高一銜接第一單元練習題詳解

類題 P4

1.在最簡分數中，分母只能含有 2 或 5 的質因數

(2) $\frac{73}{12}=\frac{73}{2^2\times\boxed{3}}$ ；(4) $\frac{4}{\boxed{7}}$ 。故選(1)(3)(5)

2.

(1) $\frac{352-3}{99}=\frac{349}{99}$

(2) $\frac{352-35}{90}=\frac{317}{90}$

(3) $\frac{432-4}{990}=\frac{428}{990}=\frac{214}{495}$

3.

$$\frac{\frac{11}{90}+\frac{22}{90}+\frac{33}{90}}{\frac{12}{99}+\frac{24}{99}+\frac{36}{99}}=\frac{\frac{66}{90}}{\frac{72}{99}}=\frac{\cancel{66}\times\cancel{99}}{\cancel{72}\times\cancel{90}}=\frac{11\times11}{12\times10}=\frac{121}{120}$$

4.

設 $n=2^\alpha\times5^\beta$ ($n=2\sim100$)（ $\alpha,\beta\in N$ 或 0）

習慣上從數字大的討論

α	1～6	0～4	0～2
β	0	1	2

n 有 $6+5+3=14$ 個

5.

設分母 $x\Rightarrow$ 分子 $20-x$

$\therefore 0.54-\frac{1}{2}\times0.01\le\frac{20-x}{x}<0.54+\frac{1}{2}\times0.01\Rightarrow0.535\le\frac{20-x}{x}<0.545$

$\Rightarrow0.535x\le20-x<0.545x\Rightarrow1.535x\le20<1.545x$

$$\Rightarrow\begin{cases}1.535x\le20\\1.545x>20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le\frac{20}{1.535}\approx13.\sim\\x>\frac{20}{1.545}\approx12.\sim\end{cases}\Rightarrow12.\sim<x\le13.\sim$$

$x=13$ $\therefore$ 分數為 $\frac{7}{13}$

6.

$\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}=1.\overline{285714}$

小數點以下每 6 個一循環

$100\div 6=16\cdots 4$

第 100 位共循環 16 次，剩下 4 個

依序為 $\boxed{2}\boxed{8}\boxed{5}\overset{\checkmark}{\boxed{7}}\boxed{1}\boxed{4}$

∴第 100 位為 7

7.

(1)由於有理數具有稠密性　∴有$\boxed{\text{無限多個}}$介於兩數之間

(2) $\frac{1}{8}=\frac{30}{240}$ ； $\frac{1}{6}=\frac{40}{240}$

∴介於兩數之間分母為 240 的有理數有 $\frac{31}{240},\frac{32}{240},\frac{33}{240}\cdots\frac{39}{240}$ ，共 9 個

8.

不管兔子來回跳的過程，其來回跳總共花的時間就是烏龜由甲地到乙地的總時間。

烏龜花的時間： $60\div 6=10$ 分鐘

兔子來回跳的距離： $10\times 9=90$ 公尺

類題 P14

1.

$\because abc<0\Rightarrow a,b,c$ 三數為三個負數或二正數一負數

又已知 $a+b+c>0\Rightarrow$ 三個數為二正數一負數

且 $a>b>c$　$\therefore a>0,b>0,c<0\Rightarrow$(1)(2)正確；(3)錯誤

(4)反例：設 $a=5,b=3,c=-6$ 完全符合題目條件，但 $5^2<(-6)^2$　∴(4)錯誤

(5)由 $a+b+c>0\Rightarrow a+b>-c\Rightarrow|a+b|>|-c|=|c|$　∴(5)正確

故選(1)(2)(5)

2.

(1)正確：
$$\begin{array}{rl} & 0<\ a\ <1 \\ + & 0<\ b\ <1 \\ \hline & 0<a+b<2 \end{array}$$

(2)正確： $ab:0,0,0,1$　$\therefore 0<ab<1$

(3)錯誤：
$$\begin{array}{rl} & 0<\ b\ <1 \\ + & -1<-a\ <0 \\ \hline & -1<b-a<1 \end{array}$$

(4)錯誤：反例：設$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$，則$\frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$，不在 0、1 之間

(5)正確：$\begin{array}{r} 0<\ \ a\ \ <1 \\ +\underline{\left|-1<-b\ \ <0\right.} \\ -1<a-b<1 \end{array}$，$-1<a-b<1\Rightarrow|a-b|<1$

故選(1)(2)(5)

3.

(1) $\begin{array}{r} 2\le\ \ x\ \ \le 5 \\ +\underline{\left|-4\le\ \ y\ \ \le 3\right.} \\ -2\le x+y\le 8 \end{array}$ (2) $\begin{array}{r} 2\le\ \ x\ \ \le 5 \\ +\underline{\left|-3\le\ -y\ \le 4\right.} \\ -1\le x-y\le 9 \end{array}$ (3) $\begin{array}{l} xy:-8,6,-20,15 \\ \Rightarrow -20\le xy\le 15 \end{array}$ (4) $\begin{array}{l} \frac{y}{x}:-2,\frac{-4}{5},\frac{3}{2},\frac{3}{5} \\ \Rightarrow -2\le\frac{y}{x}\le\frac{3}{2} \end{array}$

(5) $\begin{array}{r} 4\le\ \ x^2\ \ \le 25 \\ +\underline{\left|0\le\ \ y^2\ \ \le 16\right.} \\ 4\le x^2+y^2\le 41 \end{array}$

4.

設矩形長為x公尺，寬為y公尺，求$2(x+y)$的最小值

由算幾不等式可得$\frac{2x+2y}{2}\ge\sqrt{2x\cdot 2y}=\sqrt{4xy}$

$\Rightarrow 2x+2y\ge 2\sqrt{4xy}=2\sqrt{48}=8\sqrt{3}$

$\therefore$最小值為$8\sqrt{3}$

5.

由算幾不等式可得$\frac{a+2b}{2}\ge\sqrt{a\cdot 2b}=\sqrt{2ab}$

$\Rightarrow 4\ge\sqrt{2ab}\Rightarrow ab\le 8$ $\therefore ab$的最大值為 8，此時的$a=2b=4$時有最大值

$\Rightarrow a=4,b=2$時有最大值 8

6.

$\frac{\frac{4}{a}+\frac{9}{b}}{2}>\sqrt{\frac{4}{a}\cdot\frac{9}{b}}=\sqrt{\frac{36}{ab}}$

$\Rightarrow \frac{4}{a}+\frac{9}{b} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{36}{25}}=\frac{12}{5}$

$\therefore$最小值為$\frac{12}{5}$。當$\frac{4}{a}=\frac{9}{b}$時有最小值

令$b=\frac{9a}{4}$代入$ab=25 \Rightarrow \frac{9a^2}{4}=25 \Rightarrow a=\frac{10}{3}$（負不合）

$\therefore a=\frac{10}{3}$，$b=\frac{15}{2}$

自我練習題

1.

$\frac{5}{7}=0.\overline{714285}$

$200 \div 6=33 \cdots 2$

$(1+4+2+8+5+7) \times 33+7+1=27 \times 33+8=899$

2.

(1) $\frac{53}{99}$

(2) $\frac{548-5}{9900}=\frac{543}{9900}=\frac{181}{3300}$

(3) $\frac{345}{9990}=\frac{115}{3330}=\frac{23}{666}$

(4) $\frac{1267-12}{9900}=\frac{1255}{9900}=\frac{251}{1980}$

3.

可化為有限小數分母必須只含 2 或 5 的因數，$110=11 \times 10$，含有 11 的因數必須被約掉

由含 11 因數檢驗法：(奇數位和－偶數位和）為 11 的倍數

$(2+x+9)-(7+5+1)$為 11 的倍數

$\Rightarrow 11+x-13=x-2$為 11 的倍數

$\therefore x=2$

4.

$198=2 \times 9 \times 11$

由含 9 因數檢驗法：數字和為 9 的倍數

與含 11 因數檢驗法：(奇數位和－偶數位和）為 11 的倍數

$(2+6+6+0+a+b+7)$為 9 的倍數$\Rightarrow a+b+3$為 9 的倍數$\Rightarrow a+b=6$或 15

$(2+6+a+7)-(6+0+b)$為 11 的倍數$\Rightarrow 9+a-b$為 11 的倍數$\Rightarrow a-b=-9$或 2

$\begin{cases} a+b=6 \\ a-b=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-3}{2} \\ b=\dfrac{15}{2} \end{cases}$（不合）或$\begin{cases} a+b=6 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$（合）

或$\begin{cases} a+b=15 \\ a-b=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=12 \end{cases}$（不合）或$\begin{cases} a+b=15 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{17}{2} \\ b=\dfrac{13}{2} \end{cases}$（不合）

5.

$\dfrac{35}{280} < \dfrac{k}{280} < \dfrac{40}{280}$

$k = 36 \sim 39$

共 4 個

6.

設分母$x \Rightarrow$分子$60-x$

$\therefore 0.45 \le \dfrac{60-x}{x} < 0.55$

$\Rightarrow 0.45x \le 60-x < 0.55x \Rightarrow 1.45x \le 60 < 1.55x$

$\Rightarrow \begin{cases} 1.45x \le 60 \\ 1.55x > 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{60}{1.45} \approx 41.\sim \\ x > \dfrac{60}{1.55} \approx 38.\sim \end{cases} \Rightarrow 38.\sim < x \le 41.\sim$

$x = 39, 40, 41$

分數為$\dfrac{21}{39}$（不合）、$\dfrac{20}{40}$（不合）、$\dfrac{19}{41}$（合）

7.

(1)反例：$c = 2+\sqrt{3}$，$d = 2-\sqrt{3} \Rightarrow c+d = 4$為有理數

(2)反例：若$a = 4 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{4} = 2$為有理數

8.

(2)反例：$a = 3\sqrt{2}, b = \sqrt{2} \Rightarrow a \times b = 6, a \div b = 3$為有理數，但$a, b$均為無理數

(5)反例：$a = \sqrt{2}, b = -1 \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$，但$a \ne b \ne 0$

9.

(1)
$$\begin{array}{rl} & -1\le \quad x \quad \le 2 \\ + & -6\le \ -2y \ \le -2 \\ \hline & -7\le x-2y\le 0 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rl} & 0\le \quad x^2 \quad \le 4 \\ + & 1\le \quad y^2 \quad \le 9 \\ \hline & 1\le x^2+y^2\le 13 \end{array}$$

(3) $\frac{x}{y}:-1,-\frac{1}{3},2,\frac{2}{3}$

$\Rightarrow -1\le \frac{x}{y}\le 2$

10.

$(2x+6)+(-3x+y)\sqrt{3}=4y-\sqrt{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+6=4y \\ -3x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-3 \\ -6x+2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

$\therefore x+y=3$

11.

$\frac{2a+b}{2}\ge\sqrt{2ab}\Rightarrow\frac{81}{4}\ge 2ab\Rightarrow ab\le\frac{81}{8}$　$\therefore$最大值為$\frac{81}{8}$

當$2a=b=\frac{9}{2}$時有最大值，此時$a=\frac{9}{4}$，$b=\frac{9}{2}$

12.

$\frac{5a+2b}{2}\ge\sqrt{10ab}=10$

$5a+2b\ge 20$　$\therefore$最小值為 20

當$5a=2b=10$時有最小值，此時$a=2,b=5$

13.

$\frac{a^2+4b^2}{2}\ge\sqrt{4a^2b^2}\Rightarrow 36\ge 4a^2b^2\Rightarrow -3\le ab\le 3$

14.

$a+\frac{9}{a}\ge 2\sqrt{a\cdot\frac{9}{a}}\Rightarrow a+\frac{9}{a}\ge 6\Rightarrow a+\frac{9}{a}+3\ge 9$　$\therefore$最小值為 9

當$a=\frac{9}{a}\Rightarrow a^2=9$有最小值時，此時$a=3$(因為$a>0$)

15.

設長為x、寬為y

$2(x+y)-2=66\Rightarrow 2x+2y=68\Rightarrow x+y=34$

$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$

$289\ge xy$　$\therefore$最大值為 289