8 Predikátová logika, dokazovanie

V tejto kapitole si ukážeme odvodzovanie (dokazovanie) formúl predikátovej logiky z axióm pomocou odvodzovacích pravidiel a opíšeme si vyhodnocovanie formúl logiky prvého rádu pomocou sémantických stromov.

Formálny systém predikátovej logiky

Tak ako vo výrokovej logike, formálny systém predikátovej logiky tvorí jazyk predikátovej logiky, axiómy predikátovej logiky a odvodzovacie pravidlá. Jazyk sme opísali v predchádzajúcej kapitole, teraz zavedieme axiómy a odvodzovacie pravidlá.

Definícia. Nech je $\mathfrak{L}$ jazyk predikátovej logiky. Za axiómy predikátovej logiky považujeme:
Axiómy výrokovej logiky:

A1: $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$,
A2: $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$,
A3: $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$,

kde A, B a C sú ľubovoľné formuly jazyka $\mathfrak{L}$.
Schému špecifikácie, ktorá pre ľubovoľnú formulu A, premennú x a term t substituovateľný do A za x, má tvar

ASŠ: $(\forall x)A \Rightarrow A_x[t]$.

Schému kvantifikácie implikácie, ktorá pre formuly A, B a premennú x, ktorá nie je voľná v A, má tvar

ASKI: $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$.

Definícia. Odvodzovacími pravidlami predikátovej logiky sú:
Modus ponens:

MP: z formúl A a $A \Rightarrow B$ odvoď formulu B.

Pravidlo zovšeobecnenia:

PZ: pre ľubovoľnú premennú x odvoď z formuly A formulu $(\forall x)A$.

Formulu $(\exists x)A$ považujeme len za skrátený zápis formuly $\neg\big((\forall x)\neg A\big)$ a spojky $\wedge$, $\vee$ a $\Leftrightarrow$ prepisujeme tak isto ako vo formálnom systéme výrokovej logiky.

Definícia. Symbolom $\vdash A$ značíme, že A možno odvodiť (dokázať) z axióm predikátovej logiky pomocou MP a PZ.

Keďže vo formálnom systéme predikátovej logiky sú obsiahnuté všetky axiómy výrokovej logiky a aj pravidlo modus ponens, tak všetky pravdivé formuly výrokovej logiky možno dokázať aj v predikátovej logike.

Definícia. Keď hovoríme o jazyku predikátovej logiky s rovnosťou, tak prijímame ešte nasledujúce axiómy:

E1: $(\forall x)(x = x)$.
E2: Pre každý n-árny funkčný symbol f platí $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_n)\big([(x_1{=}y_1) \wedge \dots \wedge (x_n{=}y_n)] \Rightarrow [f(x_1,\dots,x_n) = f(y_1,\dots,y_n)]\big)$.
E3: Pre každý n-árny predikátový symbol p platí $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_n)\big([(x_1{=}y_1) \wedge \dots \wedge (x_n{=}y_n)] \Rightarrow [p(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow p(y_1,\dots,y_n)]\big)$.

Všimnime si, že (E2) a (E3) nie sú formuly a teda to nie sú axiómy. Ide vlastne o schémy axióm, z ktorých vzniknú axiómy ak zvolíme za f (alebo p) konkrétnu funkciu (predikát).

Veta 8.1 (**o korektnosti**). *Nech je $\mathfrak{L}$ jazyk predikátovej logiky a nech je A formula v $\mathfrak{L}$. Ak je A dokázateľná vo formálom systéme predikátovej logiky, tak je logicky pravdivá (všeobecne platná).*

Dôkaz. Axiómy A1 až A3 sú tautológie výrokovej logiky a sú splnené v ľubovoľnej realizácii $\mathfrak{M}$ jazyka $\mathfrak{L}$ pri ľubovoľnom ohodnotení premenných. Preto sú A1, A2 a A3 logicky pravdivé a podľa Liem 7.4 a 7.3 sú logicky pravdivé aj zvyšné dve axiómy.

Podľa Tarského definície pravdivosti implikácie je modus ponens korektné pravidlo a podľa Lemy 7.2 je korektné aj pravidlo zovšeobecnenia. To znamená, že všetky formuly, ktoré tvoria dôkaz A, sú logicky pravdivé, a preto je logicky pravdivá aj posledná z nich, čiže A. □

Veta 8.1 tvrdí, že ak $\vdash A$, tak $\models A$. Platí však aj opačné tvrdenie: ak $\models A$, tak $\vdash A$, ako dokázal Gödel v tridsiatych rokoch dvadsiateho storočia. Veta 8.4 nižšie je zovšeobecnením tohoto výsledku.

Odvodzovanie formúl predikátovej logiky

Teraz si ukážeme niekoľko príkladov na dôkazy formúl predikátovej logiky.

Lema 8.2 (**pravidlo zavedenia $\forall$**). *Nech sú A a B formuly predikátovej logiky. Ak platí $\vdash A \Rightarrow B$ a x nemá voľný výskyt v A, tak platí $\vdash A \Rightarrow (\forall x)B$.*

Dôkaz.

1:	$\vdash A \Rightarrow B$	predpoklad
2:	$\vdash (\forall x)(A \Rightarrow B)$	PZ(1)
3:	$\vdash (\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$	ASKI
4:	$\vdash (A \Rightarrow (\forall x)B)$	MP(2,3) □

Lema 8.3. *Pre ľubovoľnú formulu A a term t substituovateľný do A za x platí $\vdash A_x[t] \Rightarrow (\exists x)A$.*

Dôkaz.

1:	$\vdash (\forall x) \neg A \Rightarrow \neg A_x[t]$	ASŠ
2:	$\vdash \neg\neg(\forall x) \neg A \Rightarrow (\forall x) \neg A$	Lema 2.6
3:	$\vdash \neg\neg(\forall x) \neg A \Rightarrow \neg A_x[t]$	Syl(2,1)
$3'$:	$\vdash \neg(\exists x)A \Rightarrow \neg A_x[t]$	definícia $(\exists x)B$
4:	$\vdash (\neg(\exists x)A \Rightarrow \neg A_x[t]) \Rightarrow (A_x[t] \Rightarrow (\exists x)A)$	VOOI
5:	$\vdash A_x[t] \Rightarrow (\exists x)A$	MP($3'$,4) $\square$

Dokazovanie formúl predikátovej logiky nemusí byť vždy tak triviálne ako dokazovanie formúl vo výrokovej logike. Vo výrokovej logike sme totiž s výhodou využívali vetu o dedukcii, ktorú nemožno mechanicky zovšeobecniť na predikátovú logiku.

Hoci platí $A \vdash (\forall x)A$ (pravidlo zovšeobecnenia), tak neplatí $\vdash A \Rightarrow (\forall x)A$. Totiž ak by bola posledná formula dokázateľná, tak podľa Vety 8.1 o korektnosti by platilo $\models A \Rightarrow (\forall x)A$, čiže $A \Rightarrow (\forall x)A$ by bola splnená v každej realizácii jazyka predikátovej logiky, čo je v spore s realizáciou, ktorú sme zostrojili v Poznámke 1 za Lemou 7.2.

Ak je však A uzavretá formula, tak potom je možné dokázať, že $T \cup \{A\} \vdash B$ platí práve vtedy, keď platí $T \vdash A \Rightarrow B$.

Gödelova veta o úplnosti

V ďalšom sformulujeme základnú vetu predikátovej logiky, Gödelovu vetu o úplnosti. K tomu potrebujeme definovať ešte niekoľko pojmov.

Definícia. Ľubovoľne zvolenú množinu T formúl jazyka $\mathfrak{L}$ nazývame **teória** (**teória prvého rádu**) v jazyku $\mathfrak{L}$. Formuly z T nazývame **špeciálne** (**vlastné**) **axiómy** teórie T.

Realizáciu $\mathfrak{M}$ jazyka $\mathfrak{L}$ nazývame **modelom** teórie T práve vtedy, keď sú v nej splnené všetky axiómy teórie T, teda keď pre každé A z T platí $\mathfrak{M} \models A$. Ak je formula B splnená v každom modeli teórie T, tak B je **sémantický dôsledok** teórie T, čo zapisujeme $T \models B$.

Ak existuje dôkaz formuly A využívajúci axiómy teórie T ako predpoklady, tak A je **dokázateľná** v T, čo zapisujeme $T \vdash A$.

Príklad. Ak by sme chceli dokazovať tvrdenia v jazyku elementárnej aritmetiky, tak by sme dokazovali formuly A, pre ktoré $T \vdash A$, kde T obsahuje špeciálne axiómy elementárnej aritmetiky. Teda T by zrejme obsahovala formulu $(\forall x)(\forall y)(x{+}y{=}y{+}x)$ (komutatívny zákon pre sčítanie), ďalej by obsahovala formulu $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[z \cdot (x+y)] = (z \cdot x) + (z \cdot y)$ (distributívny zákon) a podobne.

Definícia. Teória, v ktorej je dokázateľná každá formula jazyka tejto teórie sa nazýva **sporná**. Ak teória nie je sporná, tak je **bezosporná** (**konzistentná**).

Nech je T teória v jazyku $\mathfrak{L}$ predikátovej logiky a nech je A formula v $\mathfrak{L}$. Potom ak $T \vdash A$, tak $T \models A$ (ide o jednoduché zovšeobecnenie Vety 8.1 o korektnosti). Teraz ak je teória T sporná, tak pre ľubovoľnú formulu B v jazyku $\mathfrak{L}$ platí $T \vdash B$ aj $T \vdash \neg B$, a preto $T \models B$ aj $T \models \neg B$. To znamená, že v každej realizácii $\mathfrak{M}$ teórie T je splnená aj formula B aj $\neg B$, a preto podľa Lemy 7.1 teória T nemá model. Zaujímavou je opačná implikácia: Ak teória T nie je sporná, tak má model.

VETA 8.4 (**Gödelova veta o úplnosti**). *V jazyku predikátovej logiky je teória bezosporná práve vtedy, keď má model.*

Dôkaz tohoto tvrdenia je ďaleko nad rámec nášho výkladu. Podobne bez dôkazu uvádzame aj nasledujúci dôsledok:

DÔSLEDOK. *Nech je T bezosporná teória a nech je A uzavretá formula v jazyku predikátovej logiky. Potom $T \models A$ platí práve vtedy, keď platí $T \vdash A$.*

Záverom tejto podkapitoly poznamenajme, že predikátová logika (logika prvého rádu) obsahuje len premenné pre indivíduá, ale už nie pre skupiny indivíduí, a preto takéto skupiny nemožno v jazyku prvého rádu ani kvantifikovať. Ak však rozšírime jazyk prvého rádu o premenné pre skupiny indivíduí, dostaneme jazyk logiky druhého rádu. Jazyk logiky tretieho rádu už obsahuje premenné pre skupiny skupín indivíduí a podobne.

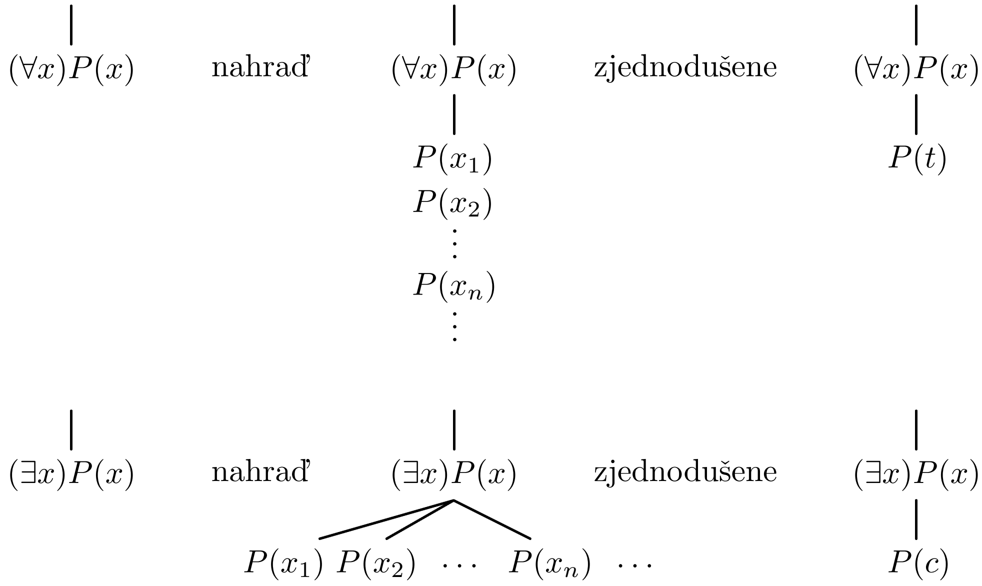
PRÍKLAD. V jazyku elementárnej aritmetiky nie sme schopní sformulovať tvrdenie: Každá konečná podmnožina množiny prirodzených čísel je ohraničená. To preto, lebo nemáme premenné pre skupiny prirodzených čísel.

Sémantické stromy

Metódu sémantických stromov pre výrokovú logiku rozšírime na predikátovú logiku. K pravidlám z Kapitoly 4 (pozri Obrázky 1, 3 a 4) pridáme pravidlá pre kvantifikátory. Pripomeňme, že ak univerzum $\mathcal{M}$ obsahuje prvky $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, tak

$$\begin{array}{lll} (\forall x)P(x) & \text{je iba skrátený zápis} & P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n) \wedge \ldots \\ (\exists x)P(x) & \text{je skrátený zápis} & P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n) \vee \ldots . \end{array}$$

Z toho plynú pravidlá zobrazené na Obrázku 27. Na pravej strane sú tieto pravidlá zjednodušené, aby sme nemali zbytočne pridlhý strom (v prípade všeobecného kvantifikátora), respektíve veľa paralelných vetiev (v prípade existenčného kvantifikátora). Tu pod t myslíme ľubovoľný prvok (hodnotu termu) z univerza $\mathcal{M}$, zatiaľ čo c je doposiaľ nepoužitý nulárny funkčný symbol (konštanta), čiže jeden konkrétny prvok z univerza $\mathcal{M}$. Ak sa všeobecný (existenčný) kvantifikátor vyskytne v danej vetve opakovane, používame symboly t', t'', t^*, … (respektíve c', c'', c^*, …).



Obrázok 27

Pri uzavieraní vetiev treba dávať pozor na to, ktoré tvrdenia sú v spore. Napríklad $P(c)$ a $\neg P(c')$ v spore nie sú (c a c' môžu byť rôzne indivíduá z univerza), zatiaľ čo $P(c)$ a $\neg P(t)$ v spore sú, pretože t je ľubovoľná hodnota z univerza $\mathcal{M}$, teda aj c. Ak však uvažujeme o dvojprvkovom nosiči, teda ak zisťujeme či je formula 2-všeobecne platná, tak je v spore aj pätica $P(c)$, $\neg P(c')$, $\neg P(c^*)$, $Q(c')$, $\neg Q(c^*)$.

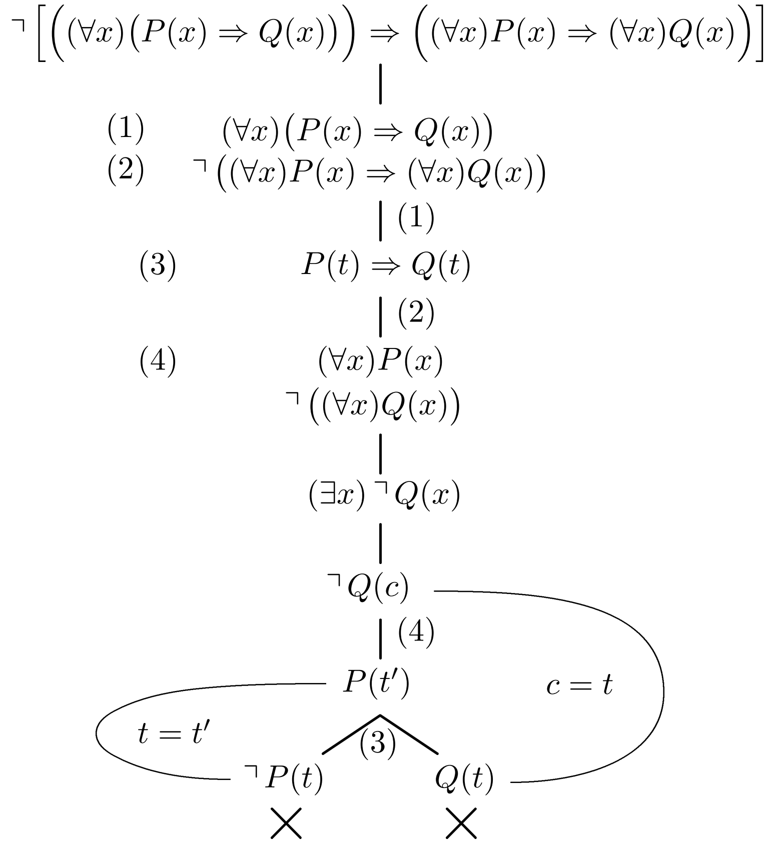
Tak ako v Kapitole 4, ak formulu v sémantickom strome nerozvíjame okamžite, tak ju očíslujeme a neskorší rozvoj podľa tejto formuly označíme jej číslom. Pre tautológie, kontradikcie a splniteľné formuly budeme využívať tvrdenia z Kapitoly 4.

Príklad. Pomocou sémantického stromu ukážte, že je formula A logicky pravdivá

$$A: \ \Big((\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)\Big) \Rightarrow \Big((\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)\Big).$$

Podľa Vety 4.3 (2) stačí ukázať, že sú všetky vetvy sémantického stromu pre $\neg A$ uzavreté.

Sémantický strom pre $\neg A$ je na Obrázku 28. V ľavej vetve máme $P(t')$ a $\neg P(t)$, pričom t a t' sú ľubovoľné prvky z univerza, čo je zjavne v spore. Preto je ľavá vetva uzavretá. V pravej vetve máme $\neg Q(c)$ a $Q(t)$, pričom t je ľubovoľný prvok z univerza, teda aj c, čo je opäť v spore. Preto je uzavretá aj pravá vetva. Keďže sú všetky vetvy sémantického stromu pre $\neg A$ uzavreté, formula A je logicky pravdivá.



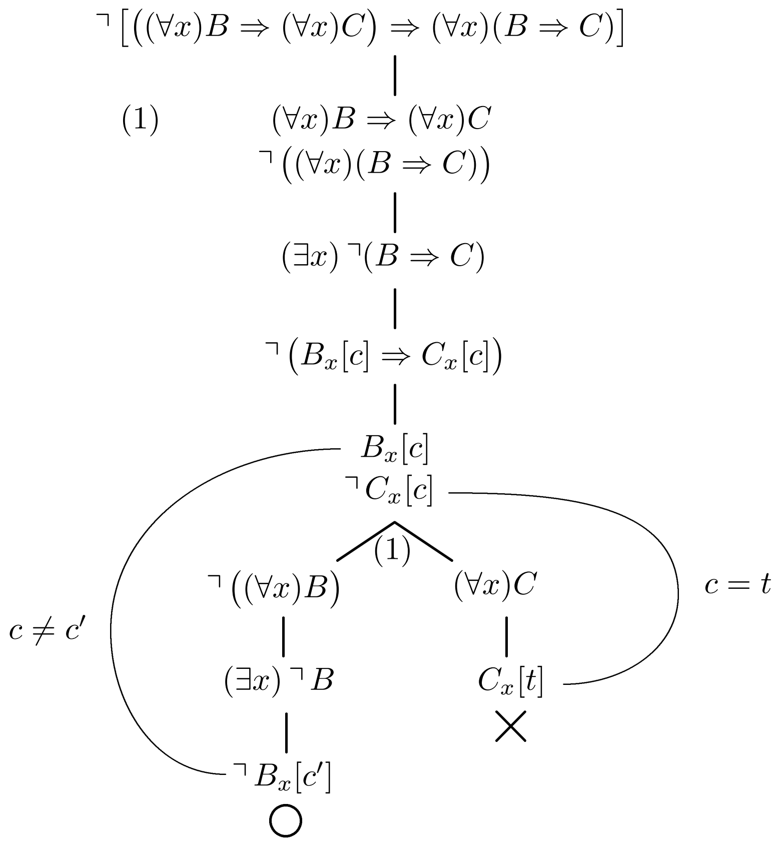
Obrázok 28

Príklad. Pomocou sémantického stromu ukážte, že formula A nie je logicky pravdivá

$$A: \ \big((\forall x)B \Rightarrow (\forall x)C\big) \Rightarrow (\forall x)(B \Rightarrow C)\,.$$

Opäť použijeme Vetu 4.3 (2), čiže zistíme, či sú všetky vetvy sémantického stromu pre $\neg A$ uzavreté. Tak ako v predchádzajúcej kapitole, výrazom $D_x[a]$ označujeme, že premenná x nadobúda vo formule D hodnotu a.

Sémantický strom pre $\neg A$ je na Obrázku 29. V pravej vetve máme $\neg C_x[c]$ a $C_x[t]$, pričom t je ľubovoľný prvok z univerza, teda aj c, čo spor. Preto je pravá vetva uzavretá. Avšak v ľavej vetve máme iba $B_x[c]$ a $\neg B_x[c']$. Ak $c \neq c'$, tak tu spor nemáme, preto je ľavá vetva otvorená. Znamená to, že A nie je logicky pravdivá.

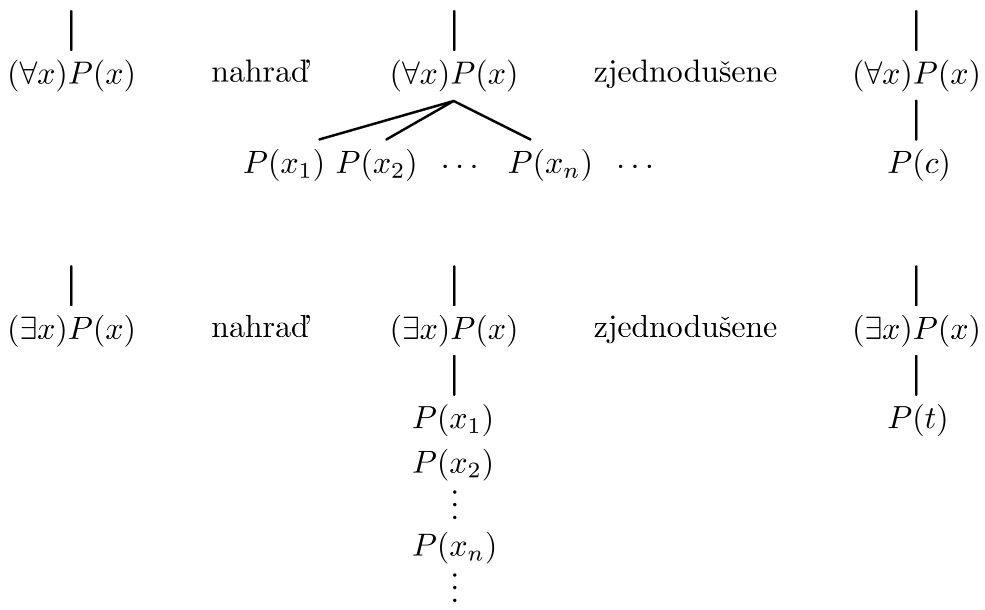


Obrázok 29

Všimnime si, že ak by malo univerzum $\mathcal{M}$ iba jedno indivíduum, bola by uzavretá aj ľavá vetva sémantického stromu na Obrázku 29. Znamená to, že A je 1-všeobecne platná, hoci nie je všeobecne platná.

Duálne sémantické stromy

Podobne môžeme rozšíriť duálne sémantické stromy výrokovej logiky na duálne sémantické stromy predikátovej logiky. K pravidlám z Kapitoly 4, pozri Obrázok 8, pridáme pravidlá pre kvantifikátory, pozri Obrázok 30. Tu pod t myslíme ľubovoľný prvok z univerza, zatiaľ čo c je doposiaľ nepoužitý symbol pre konštantu. Všimnime si rozdiel medzi pravidlami pre sémantické stromy (Obrázok 27) a duálne sémantické stromy (Obrázok 30).



Obrázok 30

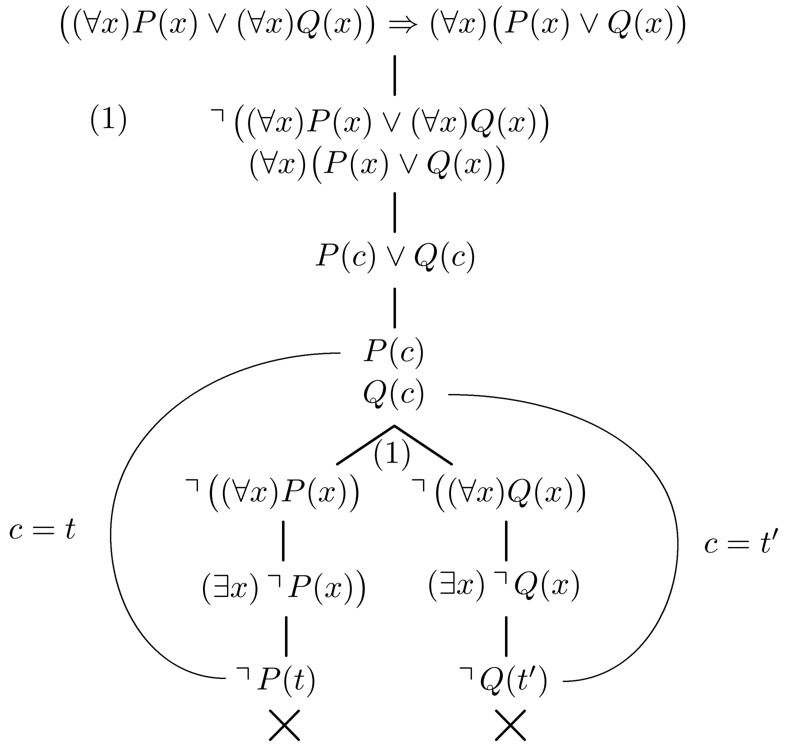
Príklad. Pomocou duálneho sémantického stromu ukážte, že je formula A logicky pravdivá

$$A: \ \big((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)\,.$$

Podľa Vety 4.5 (2) stačí ukázať, že sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre A uzavreté.

Duálny sémantický strom pre A je na Obrázku 31. V ľavej vetve máme $P(c)$ a $\neg P(t)$, pričom t je ľubovoľný prvok z univerza, teda aj c, čo spor. Preto je ľavá vetva uzavretá. V pravej vetve máme $P(c)$ a $\neg P(t)$, takže je uzavretá aj táto vetva. Keďže sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre A uzavreté, formula A je logicky pravdivá.

Nasledujúci príklad ukazuje, že keď konštruujeme sémantické stromy pre formuly predikátovej logiky, musíme byť oveľa opatrnejší, ako pri formulách výrokovej logiky.



Obrázok 31

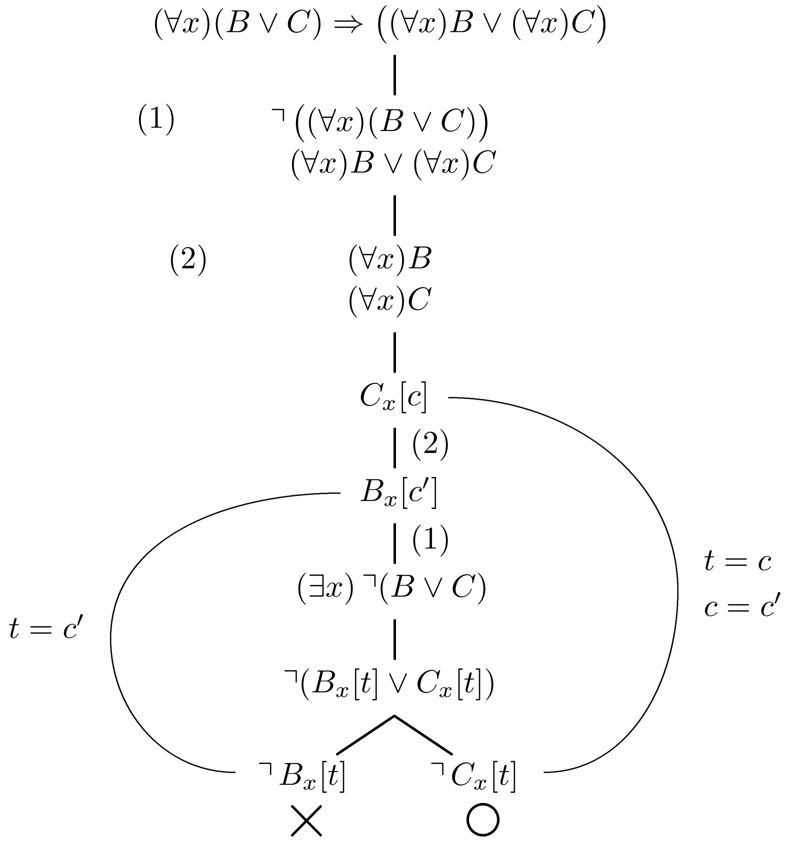
Príklad. Pomocou duálneho sémantického stromu zistite, či je formula A logicky pravdivá

$$A:\ (\forall x)(B \vee C) \Rightarrow \big((\forall x)B \vee (\forall x)C\big)\,.$$

Opäť budeme zisťovať, či sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre A uzavreté.

Duálny sémantický strom pre A je na Obrázku 32. V ľavej vetve máme $B_x[c']$ a $\neg B_x[t]$, pričom t je ľubovoľný prvok z univerza. Teda keď $c' = t$, dostávame spor a ľavá vetva je uzavretá. Naopak, v pravej vetve máme $C_x[c]$ a $\neg C_x[t]$, pričom t je ľubovoľný prvok z univerza. Tu opäť dostávame spor, ale iba keď $c = t$. Keďže už máme $c' = t$, dostali sme $c' = c$. Teda obidve vetvy sú uzavreté iba keď $c' = c$ $(= t)$, čo nemusí nutne platiť. Čo sa deje v ostatných prípadoch?

Pozrime sa na to lepšie a vráťme sa k Obrázku 30. Namiesto $\neg(B_x[t] \vee C_x[t])$ by sme mali písať stĺpček $\neg(B_x[c] \vee C_x[c])$, $\neg(B_x[c'] \vee C_x[c'])$, … pre všetky prvky z univerza $\mathcal{M}$. Teraz keď rozvinieme $\neg(B_x[c] \vee C_x[c])$, dostaneme dve vetvy, pričom pravá vetva bude uzavretá kvôli dvojici $C_x[c]$ a $\neg C_x[c]$, no v ľavej spor zatiaľ nie je. Preto ju rozvinieme podľa $\neg(B_x[c'] \vee C_x[c'])$. Tu bude uzavretá pre zmenu ľavá vetva kvôli dvojici $B_x[c']$ a $\neg B_x[c']$, ale nie pravá. Takže túto vetvu, v ktorej zatiaľ máme $C_x[c]$, $B_x[c']$, $\neg B_x[c]$ a $\neg C_x[c']$, potrebujeme ďalej rozvíjať. Lenže pri ďalšom rozvoji formuly $\neg(B_x[t] \vee C_x[t])$ podľa ostatných prvkov univerza už spor nedostaneme, iba nové a nové vetvy. Preto je vetva, v ktorej zatiaľ máme $C_x[c]$, $B_x[c']$, $\neg B_x[c]$ a $\neg C_x[c']$, otvorená. To znamená, že formula A nie je logicky pravdivá.



Obrázok 32

Cvičenia

Cvičenie 8.1. Pomocou sémantických stromov ukážte, že sú nasledujúce formuly logicky pravdivé.

a) $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)P(y)$

b) $(\forall x)A \Rightarrow (\exists x)A$

c) $\neg((\forall x)A) \Leftrightarrow ((\exists x)\neg A)$

d) $\neg((\exists x)A) \Leftrightarrow ((\forall x)\neg A)$

Cvičenie 8.2. Pomocou duálnych sémantických stromov ukážte, že sú nasledujúce formuly logicky pravdivé.

a) $\big((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$

b) $(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow \big((\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)\big)$

Cvičenie 8.3. Pomocou (duálnych) sémantických stromov ukážte, že sú nasledujúce formuly logicky pravdivé.

a) $(\forall x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Leftrightarrow \big((\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)\big)$

b) $(\exists x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Leftrightarrow \big((\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)\big)$

c) $(\exists x)(A \wedge B) \Rightarrow \big((\exists x)A \wedge (\exists x)B\big)$

d) $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow \big((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B\big)$

e) $\big((\exists x)(A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow \big((\forall x)A \Rightarrow (\exists x)B\big)$

f) $\big((\forall x)A \Rightarrow (\exists x)B\big) \Rightarrow \big((\exists x)(A \Rightarrow B)\big)$

CVIČENIE 8.4. Pomocou (duálnych) sémantických stromov zistite, či sú nasledujúce formuly logicky pravdivé.
a) $(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$
b) $\big((\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$
c) $(\forall x)(A \wedge B) \Rightarrow (\exists x)(A \vee \neg B)$
d) $(\exists x)(A \wedge B) \Rightarrow \big((\exists x)A \Rightarrow (\exists x)B\big)$

CVIČENIE 8.5. Pomocou (duálnych) sémantických stromov ukážte, že ak x nie je voľná v B, tak sú nasledujúce formuly logicky pravdivé. (Keďže x nie je voľná v B, tak pre túto podformulu postupujeme ako v Kapitole 4.)
a) $\big((\forall x)(A \Rightarrow B)\big) \Leftrightarrow \big(((\exists x)A) \Rightarrow B\big)$ b) $\big((\exists x)(A \Rightarrow B)\big) \Leftrightarrow \big(((\forall x)A) \Rightarrow B\big)$

CVIČENIE 8.6. Zostrojte duálny sémantický strom pre formulu

$$A: \ \big(Q(z) \wedge \neg Q(y) \wedge (\exists x)P(x)\big) \Rightarrow \big(P(z) \vee P(y)\big).$$

Viete z neho usúdiť, že A je 2-všeobecne platná, ale nie 3-všeobecne platná?