Еліпс, що містить задані точки, та упорядкування (ранжування) точок на площині

Зчитайте з файлу input.txt число n і набір чисел (x_i, y_i) з порядковими номерами $i=1...n$ і виконайте наступний алгоритм.

1. Шукаємо дві точки (x_k, y_k) і (x_l, y_l), відстань між якими є найбільшою.
2. Проводимо через точки (x_k, y_k) і (x_l, y_l) пряму L.
3. Шукаємо дві точки (x_r, y_r) і (x_q, y_q), відстань яких від прямої L є найбільшою (з обох боків від прямої).
4. Проводимо через точки (x_r, y_r) і (x_q, y_q) прямі L_1 і L_2, які є паралельними до прямої L.
5. Проводимо через точки (x_k, y_k) і (x_l, y_l) дві прямі, які є перпендикулярними до прямої L.
6. Перетини прямих L, L_1 і L_2 утворюють прямокутник Π, сторони якого мають довжини a і b (нехай, для визначеності, $a \le b$).
7. Здійснюємо поворот і перенесення системи координат, так щоб лівий нижній кут прямокутника був розташований в початку нової системи координат с осями Ox' і Oy', а точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) перейшли в точки (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), ..., (x_n', y_n').
8. Здійснюємо стискання абсцис усіх точок (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), ..., (x_n', y_n') з коефіцієнтом $\alpha = \dfrac{a}{b}$ і отримуємо сукупність точок $(\alpha x_1', y_1')$, $(\alpha x_2', y_2')$, ..., $(\alpha x_n', y_n')$, які лежать в квадраті S.
9. Знаходимо центр тяжіння множини точок $\left(\dfrac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i', \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i'\right)$ і обчислюємо відстані від нього до кожної точки $r_1, r_2, ..., r_n$.
10. Знаходимо найбільше число $R = \max(r_1, r_2, ..., r_n)$.
11. Будуємо коло з центром в точці (x_0', y_0') і радіусом R. (Всі точки $(\alpha x_1', y_1')$, $(\alpha x_2', y_2')$, ..., $(\alpha x_n', y_n')$ тепер лежать всередині цього кола.)
12. Застосовуємо до цього кола операцію розтягування вздовж осі Ox' з коефіцієнтом $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, отримуючи шуканий еліпс.

Побудований еліпс містить усі задані точки і на його межі лежить лише одна точка. Це дозволяє упорядкувати точки на площині.

Перший спосіб упорядкування точок на площині

Знайдіть точку, що лежить на еліпсі, який містить усі n точок (за побудовою на цьому еліпсі лежить лише одна точка). Припишіть їй номер n (будемо називати це число рангом точки). Видаліть її з вихідного набору точок і повторіть алгоритм для решти n-1 точок. Повторіть цю процедуру, поки не залишаться три або дві точки, за якими ще можна будувати еліпс (для двох точок еліпс вироджується у відрізок). Останнім двом або трьом точкам, які будуть лежати на межі одного й того ж еліпсу, слід приписати різні ранги у довільному порядку (наприклад, дві точки, що лежать на відрізку, пронумеруйте 2 і 1, але не 2 і 2!). Ранги повинні спадати монотонно! Кожна точка повинна мати унікальний ранг!

Другий спосіб упорядкування точок на площині

Зверніть увагу на крок 9 алгоритму побудови еліпсу. Побудуйте не одно коло з центром $\left(\frac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i, \frac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n} y'_i\right)$ і радіусом $R = \max\left(r_1, r_2, ..., r_n\right)$, а n кіл с тим самими центром $\left(\frac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i, \frac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n} y'_i\right)$ і радіусами $r_1, r_2, ..., r_n$. Ви отримаєте n концентричних кіл. Розтягнувши їх з коефіцієнтом $\beta = \frac{1}{\alpha}$, ви отримаєте n концентричних еліпсів, на кожному з яких буде лежати по одній точці (крім останніх двох-трьох точок). Упорядкуйте ці точки за убуванням (n — на зовнішньому еліпсі, n-1 — на наступному і так до першої).

Виведіть у файл output.txt:

1) вихідні порядкові номери і ранги усіх точок, упорядкованих першим способом;
2) вихідні порядкові номери і ранги усіх точок, упорядкованих другим способом;
3) долю точок (відсоток), що мають однакові вихідні порядкові номери і однаковий ранг у обох способах.

Мета експерименту – з'ясувати, наскільки стабільним є ранг точок при заміні способу ранжування.

Зауваження

Алгоритм призначений для ранжування випадкових точок, які мають абсолютно неперервний розподіл. Ця умова гарантує, що на кроці 9 серед чисел $r_1, r_2, ..., r_n$ не буде однакових (ймовірність цієї події дорівнює нулю). Отже, на еліпсах буде лежати не більше однієї точки (лише на вироджених еліпсах, що будуються по двох або трьох точках, ця умова може порушуватись).

Ілюстрації до алгоритму

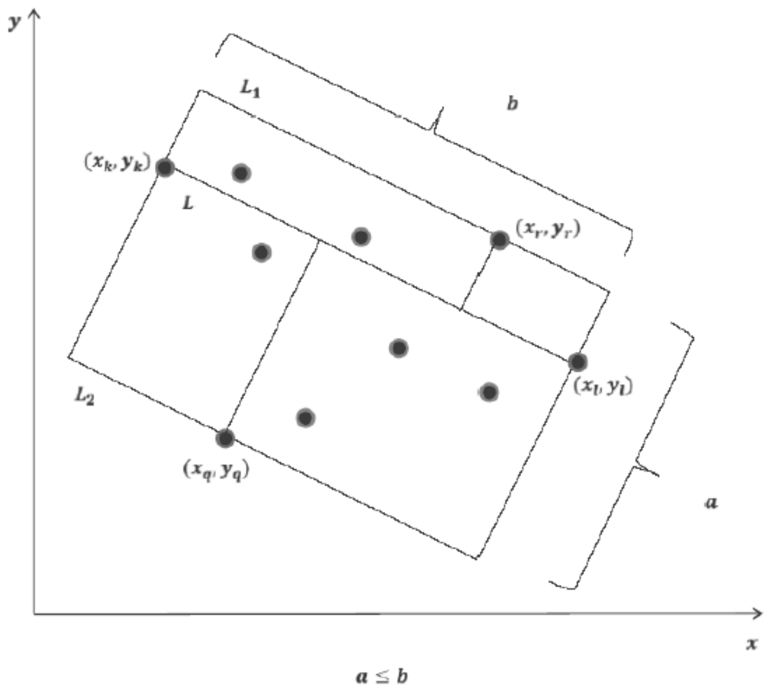

Рис. 1. Етапи 1–6

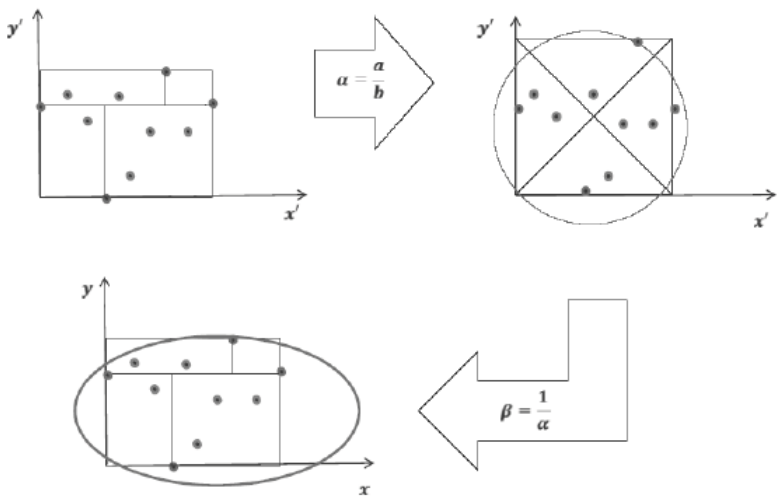

Рис. 2. Етапи 7–12

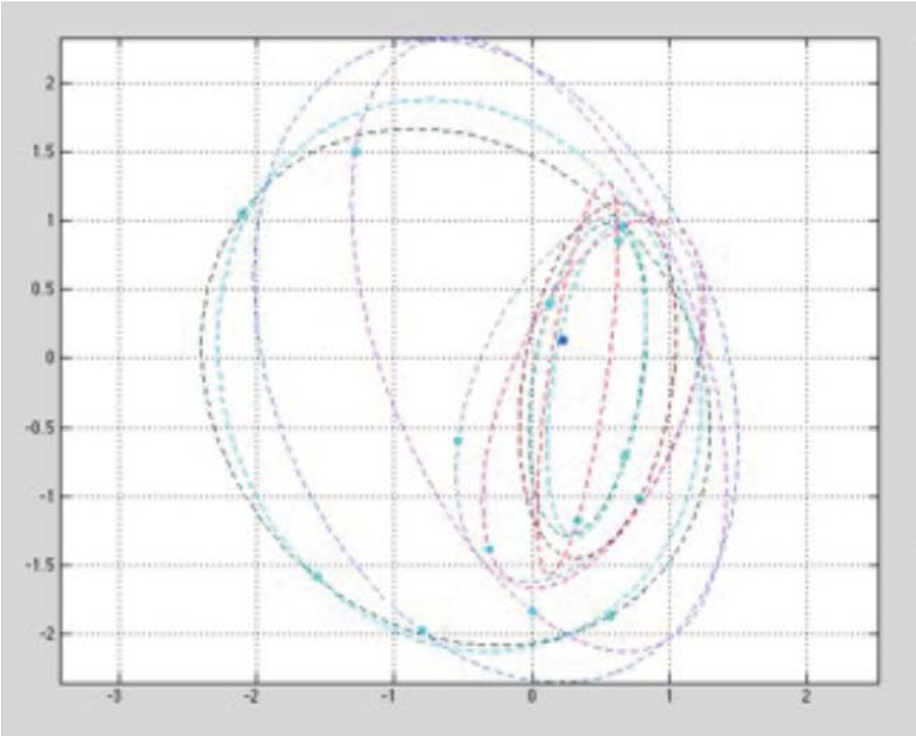

Рис. 3. Перший спосіб упорядкування

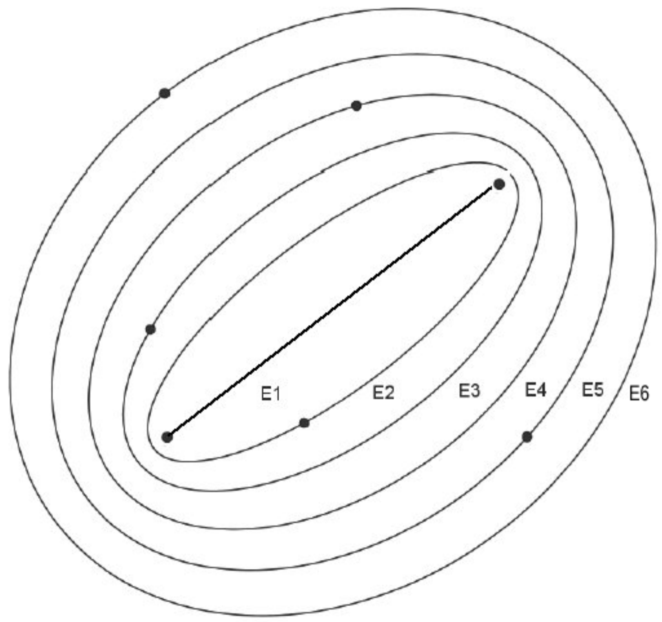

Рис. 4. Другий спосіб упорядкування