Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πολυτεχνική σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΑΝΑΦΟΡΑ ΠΡΩΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

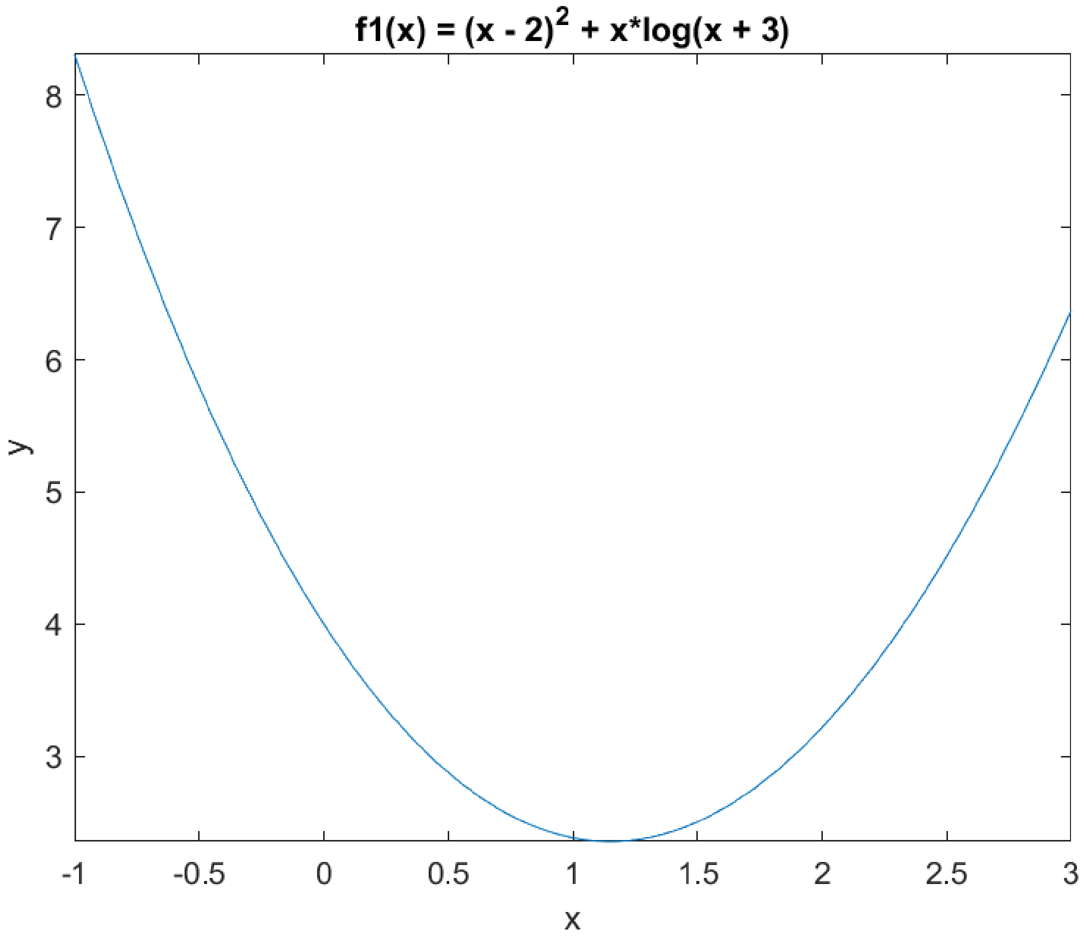
Ημερομηνία 5/11/2024

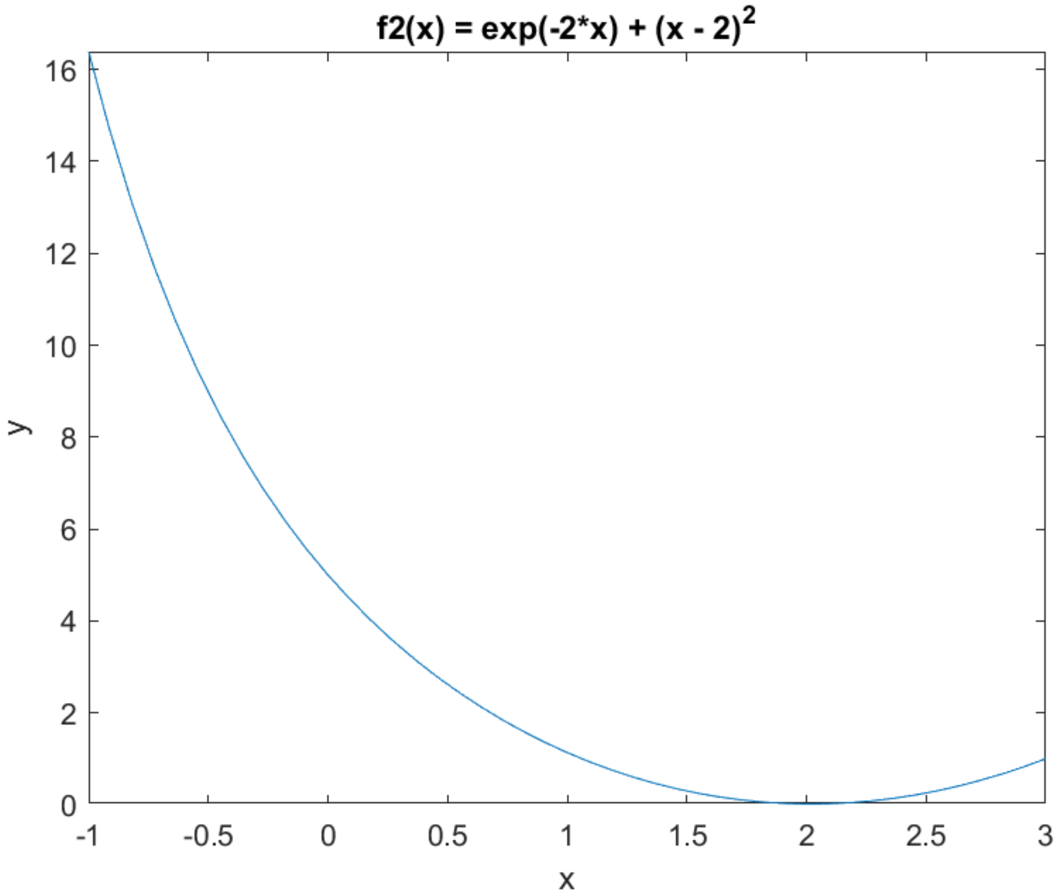
Λιαροπούλου Κλεοπάτρα (ΑΕΜ : 10066, Email : liaropou@ece.auth.gr)

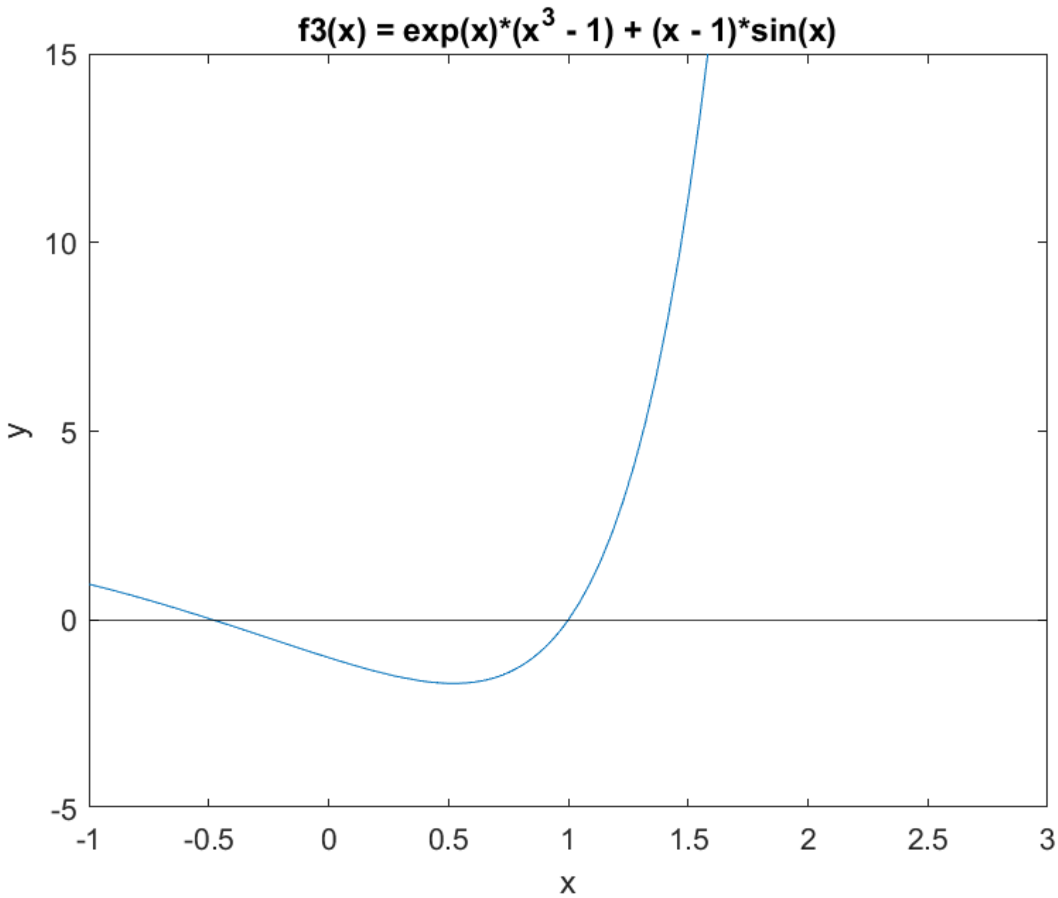
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ :

Περιγραφή άσκησης:

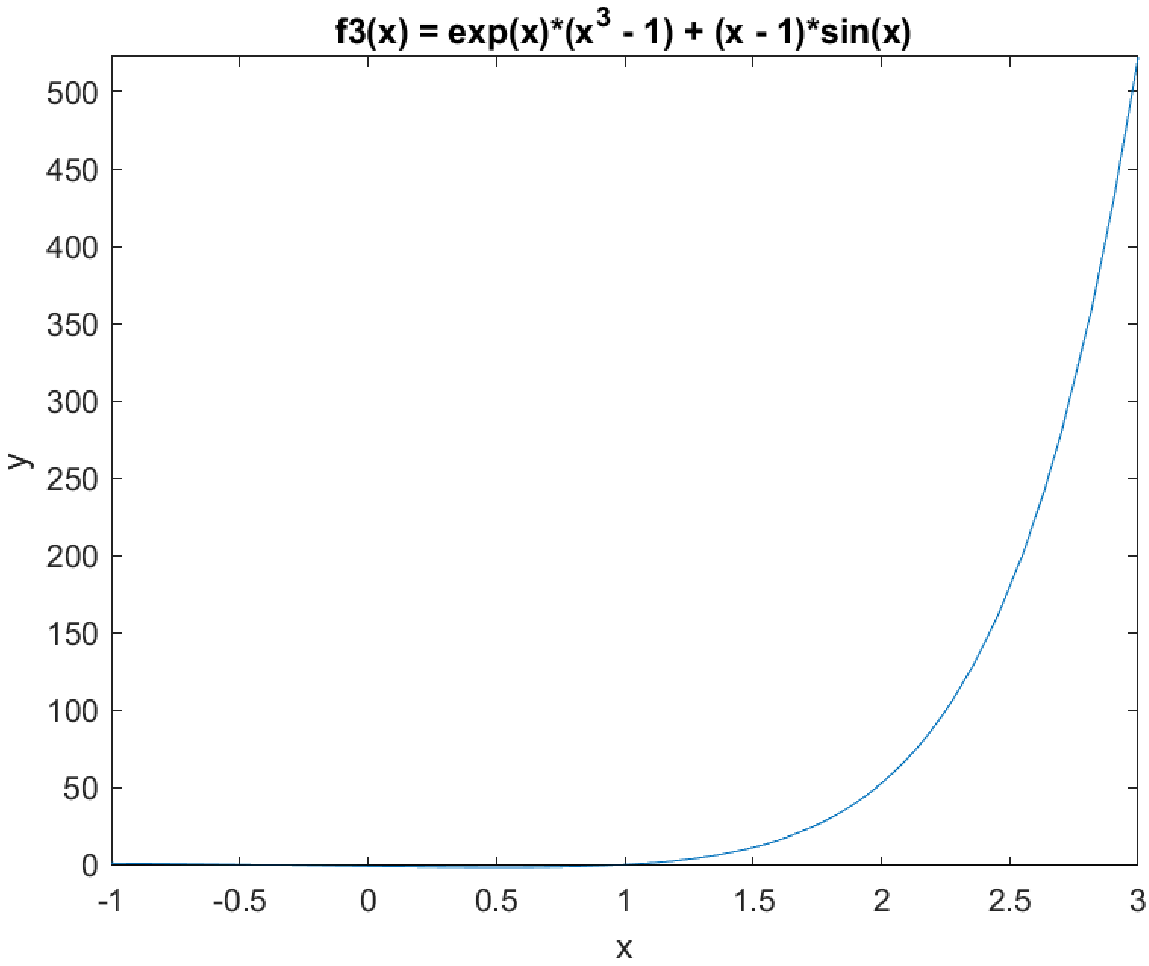
Στην προκειμένη ασκηση μελετάται η διαδικασία εύρεσης ελαχίστου για τις εξής κυρτές συναρτήσεις:




f2(x) = exp(-2*x) + (x - 2)^2
y
x
0
2
4
6
8
10
12
14
16
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


f3(x) = exp(x)*(x^3 - 1) + (x - 1)*sin(x)
y
x
-5
0
5
10
15
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Η παραπάνω γραφική παράσταση είναι η f3(x) όμως για εύρος τιμών του y στο [-5,15], το οποίο επιλέχθηκε προκειμένου να γίνει διακριτή η αρχική συμπεριφορά της συνάρτησης στο [-1,1]. Ωστόσο παρουσιάζεται παρακάτω η ίδια γραφική παράσταση χωρίς αυτόν τον περιορισμό οπου και παρατηρείται η απότομη άνοδος της συνάρτησης μετά το χ = 2:



Συγκεκριμένα θα εφαρμοστούν:

- Η μέθοδος της διχοτόμου
- Η μέθοδος του χρυσού τομέα
- Η μέθοδος Fibonacci

Σε όλες τις περιπτώσεις εστιάζουμε την μελέτη στο διάστημα [α,β] = [-1,3] όπου, όπως φαίνεται και στα διαγράμματα, σε αυτό ανήκει το ελάχιστο x* των συναρτήσεων.

Μέθοδος διχοτόμου:

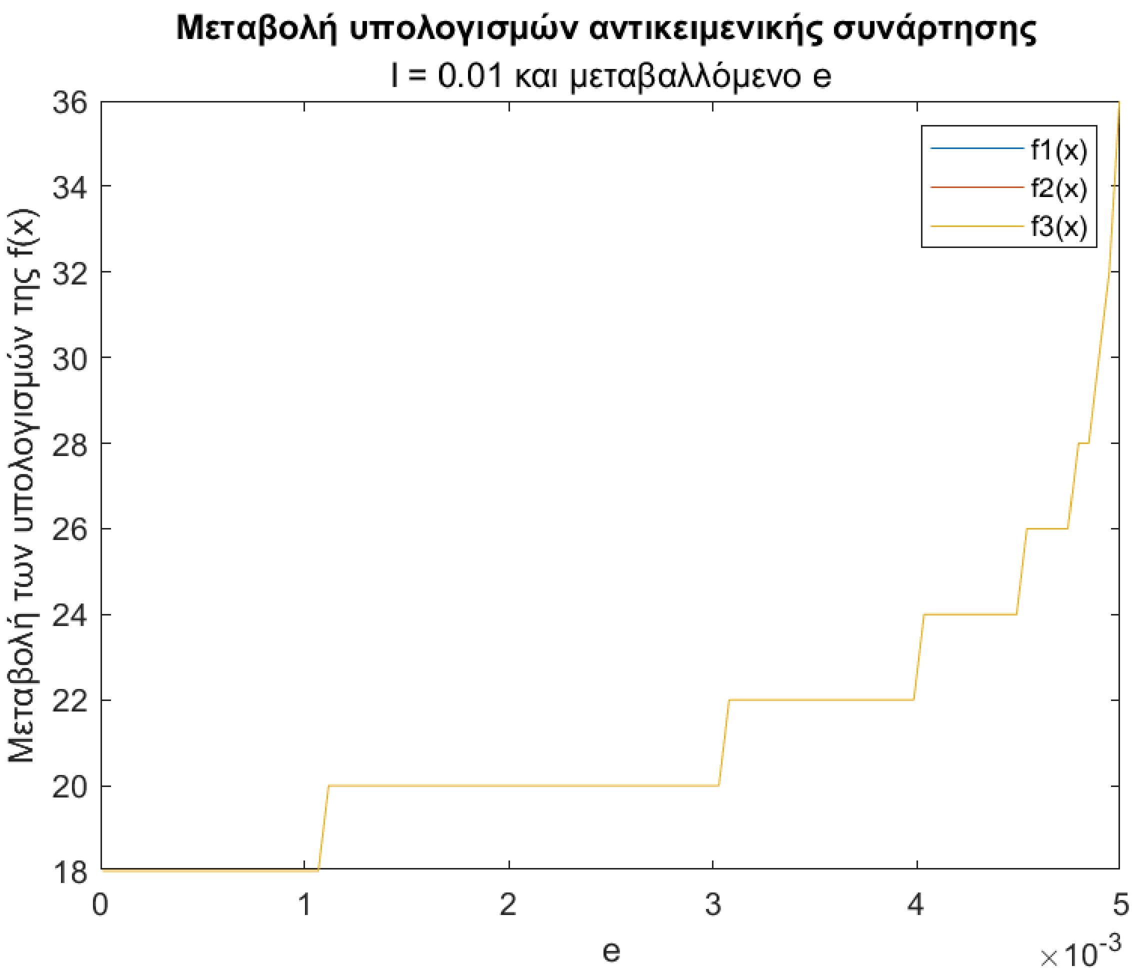
Στην προκειμένη μέθοδο χρησιμοποιούνται οι παράμετροι:

- Εύρος διαστήματος αναζήτησης (l = b - a)
- Απόσταση από την διχοτόμο (ε)

και μέσω αυτών θα περιορίζουμε το διάστημα στο οποίο εντοπίζεται το ελάχιστο μέχρι αυτό να φτάσει το ικανοποιητικό εύρος διαστήματος l έπειτα από k επαναλήψεις.

Σταθερό l = 0.01:

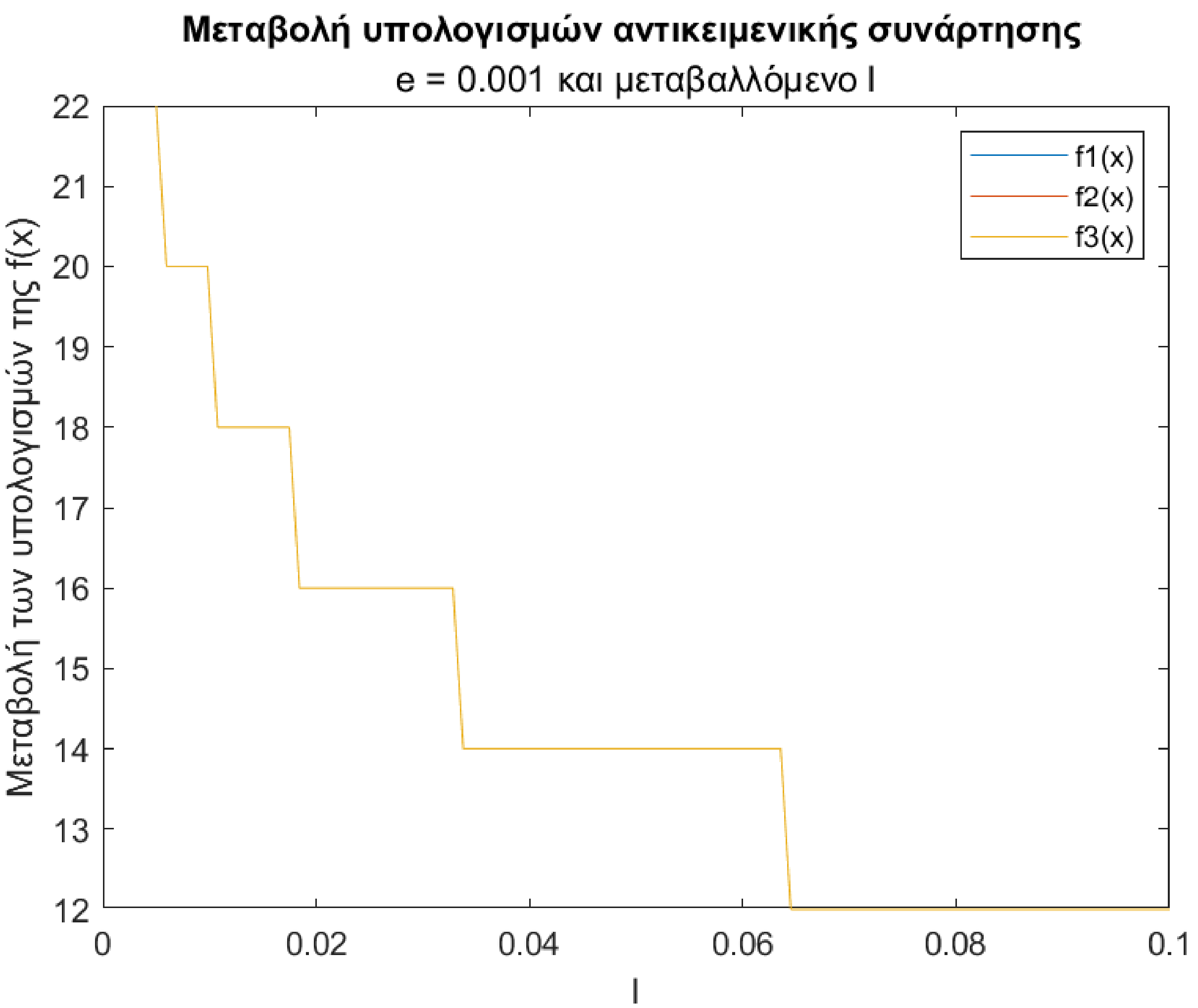
Αρχικά θα κρατήσουμε σταθερό το l και θα μεταβάλλεται μόνο το ε ενώ έπειτα θα πραγματοποιήσουμε το αντίστροφο. Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιούμε **l = 0.01** και ε_min = 0.00001 και ε_max = l/2 - ε_min = 0.005 το οποίο προκύπτει από τον περιορισμό της τελικής ακρίβειας l > 2ε .



Όπως παρατηρούμε η μεταβολή των υπολογισμών των τριών συναρτήσεων ταυτίζεται καθώς στο διάγραμμα η μία υπερκαλύπτει την άλλη. Αυτό είναι απολύτως λογικό εφόσον το διάστημα μελέτης [α,β] = [-1,3] είναι κοινό και για τις τρεις και σύμφωνα με τη μέθοδο της διχοτόμου το διάστημα σταδιακά μειώνεται με τις επαναλήψεις με κοινή μέθοδο (δηλαδή συμφωνα με τον όρο $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και προσθαφαίρεση του ε) .

Σταθερό e = 0.001:

Έπειτα εκτελούμε παρόμοια μελέτη αλλα εστιάζοντας στην μεταβολή του τελικού εύρους αναζήτησης l και κρατώντας σταθερό **ε = 0.001**. Αντίστοιχα με πριν, η τελική ακρίβεια (l) μπορεί να πάρει ελαχιστη τιμή l = 2ε = 0.002. Άρα όπως φαίνεται και στο σχήμα εστιάζουμε τη μελέτη στο διάστημα [0.002, 0.12] τιμών του l.



Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα οι τρεις παραστάσεις ταυτίζονται λόγω των κοινών τους χαρακτηριστικών που προαναφέρθηκαν. Παράλληλα, παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει το l και πρακτικά όσο μικρότερη ακρίβεια λύσης απαιτούμε, και όχι ένα στενό και συγκεκριμένο διάστημα λύσης, με τόσες λιγότερες επαναλήψεις μπορούμε να πετύχουμε το αποτέλεσμα αυτού (δεδομένου βέβαια ότι το ε στη προκειμένη άσκηση είναι σταθερο). Αυτό αποτυπώνεται άμεσα από το γεγονός ότι η παράσταση είναι φθίνουσα.

Γραφικές παραστάσεις άκρων διαστήματος $[a_k, b_k]$:

Τέλος, σχεδιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του δείκτη k για τις εξής τιμές του l:

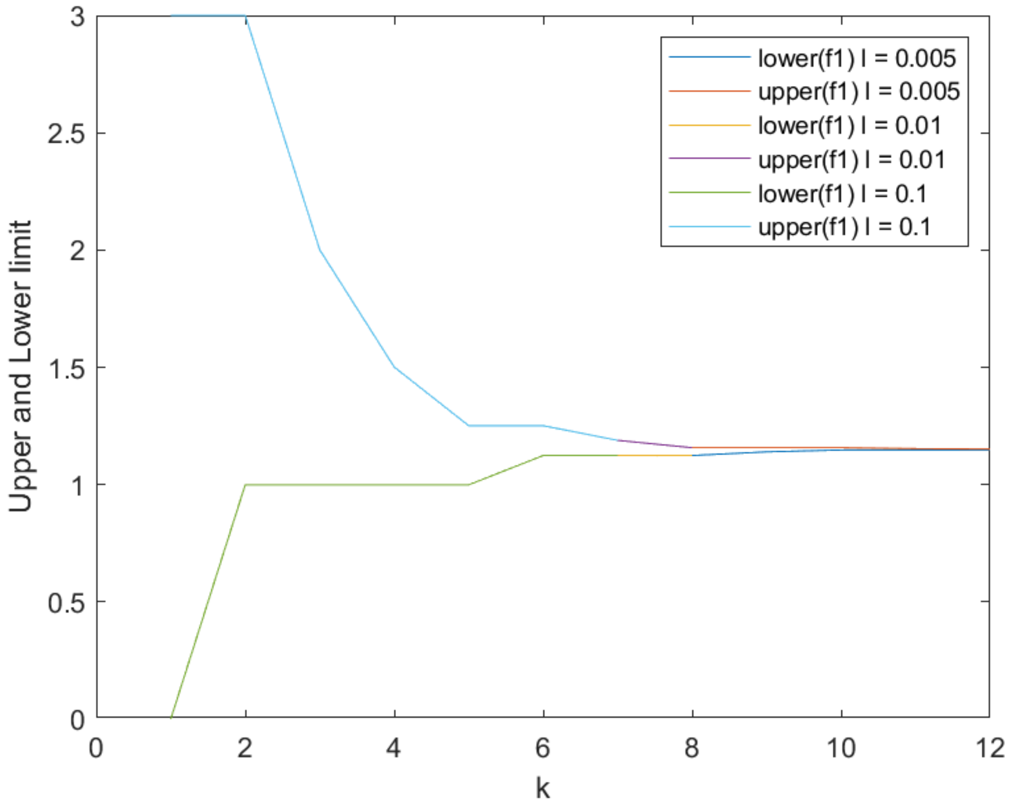
- l = 0.005
- l = 0.01
- l = 0.1

Όπως αναμένουμε, το διάστημα συγκλίνει με την πάροδο των επαναλήψεων προς την λύση (ελάχιστο) μέχρι να επιτευχθει η επιθυμητη κάθε φορά ακρίβεια. Ωστόσο ο αριθμός επαναλήψεων διαφέρει σε σχέση με τη τιμή του l , και αυτό ισχύει για όλες τις f(x). Συγκεκριμένα παρατηρείται το εξής:

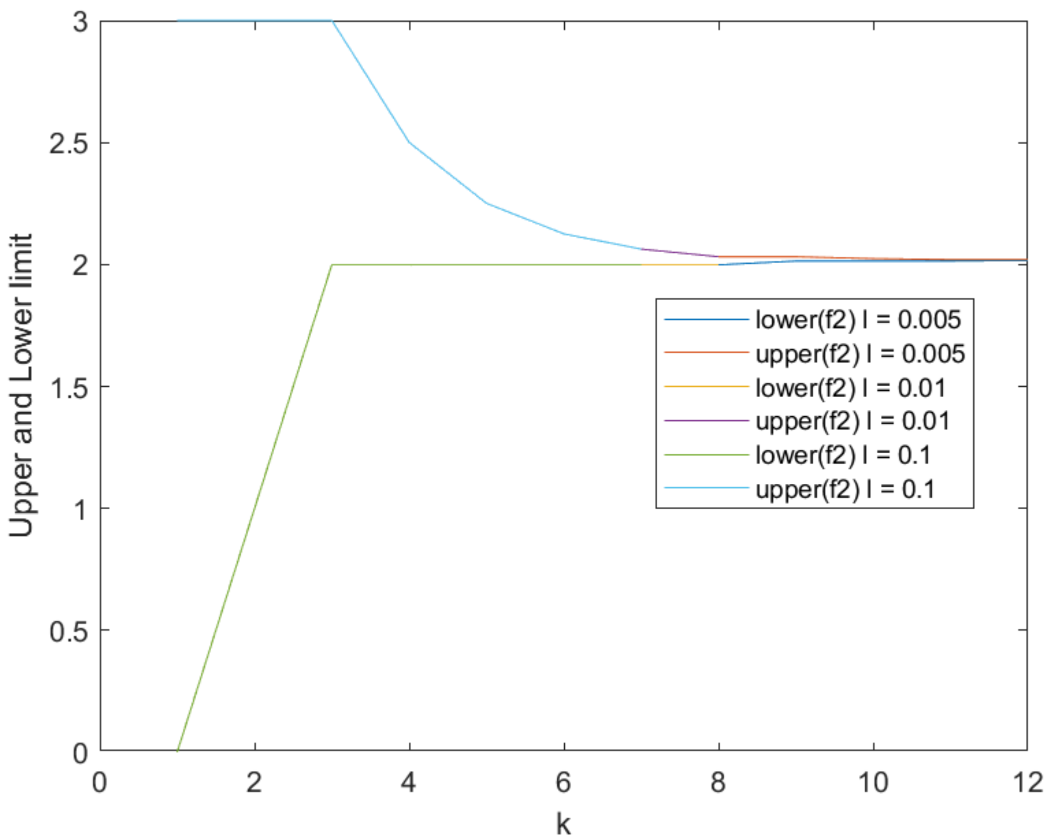
- **Όταν το l είναι μικρό**: Όσο μικρότερη είναι η τιμή του l (όπως για παράδειγμα τα χρώματα κόκκινο και μπλε στο διάγραμμα), τόσο πιο στενό γίνεται το τελικό διάστημα που πρέπει να επιτευχθεί για να σταματήσει ο αλγόριθμος. Κάτι τέτοιο σημαίνει απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις για να επιτευχθεί η απαιτούμενη ακρίβεια, διότι πρέπει να συνεχίσει να "μικραίνει" το διάστημα μέχρι το εύρος να γίνει μικρότερο από το l. Στην πράξη, βλέπουμε ότι οι γραμμές για τα μικρά l είναι περισσότερο εκτεταμένες σε αριθμό επαναλήψεων, αφού ο αλγόριθμος χρειάζεται περισσότερα βήματα για να φτάσει το διάστημα στην απαιτούμενη στενότητα.
- **Όταν το l είναι μεγαλύτερο**: Αντιθέτως, για μεγαλύτερες τιμές του l (όπως το πράσινο και το ανοιχτό μπλε στο διάγραμμα), ο αλγόριθμος σε λιγότερες επαναλήψεις φτάνει το σημείο τερματισμού. Επειδή η απαιτούμενη ακρίβεια είναι χαμηλότερη το διάστημα μπορεί να είναι μεγαλύτερο όταν φτάσει στο ελάχιστο. Επομένως, ο αλγόριθμος σταματά νωρίτερα, με λιγότερες επαναλήψεις. Το πράσινο και ανοιχτό μπλε στο διάγραμμα δείχνουν ότι υπάρχει ταχύτερη σύγκλιση με αποτέλεσμα ο αριθμός των επαναλήψεων να είναι μικρότερος.

Είναι πιο εύκολα αντιληπτό αν συνειδητοποιήσουμε οτι οι διάφορες γραμμές που αναπαριστούν το διάστημα υπερκαλύπτουν η μία την άλλη ωστε να φαίνεται κάθε φορά στο πόσες επαναλήψεις επιτεύχθηκε η επιθυμητη ακρίβεια για τις διάφορες τιμές του l.

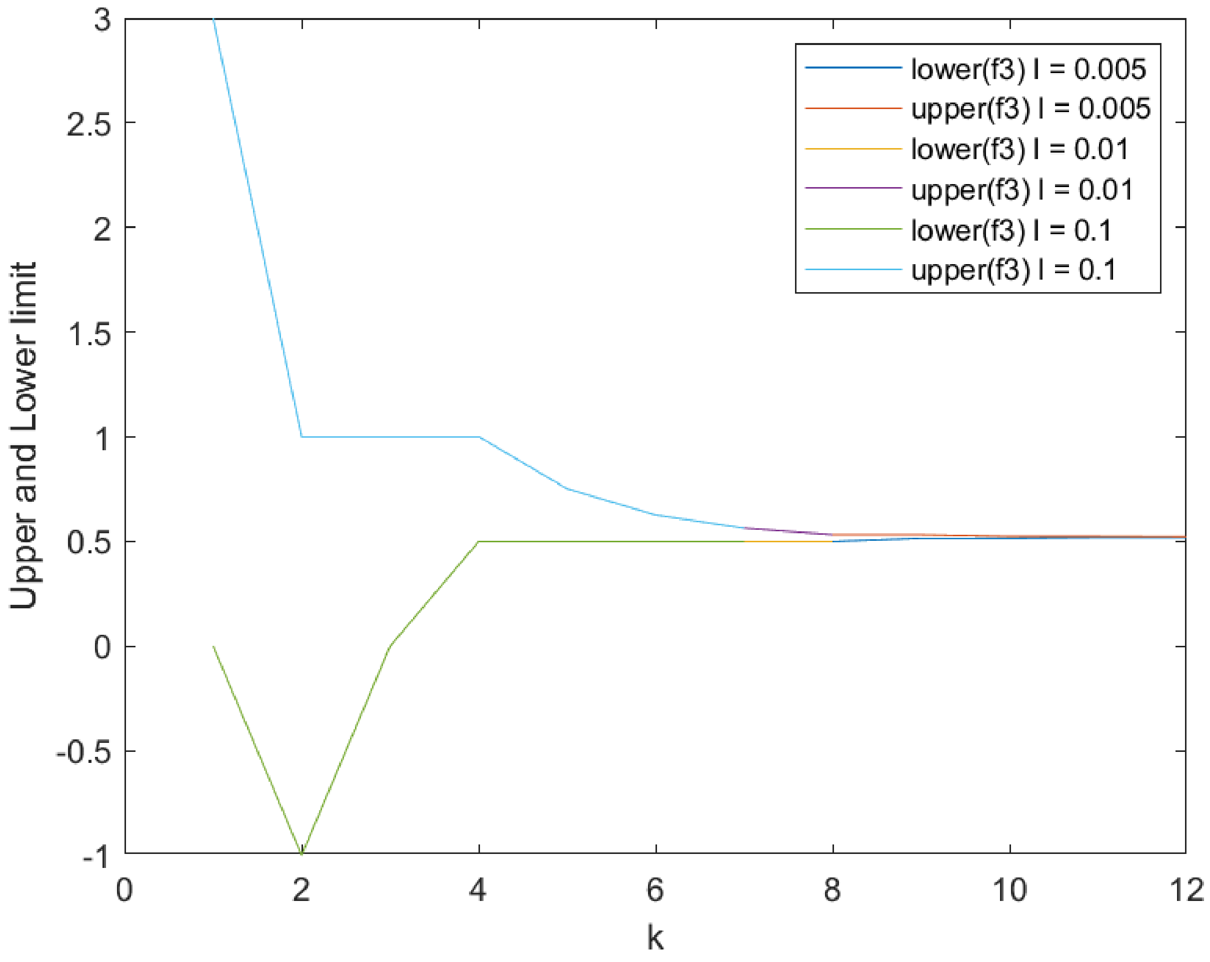
Κόκκινο και μπλε: Αντιπροσωπεύουν τιμές του l με υψηλή ακρίβεια (π.χ. l=0.005). Το διάστημα κλείνει πιο αργά, και απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις.
Πράσινο και ανοιχτό μπλε: Αντιπροσωπεύουν τιμές του l με χαμηλότερη ακρίβεια (π.χ. l=0.1). Το διάστημα συγκλίνει γρήγορα, και απαιτούνται λιγότερες επαναλήψεις.



Σχήμα 1: Άκρα διαστήματος για την f1(x)



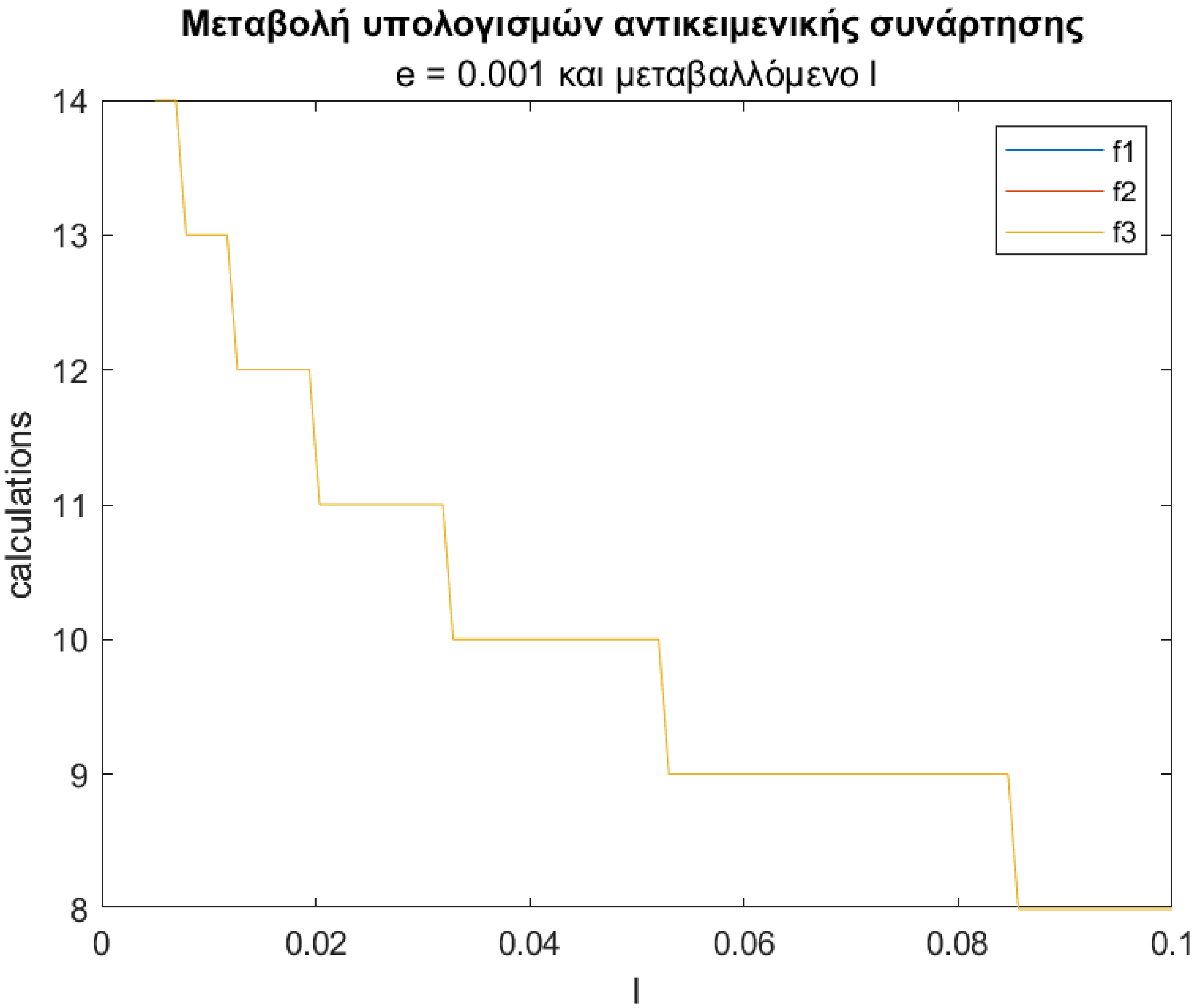
Σχήμα 2: Άκρα διαστήματος για την f2(x)



Σχήμα 3: Άκρα διαστήματος για την f3(x)

Μέθοδος χρυσού τομέα:

Στην προκειμένη μέθοδο σε αντίθεση με την προηγούμενη το κάθε διάστημα συνδέεται αναλογικά με το διάστημα της προηγούμενης επανάληψης με σταθερά αναλογίας γ = 0.618 σε αντίθεση με πρίν που η μεταβολή συνέβαινε σύμφωνα με το ε.
Το ζητούμενο είναι η μελέτη της μεταβολής των υπολογισμών για τιμές του l = [0.005 , 0.1].



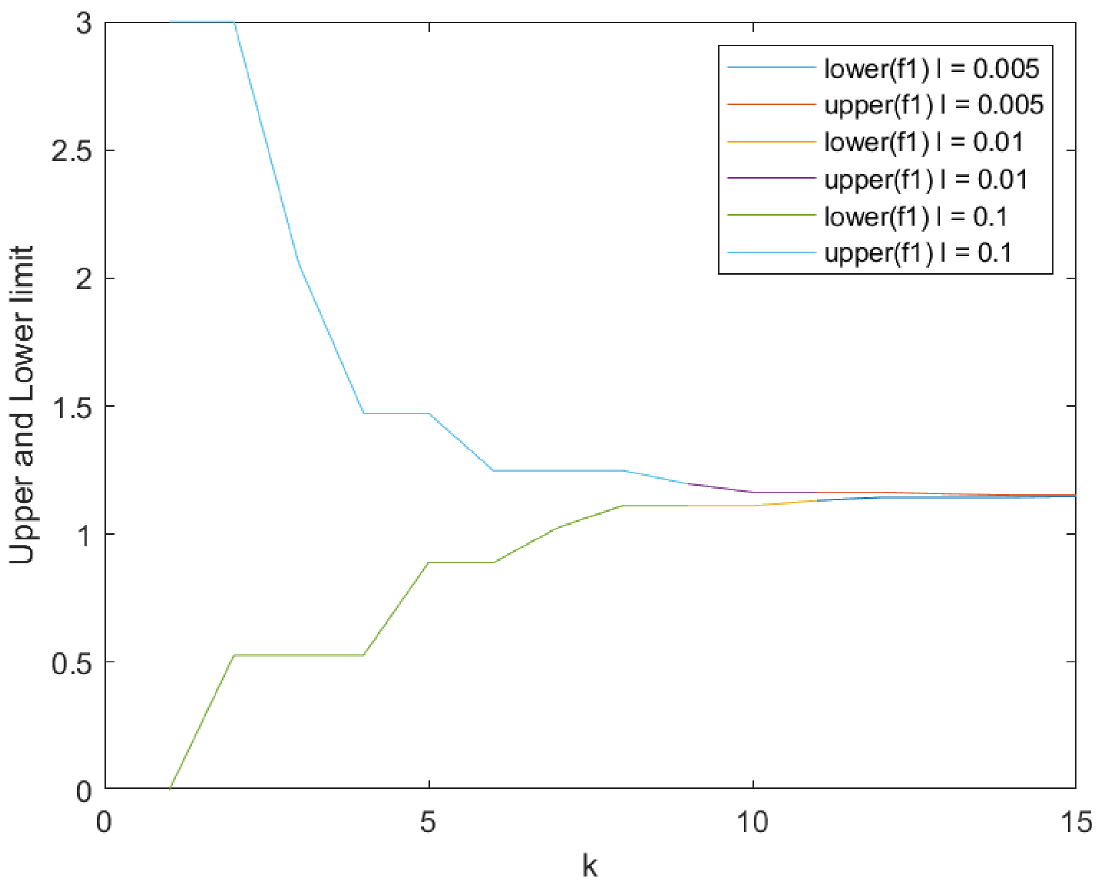
Παρατηρούμε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση οτι τα διαγράμματα συμπίπτουν μεταξύ τους. Επιπλέον, είναι προφανές ότι με την αύξηση του l , δηλαδή με αύξηση της ελαστικότητας του αποτελέσματος, μειώνεται ο αριθμός τον επαναλήψεων που απαιτούνται για την εύρεση του αποτελέσματος για συγκεκριμένη ακρίβεια.

Γραφικές παραστάσεις άκρων διαστήματος $[a_k, b_k]$:

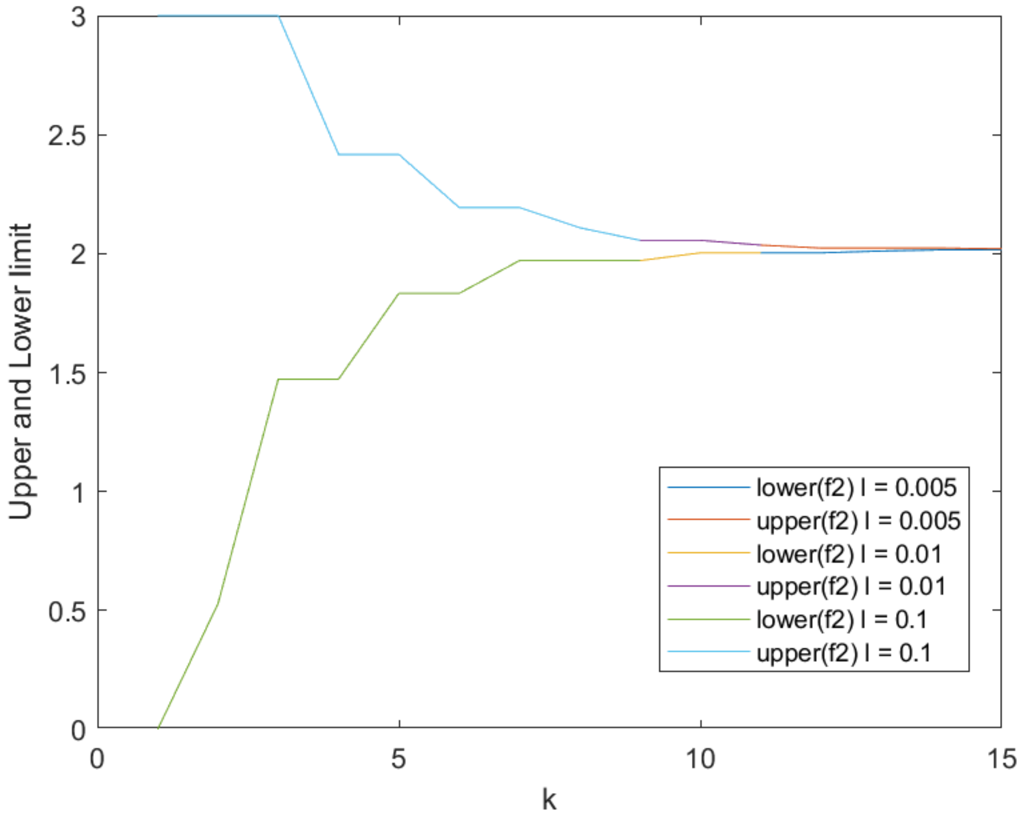
Τέλος, σχεδιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του δείκτη k για τις εξής τιμές του l:

- l = 0.005
- l = 0.01
- l = 0.1

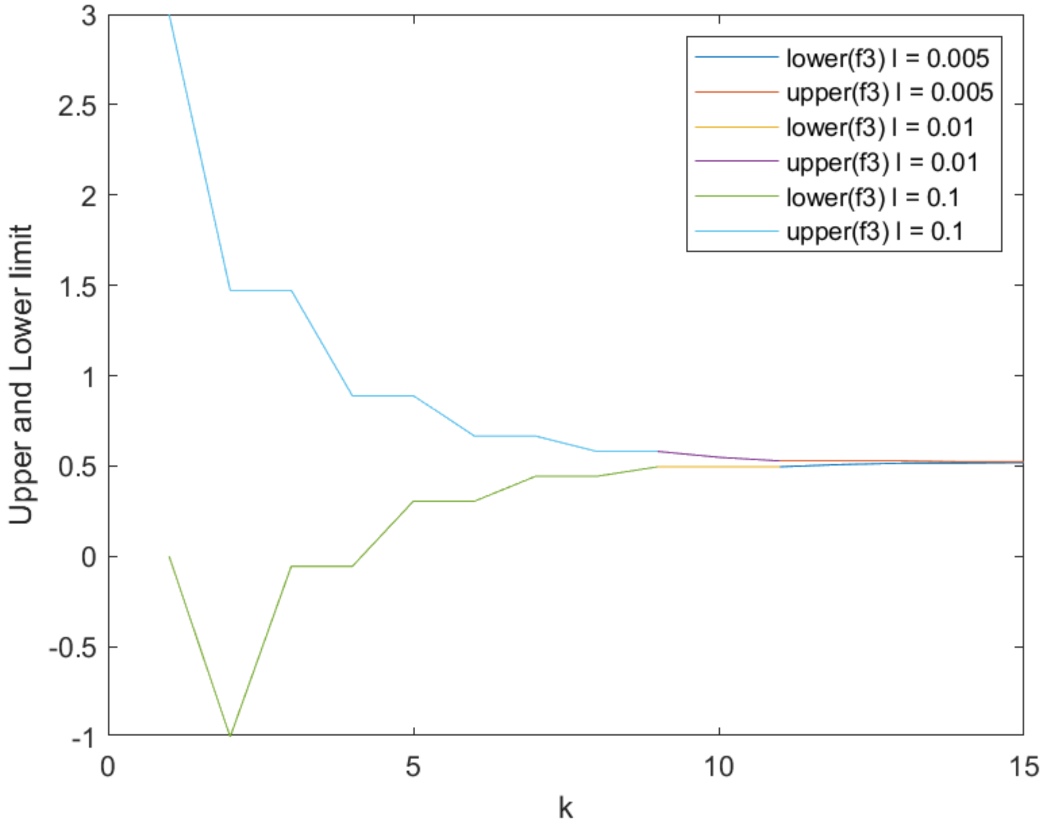
Όπως αναμένουμε, το διάστημα συγκλίνει με την πάροδο των επαναλήψεων προς την λύση (ελάχιστο) μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητη κάθε φορά ακρίβεια. Ωστόσο ο αριθμός επαναλήψεων διαφέρει σε σχέση με τη τιμή του l, και αυτό ισχύει για όλες τις f(x). Οι παρατηρήσεις σχετικά με τη σύνδεση αριθμού επαναλήψεων και τιμής του l είναι αντίστοιχες με πρίν.



Σχήμα 4: Άκρα διαστήματος για την f1(x)



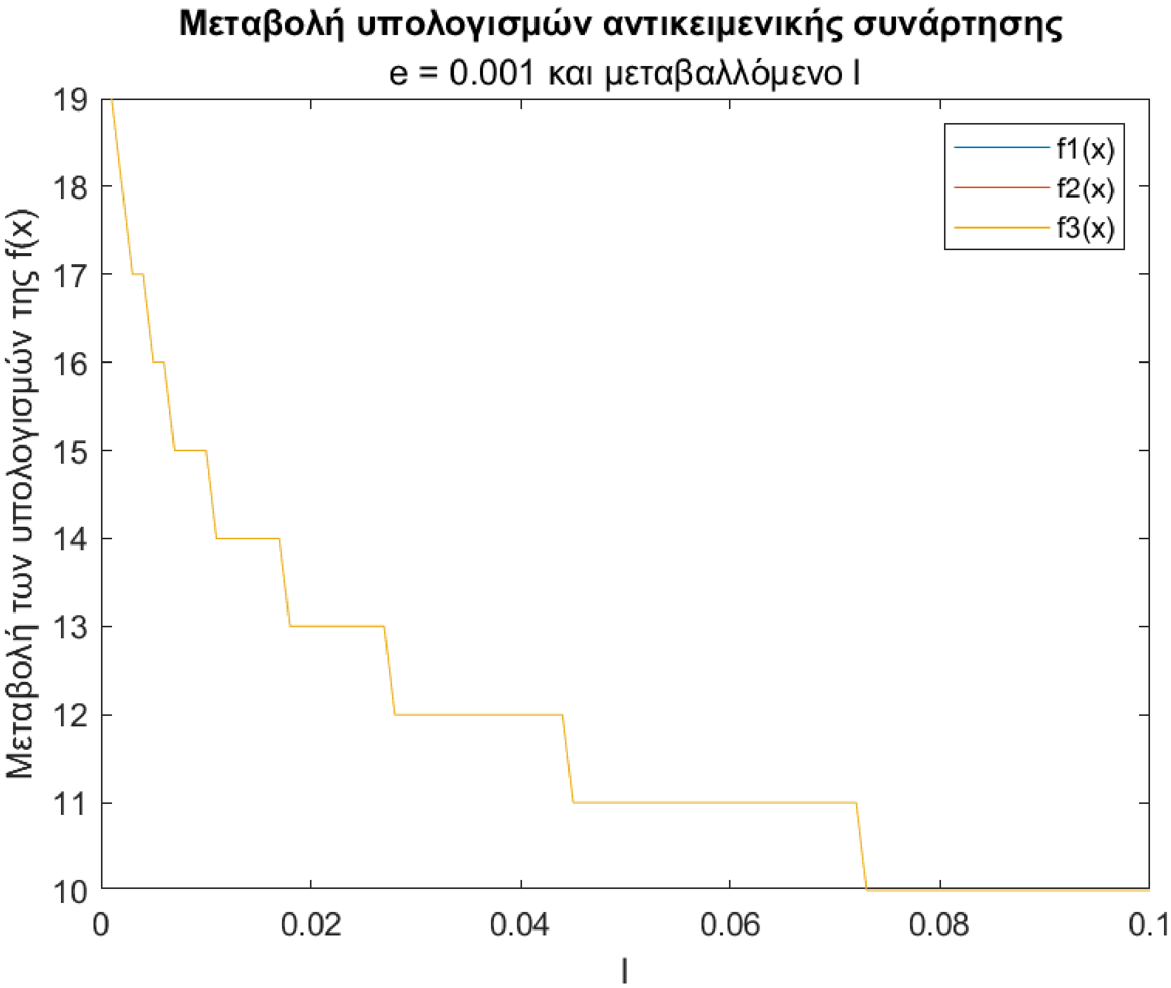
Σχήμα 5: Άκρα διαστήματος για την f2(x)



Σχήμα 6: Άκρα διαστήματος για την f3(x)

Μέθοδος Fibonacci:

Στην προκειμένη μέθοδο λειτουργούμε όπως στην μέθοδο του χρυσού τομέα όμως κάνοντας έναν ακόμα υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης μετά την δεύτερη επανάληψη. Το διάστημα κάθε φορά μειώνεται κατα τον όρο $\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$



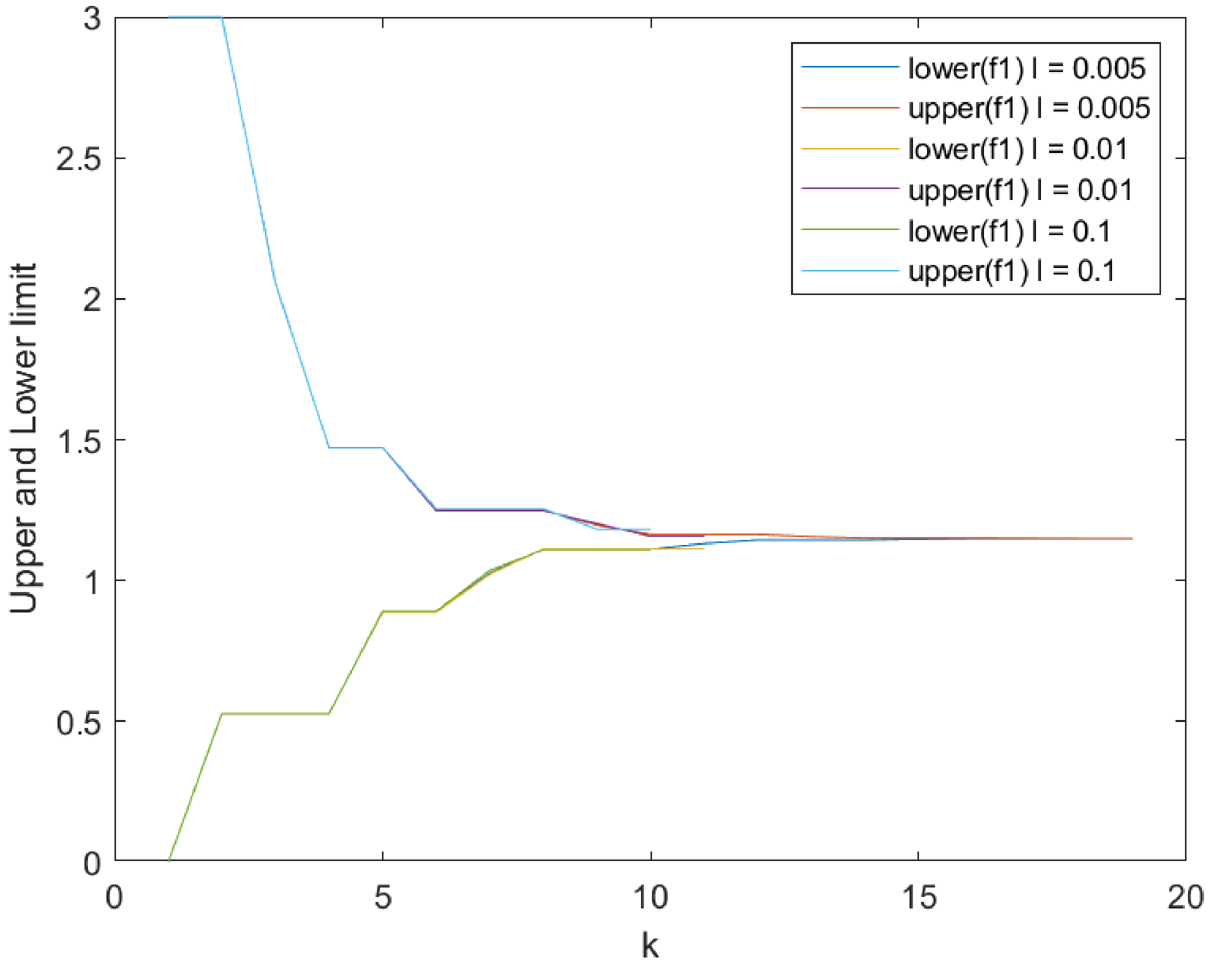
Όπως και στα προηγούμενα ερωτήματα παρατηρείται ίδια συμπεριφορά μεταξύ των f1,f2,f3 λόγω παρόμοιων στοιχείων όπως το l καθώς και όπως πρίν έχει φθίνουσα μορφή που σημαίνει λιγότερες επαναλήψεις όταν το l είναι μεγαλύτερο.

Γραφικές παραστάσεις άκρων διαστήματος $[a_k, b_k]$:

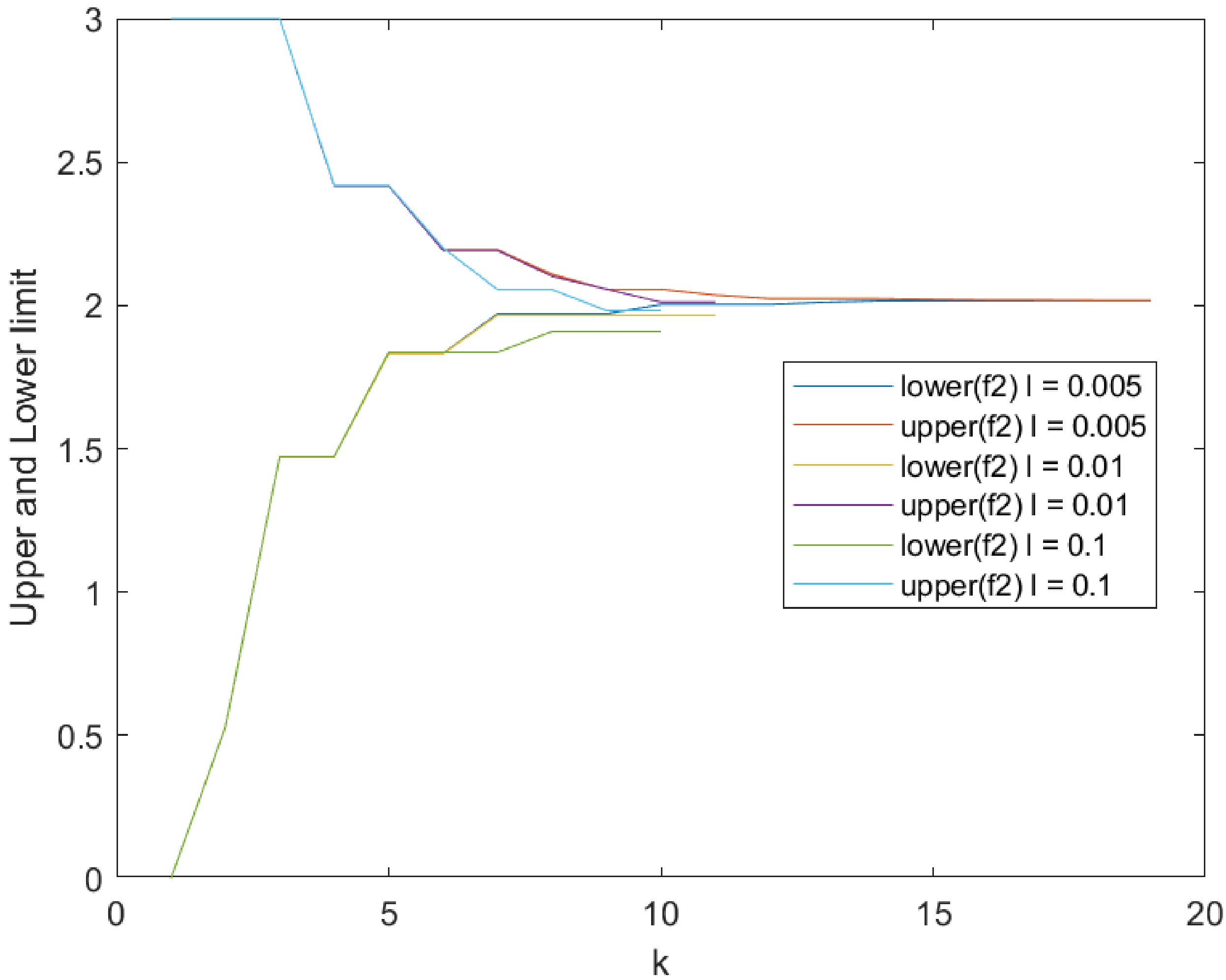
Τέλος, σχεδιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του δείκτη k για τις εξής τιμές του l:

- l = 0.005
- l = 0.01
- l = 0.1

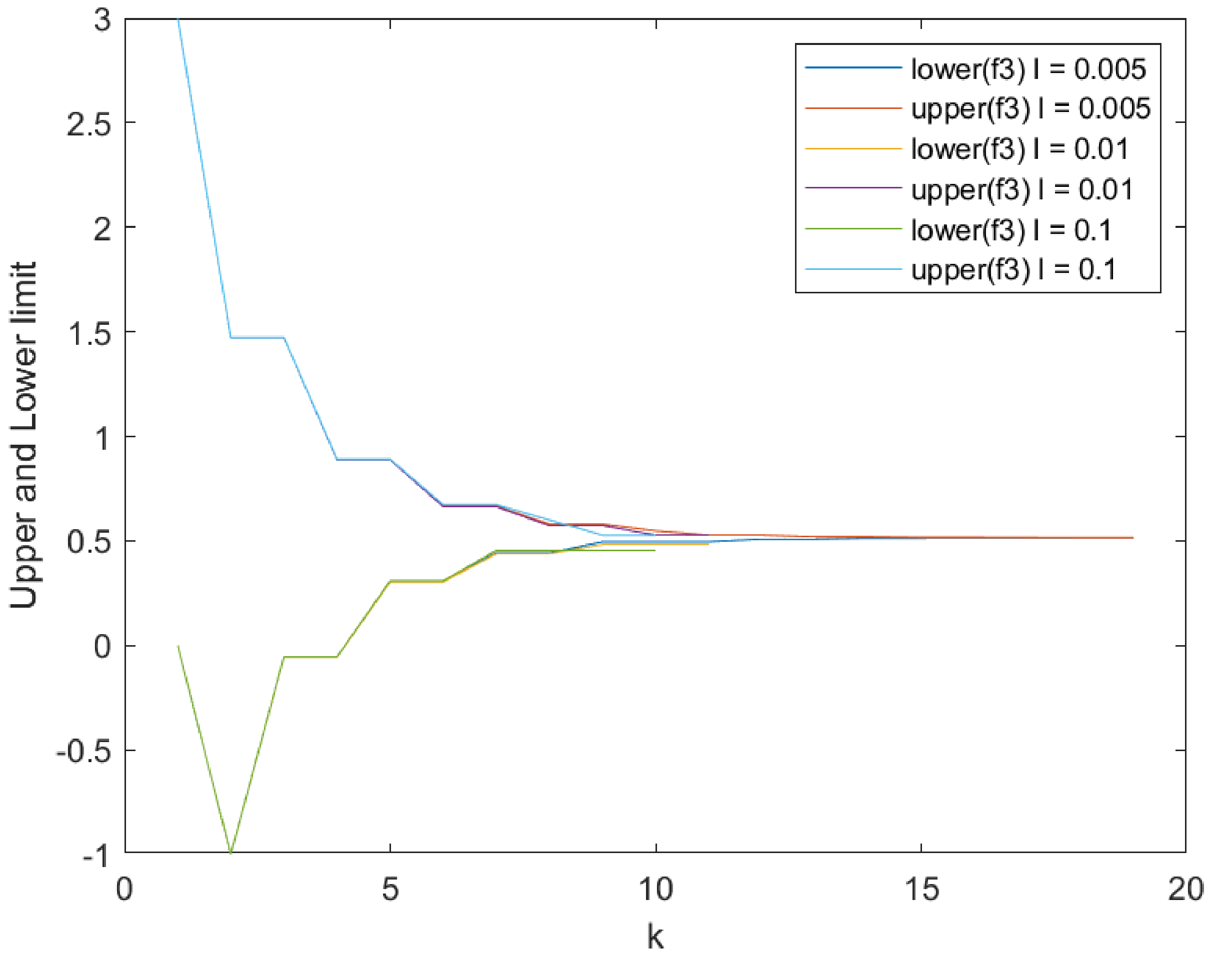
Όπως αναμένουμε, το διάστημα συγκλίνει με την πάροδο των επαναλήψεων προς την λύση (ελάχιστο) μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητη κάθε φορά ακρίβεια. Ωστόσο ο αριθμός επαναλήψεων διαφέρει σε σχέση με τη τιμή του l , και αυτό ισχύει για όλες τις f(x). Οι παρατηρήσεις σχετικά με τη σύνδεση αριθμού επαναλήψεων και τιμής του l είναι αντίστοιχες με πρίν.



Σχήμα 7: Άκρα διαστήματος για την f1(x)



Σχήμα 8: Άκρα διαστήματος για την f2(x)



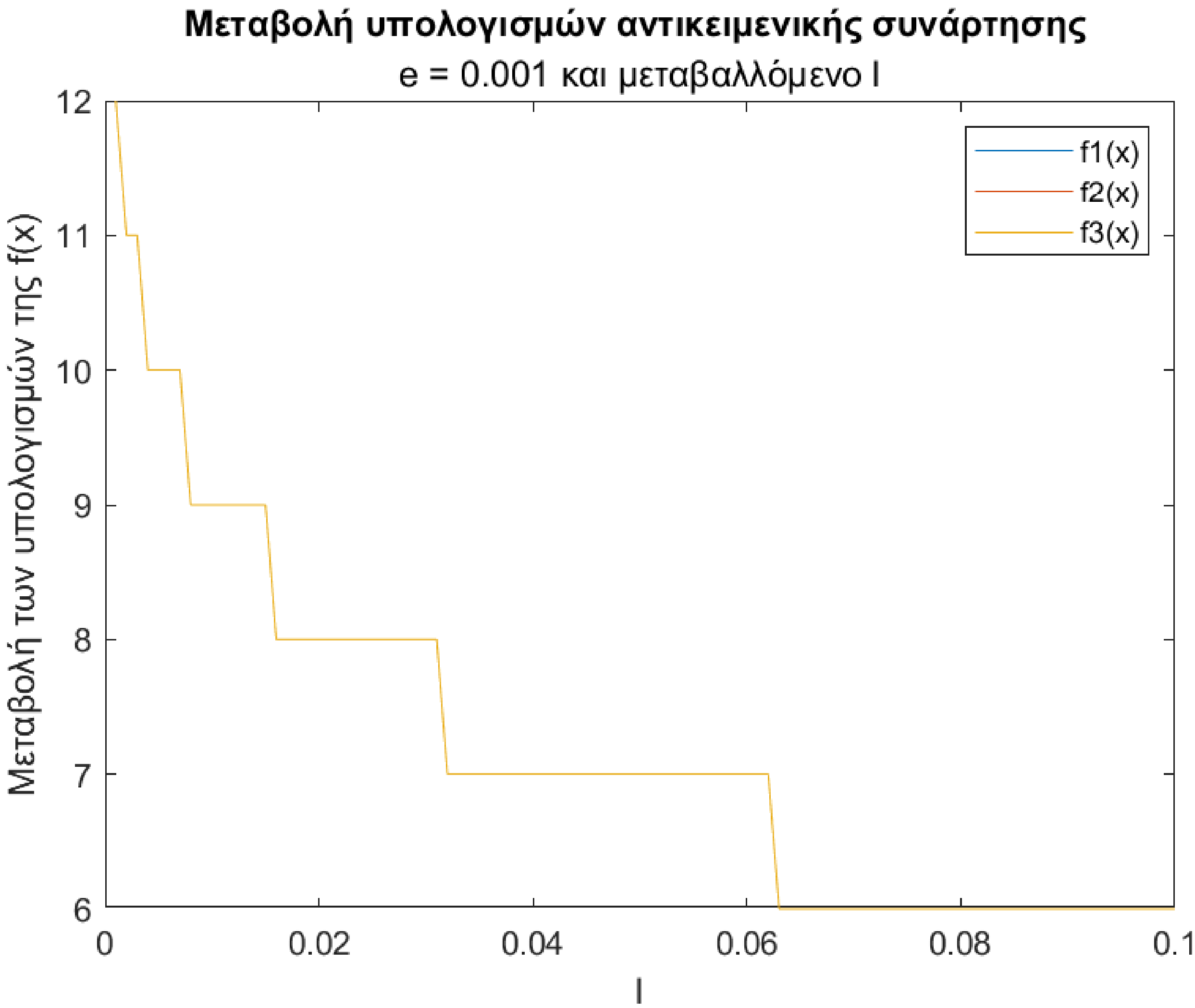
Σχήμα 9: Άκρα διαστήματος για την f3(x)

Για τα σχήματα 7,8,9 τα συμπεράσματα είναι ίδια με αυτά της μεθόδου διχοτόμου και της μεθόδου χρυσού τομέα με την λογική ότι:

Κόκκινο και μπλε: Αντιπροσωπεύουν τιμές του l με υψηλή ακρίβεια (π.χ. l=0.005). Το διάστημα κλείνει πιο αργά, και απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις.
Πράσινο και ανοιχτό μπλε: Αντιπροσωπεύουν τιμές του l με χαμηλότερη ακρίβεια (π.χ. l=0.1). Το διάστημα συγκλίνει γρήγορα, και απαιτούνται λιγότερες επαναλήψεις.

Μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγων:

Στην προκειμένη μέθοδο χρησιμοποιείται ως αντικειμενική συνάρτηση η παράγωγος και σκοπός είναι η εύρεση σημείου σε ενα τελικό διάστημα αναζήτησης l .

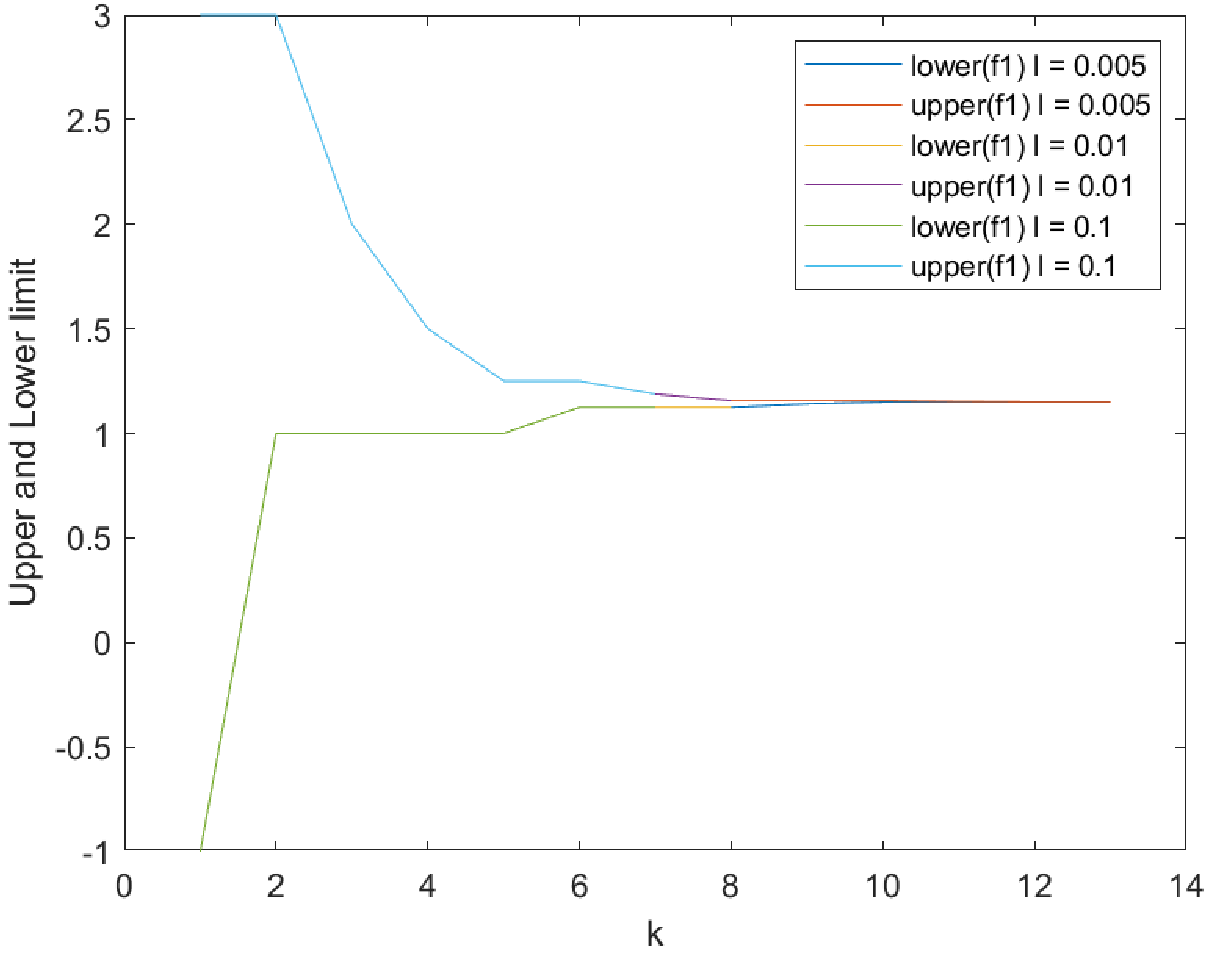


Όπως και στα προηγούμενα ερωτήματα παρατηρείται ίδια συμπεριφορά μεταξύ των f1,f2,f3 λόγω παρόμοιων στοιχείων όπως το l καθώς και όπως πρίν έχει φθίνουσα μορφή που σημαίνει λιγότερες επαναλήψεις όταν το l είναι μεγαλύτερο.

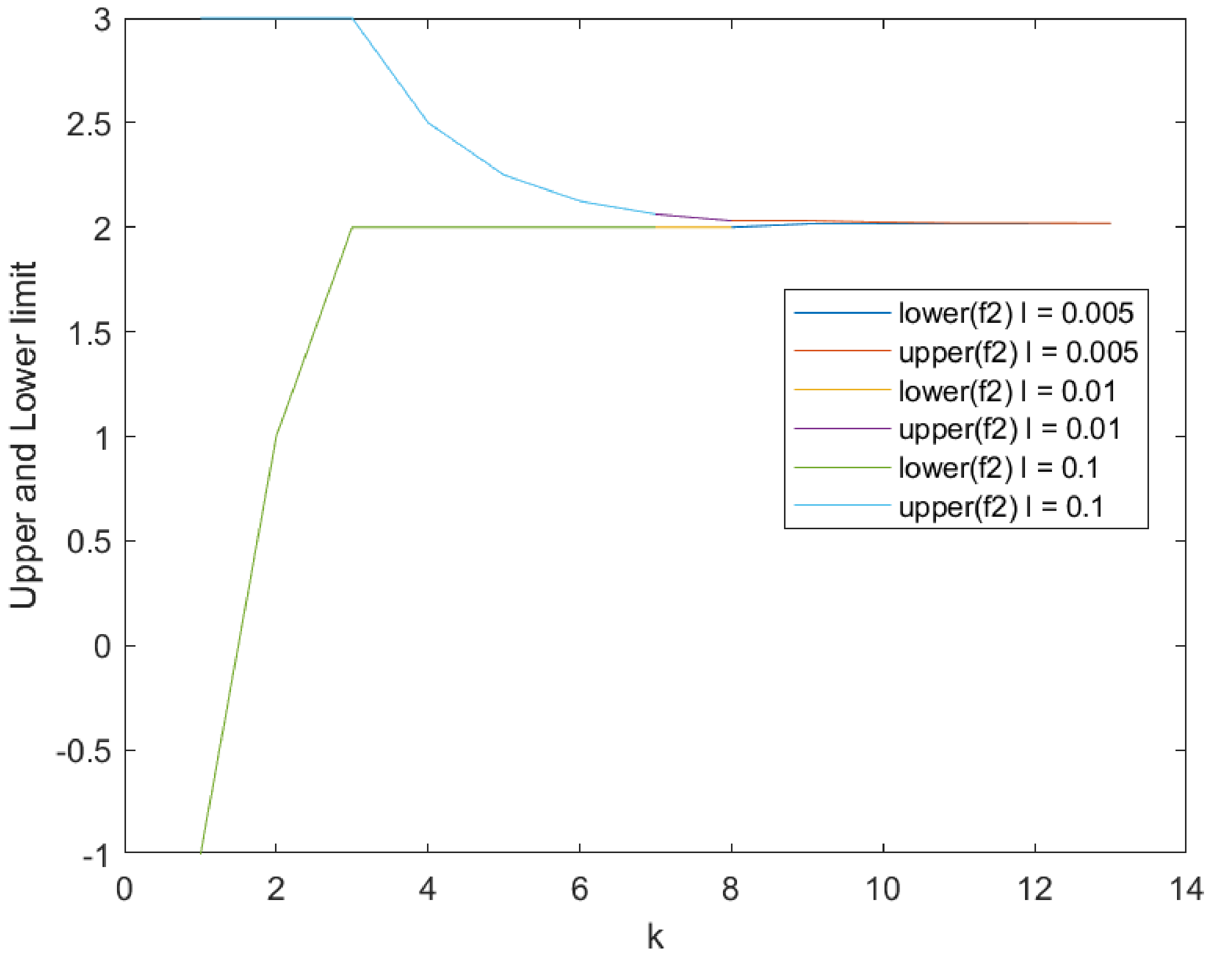
Γραφικές παραστάσεις άκρων διαστήματος $[a_k, b_k]$:

Τέλος, σχεδιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$ συναρτήσει του δείκτη k για τις εξής τιμές του l:

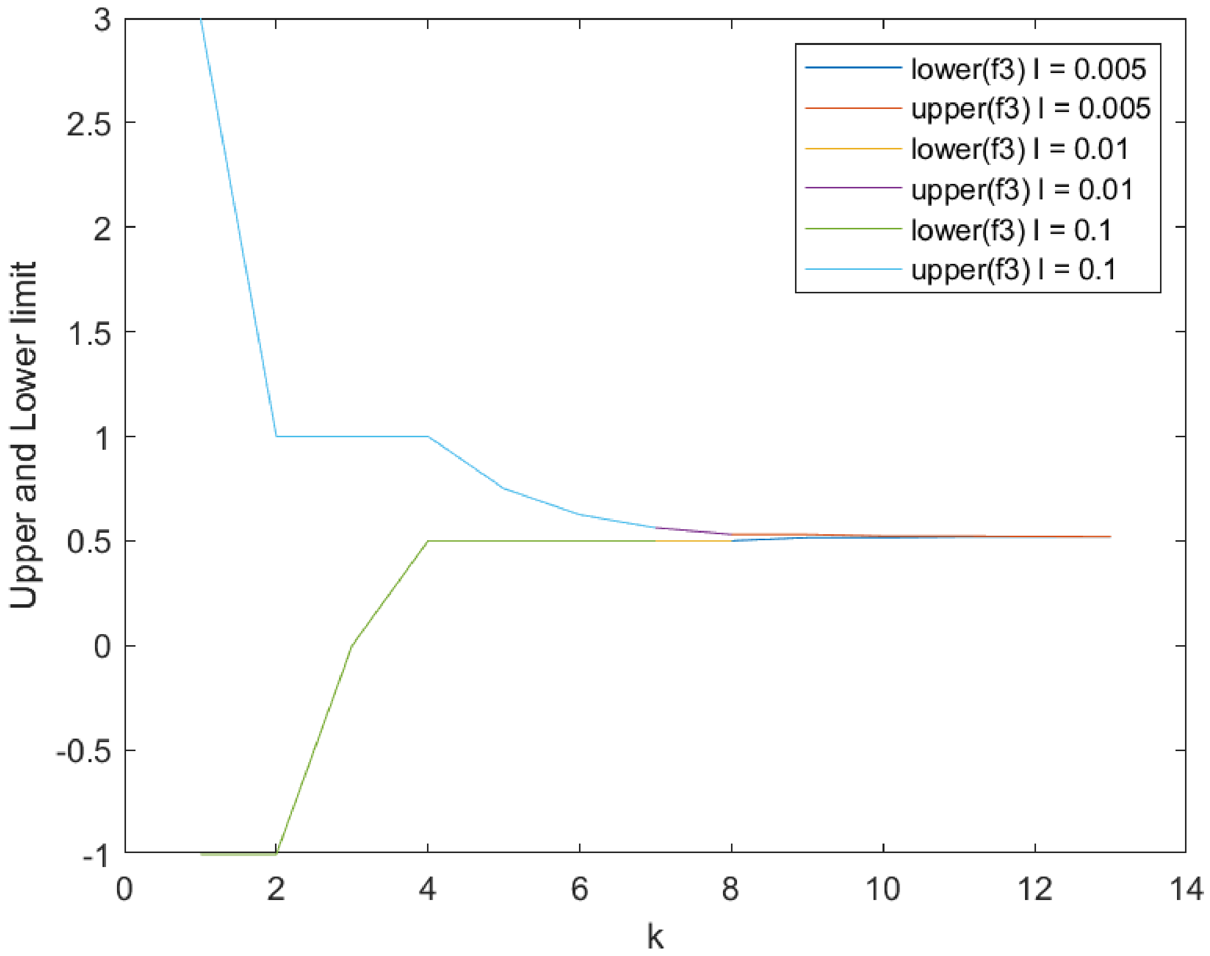
- l = 0.005
- l = 0.01
- l = 0.1



Σχήμα 10: Άκρα διαστήματος για την f1(x)



Σχήμα 11: Άκρα διαστήματος για την f2(x)



Σχήμα 12: Άκρα διαστήματος για την f3(x)

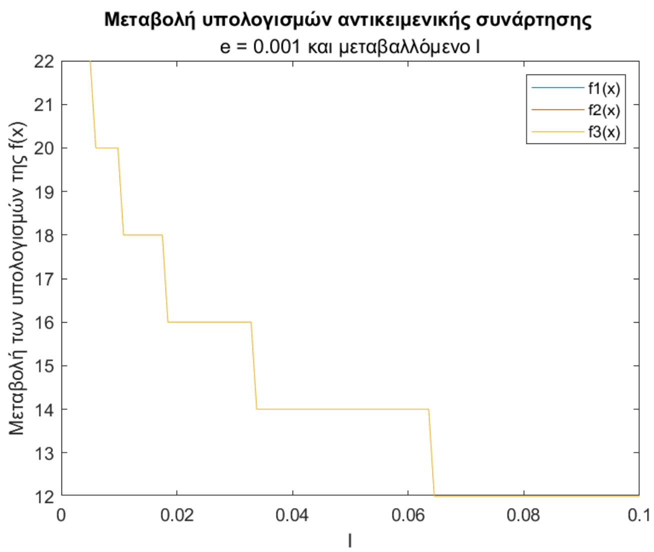
Σύγκριση μεθόδων:

Από τα διαγράμματα που απεικονίζουν τη μεταβολή των υπολογισμών για κάθε μέθοδο, είναι φανερό ότι η αποδοτικότητα των μεθόδων βελτιώνεται όσο προχωράμε με βέλτιστη αποδοτικότητα στην τέταρτη μέθοδο, κάτι το οποίο συμφωνεί με τα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι η μέθοδος διχοτόμησης με παράγωγο απαιτεί το μέγιστο 12 υπολογισμούς, ενώ η απλή μέθοδος διχοτόμησης απαιτεί 22 υπολογισμούς αντίστοιχα. Η μέθοδος διχοτόμησης με χρήση παραγώγου αν και απαιτεί τον μικρότερο αριθμό επαναλήψεων, χρειάζεται τη συνάρτηση παραγώγου, πράγμα που μπορεί να προσθέσει επιπλέον υπολογιστικό κόστος ανά επανάληψη. Ωστόσο, στο διάγραμμα φαίνεται να είναι η πιο αποδοτική σε αριθμό βημάτων, με το μέγιστο αριθμό υπολογισμών να φτάνει τους 12.

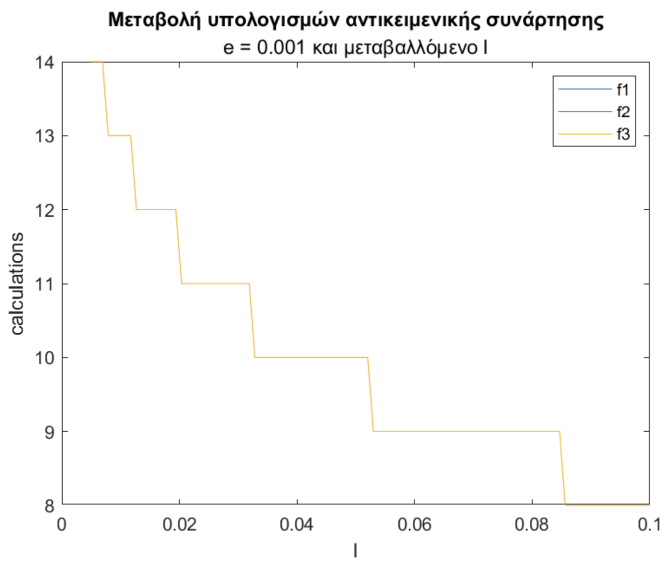
Η σειρά αύξουσας αποδοτικότητας των μεθόδων, με βάση τους υπολογισμούς που πραγματοποιήθηκαν, είναι η εξής:

1. Μέθοδος Διχοτόμησης
2. Μέθοδος Χρυσού Τομέα
3. Μέθοδος Fibonacci (παρόμοια αποδοτικότητα με την μέθοδο χρυσού τομέα)
4. Μέθοδος Διχοτόμησης με Χρήση Παραγώγου

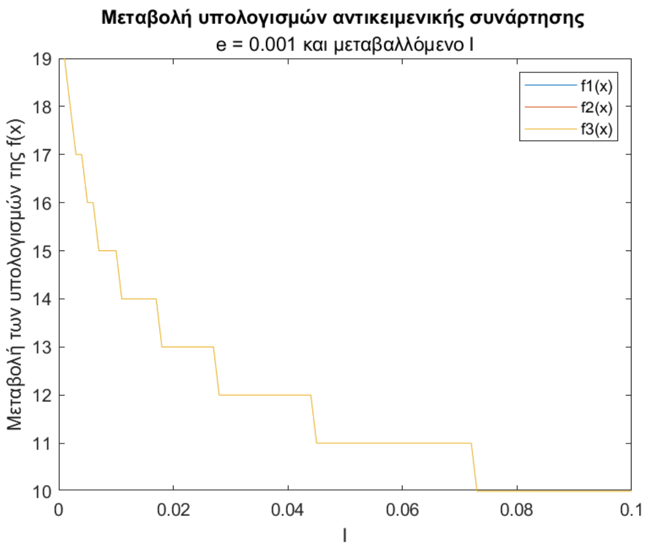
Επιπλέον, παρατηρείται ότι η αποδοτικότητα μεταξύ της μεθόδου Χρυσού Τομέα και της μεθόδου Fibonacci είναι ιδιαίτερα παρόμοια.



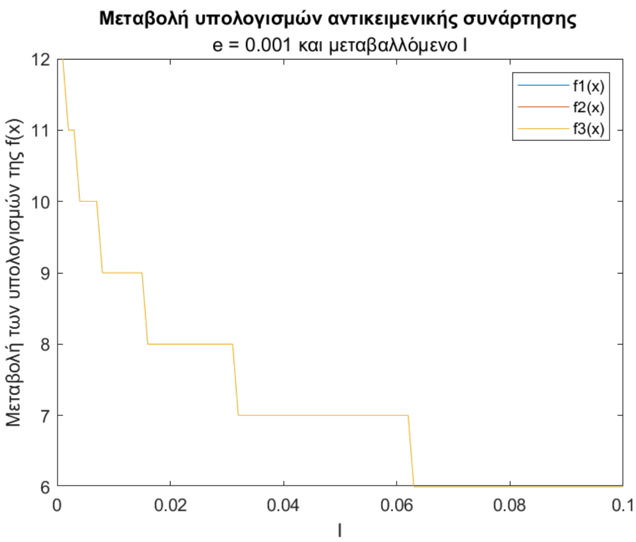
Μέθοδος Διχοτόμησης



Μέθοδος Χρυσού Τομέα



Μέθοδος Fibonacci



Μέθοδος Διχοτόμου με παράγωγο

Επίσης, αν λάβουμε υπόψιν τον **αριθμό βημάτων συγκλισης** ως μέτρο σύγκρισης της κάθε μεθόδου, τότε φαίνεται οι μεθοδοι διχοτόμου να είναι ταχύτερες ενώ να ακολουθουν η χρυσού τομέα και η fibonacci. Αυτο συμπέρασμα εξάγεται από τα σχήματα που απεικονίζουν τα ακρα του διαστήματος [α,β] για κάθε μέθοδο (σχήματα 3, 6, 9, 12) που όπως φαίνεται οι μέθοδοι διχοτόμου φαίνονται να τερματίζουν σε μικρότερο αριθμό επαναλήψεων με την ίδια ακρίβεια.

Βιβλιογραφικές πηγές:

[1] Γεώργιος Α. Ροβιθάκης. Τεχνικές Βελτιστοποίησης. Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ.