

20. **[**]** (Trabajo para evaluación continua.) Resuelva los problemas 14 y 15 del capítulo 2 utilizando teoría de líneas de transmisión.

Para un medio multicapa como el descrito en dichos problemas:

a) Obtenga la expresión del problema 2-14

$$\Gamma_{i-1} = \frac{\rho_{i-1} + \Gamma_i e^{-2jk_0 n_i d_i}}{1 + \rho_{i-1} \Gamma_i e^{-2jk_0 n_i d_i}}$$

a partir de

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

y

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)}$$

interpretando adecuadamente cada una de las magnitudes que aparece en estas fórmulas.

b) Utilizando las fórmulas anteriores resuelva el problema 2-15. Hágalo dos veces, una con la fórmula del coeficiente de reflexión y otra con la fórmula de la impedancia de entrada. Las dos soluciones deben ser iguales.

El código del programa debe ser general, para cualquier número de capas. La especificación del problema serán dos arrays, uno con los índices de refracción y otro con los grosores de las capas, además de los índices de refracción de los medios a izquierda y derecha del multicapa. Programe un bucle que aplique recursivamente las dos fórmulas anteriores.

El resultado debe ser una gráfica con las fracciones de potencia reflejada y transmitida para longitudes de onda entre 0.6 y 1.2 μm . ¿Para qué longitudes de onda se comporta como un espejo?

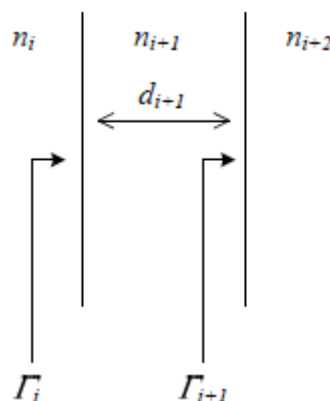
En el caso de utilizar un lenguaje de programación de alto nivel, como por ejemplo MATLAB o Python+Numpy, evite programar un bucle que haga los cálculos para cada longitud de onda. Utilice en su lugar la capacidad de vectorización del lenguaje:

https://es.mathworks.com/help/matlab/matlab_prog/vectorization.html

2.14. A partir de las condiciones de contorno en dos transiciones sucesivas de una estructura multicapa, obtenga la relación

$$\Gamma_i = \frac{\rho_i + \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}}{1 + \rho_i \cdot \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}}$$

entre los coeficientes de reflexión generalizados para las dos transiciones, para incidencia normal.



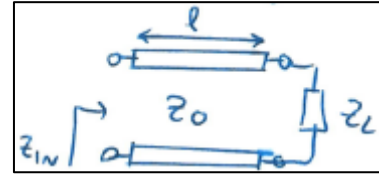
Se comienza con las expresiones siguientes.

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}$$

La primera de ellas fue definida en clase de teoría como el coeficiente de reflexión de una línea de transmisión sin pérdidas terminada con una impedancia Z_L .

La segunda de ellas fue definida como la impedancia de entrada de una línea de transmisión sin pérdidas de longitud l cargada con una impedancia Z_L .



Se desarrolla la expresión de Z_{in} , multiplicando numerador y denominador por $\cos(\beta l)$.

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L \cos(\beta l) + jZ_0 \sin(\beta l)}{Z_0 \cos(\beta l) + jZ_L \sin(\beta l)}$$

Se utiliza la forma exponencial de las funciones trigonométricas.

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L \frac{(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l})}{2} + jZ_0 \frac{(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}{2j}}{Z_0 \frac{(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l})}{2} + jZ_L \frac{(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}{2j}}$$

Se cancelan términos.

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}) + Z_0(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}{Z_0(e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}) + Z_L(e^{j\beta l} - e^{-j\beta l})}$$

Se sacan las exponenciales como factores comunes.

$$Z_{in} = Z_0 \frac{e^{j\beta l}(Z_0 + Z_L) + e^{-j\beta l}(-Z_0 + Z_L)}{e^{j\beta l}(Z_0 + Z_L) + e^{-j\beta l}(Z_0 - Z_L)}$$

Se multiplica numerador y denominador por $\frac{e^{-j\beta l}}{(Z_0 + Z_L)}$.

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + e^{-2j\beta l} \frac{(-Z_0 + Z_L)}{(Z_0 + Z_L)}}{1 + e^{-2j\beta l} \frac{(Z_0 - Z_L)}{(Z_0 + Z_L)}}$$

Se sustituye la expresión dada por el enunciado, $\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$.

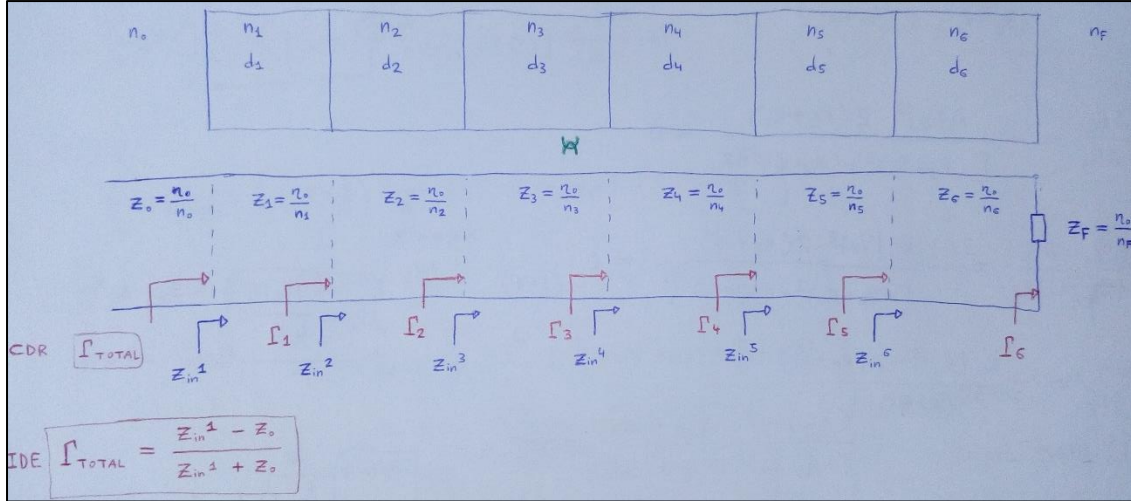
$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \Gamma \cdot e^{-2j\beta l}}{1 - \Gamma \cdot e^{-2j\beta l}}$$

Se aplica la expresión de la impedancia de entrada considerando dos capas en contacto, haciendo así analogía entre estructuras multicapa y líneas de transmisión. Para ello, las

impedancias se cambiarán por impedancias de onda, las longitudes l se cambiarán por grosores d , y las constantes de propagación en cada medio, β , se cambiarán por $k_0 n$.

Mediante la siguiente fórmula se podrá calcular la impedancia de entrada equivalente de dos capas. Después, la equivalente de esa impedancia equivalente con la de otra capa. Así sucesivamente hasta tener una única impedancia equivalente que englobe la estructura completa.

$$Z_{in}^i = Z_0^{i+1} \frac{1 + \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}}{1 - \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}}$$



En general, Z_{in} va a ser la impedancia equivalente Z_L , utilizando de esta manera el teorema de sustitución en cada iteración. Z_0 va a ser la impedancia de onda del medio, la cual depende del índice de refracción de este.

Así pues, un ejemplo. Se tiene en cuenta que $\Gamma_7 = \Gamma_F = 0$, ya que a la derecha del multicapa no hay más capas en que una onda se pueda reflejar.

$$Z_{in}^6 = Z_0^F$$

Una vez se tiene esta impedancia de entrada, se calcula la siguiente.

$$Z_{in}^5 = Z_0^6 \frac{1 + \Gamma_6 \cdot e^{-2jk_0 n_6 d_6}}{1 - \Gamma_6 \cdot e^{-2jk_0 n_6 d_6}}$$

Siendo el coeficiente de reflexión para una línea de transmisión, con dependencia en la impedancia de entrada calculada en la iteración anterior.

$$\Gamma_i = \frac{Z_{in}^i - Z_0^i}{Z_{in}^i + Z_0^i}$$

Se sustituye la impedancia de entrada dentro de la ecuación del coeficiente de reflexión.

$$\Gamma_i = \frac{Z_0^{i+1} \frac{1 + \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}}{1 - \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}} - Z_0^i}{Z_0^{i+1} \frac{1 + \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}}{1 - \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}} + Z_0^i}$$

Se multiplica el numerador y el denominador por $(1 - \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}})$.

$$\Gamma_i = \frac{Z_0^{i+1}(1 + \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}) - Z_0^i(1 - \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}})}{Z_0^{i+1}(1 + \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}) + Z_0^i(1 - \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}})}$$

Se desarrollan los productos y se sacan factores comunes.

$$\Gamma_i = \frac{(Z_0^{i+1} - Z_0^i) + \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}(Z_0^{i+1} + Z_0^i)}{(Z_0^{i+1} + Z_0^i) + \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}(Z_0^{i+1} - Z_0^i)}$$

Se divide el numerador y el denominador por $(Z_0^{i+1} + Z_0^i)$.

$$\Gamma_i = \frac{\frac{(Z_0^{i+1} - Z_0^i)}{(Z_0^{i+1} + Z_0^i)} + \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}}{1 + \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}} \frac{(Z_0^{i+1} - Z_0^i)}{(Z_0^{i+1} + Z_0^i)}}$$

Se define $\rho_i = \frac{(Z_0^{i+1} - Z_0^i)}{(Z_0^{i+1} + Z_0^i)}$ como coeficiente que depende de las impedancias de onda de los medios.

$$\Gamma_i = \frac{\rho_i + \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}}{1 + \rho_i \cdot \Gamma_{i+1} \cdot e^{-2jk_0 n_{i+1} d_{i+1}}}$$

Se resta una unidad al índice i, para que tenga exactamente la forma deseada en el problema 20 del capítulo 3.

$$\Gamma_{i-1} = \frac{\rho_{i-1} + \Gamma_i \cdot e^{-2jk_0 n_i d_i}}{1 + \rho_{i-1} \cdot \Gamma_i \cdot e^{-2jk_0 n_i d_i}}$$

2.15. Un espejo dieléctrico diseñado para $\lambda = 0.8 \mu m$ consta de 6 capas delgadas crecidas sobre un sustrato de vidrio. Los índices de refracción son:

$n_1 = n_3 = n_5 = 2.32$ y $n_2 = n_4 = n_6 = 1.38$, ($n_0 = 1$; $n_F = 1.52$),

y los grosores $d_1 = d_3 = d_5 = 0.086 \mu m$, y $d_2 = d_4 = d_6 = 0.145 \mu m$.

A continuación, el desarrollo en MATLAB de este apartado.

Especificación del problema

```
% Índice de refracción del medio a la izquierda del multicapa.
n0=1;
% Índices de refracción de cada una de las capas. [n1 n2 n3 n4 n5 n6].
n=[2.32 1.38 2.32 1.38 2.32 1.38];
% Índice de refracción del medio a la derecha del multicapa.
nF=1.52;
% Grosor (en metros) de cada una de las capas. [d1 d2 d3 d4 d5 d6].
d=10^-6*[0.086 0.145 0.086 0.145 0.086 0.145];
```

Código del programa

```
% Número de capas que conforman el multicapa.
N=length(d);
% Vector que contiene las longitudes de onda (en metros) que se estudian.
lambda=10^-6*(0.6:0.00001:1.2);
% Valor exacto de la impedancia de onda en el vacío.
etaVacuum=119.9169832*pi;
% Valor de la impedancia de onda del medio a la izquierda del multicapa.
eta0=etaVacuum/n0;
% Vector que contiene las impedancias de onda de cada una de las capas.
eta=etaVacuum./n;
% Valor de la impedancia de onda del medio a la derecha del multicapa.
etaF=etaVacuum/nF;

% Matriz auxiliar para aprovechar la capacidad de vectorización.
aux=zeros(length(lambda),N);
for ii=1:length(lambda)
    aux(ii,:)=2*pi./lambda(ii)*n.*d;
end
```

Método "fórmula del coeficiente de reflexión" (CDR)

```
% Método recursivo para encontrar los coeficientes de reflexión.

% Se crea un vector que contiene los coeficientes rho.
rho=zeros(1,N);
rho(N)=(etaF-eta(N))/(etaF+eta(N));
for ii=1:N-1
    rho(N-ii)=(eta(N-ii+1)-eta(N-ii))/(eta(N-ii+1)+eta(N-ii));
end
rho0=(eta(1)-eta0)/(eta(1)+eta0);

% Se calculan los coeficientes de reflexión recurrentemente.
CDRgamma=zeros(length(lambda),N);
% gamma_(N+1) es cero porque a la derecha de n_F no hay más capas.
CDRgamma(:,N)=rho(N);
for ii=1:N-1
    CDRgamma(:,N-ii)=(rho(N-ii)+CDRgamma(:,N-ii+1).*...
        exp(-2*1i*aux(:,N-ii+1)))/(1+rho(N-ii)*CDRgamma(:,N-ii+1).*...
        exp(-2*1i*aux(:,N-ii+1)));
end

% Se calcula el coeficiente de reflexión final.
CDRgammaTOTAL=(rho0+CDRgamma(:,1).*exp(-2*1i*aux(:,1)))/...
    (1+rho0*CDRgamma(:,1).*exp(-2*1i*aux(:,1)));

% A partir de este, se calculan las fracciones de potencia reflejada y
% potencia transmitida.
CDRfracPotReflejada=(abs(CDRgammaTOTAL)).^2;
CDRfracPotTransmitida=(1-(abs(CDRgammaTOTAL)).^2);

% Se representa el resultado en un gráfico. Mucho código poco importante.
CDRa0=find(CDRfracPotReflejada==max(CDRfracPotReflejada));
```

```

CDRa1=find(CDRfracPotReflejada>CDRfracPotTransmitida);
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(10^6*lambda,CDRfracPotReflejada,'r',10^6*lambda,...
     CDRfracPotTransmitida,'g',10^6*lambda(CDRa0),...
     max(CDRfracPotReflejada),'xk',10^6*lambda(min(CDRa1)),...
     CDRfracPotReflejada(min(CDRa1)), 'xk',10^6*lambda(max(CDRa1)),...
     CDRfracPotReflejada(max(CDRa1)), 'xk')
grid;xlabel('\lambda (\mu m)');axis([10^6*lambda(1) 10^6*lambda(end) 0 1])
legend('Fracción de potencia reflejada','Fracción de potencia transmitida')
text(10^6*lambda(CDRa0),max(CDRfracPotReflejada),['Máximo del ' ...
     num2str(100*max(CDRfracPotReflejada)) '% para \lambda = ' ...
     num2str(10^6*lambda(CDRa0)) ' \mu m'])
text(10^6*lambda(min(CDRa1)),CDRfracPotReflejada(min(CDRa1)),...
     ['50% para \lambda = ' num2str(10^6*lambda(min(CDRa1))) ' \mu m'])
text(10^6*lambda(max(CDRa1)),CDRfracPotReflejada(max(CDRa1)),...
     ['50% para \lambda = ' num2str(10^6*lambda(max(CDRa1))) ' \mu m'])
title('Método "fórmula del coeficiente de reflexión"')

```

Método "fórmula de la impedancia de entrada" (IDE)

```

% Método recursivo para encontrar las impedancias de entrada.

% Se van calculando impedancias de entrada hasta simplificarlo a una sola.
Zin=zeros(length(lambda),N);
Zin(:,N)=eta(N)*(etaF+1i*eta(N)*tan(aux(:,N)))/(eta(N)+1i*etaF*...
     tan(aux(:,N)));
for ii=1:N-1
    Zin(:,N-ii)=eta(N-ii)*(Zin(:,N-ii+1)+1i*eta(N-ii)*...
        tan(aux(:,N-ii)))/(eta(N-ii)+1i*Zin(:,N-ii+1).*tan(aux(:,N-ii)));
end

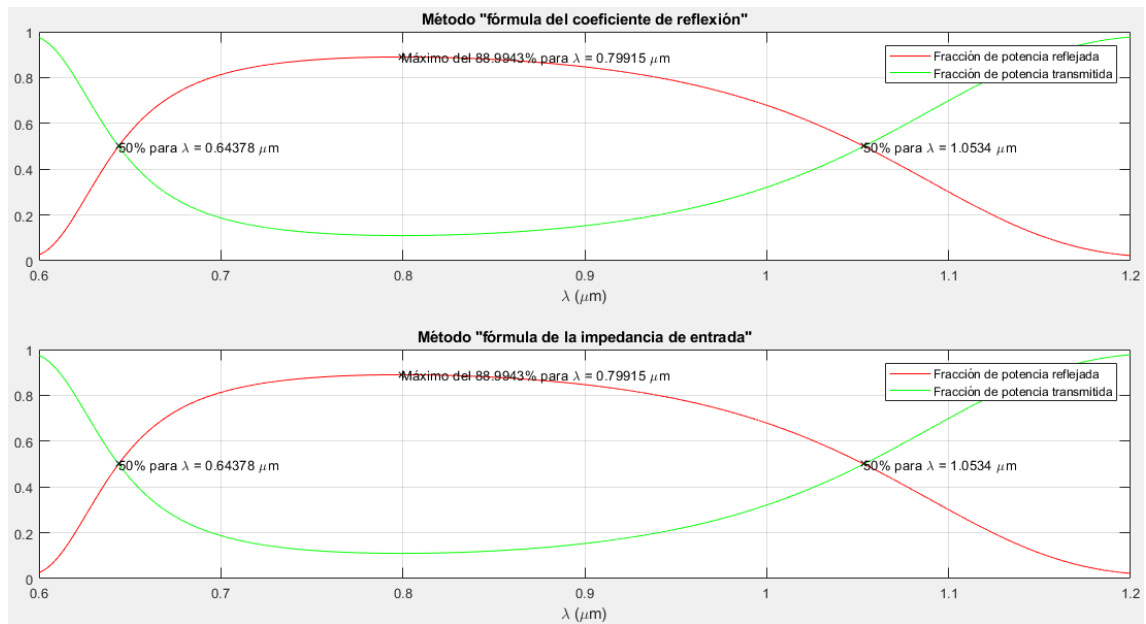
% Se calcula el coeficiente de reflexión final mediante la impedancia de
% entrada final.
IDEgammaTOTAL=(Zin(:,1)-eta0)/(Zin(:,1)+eta0);

% A partir de este, se calculan las fracciones de potencia reflejada y
% potencia transmitida.
IDEfracPotReflejada=(abs(IDEgammaTOTAL)).^2;
IDEfracPotTransmitida=(1-(abs(IDEgammaTOTAL)).^2);

% Se representa el resultado en un gráfico. Mucho código poco importante.
IDEa0=find(IDEfracPotReflejada==max(IDEfracPotReflejada));
IDEa1=find(IDEfracPotReflejada>IDEfracPotTransmitida);
figure(1)
subplot(2,1,2)
plot(10^6*lambda,IDEfracPotReflejada,'r',10^6*lambda,...
     IDEfracPotTransmitida,'g',10^6*lambda(IDEa0),...
     max(IDEfracPotReflejada),'xk',10^6*lambda(min(IDEa1)),...
     IDEfracPotReflejada(min(IDEa1)), 'xk',10^6*lambda(max(IDEa1)),...
     IDEfracPotReflejada(max(IDEa1)), 'xk')
grid;xlabel('\lambda (\mu m)');axis([10^6*lambda(1) 10^6*lambda(end) 0 1])
legend('Fracción de potencia reflejada','Fracción de potencia transmitida')
text(10^6*lambda(IDEa0),max(IDEfracPotReflejada),['Máximo del ' ...

```

```
num2str(100*max(IDEfracPotReflejada)) '% para \lambda = ' ...
num2str(10^6*lambda(IDEa0)) ' \mu m'])
text(10^6*lambda(min(IDEa1)),IDEfracPotReflejada(min(IDEa1)),...
['50% para \lambda = ' num2str(10^6*lambda(min(IDEa1))) ' \mu m'])
text(10^6*lambda(max(IDEa1)),IDEfracPotReflejada(max(IDEa1)),...
['50% para \lambda = ' num2str(10^6*lambda(max(IDEa1))) ' \mu m'])
title('Método "fórmula de la impedancia de entrada")
```



La longitud de onda incidente para la cual el porcentaje de potencia reflejada es máximo es 799.15 nm . Concretamente, para esta longitud de onda, cerca de un 89% de la potencia se refleja, y el otro 11% se transmite. Por tanto, como ya se decía en el enunciado del problema 2.15, este espejo está diseñado para $\lambda = 799.15 \text{ nm} \cong 0.8 \mu\text{m}$. Sin embargo, existe cierto rango de longitudes de onda a lo largo del cual la mayor parte de la potencia es reflejada. Si por espejo se entiende un dispositivo capaz de reflejar más potencia que la que absorbe, entonces este multicapa se comporta como un espejo entre 643.78 nm y 1053.4 nm . Es en este rango de longitudes de onda que el porcentaje de potencia reflejada supera el 50%. Fuera de este rango de longitudes de onda, la mayor parte de la potencia es transmitida y el multicapa no actúa como espejo.