Algebra a diskrétna matematika
Prehľad z 3. týždňa
Determinanty, Cramerovo pravidlo

Determinant štvorcovej matice M, označovaný ako $|M|$ alebo $\det(M)$, je funkcia, ktorá matici M priradí reálne číslo, pričom platia nasledovné axiómy:

A1: Ak matica N vznikne z matice M **výmenou poradia** dvoch riadkov (stĺpcov), tak $|N| = -|M|$.

A2: Ak matica N vznikne z matice M **vynásobením** niektorého riadku (stĺpca) konštantou k, tak $|N| = k|M|$.

A3: Ak matica N vznikne z matice M **pripočítaním násobku** jedného riadku (stĺpca) k inému riadku (stĺpcu), tak $|N| = |M|$.

A4: Pre **jednotkovú** maticu platí $|I| = 1$.

Takto definovaný determinant je určený **jednoznačne**.

Z definície determinantu sa dajú odvodiť ďalšie vlastnosti:

V1: Ak sa v matici nachádza **nulový riadok** (stĺpec), tak jej determinant je **nulový**.

V2: Ak sa v matici nachádzajú dva **rovnaké riadky** (stĺpce), tak jej determinant je **nulový**.

V3: Determinat hornej (dolnej) **trojuholníkovej** matice sa rovná **súčinu prvkov na hlavnej diagonále**.

V4: Determinant **transponovanej** matice sa rovná determinantu **pôvodnej** matice, tj. $|A| = |A^T|$.

V5: Pre ľubovoľné dve štvorcové matice rovnakého typu platí, že determiant súčinu matíc je súčin ich determinantov, t. j.

$$|M \cdot N| = |M| \cdot |N|$$

Upozornenie: Determinat súčtu matíc sa nerovná súčtu determinantov!

$$|M + N| \neq |M| + |N|$$

Vzorce na výpočet determinantov rádu $1, 2, 3$:

$$|A_{1\times1}| = |a_{11}| = a_{11}$$

$$|A_{2\times2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|A_{3\times3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Sarrusovo pravidlo na výpočet determinantu matice $A_{3\times3}$:

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Aplikácie determinantov v geometrii

Obsah trojuholníka určeného bodmi (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) je

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Objem štvorstena určeného bodmi (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4):

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Rozvoj determinantu podľa riadku alebo stĺpca

Výrazom A_{ij} označujeme maticu typu $(n-1)\times(n-1)$, ktorú dostaneme z matice $A_{n\times n}$ vynechaním i-teho riadka a j-teho stĺpca.

Determinant matice A môžeme potom vypočítať aj pomocou

- rozvoja podľa i-teho riadku

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|$$

- rozvoja podľa j-teho stĺpca

$$|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|A_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}|$$

Determinant a inverzná matica

Štvorcovú maticu A nazývame **regulárnou**, ak $|A| \neq 0$.

K štvorcovej matici A existuje inverzná matica práve vtedy, keď $|A| \neq 0$.

Ak matica A je regulárna, tak

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Ak $|A| = 0$, maticu A nazývame **singulárnou.**

K singulárnej matici neexistuje inverzná matica.

Výpočet inverznej matice pomocou determinantu

Ak A je regulárna matica rádu n a A_{ij} vznikne z A vynechaním i-teho riakdu a j-teho stĺpca, potom pre **inverznú** maticu platí

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(b_{ij})_{n\times n}, \text{ kde } \quad b_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|$$

Matica $(b_{ij})_{n\times n}$ sa nazýva **adjungovaná** a označuje sa $\mathrm{adj}(A)$;

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$$

Ak $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, tak $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Cramerovo pravidlo

Ak $AX = B$ je systém pozostávajúci z n lineárnych rovníc o n neznámych taký, že $|A| \neq 0$, potom systém má jediné riešenie.

Toto riešenie má tvar

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

pričom maticu A_i získame z matice A náhradou i-teho stĺpca stĺpcom pravých strán $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.