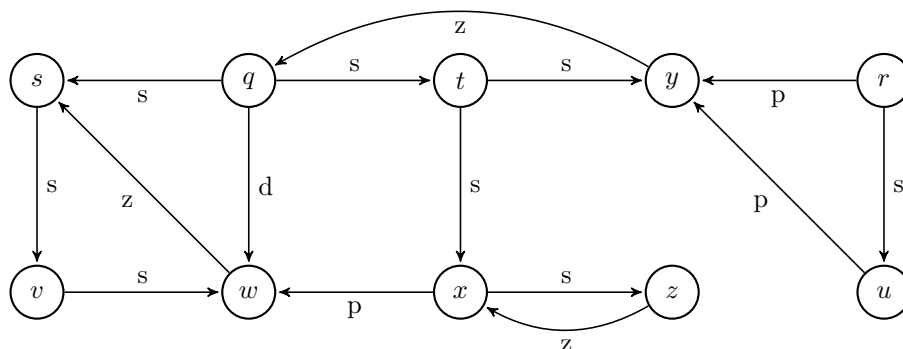
(g) Ukončujeme průchod z  $u$ , a jelikož mají všechny vrcholy časové známky, ukončujeme průchod:



DFS les vypadá takto:



Hrany klasifikujeme podle zvoleného lexikografického průchodu následovně:



- d) Z vrcholu  $u$  se lze dostat do vrcholu  $w$ , ale z časových známek to vyčíst nelze. Přesto můžeme z časových známek určit slabší tvrzení. Má-li vrchol  $a$  časové známky v intervalu časových známek vrcholu  $b$ , pak existuje cesta z  $b$  do  $a$ . Opačné tvrzení však neplatí.

Časové známky jsou závislé pouze na stromových hranách, jiné hrany v grafu být nemusí. Proto ze známek neurčíme podobu grafu.

- e) BFS prozkoumá vrchol  $z$  jako 8. vrchol, DFS jako 7.

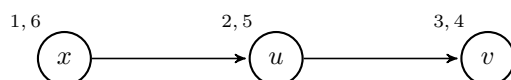
Obecně se před průchodem nezle rozhodnout, který průchod bude výhodnější. Můžete se rozhodovat jediné v případě, že máte nějaké další informace o grafu, který procházíte.

- f) Z pohledu časové složitosti oba algoritmy patří do  $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ , protože musí prozkoumat všechny vrcholy a otestovat všechny hrany. Paměťová složitost se ale liší. U grafů s vrcholy s vysokým výstupním stupněm si udržujeme ve frontě více vrcholů, než bychom měli v zásobníku v případě DFS. Grafy s dlouhými cestami mohou být prostorově náročnější v případě DFS.

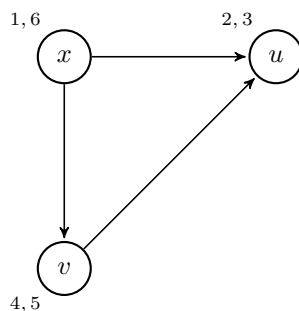
- g) Graf jednoduché cesty.

#### 11.4

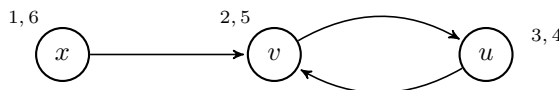
- a) Neplatí. Protipříklad:



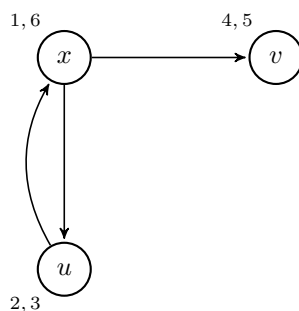
- b) Neplatí. Protipříklad:



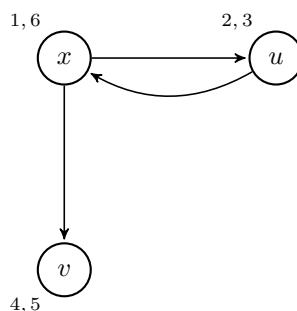
- c) Neplatí. Protipříklad:



- d) Neplatí. Protipříklad:



e) Neplatí. Protipříklad:



f) Platí. Nemohu ukončit procházení vrcholu  $u$ , pokud mám hranu do vrcholu  $v$ , který začnu procházet až někdy později.

### 11.5

a) Graf s maximálním počtem hran obsahuje hranu mezi každými dvěma vrcholy. To odpovídá počtu kombinací dvojic vrcholů. Abychom vyjádřili počet pro orientovaný graf, musíme ještě počet vynásobit dvěma. Pak ještě musíme přidat všechny smyčky nad vrcholy.

$$2 \cdot \binom{n}{2} + n = n^2$$

Alternativně na počet hran můžete přijít tak, že si zafixujete jeden vrchol. Z něj vedou hrany do všech. Pak je počet hran:

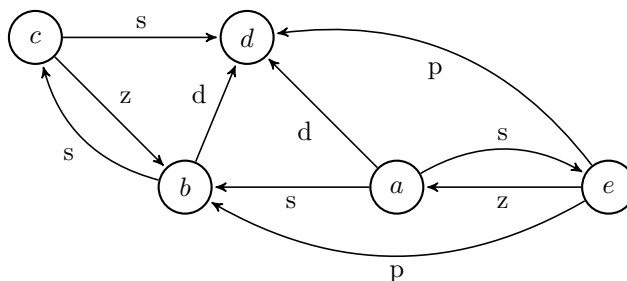
$$n \cdot n = n^2.$$

b)  $n - 1$ .

c) Pokud hrany tvoří orientovanou cestu, pak stačí přidat 1 hranu pro uzavření cyklu. V nejhorším případě však všechny vrcholy mohou být ve vzdálenosti 1 od jednoho vrcholu. Pak musíme přidat ještě  $n - 1$  hran.

Alternativně si můžete představit, že pomocí  $n - 1$  hran můžete doplnit jednu hranu tak, aby vznikl cyklus.

### 11.6



11.7 Vzdálenost zadaných vrcholů ve stromě nám dává horní odhad vzdálenosti vrcholů v grafu. Je tedy jisté, že vzdálenost v grafu je menší nebo rovna vzdálenosti v BFS stromě.

Rozdíl hloubky nám dává dolní odhad vzdáleností.

### 11.8

- a) Nalezení cyklu odpovídá nalezení zpětné hrany. Můžeme tedy použít časové známky a použít je pouze k hledání zpětné hrany.

Jednodušší algoritmus je DFS s poznamenáváním aktuální procházené větve. Použijeme značku, která říká, že vrchol je zatím procházen. Když vrchol začneme procházet, nastavíme značku na *true*. Když končíme prozkoumávání, značku nastavíme zpět na *false*.

Graf obsahuje cyklus právě tehdy, když při prozkoumávání narazíme na vrchol, který má značku nastavenou na *true*.

- b) Dle předchozího najdu zpětné hrany (na každém cyklu nějaká je). Pro každou zpětnou hranu  $(u, v)$  už pak jen potřebuji najít nejkratší zbytek cyklu, tj. nejkratší cestu z  $v$  do  $u$ . K tomu mohu použít BFS z  $v$ .

### 11.9

- a) Graf obsahuje následující silně souvislé komponenty (vypsány jsou v pořadí, v jakém je objeví algoritmus):

1.  $r$
2.  $u$
3.  $q, t, y$
4.  $x, z$
5.  $s, v, w$

- b) Algoritmus můžeme provést v několika následujících krocích:

1. aplikuj DFS na  $G$  s uložením časových známek pro další využití,
2. vypočti transponovaný graf  $G^T$ ,
3. aplikuj DFS na  $G^T$  tak, že v hlavním cyklu se vrcholy uvažují v pořadí od největší časové známky ukončení prozkoumávání vrcholu z prvního kroku algoritmu a
4. vrcholy každého DFS stromu vypočteného při aplikaci DFS na  $G^T$  tvoří samostatné silně souvislé komponenty.

**11.10** K řešení problému lze použít průchod DFS. Průchod nám vytvoří DFS strom, ze kterého lze zvolit libovolný list a bude o něm platit, že je vrcholem, který lze z původního grafu odstranit.

Obecněji lze odstranit libovolný list libovolné kostry grafu. DFS svým průchodem nalezne jednu z koster.

Vrchol můžeme z grafu odebrat právě tehdy, když po jeho odebrání existuje cesta mezi libovolnou dvojicí vrcholů. Jelikož jsme vzali vrchol, který je listem v kostře, musí každou dvojici vrcholů spojoval právě zbylá kostra.

U orientovaných grafů toto tvrzení neplatí, protipříkladem je orientovaná kružnice na 3 vrcholech, kde po odstranění lze oba vrcholy dosáhnout pouze z jednoho ze zbylých vrcholů.

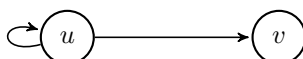
**11.11** První algoritmus je korektní verze rekurzivního DFS, zatímco druhá verze provádí průchod obdobný tomu do hloubky. Ale pořadí (a tedy časové známky) druhého průchodu je odlišné od prvního. Pokud FOR cyklus prochází vrcholy řekněme v abecedním pořadí, pak druhý průchod bude procházet vrcholy pozpátku.

Opravená varianta druhého algoritmu:

<b>Procedura</b> ITERDFS( $u$ )	
	<b>vstup:</b> vrchol $u$
1	$stack \leftarrow \text{empty stack}$
2	PUSH( $stack, u$ )
3	$time \leftarrow time + 1$
4	$u.d \leftarrow time$
5	<b>while</b> $stack$ is not empty <b>do</b>
6	$u \leftarrow \text{POP}(stack)$
7	<b>for</b> $v \in u.successors$ <b>do</b>
8	<b>if</b> $v.color = \text{white}$ <b>then</b>
9	PUSH( $stack, u$ ) // <i>nesmíme zapomenout, že prohledávání <math>u</math> ještě není dokončeno</i>
10	PUSH( $stack, v$ )
11	$v.color \leftarrow \text{gray}$
12	$time \leftarrow time + 1$
13	$v.d \leftarrow time$
14	BREAK
15	<b>fi</b>
16	<b>od</b>
17	$u.color \leftarrow \text{black}$
18	$time \leftarrow time + 1$
19	$u.f \leftarrow time$
20	<b>od</b>

### 11.12

- Jedná se o korektní DFS průchod, jen nepoznamenává časové známky (což není povinná funkcionality DFS).
- Špatný algoritmus BFS. Nepoznamenává barvy vrcholů, takže pokud se v grafu nachází cyklus, tak se tento algoritmus zacyklí.
- Algoritmus cyklí, jelikož opakovaně přidává již prozkoumané prvky do zásobníku. Je potřeba přidat kontrolu, že prvek, který chceme do zásobníku přidat již nebyl prohledáván. Výsledný algoritmus je DFS bez časových známek, barvy slouží pouze k poznačení nalezených prvků.
- Algoritmus projde všechny vrcholy v pořadí, v jakém je při inicializaci vloží do fronty. Všechny další přidávání vrcholů do fronty už jsou zbytečné, vrcholy již budou v době DEQUEUE černé. Navíc díky opakovanému přidávání vrcholů do fronty algoritmus cyklí.
- Použití prioritní fronty místo běžné fronty způsobí, že algoritmus není ani DFS ani BFS. Navíc algoritmus může cyklit, jednoduchým příkladem je graf:



### 11.14 Graf můžeme reprezentovat vícero způsoby:

- Matice sousednosti je matice rozměrů  $|V| \times |V|$ , kde  $V$  je počet vrcholů v grafu. V matici  $M$  každá pozice  $M_{ij}$  vyjadřuje, zdali mezi  $i$ -tým a  $j$ -tým vrcholem existuje hrana (1 pokud hrana

existuje, 0 jinak). Výhodou reprezentace maticí je konstantní časová složitost zjištění jestli jsou 2 vrcholy spojené hranou. Také se v některých algoritmech používá reprezentace maticí pro operace nad grafem (například násobení matic pro hledání nejkratších cest). Její nevýhodou je paměťová složitost, která je kvadratická vůči počtu vrcholů. Proto je výhodné matici používat jen na grafy s mnoha hranami. Další nevýhodou může být, že při počátku zpracovávání grafu nevíme, kolik vrcholů graf obsahuje.

U ohodnoceného grafu si můžeme představit, že do matice budeme namísto 0 a 1 ukládat ceny konkrétních hran mezi vrcholy, pro reprezentaci, že hrana neexistuje můžeme zvolit nekonečno.

Pro reprezentaci neorientovaného grafu nám stačí jenom trojúhelníková matice, protože bude symetrická kolem diagonály.

2. Další známá reprezentace je pomocí seznamu následníků. Reprezentujeme graf tak, že máme pole vrcholů a každému z nich přiřadíme provázaný seznam následníků (sousedních vrcholů). Výhodou této reprezentace je, že ukládá do paměti jenom ty hrany, které v grafu existují, tedy má menší paměťové nároky než reprezentace maticí. Proto se využívá při reprezentaci grafů, které mají menší počet hran. Nevýhodou je naopak zjišťování, zdali 2 vrcholy spolu sousedí, což lze provést v lineárním čase vůči počtu následníků daného vrcholu.

## 11.18

- a) Výpisy pre/in/post order využívají průchodu stromu do hloubky. Liší se pouze v pozici výpisu klíče v uzlu. Pokud vypíšeme před zanořením, jedná se o preorder, pokud mezi zanořeními, pak se jedná o inorder a pokud až po obou zanořeních, pak se jedná o postorder.

Procedura PREORDERDFS( $u$ )
<p><b>vstup:</b> vrchol <math>u</math> – kořen stromu/podstromu</p> <pre> 1 if <math>u = nil</math> then 2   return 3 fi 4 vypiš <math>u.key</math> 5 PREORDERDFS(<math>u.left</math>) 6 PREORDERDFS(<math>u.right</math>) </pre>

Zbylé průchody vypadají podobně, jen se liší v pozici příkazu vypiš  $u.key$ .

- b) Nelze. DFS algoritmus se od našeho průchodu stromem liší v tom, že testuje, zdali jsme již daný vrchol nenavštívili. To však u výpisu netestujeme, protože u stromů se nám to nemůže stát. Jakmile však graf obsahuje cykly, i náš výpis by se zacyklil. Museli bychom tedy přidat kontrolu, zdali vrchol, do kterého se chceme zanořit, již není v zásobníku (k takové kontrole však zásobník vůbec není vhodná datová struktura).
- c) Průchod do šířky. DFS by se na nekonečné větvi zaseklo, zatímco BFS alespoň projde všechny konečné větve. V praxi bychom však nastavili jak pro BFS, tak pro DFS maximální hloubku zanoření (omezením velikosti zásobníku/fronty, podle dostupné paměti).
- d) Algoritmus by iteroval hodnotu  $i \in \mathbb{N}$ . Podle aktuální hodnoty  $i$  by prozkoumal  $i$ -tou hranu prvního uzlu, v první větvi by se zanořil o  $i$  kroků. Obecně by pro každé  $i$  prozkoumal všechny hodnoty ve vzdálenosti  $i$ , kde vzdáleností máme na mysli součet délky cesty od kořene a počet hodnot, které jsme prozkoumávali ve všech uzlech cesty.

Navržený algoritmus je inspirován metodou „dove tailing“.

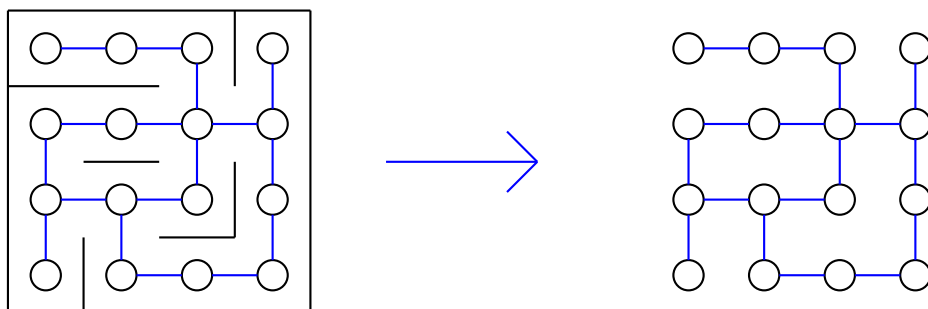
**11.29** Na frontu vložíme až exponenciálně mnoho vzhledem k  $|E|$  vrcholů.



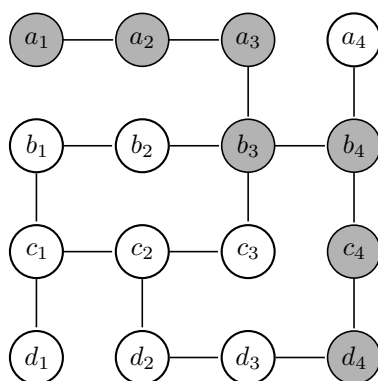
# Cesty v grafech

## 12.1

a) Graf vybudovaný z bludiště vypadá takto:



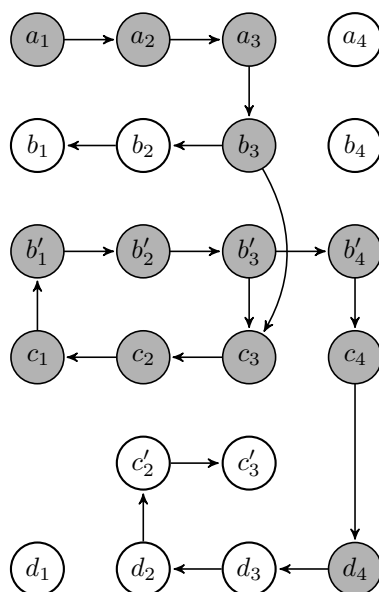
b) Na graf můžeme použít BFS. Cesta má délku 6 a vypadá následovně:



c) Graf musíme předělat na orientovaný. Dále se nám některé uzly rozdělí, mají totiž jiné sousedy podle směru, ze kterého do nich přicházíme.

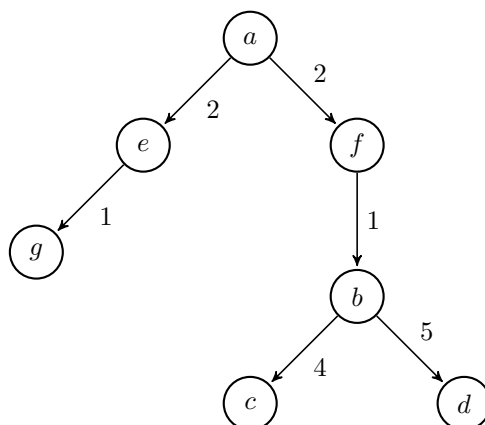
V následujícím grafu jsou rozděleny uzly řady  $b$  a  $c$ . Když se do nich dostáváme poprvé, mají původní popis. Když se opakují, používáme popis  $b'$  a  $c'$ .

Také si všimněte, že vrcholy  $a_4$ ,  $b_4$  a  $d_1$  jsou v novém grafu nedostupné.



## 12.2

- a) Cesta má délku 7, strom nejkratších cest vypadá následovně:



- b) Složitost je v  $\mathcal{O}(|E| \cdot |V|)$ , což lze určit ze 2 cyklů, které iterují nad vrcholy a hranami. Složitost Bellmanova–Fordova algoritmu je vyšší než u Dijkstrova algoritmu, ten však neumí zpracovávat graf se zápornými hranami. Další výhodou Bellmanova–Fordova algoritmu je poměrně snadná paralelizovatelnost (lze relaxovat naráz podle všech hran).
- c) Pro všechny hrany grafu provedeme kontrolu, zda je nalezená vzdálenost jejich konce menší než vzdálenost jejich začátku plus délka hrany (pro hranu  $(u, v)$ :  $v.d \leq u.d + w(u, v)$ , kde  $w(u, v)$  je ohodnocení hrany  $(u, v)$ ).
- d) Použijeme detekci cyklů se zápornou délkou. Vždy, když algoritmus takový cyklus nalezne, projdeme všechny vrcholy, které lze dosáhnout od vrcholu na cyklu a vrcholům přiřadíme vzdálenost  $v.d = -\infty$ . Takto hledáme všechny výskyty cyklů.

**12.3** Mohou vám jako chybné přijít údaje, že cesta  $a \rightarrow b$  je jinak dlouhá, než  $b \rightarrow a$ . To je dáno tím, že silniční síť je orientovaný graf.

Chybná informace v tabulce je délka cest z Hrobu na Onen Svět. Trasa může podle trojúhelníkové nerovnosti mít nanejvýš 206.4 km (zpět 205.4 km). Chybu nalezneme relaxací zmíněné cesty. Pokud

se rozhodneme cestovat přes Záhrobí, bude cesta Hrob – Záhrobí + Záhrobí – Onen Svět měřit pouze  $165+41,4=206,4$  km.

Algoritmickým řešením úkolu je spustit kontrolní relaxaci na všech hranách z algoritmu BELLMAN-FORD. Tím zkontrolujeme, zdali se některá ze vzdáleností nezměnila. Pokud se žádná nezmění, pak je tabulka v pořádku. Pokud by některá z relaxací změnila délku cesty, našli jste špatný údaj.

Tabulka bez chyb vypadá takto:

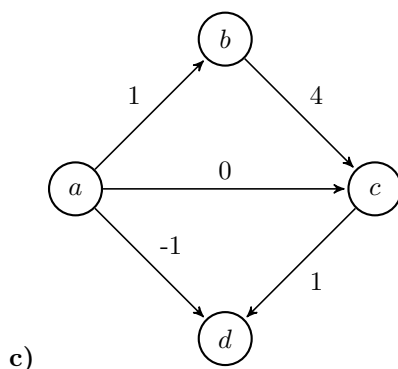
	Peklo	Ráj	Hrob	Onen Svět	Záhrobí
Peklo		149	223	197	230
Ráj	150		84	129	139
Hrob	222	84		206,4	165
Onen Svět	197	129	205,4		41,4
Záhrobí	230	139	164	41,4	

## 12.4

- a) Nejkratší cesta vede přes vrcholy  $a$ ,  $c$ ,  $b$  a  $f$  a má délku 4.
- b) Dijkstrův algoritmus nefunguje na grafy se záporně ohodnocenými hranami. V grafu se záporně ohodnocenými hranami totiž může vzdálenost vrcholu od počátku klesat, což ale není v souladu s tím, že zpracováváme vrchol tehdy, kdy je jeho vzdálenost z počátku minimální.

V našem případě jako první po  $a$  uzavřený vrchol označíme  $d$  se vzdáleností  $-1$ . Pak stejně uzavřeme vrchol  $c$  se vzdáleností  $0$ . Nakonec uzavřeme vrchol  $b$  se vzdáleností  $1$ , ale pokud bychom z tohoto vrcholu pokračovali, tak objevíme vrchol  $c$  ve vzdálenosti  $-3$  a vrchol  $d$  ve vzdálenosti  $-2$ , což jsou menší hodnoty, než se kterými jsme vrcholy uzavřeli.

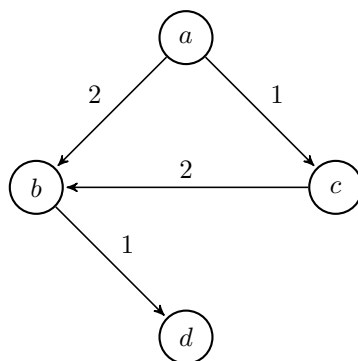
Pro hledání nejkratší cesty se záporně ohodnocenými hranami se používá Bellmanův–Fordův algoritmus, cenou je však větší časová složitost.



Obecně lze mít záporné hrany do vrcholů, ze kterých nevede žádná hrana. Také lze mít záporné hrany u vrcholů, které ještě nemají zpracovaného žádného následníka.

- d) Mohu kontrolovat, že nerelaxuji hranu do vrcholu, který není ve frontě, ale to se špatně kontroluje a navíc to nutně nemusí znamenat chybu. Lepší je po dokončení Dijkstra spustit kontrolní relaxaci na všech hranách tak, jak to dělá BELLMAN-FORD.

**12.5** Změna operace nevede ke korektnímu algoritmu pro hledání nejdelší cesty. Protipříklad (hledání cesty z  $a$  do  $d$ ):



Takto upravený algoritmus by našel cestu  $a - b - d$  s délkou 3, maximální cesta však je  $a - c - b - d$  délky 4. Problém je v tom, že po vyjmutí vrcholu z prioritní fronty vrchol již dále nezpracováváme.

Pokud by algoritmus fungoval, pak by redukcí řešil problém Hamiltonovské kružnice, který je NP-těžký.

## 12.6

- a) Je zobecnění hledání nejkratší cesty mezi dvěma vrcholy. Pro tento účel se používají zase Dijkstrův nebo Bellmanův–Fordův algoritmus.
- b) Problém si dokážeme rozbít na podproblémy. Třeba pokud hledáme cestu z  $a$  do  $b$  přes  $c$ , pak můžeme řešit nejkratší cestu z  $a$  do  $c$  (na grafu bez  $b$ ), následně z  $c$  do  $b$  (na grafu bez  $a$ ) a výsledky spojit.
- c) Problém můžeme redukovat na problém hledání nejkratších cest z jednoho vrcholu do všech ostatních tak, že náš cíl převedeme na počátek cesty a všechny orientace hran obrátíme, čímž můžeme využít řešení z příkladu a).
- d) Problém lze řešit pomocí Dijkstrova algoritmu. Neprovádíme jej do nějakého vrcholu, ale do té doby, dokud bude prioritní fronta obsahovat vrcholy v zadané vzdálenosti. Jakmile překročí vzdálenost, algoritmus ukončíme a nalezené vrcholy jsou v zadaném okolí.
- e) Stačí nám ohodnocení u každé hrany vynásobit  $-1$  a použít algoritmus pro hledání nejkratší cesty, který umí zpracovat graf se záporně ohodnocenými hranami. Záporné cykly nás neohroží, protože máme acyklický graf. Výsledné délky samozřejmě musíme zase vynásobit  $-1$ .
- f) Lze provést  $V$ -krát hledání nejkratších cest do všech vrcholů z jednoho vrcholu. K tomu můžeme použít Bellmanův–Fordův algoritmus, což je zbytečně složité. Alternativou jsou algoritmy pro hledání všech cest v grafu – Floydův–Warshallův a nebo Jonsnův algoritmus.
- g) Tento problém, také známý jako problém obchodního cestujícího, patří do třídy NP-těžkých problémů. Nejjednodušší řešení je vyzkoušet všechny cesty. Pro problém existují i různé heuristiky, které snižují čas výpočtu problému.

**12.7** Algoritmus upravíme tak, že nalezne nejkratší cestu do všech vrcholů. Do grafu přidáme nový vrchol, který bude iniciální vrchol k prohledávání a z něj vedeme hrany délky 0 do všech původně iniciálních vrcholů.

**12.8** Řešením je upravit graf tak, že si ve vrcholu pamatují i příchozí hranu. Zvětším si takto množinu vrcholů podobně jako v příkladu o zákazu odbočování vlevo. Podle hodnoty příchozí hrany pak umažou výchozí hrany, jejichž ohodnocení je menší nebo rovno ohodnocení příchozí hrany.

## 12.9

- a) Při hledání nejkratších cest si udržujeme pro každý vrchol informace o horním odhadu délky cesty ze zdroje až k danému vrcholu ( $v.d$ ), při inicializaci nastavený na  $\infty$ . Dále udržujeme i informaci pro každý vrchol o jeho předchůdci v hledané cestě ( $v.\pi$ ), pokud předchůdce neexistuje je nastavený na  $nil$ .

<b>Procedura INITIALIZE(<math>V, s</math>)</b>	
<b>vstup:</b> $V$ seznam vrcholů, $s$ iniciální vrchol	
1	<b>for</b> $v \in V$ <b>do</b>
2	$v.d \leftarrow \infty$
3	$v.\pi \leftarrow nil$
4	<b>od</b>
5	$s.d \leftarrow 0$

- b) Operace RELAX vyhodnotí, zdali napočítaná cesta do  $v$  je delší než cesta do  $u$  + hrana  $(u, v)$ .

<b>Procedura RELAX(<math>u, v</math>)</b>	
<b>vstup:</b> vrcholy $u$ a $v$	
1	<b>if</b> $v.d > u.d + w(u, v)$ <b>then</b>
2	$v.d \leftarrow u.d + w(u, v)$
3	$v.\pi \leftarrow u$
4	<b>fi</b>

- c) Řešení:

<b>Procedura BELLMAN-FORD(<math>G, s</math>)</b>	
<b>vstup:</b> graf $G = (V, E)$ a počátek cesty $s$	
1	INITIALIZE ( $V, s$ )
2	<b>for</b> $i \leftarrow 1$ <b>to</b> $ V  - 1$ <b>do</b>
3	<b>for</b> každou hranu $(u, v) \in E$ <b>do</b>
4	RELAX( $u, v$ )
5	<b>od</b>
6	<b>od</b>
7	<b>for</b> každou hranu $(u, v) \in E$ <b>do</b>
8	<b>if</b> $v.d > u.d + w(u, v)$ <b>then</b>
9	<b>return</b> <i>false</i> // obsahuje záporný cyklus
10	<b>fi</b>
11	<b>od</b>
12	<b>return</b> <i>true</i>

- d) BFS se zastavilo v hloubce 4 a našlo nejkratší cestu z  $a$  do  $f$ .
- e) BFS prochází původní vrcholy právě ve chvíli, kde je zanořeno v hloubce odpovídající délce nejkratší cesty z vrcholu  $a$  do zkoumaného vrcholu. Vzdálenost se rovná právě hloubce zanoření. Pokud tedy během průchodu do šířky přiřazujeme při nalezení vrcholům aktuální hloubku BFS, vytváříme strom minimálních cest.
- f) Zpracováváme vrchol, který má nejmenší vzdálenost z počátku a není již zpracován.
- g) Vzdálenost se nemůže měnit. Při prvním nalezení vrcholu musí být nutně nalezena nejkratší cesta k němu. Nicméně hrany, které jsou rozděleny pomocnými vrcholy můžeme začít prozkoumávat dříve, než k nim najdeme cestu přes jiné vrcholy. Příkladem je vrchol  $b$ , který nalezneme z vrcholu  $c$  a ještě se poté vracíme pomocí BFS kus hrany  $\{a, b\}$  směrem do  $a$ .

Procedura DIJKSTRA( $G, s$ )	
<b>vstup:</b> graf $G = (V, E)$ a počátek cesty $s$	
1	INITIALIZE( $V, s$ )
2	$Q \leftarrow V$ // $Q$ je množina vrcholů pro zpracování
3	<b>while</b> $Q \neq \emptyset$ <b>do</b>
4	$u \leftarrow \text{EXTRACTMIN}(Q)$
5	<b>for</b> každou hranu $(u, v) \in E$ <b>do</b>
6	<b>if</b> $v.d > u.d + w(u, v)$ <b>then</b>
7	$v.d \leftarrow u.d + w(u, v)$
8	$v.\pi \leftarrow u$
9	DECREASEKEY( $Q, v, v.d$ )
10	<b>fi</b>
11	<b>od</b>
12	<b>od</b>

Všimněte si, že Dijkstrův algoritmus umí hledat i cestu s hranami ohodnocenými 0, zatímco v případě BFS by taková hrana neexistovala.

- i) Minimová halda je datová struktura, která má dobrou rychlost operace DECREASEKEY pro relaxaci a EXTRACTMIN pro výběr vrcholu, který je v minimální vzdálenosti a můžeme jej zpracovat.

Oproti haldě, která operace realizuje v logaritmickém čase, seznam a pole mají lineární složitost alespoň jedné z operací.

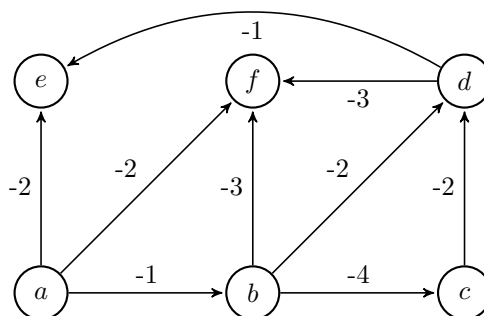


**Paní Bílá připomíná:** Ještě vhodnější pomocnou strukturou pro Dijkstrův algoritmus je Fibonacciho halda, která podporuje DECREASEKEY v konstantním amortizovaném čase.

Jelikož algoritmus projde všechny hrany a v každém průchodu while cyklu musí vybrat minimální vrchol, bude složitost algoritmu v  $\mathcal{O}(|E| + |V| \cdot |V|)$  při použití pole nebo seznamu pro EXTRACTMIN a  $\mathcal{O}(|E| + |V| \cdot \log |V|)$  při použití haldy (prioritní fronty).

## 12.11

- a) Upravený graf:



Nejkratší cesta v tomto grafu je posloupností  $a, b, c, d$  a  $f$  s délkou -10. To znamená, že v původním grafu byla nejdelší cesta na stejné posloupnosti vrcholů a měla délku 10.

Pokud bychom však úkol jen trochu modifikovali tím, že bychom pracovali s neohodnoceným neorientovaným grafem a ptali bychom se, zdali obsahuje kružnici přes všechny vrcholy, jednalo by se o problém hamiltonovské kružnice, ke kterému zatím neexistuje (a nevíme, zda bude existovat) algoritmus řešící jej v polynomiálním čase.

**12.23**

- a) Algoritmus pouze nalezne všechny následníky počátečního vrcholu.
- b) Algoritmus dokáže korektně nahradit cesty délky 2 tranzitivní zkratkou, ale delší cesty nemusí být korektní.