Name: Klodjan Hidri
AM: 2726
login: hidri@.csd.uoc.gr

Laborator_2

Askisi_1

Ασκηση 1:

$$X1[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x1[n] e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-jwn} = \frac{1-e^{-jw5}}{1-e^{-jw}} \Rightarrow$$

$$\frac{e^{-5jw/2}\left(e^{5jw/2} - e^{-jw5/2}\right)}{e^{-jw/2}\left(e^{jw/2} - e^{-jw/2}\right)} = e^{-4jw/2} \cdot \frac{2j \sin\left(5\frac{w}{2}\right)}{2j \sin\left(\frac{w}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$e^{-j2w} \frac{\sin\left(5\frac{w}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}$$

η τιμη μεγιστου στο $w=0$ ειναι

$$X(e^{jw}) = e^{-j2\cdot 0} \frac{\sin\left(5\frac{0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{0}{2}\right)} =$$ LHospital οταν

$$\lim_{w\to 0} \frac{\sin(aw)}{\sin(w)} = a$$ οποτε εδω η τιμη μας ειναι 5

Το $X(e^{jw})$ μηδενιζεται οταν $\sin\left(5\frac{w}{2}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{5w}{2} = k\pi \Rightarrow \boxed{w = \frac{2k\pi}{5}} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$X2(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{29} e^{-jwn} = \frac{1-e^{-jw30}}{1-e^{-jw}} = \frac{e^{-\frac{jw30}{2}}\left(e^{\frac{jw30}{2}} - e^{-\frac{jw30}{2}}\right)}{e^{-jw/2}\left(e^{jw/2} - e^{-\frac{jw}{2}}\right)} \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{j29w}{2}} \cdot \frac{2j \sin(15w)}{2j \sin\left(\frac{w}{2}\right)} = e^{-\frac{j29w}{2}} \cdot \frac{\sin(15w)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}$$

Το $X2(e^{jw})$ μηδενιζεται οταν $\sin(15w) = 0 \Rightarrow 15w = 2k\pi$ $\boxed{w = \frac{2k\pi}{15}}$

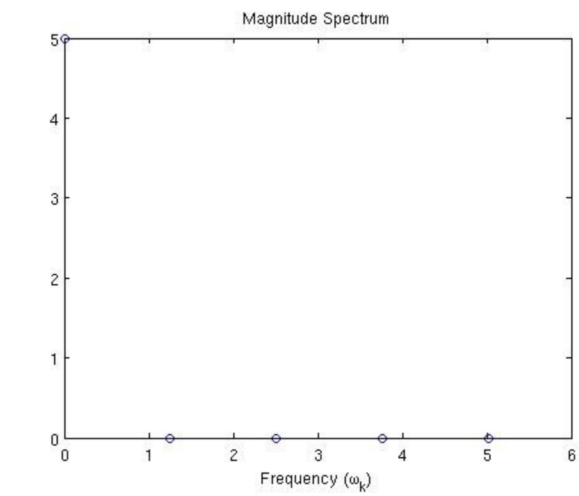
και οταν $\sin\left(\frac{w}{2}\right) = 0$

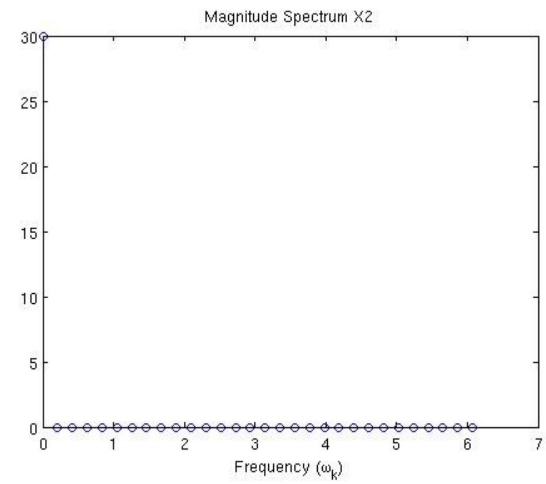
$$\frac{w}{2} = l\pi \Rightarrow \boxed{w = 2l\pi} \quad l \in \mathbb{Z}$$

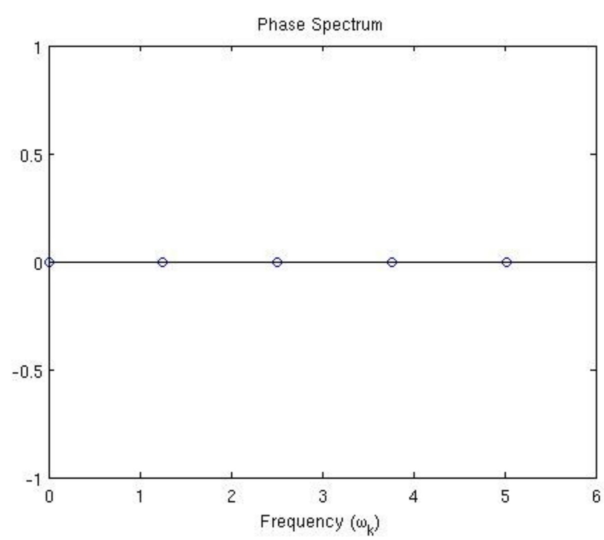
οταν $k=0$, $l=0$ μηδενιζονται και οι δυο. Ομως $\lim_{w\to 0} \frac{\sin(aw)}{\sin(w)} = a$

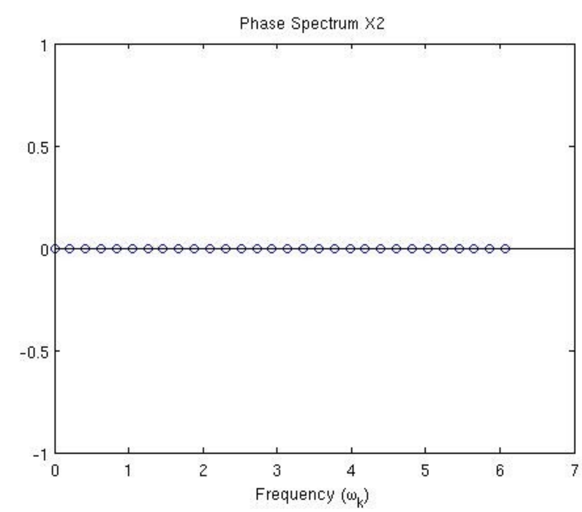
και εδω η μεγιστη τιμη οταν $\omega=0$ ειναι $\frac{\sin(15\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}$ θα το γραψουμε $\frac{\sin(30\frac{\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} = \boxed{30}$

δ)



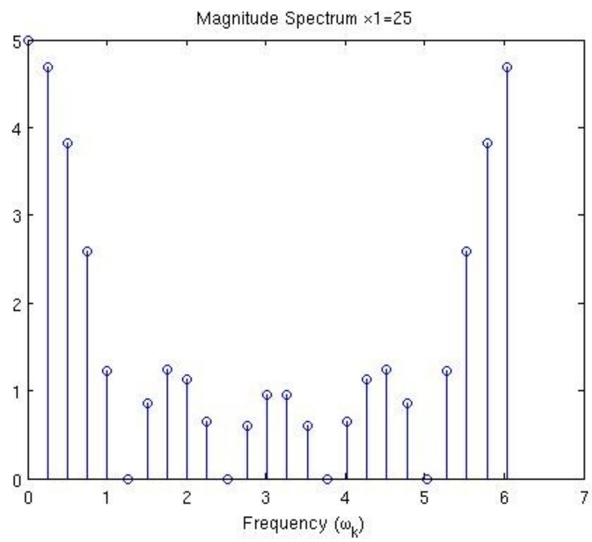


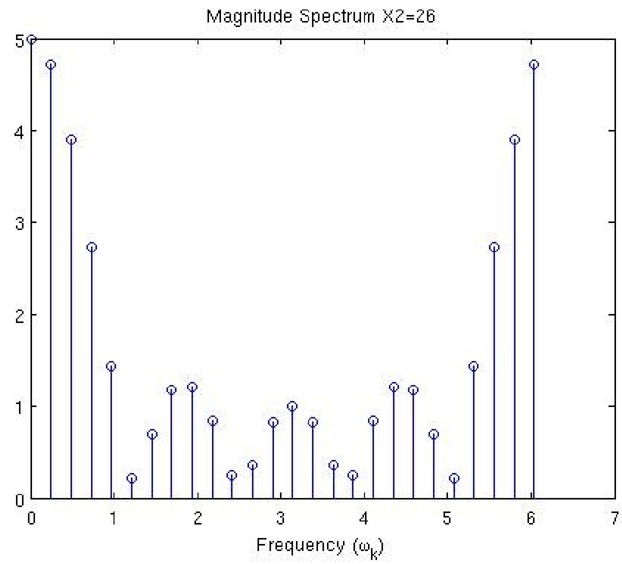


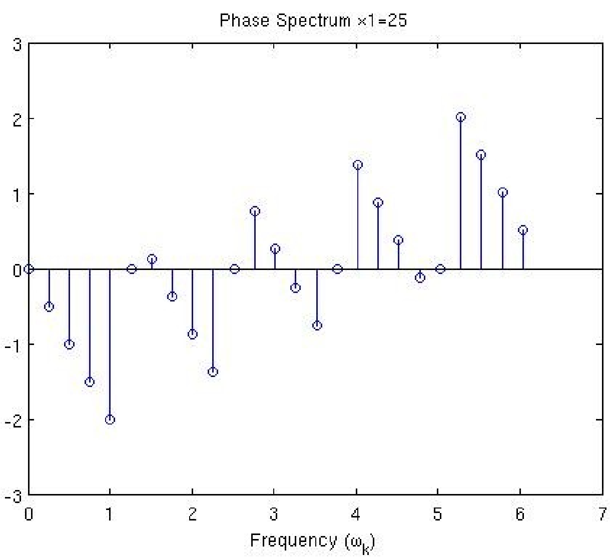


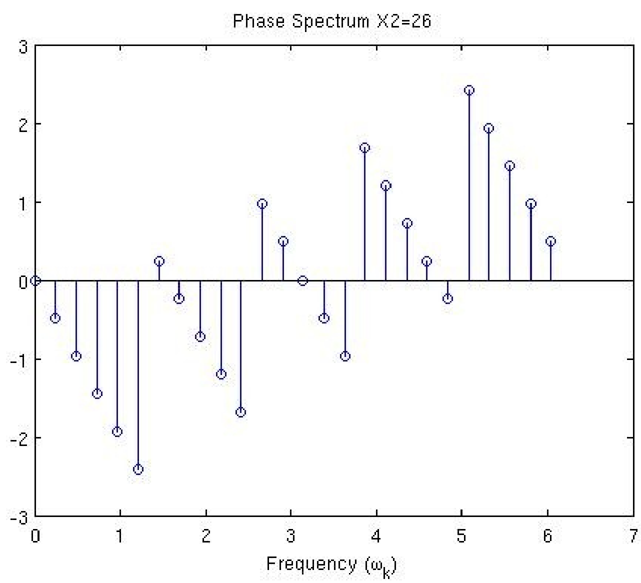
Τα φασματα φασης και πλατους των δυο σηματων μοιαζουν πολυ με αυτα που περιμενα και που ειχα υπολογισει στο χαρτι μου.Τα σηματα ειναι εισοδυναμα γιατι τα δυο φασματα πλατης και φασης μοιαζουν η μια με την αλλη.Στο φασμα φασης στο X1(ε^jω) einai kai stis 5 τιμες του ω μηδεν επησης στο X2(e) και στις 29 τιμες του ω ειναι μηδεν . Στο φασμα πλατης μονο για ω=0 εχουμε στο X1(e^jω) πλατος =5 και στο X2(e^jω) πλατος =30 και για ολες τις αλλες τιμες του ω το πλατως και των δυο ειναι 0 .Οσων αφορα αν ειναι ισοδυναμα θα ελεγα προς την φαση ειναι ισοδυναμα γιατι δεν εχουν φαση,για n=5 kai n=29 .Ος προς το πλατος μιαζουν πολυ αλλα για ω=0 το πλατος και των δυο σηματων δεν ειναι ιδιο   X1(e^jω)=5 και X2(e^jω)=30 δηλαδη το X2 εχει εξαπλασιο μεγαλυτερο πλατος απο το X1 και καταλιγω οτι τα σηματα δεν ειναι ισοδυναμα.

ε)









Το φασμα πλατους και φασης μοιαζουν παρα πολυ μεταξυ τους με την διαφορα οτι το πλατος του X2(e^jω) δεν μηδενιζεται σε καμια τιμη του ω και στην φαση μηδενιζεται μοναχα δυο φορες σε σχεση με την X1(e^jω) που μηδενιζεται 4 φορες.Αυτο που βλεπω ειναι οτι μοιαζει πολυ με αυτο που περιμενα θεωρητικα.Στο χαρτι ειχα υπολογισει οτι το πλατος του X1(e^jω) θα μηδενιστει 4 φορες ενω το X2(e^jω) δεν θα μηδενιζοταν πουθενα .

σ) Οι τιμες 25 και 26 σημαινουν 25 συγκεκριμενες τιμες του ω=2κπ/25 κ={0,1,....,24} και 26 τιμες ω=2κπ/26 για κ={0,1,.... ,25 }.Τα 4 μηδενικα που αναφεραμε πανω στο φασμα πλατους προκυπτουν για τον εξης λογο : το σημα μας μηδενιζεται οταν ω=2κπ/5 .Οι τιμες του ωμεγα μας ειναι 0,2π/25,4π/25,.....,48π/25 ομως ,στις τιμες 10π/25 ,20π/25,30π/25,40π/25 ειναι ισες με 2π/5 , 4π/5 ,6π/5 , 8π/5 αντιστοιχα με αποτελεσμα να ειναι και ισες με τις τιμες ω=2κπ/5 για κ=5,10,15,20 που μηδενιζουν το σημα μας .Στο στο δευτερο μετασχηματισμο θα εχουμε ω= {0 , 2π/26,4π/26 ,......,50π/26} πραγμα που σημαινει οτι καμια απο αυτες τις τιμες δεν θα συμπιπτει να ειναι ισο με το ω=2κπ/5 για να μηδενιστει το σημα μας επομενως στο X2(e^jω) δεν θα εχουμε κανενα μηδενισμο στο πλατος .

ζ)

ο X1(e^jω25) fft() υλοποιηση εχει τιμες
πλατους=[5.0000 4.6898 3.8243 2.5835 1.2201 0.0000 0.8586 1.2343 1.1264 0.6496]
φασης = [0 -0.5027 -1.0053 -1.5080 -2.0106 0 0.1257 -0.3770 -0.8796 -1.3823]

το X1(e^jω25) δικια μου υλοποιηση εχει τιμες
πλατους=[5.0000 4.6898 3.8243 2.5835 1.2201 0.0000 0.8586 1.2343 1.1264 0.6496]
φασης =[0 -0.5027 -1.0053 -1.5080 -2.0106 -2.5133 0.1257 -0.3770 -0.8796 -1.3823]

το X1(e^jω26) fft() εχει τιμες
πλατους=[5.0000 4.7128 3.9070 2.7381 1.4269 0.2122 0.7008 1.1830 1.2062 0.8453]
φασης = [0 -0.4833 -0.9666 -1.4500 -1.9333 -2.4166 0.2417 -0.2417 -0.7250 -1.2083]

το X1(e^jω26) δικια μου υλοποιηση εχει τιμες
πλατους=[5.0000 4.7128 3.9070 2.7381 1.4269 0.2122 0.7008 1.1830 1.2062 0.8453]
φασης= [0 -0.4833 -0.9666 -1.4500 -1.9333 -2.4166 0.2417 -0.2417 -0.7250 -1.2083]

Οι διαφορες απο τι βλεπω ειναι μονο στο φασμα φασης οπου οταν το fX1 =25 οταν το fft() επιστρεφει 0 η δικια μου υλοποιηση επιστρεφει -2.5133 και σε ολες τις αλλες τιμες και οι δυο υλοποιησεις επιστρεφουν τα ιδια αποτελεσματα .

Askisi1.ii
I)

$$x[n] = 3\cos(2\pi n/5) = \frac{3}{2}e^{\frac{j2\pi n}{5}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{j2\pi n}{5}} \Rightarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{3}{2}e^{\frac{j2\pi n}{5}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{j2\pi n}{5}}\right)e^{-j\omega n} \Rightarrow$$

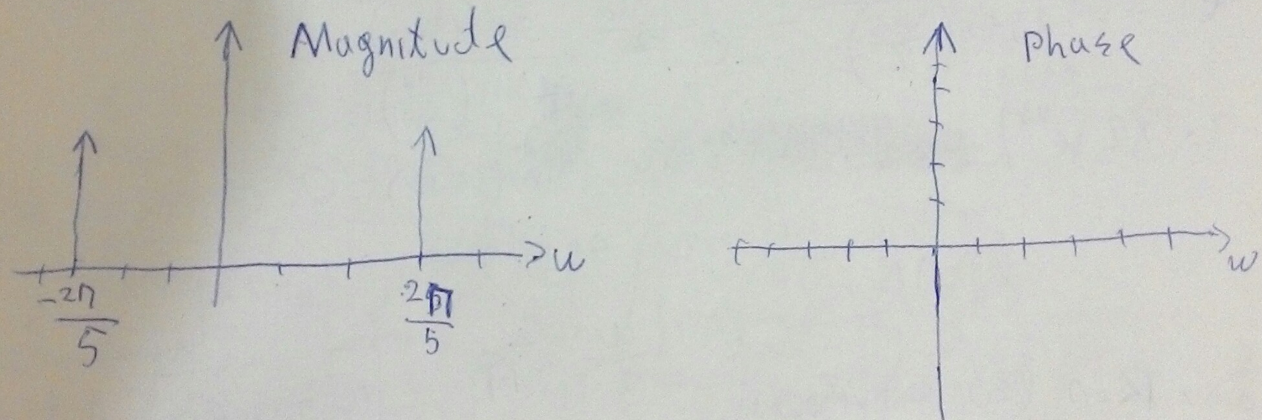
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{3}{2}e^{\frac{j2\pi n}{5}}e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{3}{2}e^{-\frac{j2\pi n}{5}}e^{-j\omega n} \Rightarrow$$

αλλα το $e^{\frac{j2\pi n}{5}}$ δεν ειναι απολυτως αθροισιμο και θα παρουμε την ιδιοτητα ζευγους : $e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 3\pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} + 2\pi r\right) + \sum_{r=-\infty}^{\infty} 3\pi\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} + 2\pi r\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = 3\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5} + 2\pi r\right) + \delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5} + 2\pi r\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = 3\pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{5}\right) + 3\pi\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{5}\right)}$$



iii)Το σημα μας ειναι αρτια . Αν ενα σημα στο χρονο ειναι πραγματικο τοτε ο DTFT X(e^jω) ειναι συζυγης συμμετρικη συναρτηση της συχνωτητας ,οπου ισχυει οτι το πραγματικο μερος της X(e^jω) ειναι αρτια και το φανταστικο της μερος ειναι περιττη και επισης το μετρο της |X(e^jω)| ειναι αρτια προς ω και η φαση ειναι περιττη προς ω.

Askisi 2

Ασκηση 2:

α) Για να παρουμε το σημα στο χρονο πρεπει να κανουμε αντιστροφο Fourier Transform:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-e^{-j(\omega-\omega_0)}\right)e^{j\omega n}\,d\omega$$ => αλλα μεσω ιδιοτητων εχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \delta[n] &\xrightarrow{F} 1 \\ \delta[n-n_0] &\longrightarrow e^{-j\omega n_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\delta[n]-\delta[n-1]e^{j\omega_0}}$$

β) για να βρουμε τα A και B θα εχουμε:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1-e^{-j(\omega-\omega_0)} \Rightarrow Y(e^{j\omega})\cdot 1 = X(e^{j\omega})\left(1-e^{-j(\omega-\omega_0)}\right)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \delta[n]-\delta[n-1]e^{+j\omega_0} \Rightarrow \text{αρα} \left\{\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= \delta[n]-\delta[n-1]e^{+j\omega} \end{aligned}\right\}$$

δ) $x[n] = \cos(\omega_0 n)$ => συμφωνα με τις ιδιοτητες

$$\cos(\omega_0 n) \xleftrightarrow{F} \pi\delta(\omega-\omega_0) - \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

ε) Με βαση την θεωρια αν η εισοδος ενος ΓΧΑ ειναι της μορφης $x[n] = A\cos(\omega_0 n+\theta)$ τοτε η εξοδος θα ειναι

$$y[n] = A\,|H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}\cdot\cos(\omega_0 n+\theta+e^{j\phi(\omega)})$$ οποτε

η εισοδος μας $x[n] = \cos(\omega_0 n) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}\cdot\cos(\omega_0 n + e^{j\phi(\omega)})$

στ) Το $\cos(\omega_0 n)$ εχει μοναχα 2 τικ που εχουν πλατος στην συχνοτητα οταν $\underbrace{\delta(\omega-\omega_0)=1}_{\omega=\omega_0}$ και $\underbrace{\delta(\omega+\omega_0)=1}_{\omega=-\omega_0}$ αλλα για

$\delta(\omega-\omega_0)$ μας το δινει η ασκηση $1-e^{-j(\omega-\omega_0)}$ το μισο φιλτρο αρα για το $\delta(\omega+\omega_0)$ θα χριαστουμε το $1-e^{-j(\omega+\omega_0)}$ και για να μηδενιστουν ταυτοχρονα $\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$ πρεπει το φιλτρο μας

$$H_2(e^{j\omega}) = \left(1-e^{-j(\omega-\omega_0)}\right)\cdot\left(1-e^{-j(\omega+\omega_0)}\right)$$ για να ειναι μηδεν σχεδον οχι

ii) Θα κανουμε τα ίδια βηματα με το δ)

$H_2(e^{jw}) = (1 - e^{-j(w-w_0)})(1 - e^{-j(w+w_0)}) \Rightarrow$

$H_2(e^{jw}) = 1 - e^{-j(w+w_0)} - e^{-j(w-w_0)} + e^{j(w-w_0+w+w_0)} \Rightarrow$

$H_2(e^{jw}) = 1 - e^{-j(w+w_0)} - e^{-j(w-w_0)} + e^{j(2w)} \Rightarrow$

$1 \xleftrightarrow{F} \delta[n]$ $\qquad \{\delta[n] \xrightarrow{F} 1\}$

$e^{-j(w+w_0)} \xleftrightarrow{F} \delta[n-1]e^{-jw}$ $\qquad \{x[n]e^{-jwn} \xrightarrow{F} X(e^{j(w+w_0)})\}$

$e^{-j(w-w_0)} \xleftrightarrow{F} \delta[n-1]e^{jw}$ $\qquad \{x[n]e^{jwn} \xrightarrow{F} X(e^{j(w-w_0)})\}$

$e^{j(w2)} \xleftrightarrow{F} \delta[n+2]$ $\qquad \{\delta[n-n_0] \xrightarrow{F} e^{jwn_0}\}$

$$x[n] = \delta[n] - \underbrace{\delta[n-1]e^{-jw} - \delta[n-1]e^{jw}}_{= 2\delta[n-1]\cos(w)} + \delta[n+2]$$

$H_2(e^{jw}) = \frac{Y_2(e^{jw})}{X_2(e^{jw})} = x[n]$

$A = 1$ $\qquad x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]2\cos(w) + \delta[n-2]$

$B = [1, -2\cos(w), 1]$

iv γ) Για να βρουμε την $H(e^{jw})$ θα χρησιμοποιησουμε τον μετασχηματισμο fourier και τι ιδιοτητες:

$y[n] - 2a\cos(n_0)y[n-1] + a^2 y[n-2] = x[n] - 2\cos(w_0)x[n-1] + x[n-2]$

$y[n] = Y(e^{jw})$

$2a\cos(w_0)y[n-1] \Rightarrow$ γραφεται ως Euler $ae^{jw}y[n-1] + a^{-jw}y[n-1] \Rightarrow$

$-ae^{jw}y[n-1] \Rightarrow -ae^{jw}\cdot e^{-jw}Y(e^{jw}) \Rightarrow aY(e^{jw})$

$-ae^{-jw}y[n-1] \Rightarrow -ae^{-jw}\cdot e^{-jw}Y(e^{jw}) \Rightarrow ae^{-j2w}Y(e^{jw})$

$a^2 y[n-2] \Rightarrow a^2 e^{-j2w}Y(e^{jw})$

$x[n] = X(e^{jw})$

$-2\cos(w_0)x[n-1] \Rightarrow -e^{jw}x[n-1] - e^{-jw}x[n-1] \Rightarrow$

$-e^{jw}x[n-1] = -e^{-jw}X(e^{j(w-w_0)})$

$-e^{-jw}x[n-1] = -e^{-jw}X(e^{j(w-w_0)})$

$x[n-2] = e^{-j2w}X(e^{j(w-w_0)})$

$$Y(e^{jw}) - a\cdot e^{jw} Y(e^{j(w-w_0)}) - a e^{-jw} Y(e^{j(w-w_0)}) + a^2 e^{-j2w} Y(e^{jw})$$

$$Y(e^{jw})(1+a^2 e^{-j2w}) - aY(e^{j(w-w_0)})(e^{jw}+e^{-jw}) \Rightarrow$$

$$\boxed{Y(e^{jw})(1+a^2 e^{-j2w}) - 2aY(e^{j(w-w_0)})\cos(w_0)}$$

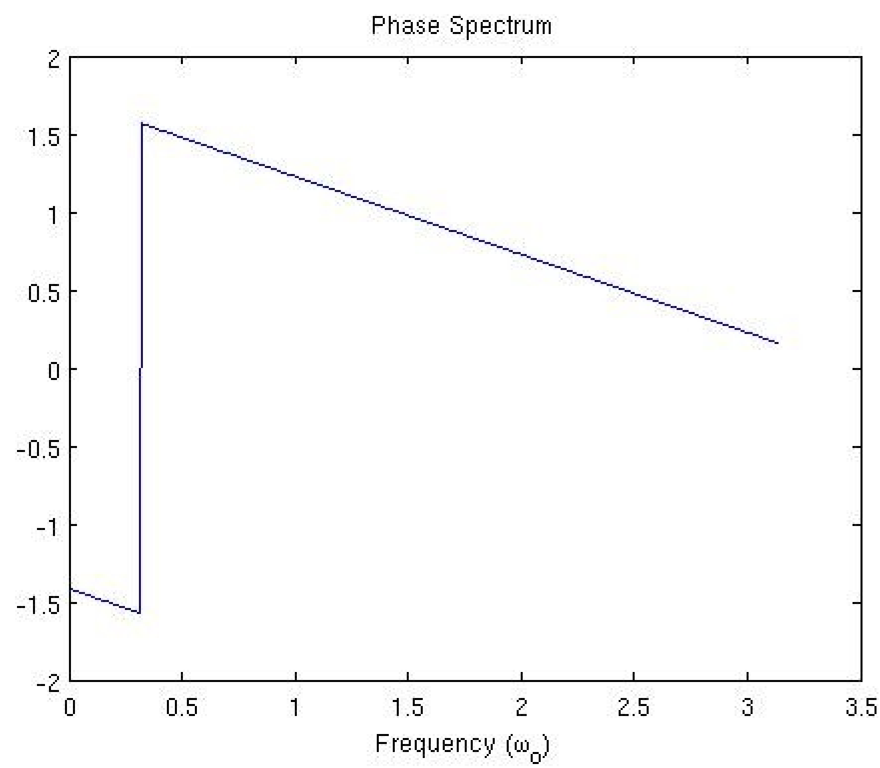
$$X(e^{jw}) - e^{jw}X(e^{j(w-w_0)}) - e^{-jw}X(e^{j(w-w_0)}) + e^{-2jw_0}X(e^{jw}) \Rightarrow$$

$$X(e^{jw})(1+e^{-j2w_0}) - X(e^{j(w-w_0)})(e^{jw_0}+e^{-jw_0}) \Rightarrow$$

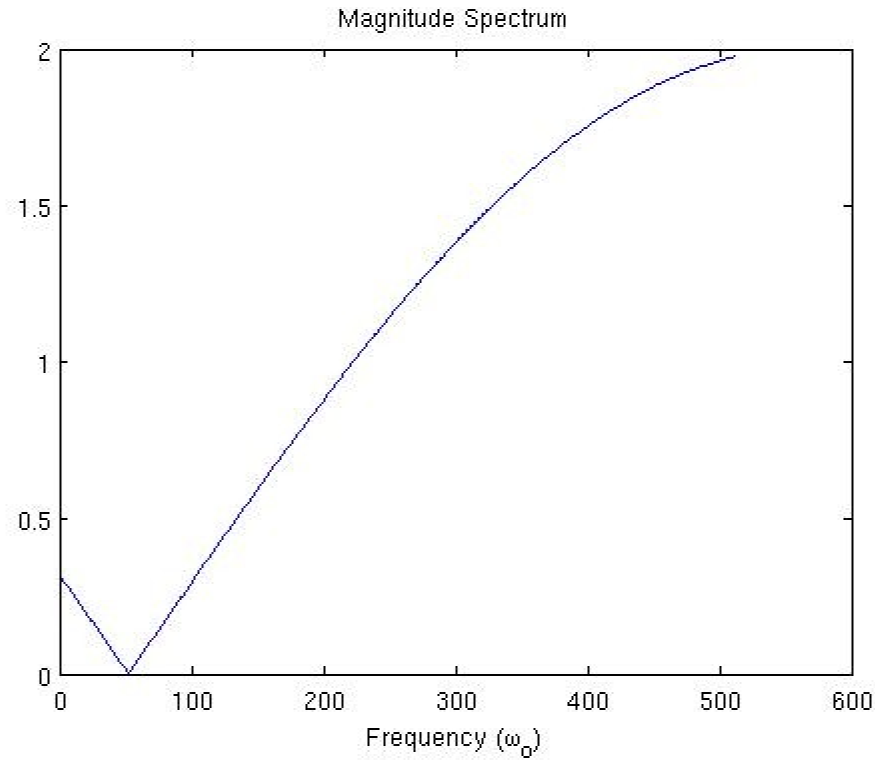
$$\boxed{X(e^{jw})(1+e^{-j2w_0}) - 2\cos(w_0)X(e^{j(w-w_0)})}$$ οποτε

$$H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})(1+a^2 e^{-j2w}) - 2a\cos(w)Y(e^{j(w-w_0)})}{X(e^{jw})(1+e^{-j2w_0}) - 2\cos(w)X(e^{j(w-w_0)})}$$

γ)



β)

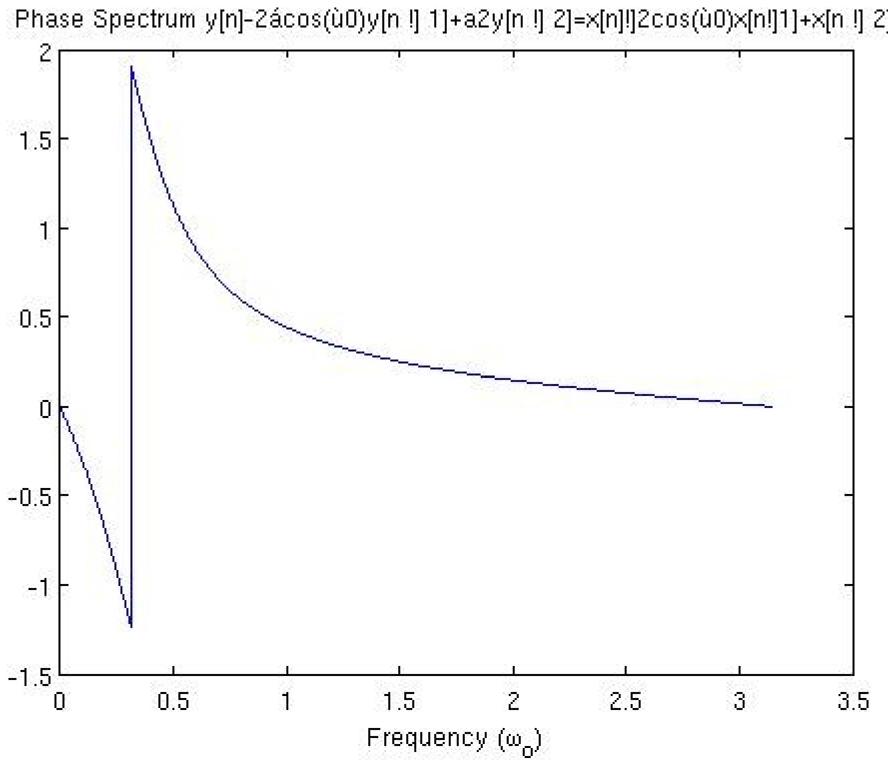


δ) απαντηση ειναι στην φωτο πανω με χιρογραφο
ε) απαντηση ειναι στην φωτο πανω με χιρογραφο
σ)απαντηση ειναι στην φωτο πανω με χιρογραφο

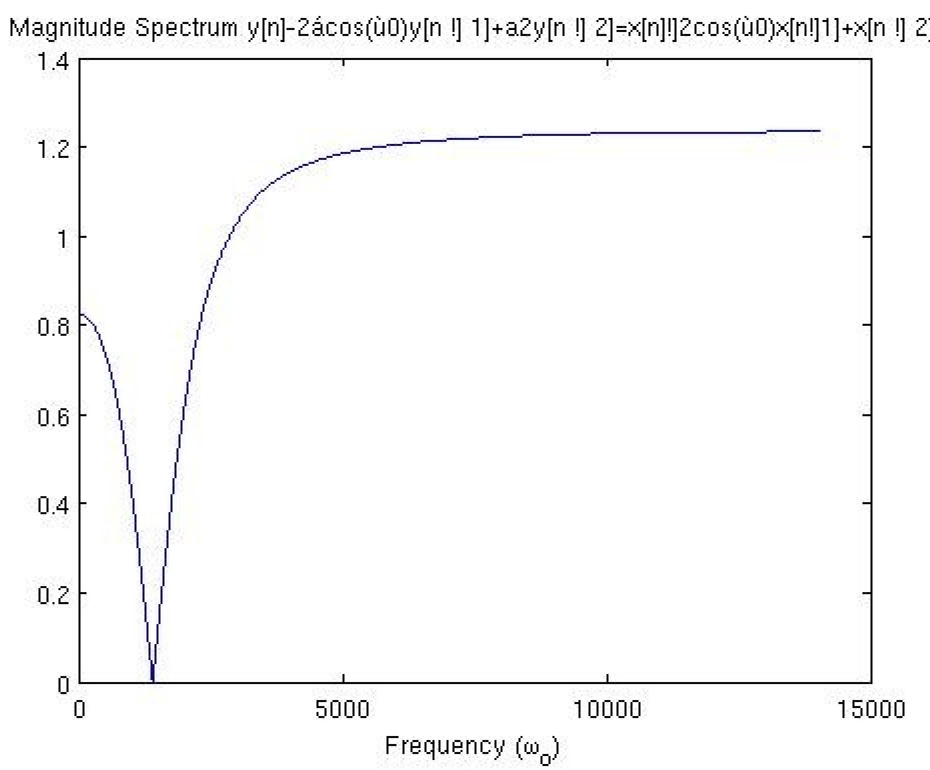
ii) Η συναρτηση freqz() kanei για την δουλεια που θελω να κανω
iii)Εφαρμοσα το φιλτρο που βρηκα και εχει κανει πολυ καλη δουλεια οσον αφορα τον θορυβο απλος η φωνη σαν να εχει γινει λιγο πιο ψηλη σε σχεση με το αρχικο .Αλλα οπως και να εχει ειναι χορις θορυβο

iv α)
Για α = 0.8 εχουμε πολυ καλυτερη φωνη απο το α=0.99 με καλυτερη ενταση της φωνης δηλαδη ουτε να ειναι πολυ ψηλη οπως με το παραπανω φιλτρο αλλα και ουτε χαμηλη ειναι ιδιο με την φωνη του spiker οταν μιλαει απο το μικροφωνο αλλα χορις το θορυβο.Το α=0.99 καθαριζει τον θορυβο αλλα η φωνη του σπικερ σαν να ειναι λιγο πιο χαμηλη σε σχεση με την πρωτη φωνη με το θορυβο.Οπως και να ειναι το φιλτρο αυτο ειναι καλυτερο απο το φιλτρο που βρικαμε παραπανω.

iv β)



Phase Spectrum y[n]-2ácos(ù0)y[n !] 1]+a2y[n !] 2]=x[n]!]2cos(ù0)x[n!]1]+x[n !] 2]
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
Frequency (ωo)



Magnitude Spectrum y[n]-2ácos(ù0)y[n !] 1]+a2y[n !] 2]=x[n]!]2cos(ù0)x[n!]1]+x[n !] 2]
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
5000
10000
15000
Frequency (ωo)