PRÀCTICA 4: ESTIMACIÓ DE PARÀMETRES I COTA DE CRAMÉR-RAO

TEORIA DEL SENYAL

JUSTO MIRÓ, Alexandre
RUIZ GONZÁLEZ, José Javier

Contingut

Estudi Previ: Avaluació analítica de les prestacions dels estimadors 2
Qüestió 1.1. 2
Qüestió 1.2 3
Qüestió 1.3. 5
Qüestió 1.4. 6
Qüestió 1.5. 8
Activitat al laboratori.. 10
Activitat 1.1. 10
Activitat 1.2. 11
Activitat 1.3. 13
Activitat 1.4. 14
Activitat 1.5. 16
Activitat 1.6. 18
Activitat 1.7. 22

Estudi Previ: Avaluació analítica de les prestacions dels estimadors

Variable de Poisson: $P(g) = \frac{\lambda^g e^{-\lambda}}{g!}; g = 0,1,2 \dots$

Qüestió 1.1. Demostri que $E\{g\} = \lambda$ i que $E\{(g-\lambda)^2\} = \lambda$

A continuació mostrem els càlculs fets a mà. El desenvolupament matemàtic està fet pas per pas, tot i així comentem de paraula alguns recursos que hem fet servir:

- Posar algunes expressions com a derivades de l'exponencial respecte de lambda multiplicada per lambda.

- La derivada és un operador lineal i per tant pot sortir del sumatori.

- El desenvolupament de l'exponencial en polinomis de Taylor: $e^{\lambda} = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{\lambda^g}{g!}$

$$P(g) = \frac{\lambda^g e^{-\lambda}}{g!} \qquad g = 0,1,2\dots$$

$$\bullet\ E(g) = \sum_{g=0}^{\infty} g\, P(g) = \sum_{g=0}^{\infty} g \frac{\lambda^g e^{-\lambda}}{g!} = e^{-\lambda} \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sum_{g=0}^{\infty} \frac{\lambda^g}{g!}\right)$$

$$\frac{\partial \lambda^g}{\partial\lambda} = g\lambda^{g-1} \rightarrow \lambda \frac{\partial \lambda^g}{\partial \lambda} = g\lambda^g$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \frac{\partial e^{\lambda}}{\partial\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda \,//$$

$$\bullet\ E[(g-\lambda)^2] = E[g^2] - 2\lambda E[g] + \lambda^2 = E[g^2] - \lambda^2$$

$$E[g^2] = e^{-\lambda} \sum_{g=0}^{\infty} g^2 \frac{\lambda^g}{g!}$$

$$\frac{\partial \lambda^g}{\partial\lambda} = g\lambda^{g-1}; \quad \lambda\frac{\partial\lambda^g}{\partial\lambda} = g\lambda^g; \quad \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda \frac{\partial \lambda^g}{\partial\lambda}\right) = g^2\lambda^{g-1}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda\frac{\partial\lambda^g}{\partial\lambda}\right)\right) = g^2\lambda^g$$

$$E[g^2] = e^{-\lambda}\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sum_{g=0}^{\infty}\frac{\lambda^g}{g!}\right)\right) = e^{-\lambda}\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda\frac{\partial e^{\lambda}}{\partial\lambda}\right) =$$

$$e^{-\lambda}\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda e^{\lambda}\right) = e^{-\lambda}\lambda\left(e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right) = \lambda + \lambda^2$$

$$\sigma_g^2 = E[(g-\lambda)^2] = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda \,//$$

Qüestió 1.2 Calculi la mitjana i la variància dels estimadors $\hat{\lambda}_A^N, \hat{\lambda}_B^N, \hat{\lambda}_C^N$.

$$\hat{\lambda}_A^N = \frac{2}{N(N+1)}\sum_{n=1}^{N} n \cdot g_n;\ \ \hat{\lambda}_B^N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_n;\ \hat{\lambda}_C^N = \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N} g_n$$

Primerament mostrem els resultats obtinguts i posteriorment els desenvolupaments matemàtics pas per pas fets a mà.

- $E[\hat{\lambda}_A^N] = \lambda$ (no esbiaixat) $\sigma^2_{\hat{\lambda}_A^N} = \frac{2(2N+1)}{3N(N+1)}\lambda$ (consistent)
- $E[\hat{\lambda}_B^N] = \lambda$ (no esbiaixat) $\sigma^2_{\hat{\lambda}_B^N} = \frac{\lambda}{N}$ (consistent)
- $E[\hat{\lambda}_C^N] = \frac{\lambda}{2}$ (esbiaixat) $\sigma^2_{\hat{\lambda}_C^N} = \frac{\lambda}{4N}$ (no consistent, $E[\hat{\lambda}_C^N] \nrightarrow \lambda$)

- $\hat{\lambda}_A^N = \frac{2}{N(N+1)} \sum_{n=1}^{N} n \cdot g_n$ $g_n = 1, 2 \ldots$

$E[\hat{\lambda}_A^N] = \frac{2}{N(N+1)} \sum_{n=1}^{N} n\, E[g_n] = \frac{2\lambda}{N(N+1)} \sum_{n=1}^{N} n =$

$\frac{2\lambda}{N(N+1)} \frac{N}{2}(N+1) = \boxed{\lambda}$ No esbiaixat.

$\sigma^2_{\hat{\lambda}_A} = E[(\hat{\lambda}_A - \lambda)^2] = E[\hat{\lambda}_A^2] - \lambda^2$

$E[\hat{\lambda}_A^2] = E\left[\frac{4}{N^2(N+1)^2}\left(\sum_{i=1} i g_i\right)\left(\sum_{j=1} j g_j\right)\right] =$

$\frac{4}{N^2(N+1)^2} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} i \cdot j\, E[g_i g_j] =$

$E[g_i \cdot g_j] = \begin{cases} \lambda^2 & i \neq j \\ \sigma_g^2 + m_g^2 = \lambda + \lambda^2 & i = j \end{cases}$

$= \frac{4}{N^2(N+1)^2} \sum_{i=1}^{N} \left[i^2(\lambda+\lambda^2) + \sum_{j \neq i} i \cdot j\, \lambda^2 \right] =$

$\frac{4}{N^2(N+1)^2}(\lambda+\lambda^2)\sum_{i=1}^{N} i^2 + \frac{4\lambda^2}{N^2(N+1)^2}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N} i j - i^2\right)$

$= \frac{4\lambda}{N^2(N+1)^2}\sum_{i=1}^{N} i^2 + \frac{4\lambda^2}{N^2(N+1)^2}\sum_{i=1}^{N} i \sum_{j=1}^{N} j =$

$\frac{4\lambda}{N^2(N+1)^2}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{4\lambda^2}{N^2(N+1)^2}\frac{N^2(N+1)^2}{4} =$

$\frac{2}{3}\frac{(2N+1)}{N(N+1)}\lambda + \lambda^2$

$$\boxed{\sigma^2_{\hat{\lambda}_A} = \frac{2}{3}\frac{(2N+1)}{N(N+1)}\lambda}$$

- $$\hat{\lambda}_B^N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g_n$$

$$E[\hat{\lambda}_B^N] = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} E[g_n] = \lambda \cdot \frac{N}{N} = \boxed{\lambda}$$

$$\sigma^2_{\hat{\lambda}_B^N} = E[\hat{\lambda}_B^{N2}] - \lambda^2$$

$$E[\hat{\lambda}_B^{N2}] = \frac{1}{N^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} g_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} g_j\right)\right] = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E[g_i g_j]$$

$$= \frac{1}{N^2}\left[N(\lambda+\lambda^2) + N(N-1)\lambda^2\right] = \frac{1}{N^2}\left[N\lambda + N^2\lambda^2\right] =$$

$$\lambda\left(\lambda + \frac{1}{N}\right) = \lambda^2 + \frac{\lambda}{N}$$

$$\sigma^2_{\hat{\lambda}_B} = \boxed{\frac{\lambda}{N}}$$

- $$\hat{\lambda}_C^N = \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N} g_n = \frac{1}{2}\hat{\lambda}_B^N$$

$$E[\hat{\lambda}_C] = \frac{1}{2N} N \cdot E[g_n] = \boxed{\frac{\lambda}{2}}$$

$$\sigma^2_{\hat{\lambda}_C} = \frac{\sigma^2_{\hat{\lambda}_B}}{4} = \boxed{\frac{\lambda}{4N}}$$

Qüestió 1.3. Trobi la funció de "log-likelihood" d'aquest problema d'estimació i obtingui la cota de Cramér-Rao (CR) associada al problema d'estimació del paràmetre λ.

Funció de likelihood:

$$L(g_1, \dots, , g_N|\lambda) = \frac{\lambda^{g_1} \cdot e^{-\lambda}}{g_1!} \cdot \frac{\lambda^{g_2} \cdot e^{-\lambda}}{g_2!} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^{g_N} \cdot e^{-\lambda}}{g_N!} = \frac{e^{-N\lambda} \cdot \lambda^{\sum_{n=1}^{N} g_n}}{\prod_{n=1}^{N} g_n!}$$

Log-likelihood:

$$ln[L(g_1, \dots, , g_N|\lambda)] = -N\lambda + \ln(\lambda) \sum_{n=1}^{N} g_n - \sum_{n=1}^{N} \ln(g_n!)$$

Derivada primera respecte de λ:

$$\frac{dln[L(g_1, \dots, , g_N|\lambda)]}{d\lambda} = -N + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{N} g_n$$

Derivada segona respecte de λ:

$$\frac{d^2 ln[L(g_1, \dots, , g_N|\lambda)]}{d\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{N} g_n$$

Cota de Cramér-Rao:

$$CRLB = \frac{1}{-E\left[-\frac{1}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{N} g_n\right]} = \frac{1}{E\left[\frac{1}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{N} g_n\right]} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda^2} E\left[\sum_{n=1}^{N} g_n\right]} = \frac{\lambda^2}{\sum_{n=1}^{N} E[g_n]}$$

Fem servir el resultat de la Qüestió 1.1:

$$E[g] = \lambda$$

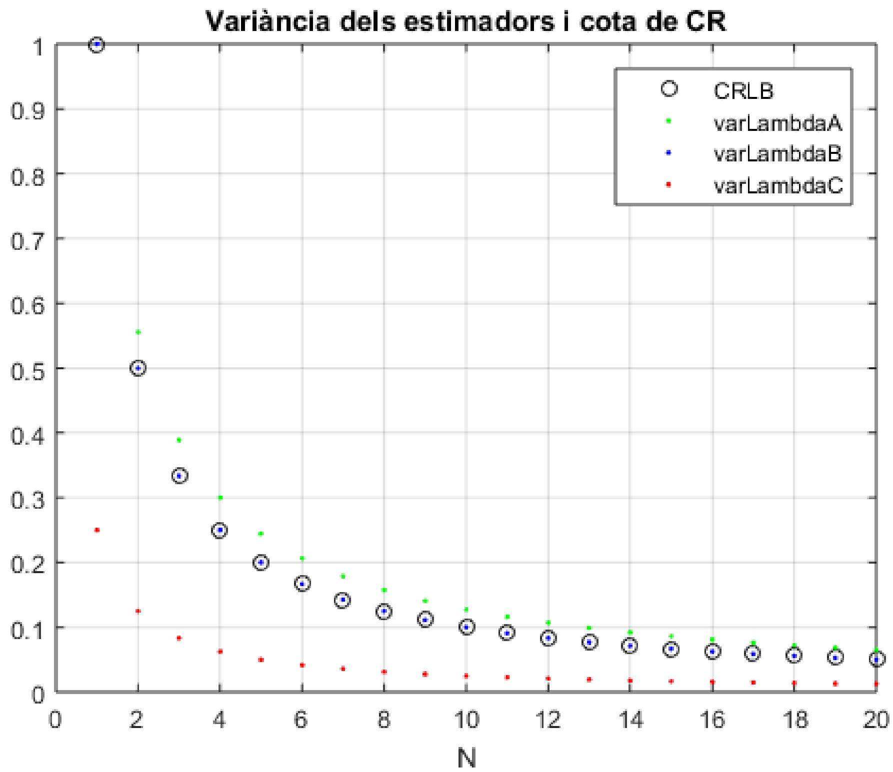
Trobem el resultat final:

$$CRLB = \frac{\lambda^2}{\sum_{n=1}^{N} \lambda} = \frac{\lambda^2}{N\lambda}$$

$$\boxed{CRLB = \frac{\lambda}{N}}$$

Qüestió 1.4. Representi la cota de CR en funció de N={1,2...,20} juntament amb les variàncies dels 3 estimadors suposant que λ =1. Quin és el millor estimador? Per què?

```
% Variable aleatòria de Poisson.
% Lambda és un paràmetre.
% g és el nombre de gols que un equip marca a un contrincant particular.

% lambdaA. Esperança = lambda.
% lambdaB. Esperança = lambda.
% lambdaC. Esperança = lambda/2.

N=1:20; lambda=1;

varLambdaA=lambda*(4*N+2)./(3*N.^2+3*N);
varLambdaB=lambda./N;
varLambdaC=lambda./(4*N);
CRLB=lambda./N;

figure(1)
plot(N,CRLB,'ok',N,varLambdaA,'.g',N,varLambdaB,'.b',N,varLambdaC,'.r');
grid; legend('CRLB','varLambdaA','varLambdaB','varLambdaC'); xlabel('N')
title('Variància dels estimadors i cota de CR')
```



Podem observar que la variància de l'estimador $\hat{\lambda}_C^N$, el qual hem vist que era esbiaixat, està per sota de la cota de CR.

La variància de l'estimador $\hat{\lambda}_A^N$, el qual no és esbiaixat està per sobre de la cota de CR i, per últim, la variància de l'estimador $\hat{\lambda}_B^N$, també no esbiaixat, coincideix amb la cota de CR.

El millor estimador és $\hat{\lambda}_B^N$, ja que és no esbiaixat i té la mínima variància possible, que és la cota de CR. En altres paraules, aquest estimador és eficient.

Qüestió 1.5. Es planteja ara estudiar un quart estimador que sigui una combinació lineal dels estimadors A i B. Aquest quart estimador es pot escriure, doncs, com

$$\boldsymbol{\hat{\lambda}_E^N = a\left(\sum_{n=1}^{N} n \cdot g_n\right) + b\left(\sum_{n=1}^{N} g_n\right)}$$

Fixi's que les constants que apareixen abans dels sumatoris dels estimadors $\boldsymbol{\hat{\lambda}_A^N}$ $\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{\hat{\lambda}_B^N}$ estan incloses a dins de les constants a i b. Demostri que el valor òptim de les constants a i b que fa que es minimitzi el MSE del nou estimador $\boldsymbol{MSE_E = E\{(\hat{\lambda}_E^N - \lambda)^2\}}$ és el següent (quan faci el càlcul no forci que el nou estimador sigui no esbiaixat):

$$\boldsymbol{a = 0; b = \frac{\lambda}{1 + N\lambda}}$$

A continuació mostrem els càlculs fets a mà, on hem utilitzat resultats d'apartats anteriors:

$$\hat{\lambda}_E^N = a\left(\sum_{n=1}^{N} n \cdot g_n\right) + b\left(\sum_{n=1}^{N} g_n\right)$$

$$E[\hat{\lambda}_E^N] = a\frac{N(N+1)}{2}E[\hat{\lambda}_A] + bN\,E[\hat{\lambda}_B] =$$

$$a\frac{N(N+1)}{2}\lambda + bN\lambda$$

$$E[(\hat{\lambda}_E - \lambda)^2] = E[\hat{\lambda}_E^2] - 2\lambda E[\hat{\lambda}_E] + \lambda^2 =$$

$$E[\hat{\lambda}_E^2] - N(N+1)\lambda^2 a - 2bN\lambda^2 + \lambda^2$$

$$E[\hat{\lambda}_E^2] = a^2 E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} n g_n\right)^2\right] + b^2 E\left[\left(\sum_{n=1}^{N} g_n\right)^2\right] + 2ab\,E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} i g_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} g_j\right)\right]$$

ya calculados

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} i g_i \sum_{j=1}^{N} g_j\right] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} i\,E[g_i g_j] = \sum_{i=1}^{N}\left(i(\lambda + \lambda^2) + \sum_{j \neq i} i\lambda^2\right) =$$

$$(\lambda + \cancel{\lambda^2})\sum_{i=1}^{N} i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N} i - \cancel{i}\right) =$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{N} i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} i = \lambda\frac{N(N+1)}{2} + \lambda^2 N \cdot \frac{N(N+1)}{2}$$

$$E[\hat{\lambda}_E^2] = a^2\frac{N^2(N+1)^2}{4}\left[\frac{2(2N+1)}{3(N+1)N}\lambda + \lambda^2\right] + b^2 N^2\left(\lambda^2 + \frac{\lambda}{N}\right)$$

$$+ 2ab\left(\lambda\frac{N(N+1)}{2} + \frac{\lambda^2 N^2(N+1)}{2}\right)$$

$$MSE(a,b) = a^2 \frac{N^2(N+1)^2}{4}\left[\frac{2}{3}\frac{(2N+1)}{(N+1)N}\lambda + \lambda^2\right] + b^2 N^2\left(\lambda^2 + \frac{\lambda}{N}\right)$$

$$+ 2ab\left(\frac{\lambda N(N+1)}{2} + \frac{\lambda^2 N^2(N+1)}{2}\right)$$

$$- N(N+1)\lambda^2 a \quad - 2bN\lambda^2 + \lambda^2$$

$$\frac{\partial MSE(a,b)}{\partial a} = 2a\frac{N^2(N+1)^2}{4}\left[\frac{2(2N+1)}{3(N+1)N}\lambda + \lambda^2\right] + 2b\left(\frac{\lambda N(N+1)}{2} + \frac{\lambda^2 N^2(N+1)}{2}\right)$$

$$- N(N+1)\lambda^2 = 0$$

$$aN(N+1)\frac{(2N+1)}{3}\lambda + \frac{a}{2}N^2(N+1)^2\lambda^2 + b\lambda N(N+1) + \lambda^2 N^2(N+1)b - N(N+1)\lambda^2 = 0$$

$$\boxed{\frac{a(2N+1)}{3} + \frac{aN(N+1)\lambda}{2} + b + \lambda N b - \lambda = 0} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial MSE(a,b)}{\partial b} = 2bN^2\left(\lambda^2 + \frac{\lambda}{N}\right) + 2a\left(\frac{\lambda N(N+1)}{2} + \frac{\lambda^2 N^2(N+1)}{2}\right) - 2N\lambda^2 = 0$$

$$\boxed{b(\lambda N + 1) + \frac{a}{2}\left(N+1 + \lambda N(N+1)\right) - \lambda = 0} \qquad (2)$$

Fem $(1) - (2) =$

$$\frac{a}{3}(2N+1) + \frac{a}{2}N(N+1)\lambda + b + \lambda N b - \cancel{\lambda} - \cancel{bN\lambda} - \cancel{b} - \frac{a}{2}(N+1)$$

$$- \cancel{\frac{a}{2}\lambda N(N+1)} + \cancel{\lambda} = a\left(\frac{2N+1}{3} - \frac{N+1}{2}\right) = \frac{a}{6}\left(4N+2-3N-3\right)$$

$$= \frac{a}{6}(N-1) \underset{\forall N}{=} 0 \longleftrightarrow \boxed{a=0}$$

$$\text{Si } a=0 \xrightarrow[(2)]{} b(\lambda N+1) - \lambda = 0 \longleftrightarrow \boxed{b = \frac{\lambda}{N\lambda+1}}$$

a) **És esbiaixat el nou estimador?**
$E[\hat{\lambda}_E^N] = E[b \cdot N \cdot \hat{\lambda}_B^N] = b \cdot N \cdot E[\hat{\lambda}_B^N] = \frac{N\lambda^2}{1+N\lambda} \neq \lambda$ Per tant, és esbiaixat.

b) **És implementable el nou estimador? Per què?**
El nou estimador no és implementable, ja que depèn de λ, que és el paràmetre que volem estimar.

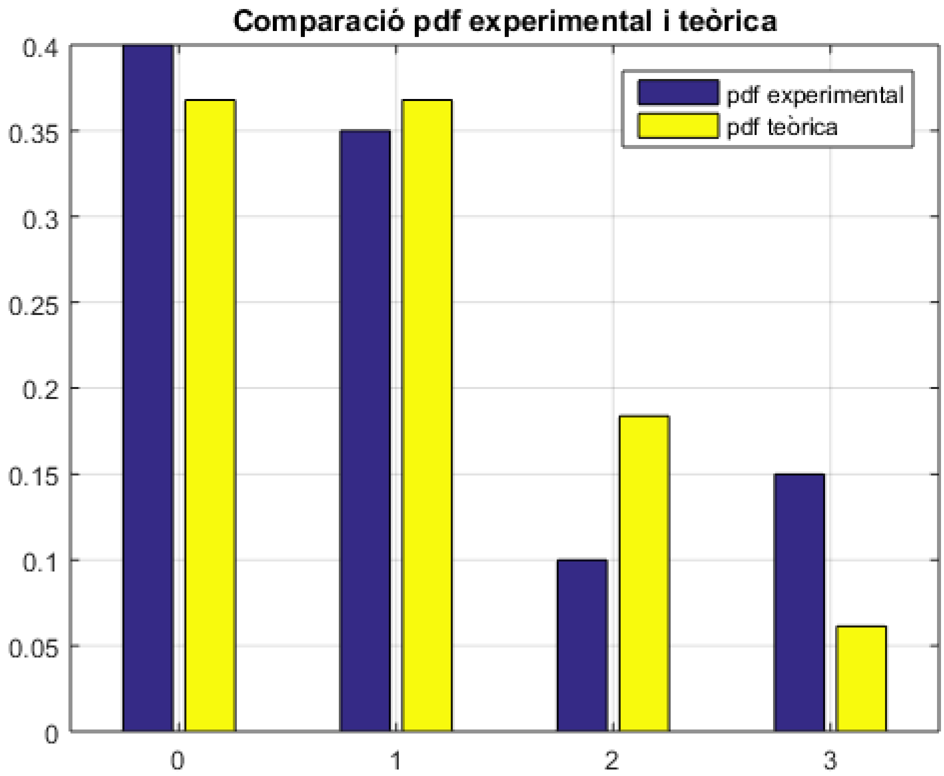
Activitat al laboratori

Activitat 1.1. Amb el nombre de gols esperat igual a 1, és a dir, λ=1, simular el nombre de gols que va marcar l'equip i en els darrers N=20 partits generant un vector g amb realitzacions independents d'una variable aleatòria de Poisson. Utilitzi la funció de Matlab poissrnd.

```
lambda=1;

N=20; % Nombre de mostres que obtenim en cada experiment (nombre de partits)
g=poissrnd(lambda,1,N); % Vector de N components amb els gols marcats a cada
partit
```

Activitat 1.2. Visualitzi l'histograma de g especificant els centres dels rangs de tots els valors des de 0 fins al màxim de g. Dibuixi també la distribució estadística exacta de (1) i compari-la amb l'histograma. Tenint en compte el seu coneixement del futbol, discuteixi sobre la credibilitat del model de dades proposat en [1].

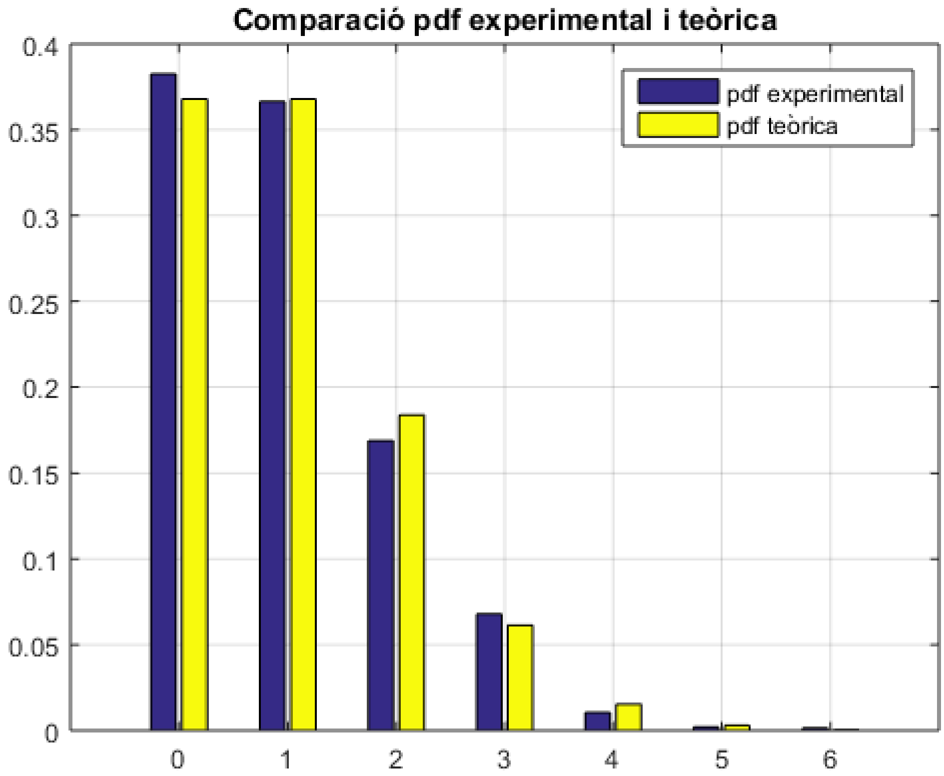
```
a=[0:1:max(g)];

h=hist(g,length(a))/N;

p=lambda.^(a)*exp(-lambda)./gamma(a+1);

bar(a',[h',p']);grid on;
legend('pdf experimental','pdf teòrica')
title('Comparació pdf experimental i teòrica')
```



Veiem que la pdf teòrica i experimental no acaben d'igualar-se del tot. Per exemple, teòricament el nombre de partits (normalitzat) amb 2 gols hauria de ser major que el nombre de partits amb 3 gols, i veiem que experimentalment passa el contrari.

A continuació provem augmentant el nombre de partits N fins 2000:

```
lambda=1;

N=2000;%nombre de mostres que obtenim en cada experiment (nombre de partits)
g=poissrnd(lambda,1,N); %vector de N components amb els gols marcats a cada
partit
a=[0:1:max(g)];
h=hist(g,length(a))/N;
p=lambda.^(a)*exp(-lambda)./gamma(a+1);
bar(a',[h',p']);grid on;
legend('pdf experimental','pdf teòrica')
title('Comparació pdf experimental i teòrica')
```



Ara la pdf experimental i teòrica són més semblants, tot i que encara hi ha petites discrepàncies.

Per tant, podem concloure que el model proposat serà més creïble quant més gran sigui el nombre de darrers partits N. Quant més gran sigui, l'histograma més s'assemblarà a una distribució de Poisson.

Activitat 1.3. Calculi els estimadors $\hat{\lambda}_A^N, \hat{\lambda}_B^N, \hat{\lambda}_C^N$ a partir de les dades a g. En base al valor numèric d'aquests estimadors, quin estimador li sembla més adequat?

```
nvec=1:N;

vecA=nvec*g';% Fem el sumatori amb un producte escalar

lambdaA=2/(N*(N+1))*vecA

lambdaB=1/N*sum(g)

lambdaC=lambdaB/2
```

```
lambdaA =

    1.2619

lambdaB =

    1.2000

lambdaC =

    0.6000
```

L'estimador que més s'apropa a λ=1 és l'estimador B, tot i que l'estimador A ha estimat un valor semblant al de B. L'estimador C és el que més s'allunya, ja que sempre estima la meitat del que estima el B.

Cal dir que algun cop que hem fet aquest càlcul l'estimador A ha sigut més encertat que el B.

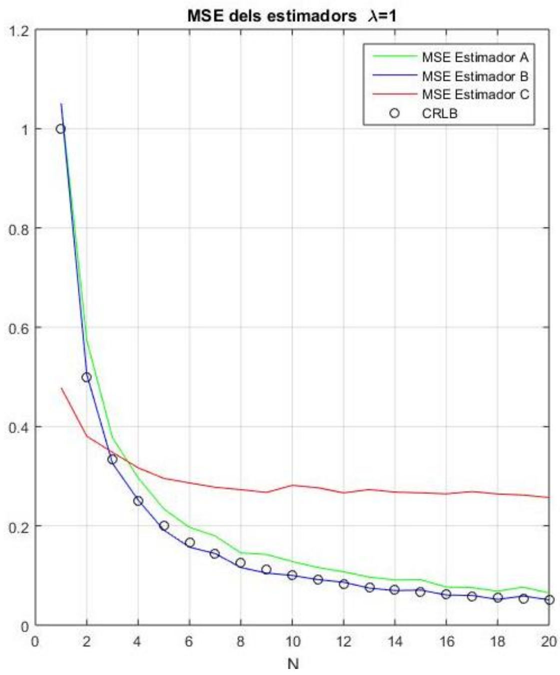
Activitat 1.4. Per tal d'avaluar les prestacions dels diferents estimadors, utilitzarem el mètode de Monte Carlo. Per a N={1,2,...,N=20}, executi R=1000 cops les activitats 1.1 i 1.3 i desi els valors. Per a cada valor de N, obtingui el valor empíric de l'error quadràtic mig (MSE "Mean Square Error") de cada estimador respecte del seu valor real de λ definit tal i com segueix per a l'estimador A.

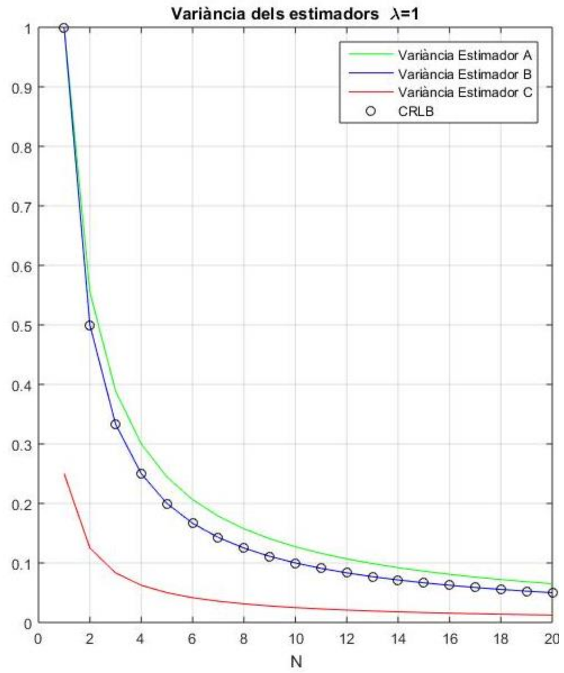
$$MSE_A(N) = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} |\,\hat{\lambda}_A^N(r) - \lambda|^2$$

Representi els MSEs de cada estimador respecte de N juntament amb la cota de CR i comenti el resultat.

```
R=1000; % Repetirem l'experiment R vegades per a cada valor de N
MSEA=zeros(1,N);
MSEB=zeros(1,N);
MSEC=zeros(1,N);

for j=1:N
    lambdaAvec=zeros(1,R);
    lambdaBvec=zeros(1,R);
    lambdaCvec=zeros(1,R);

    for jj=1:R
        g=poissrnd(lambda,1,j);

        n=1:j;
        vecA=n*g'; % Sumatori

        lambdaAvec(jj)=2/(j*(j+1))*vecA; % Estimador de lambda A

        lambdaBvec(jj)=1/j*sum(g);       % Estimador de lambda B

        lambdaCvec(jj)=lambdaBvec(jj)/2; % Estimador de lambda C
    end

    MSEA(j)=1/R*sum((lambdaAvec-lambda).^2); % MSE estimador A
    MSEB(j)=1/R*sum((lambdaBvec-lambda).^2); % MSE estimador B
    MSEC(j)=1/R*sum((lambdaCvec-lambda).^2); % MSE estimador C
end

figure(1)
subplot(1,2,1)
CRLB=lambda./nvec;
plot(nvec,MSEA,'-g',nvec,MSEB,'-b',nvec,MSEC,'-r',nvec,CRLB,'ok');grid on
title('MSE dels estimadors  \lambda=1');
xlabel('N'); legend('MSE Estimador A','MSE Estimador B','MSE Estimador
C','CRLB')

varLambdaA=lambda*(4*nvec+2)./(3*nvec.^2+3*nvec);
varLambdaB=lambda./nvec;
varLambdaC=lambda./(4*nvec);


subplot(1,2,2)
```

```
plot(nvec,varLambdaA,'-g',nvec,varLambdaB,'-b',nvec,varLambdaC,'-
r',nvec,CRLB,'ok');
grid; legend('Variància Estimador A','Variància Estimador B','Variància
Estimador C','CRLB'); xlabel('N');title('Variància dels estimadors
\lambda=1');
```





La variància teòrica i el MSE experimental coincideixen prou bé per als estimadors A i B. El MSE de B pràcticament coincideix amb la cota de CR i el MSE de A està una mica per sobre d'aquesta cota, tal i com havíem vist que passava amb les seves variàncies teòriques.

En canvi, veiem que el MSE de l'estimador C està per sobre del MSE dels estimadors A i B, quan teòricament hem vist que la seva variància estava per sota de la cota de CR.

El fet que la variància dels estimadors A i B sigui igual que els seus MSEs i, en canvi, el MSE de l'estimador C estigui per sobre de la seva variància és degut a què el MSE d'un estimador és la seva variància més el seu biaix al quadrat:

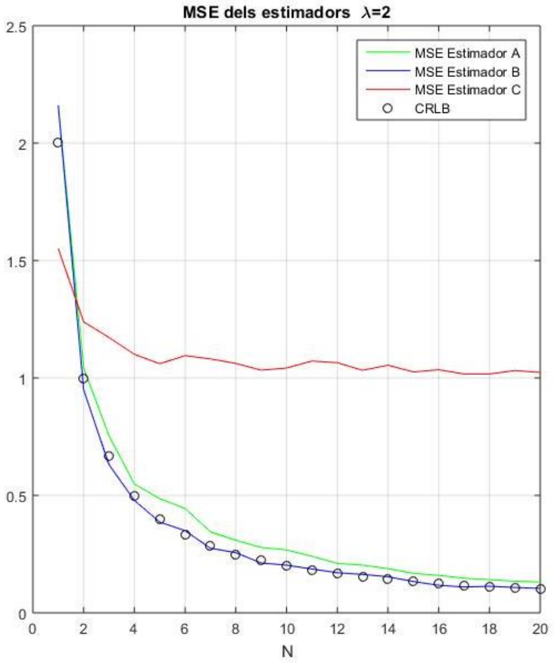
$$MSE\left(\hat{\lambda}_i^N\right) = Var\left(\hat{\lambda}_i^N\right) + b\left(\hat{\lambda}_i^N\right)^2$$

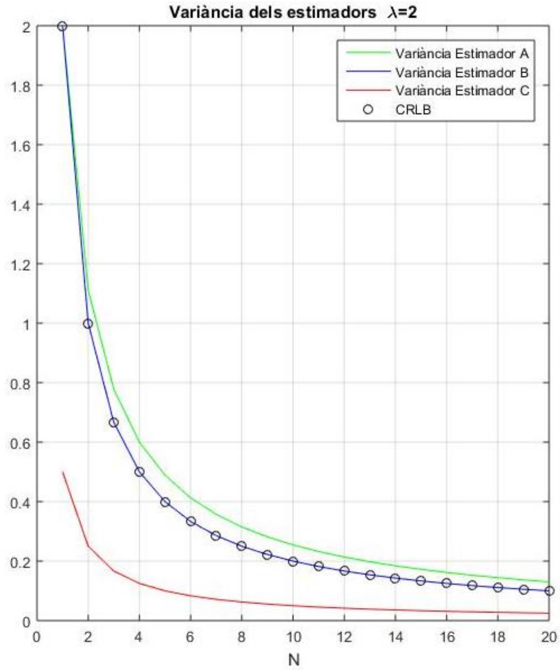
Per tant, quan un estimador no és esbiaixat, el seu MSE és la seva variància, i quan és esbiaixat, el seu MSE és més gran que aquesta.

Activitat 1.5. Repeteix l'activitat 1.4 per λ =2 i comenti els resultats.

El codi és el mateix que abans, però canviant lambda=1 per lambda2=2.

```
R=1000; lambda2=2;

MSEA=zeros(1,N);

MSEB=zeros(1,N);

MSEC=zeros(1,N);

for j=1:N
    lambdaAvec=zeros(1,R);
    lambdaBvec=zeros(1,R);
    lambdaCvec=zeros(1,R);
    for jj=1:R
        g=poissrnd(lambda2,1,j);

        n=1:j;
        vecA=n*g';

        lambdaAvec(jj)=2/(j*(j+1))*vecA;

        lambdaBvec(jj)=1/j*sum(g);

        lambdaCvec(jj)=lambdaBvec(jj)/2;
    end
    MSEA(j)=1/R*sum((lambdaAvec-lambda2).^2);
    MSEB(j)=1/R*sum((lambdaBvec-lambda2).^2);
    MSEC(j)=1/R*sum((lambdaCvec-lambda2).^2);
end

figure(2)
subplot(1,2,1)
CRLB=lambda2./nvec;
plot(nvec,MSEA,'-g',nvec,MSEB,'-b',nvec,MSEC,'-r',nvec,CRLB,'ok');grid on
title('MSE dels estimadors  \lambda=2');
xlabel('N'); legend('MSE Estimador A','MSE Estimador B','MSE Estimador
C','CRLB')

varLambdaA=lambda2*(4*nvec+2)./(3*nvec.^2+3*nvec);
varLambdaB=lambda2./nvec;
varLambdaC=lambda2./(4*nvec);

subplot(1,2,2)
plot(nvec,varLambdaA,'-g',nvec,varLambdaB,'-b',nvec,varLambdaC,'-
r',nvec,CRLB,'ok');
grid; legend('Variància Estimador A','Variància Estimador B','Variància
Estimador C','CRLB'); xlabel('N');title('Variància dels estimadors
\lambda=2');
```





Ara obtenim variàncies i MSEs més alts que abans, però la comparació entre aquests és la mateixa que abans. És a dir, el MSE dels estimadors A i B coincideixen amb la variància teòrica, estant el MSE de l’estimador B a la cota de CR i el MSE de l’estimador A una mica per sobre d’aquesta.

El MSE de l’estimador C torna a estar molt per sobre de la variància teòrica, estant per sobre de la cota de CR per a N majors que 2.

Activitat 1.6. Calculi el MSE teòric de cada estimador i compari'l gràficament amb el MSE empíric de l'activitat 1.4. Faci el mateix amb R={100,1000,10000} i comenti els resultats.

Utilitzant la fórmula comentada a l'activitat 1.4:

$$MSE\left(\hat{\lambda}_i^N\right) = Var\left(\hat{\lambda}_i^N\right) + b\left(\hat{\lambda}_i^N\right)^2$$

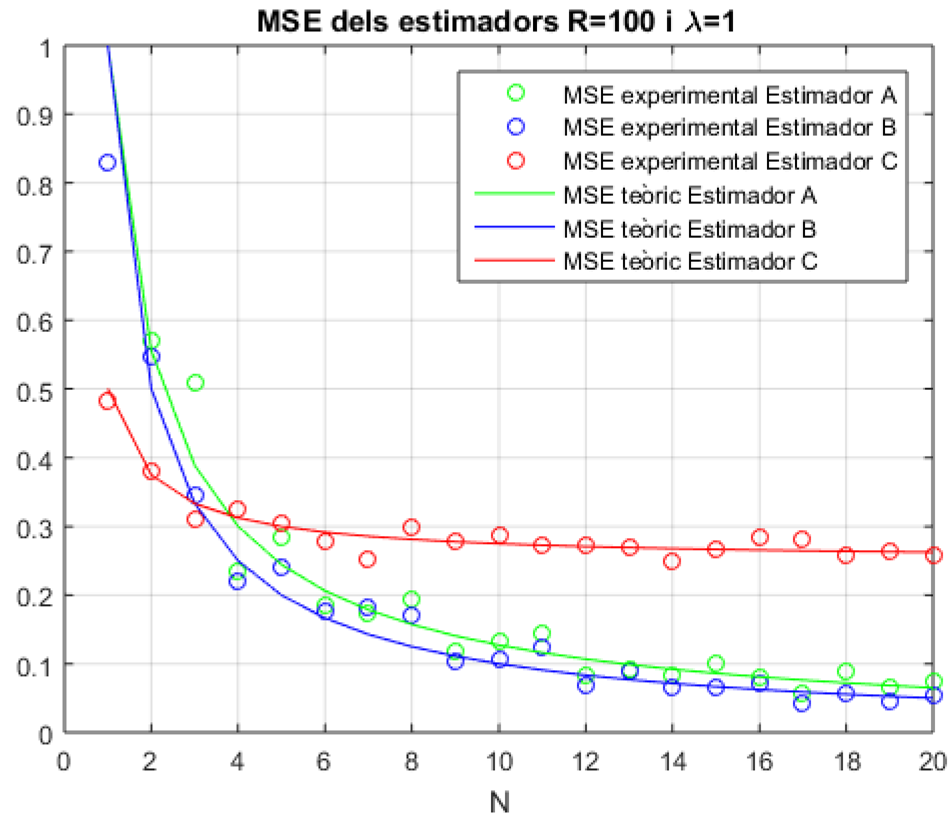
$$MSEA_{teòric} = \frac{2(2N+1)}{3N(N+1)}\lambda$$

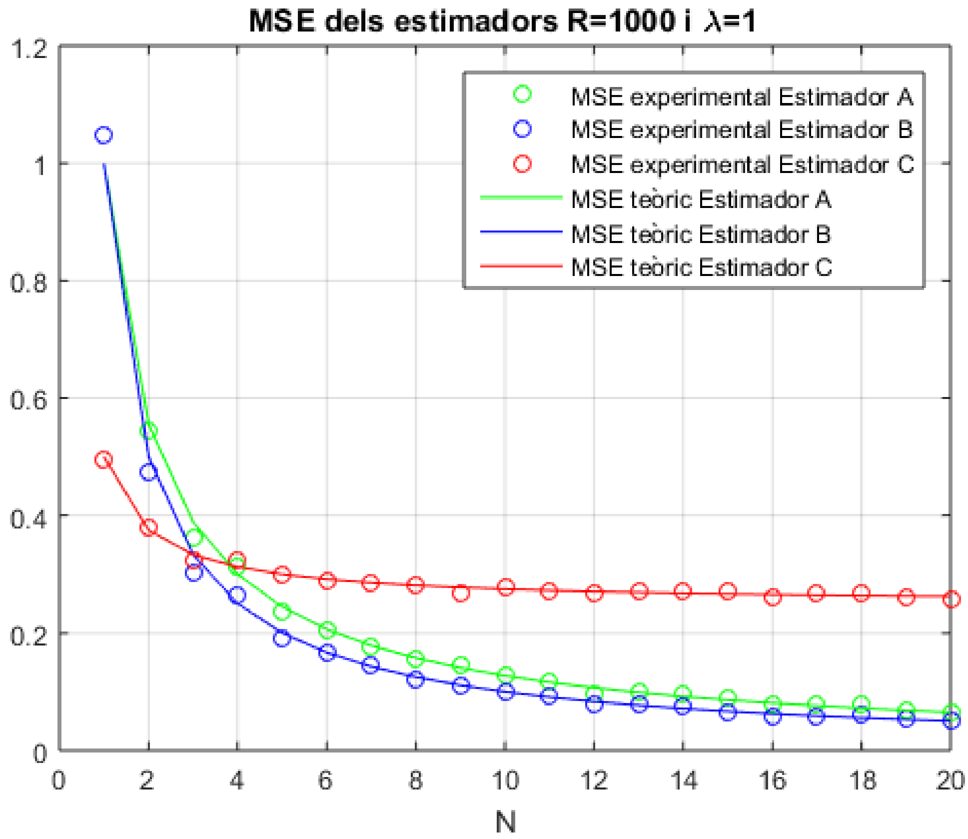
$$MSEB_{teòric} = \frac{\lambda}{N}$$

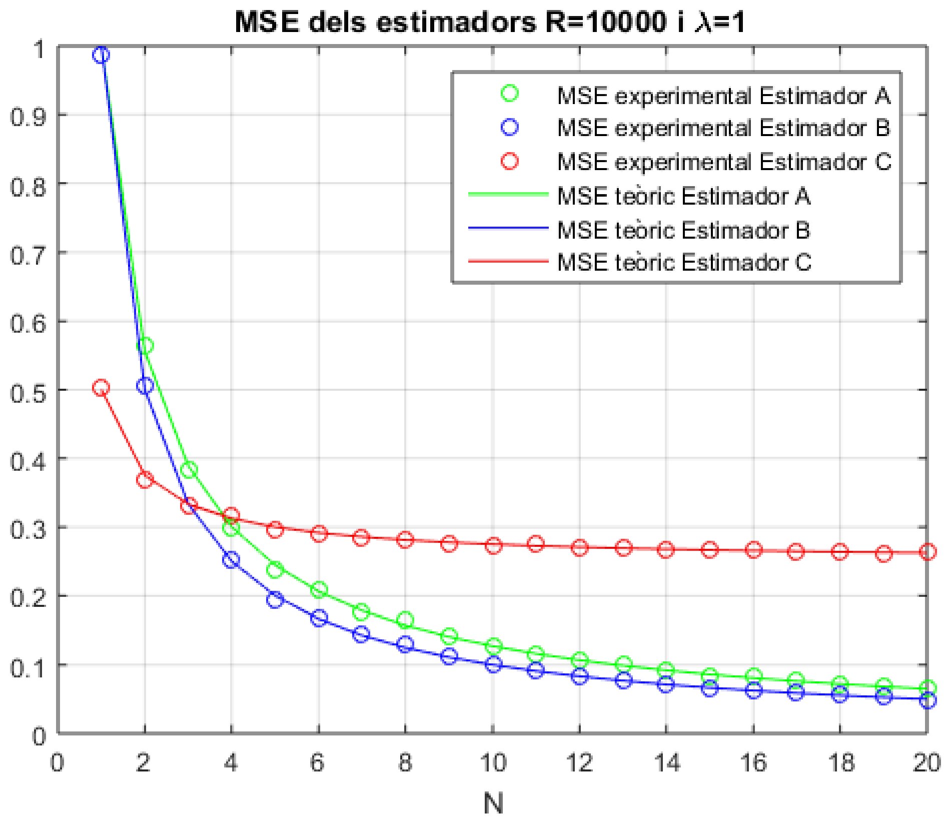
$$MSEC_{teòric} = \frac{\lambda}{4N} + \left(\frac{\lambda}{2} - \lambda\right)^2 = \frac{\lambda}{4}\left(\lambda + \frac{1}{N}\right)$$

```
MSEAR=zeros(3,N);% En la primera fila guardarem els MSEA amb R=100, en la
segona amb R=1000 i a la tercera amb R=10000
MSEBR=zeros(3,N);
MSECR=zeros(3,N);

for R=[100,1000,10000];
MSEA=zeros(1,N);
MSEB=zeros(1,N);
MSEC=zeros(1,N);

for j=1:N
    lambdaAvec=zeros(1,R);
    lambdaBvec=zeros(1,R);
    lambdaCvec=zeros(1,R);

    for jj=1:R
        g=poissrnd(lambda,1,j);

        n=1:j;
        vecA=n*g';

        lambdaAvec(jj)=2/(j*(j+1))*vecA;

        lambdaBvec(jj)=1/j*sum(g);

        lambdaCvec(jj)=lambdaBvec(jj)/2;
    end
    MSEA(j)=1/R*sum((lambdaAvec-lambda).^2);
    MSEB(j)=1/R*sum((lambdaBvec-lambda).^2);
    MSEC(j)=1/R*sum((lambdaCvec-lambda).^2);
end
MSEAR(log10(R)-1,:)=MSEA;
MSEBR(log10(R)-1,:)=MSEB;
MSECR(log10(R)-1,:)=MSEC;
end
```

```
MSEA100=MSEAR(1,:);
MSEB100=MSEBR(1,:);
MSEC100=MSECR(1,:);

MSEA1000=MSEAR(2,:);
MSEB1000=MSEBR(2,:);
MSEC1000=MSECR(2,:);

MSEA10000=MSEAR(3,:);
MSEB10000=MSEBR(3,:);
MSEC10000=MSECR(3,:);

MSEAte=2*(2*nvec+1)*lambda./(3*nvec.*(nvec+1));
MSEBte=lambda./nvec;
MSECte=1/4*(lambda^2+lambda./nvec);

figure(3)
plot(nvec,MSEA100,'og',nvec,MSEB100,'ob',nvec,MSEC100,'or',nvec,MSEAte,'-
g',nvec,MSEBte,'-b',nvec,MSECte,'-r'); grid on
xlabel('N');title('MSE dels estimadors R=100 i \lambda=1')
legend('MSE experimental Estimador A','MSE experimental Estimador B','MSE
experimental Estimador C','MSE teòric Estimador A','MSE teòric Estimador
B','MSE teòric Estimador C')

figure(4)
plot(nvec,MSEA1000,'og',nvec,MSEB1000,'ob',nvec,MSEC1000,'or',nvec,MSEAte,'-
g',nvec,MSEBte,'-b',nvec,MSECte,'-r');grid on
xlabel('N');title('MSE dels estimadors R=1000 i \lambda=1')
legend('MSE experimental Estimador A','MSE experimental Estimador B','MSE
experimental Estimador C','MSE teòric Estimador A','MSE teòric Estimador
B','MSE teòric Estimador C')

figure(5)
plot(nvec,MSEA10000,'og',nvec,MSEB10000,'ob',nvec,MSEC10000,'or',nvec,MSEAte,'
-g',nvec,MSEBte,'-b',nvec,MSECte,'-r');grid on
xlabel('N');title('MSE dels estimadors R=10000 i \lambda=1')
legend('MSE experimental Estimador A','MSE experimental Estimador B','MSE
experimental Estimador C','MSE teòric Estimador A','MSE teòric Estimador
B','MSE teòric Estimador C')
```


MSE dels estimadors R=100 i λ=1
MSE experimental Estimador A
MSE experimental Estimador B
MSE experimental Estimador C
MSE teòric Estimador A
MSE teòric Estimador B
MSE teòric Estimador C
N


MSE dels estimadors R=1000 i λ=1
MSE experimental Estimador A
MSE experimental Estimador B
MSE experimental Estimador C
MSE teòric Estimador A
MSE teòric Estimador B
MSE teòric Estimador C
N



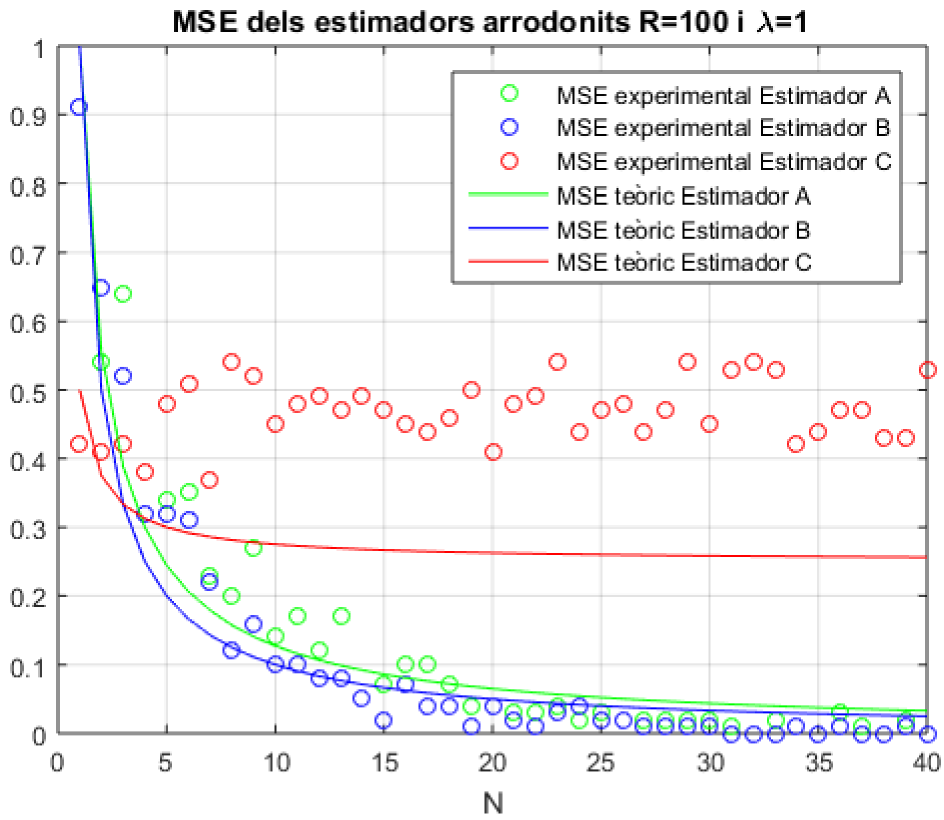
Per al cas R=100 els valors (punts) experimentals estan al voltant de les línies teòriques, però amb discrepàncies. Per a R=1000 estan gairebé coincidint amb el resultat teòric i per a R=10000 estan quasi perfectament coincidint amb el resultat teòric.

Activitat 1.7. Els estimadors $\hat{\lambda}_A^N, \hat{\lambda}_B^N, \hat{\lambda}_C^N$ proporcionen un valor real i, per tant, els estudiants acabarien decidint que el nombre de gols és l'enter que més s'aproxima a l'estimador. Representi el MSE empíric dels estimadors arrodonint i comenti els resultats.

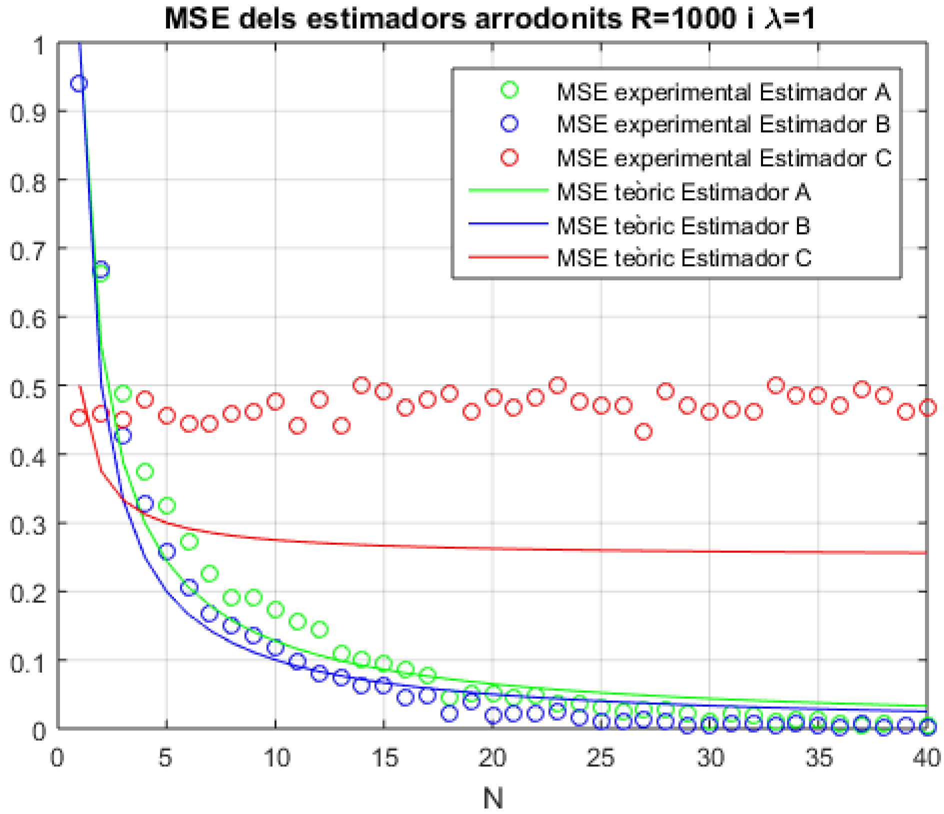
El codi és el mateix que abans però arrodonint els paràmetres estimats. A més, hem augmentat N fins 40 per tal de veure millor com els resultats experimentals estan per sota del teòric per a valors de N grans.

```
N=40;

nvec=1:N;

MSEAR=zeros(3,N);

MSEBR=zeros(3,N);

MSECR=zeros(3,N);

for R=[100,1000,10000];
MSEA=zeros(1,N);
MSEB=zeros(1,N);
MSEC=zeros(1,N);

for j=1:N
    lambdaAvec=zeros(1,R);
    lambdaBvec=zeros(1,R);
    lambdaCvec=zeros(1,R);

    for jj=1:R
        g=poissrnd(lambda,1,j);

        n=1:j;
        vecA=n*g';

        lambdaAvec(jj)=round(2/(j*(j+1))*vecA);

        lambdaBvec(jj)=round(1/j*sum(g));

        lambdaCvec(jj)=round(1/j*sum(g)/2);
    end

    MSEA(j)=1/R*sum((lambdaAvec-lambda).^2);
    MSEB(j)=1/R*sum((lambdaBvec-lambda).^2);
    MSEC(j)=1/R*sum((lambdaCvec-lambda).^2);
end

MSEAR(log10(R)-1,:)=MSEA;
MSEBR(log10(R)-1,:)=MSEB;
MSECR(log10(R)-1,:)=MSEC;
end
```

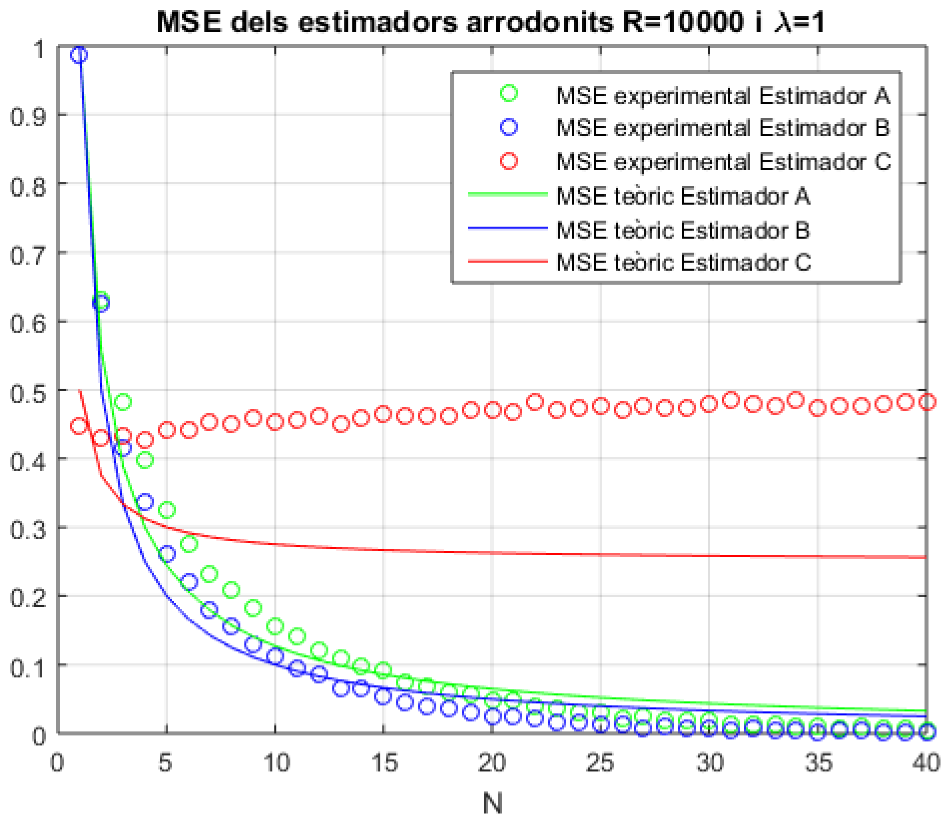
```
% Arrodonim tots els paràmetres estimats
MSEA100round=MSEAR(1,:);
MSEB100round=MSEBR(1,:);
MSEC100round=MSECR(1,:);

MSEA1000round=MSEAR(2,:);
MSEB1000round=MSEBR(2,:);
MSEC1000round=MSECR(2,:);

MSEA10000round=MSEAR(3,:);
MSEB10000round=MSEBR(3,:);
MSEC10000round=MSECR(3,:);

MSEAte=2*(2*nvec+1)*lambda./(3*nvec.*(nvec+1));
MSEBte=lambda./nvec;
MSECte=1/4*(lambda^2+lambda./nvec);

figure(6)
plot(nvec,MSEA100round,'og',nvec,MSEB100round,'ob',nvec,MSEC100round,'or',nvec
,MSEAte,'-g',nvec,MSEBte,'-b',nvec,MSECte,'-r'); grid on
xlabel('N');title('MSE dels estimadors arrodonits R=100 i \lambda=1')
legend('MSE experimental Estimador A','MSE experimental Estimador B','MSE
experimental Estimador C','MSE teòric Estimador A','MSE teòric Estimador
B','MSE teòric Estimador C')

figure(7)

plot(nvec,MSEA1000round,'og',nvec,MSEB1000round,'ob',nvec,MSEC1000round,'or',n
vec,MSEAte,'-g',nvec,MSEBte,'-b',nvec,MSECte,'-r');grid on
xlabel('N');title('MSE dels estimadors arrodonits R=1000 i \lambda=1')
legend('MSE experimental Estimador A','MSE experimental Estimador B','MSE
experimental Estimador C','MSE teòric Estimador A','MSE teòric Estimador
B','MSE teòric Estimador C')

figure(8)

plot(nvec,MSEA10000round,'og',nvec,MSEB10000round,'ob',nvec,MSEC10000round,'or
',nvec,MSEAte,'-g',nvec,MSEBte,'-b',nvec,MSECte,'-r');grid on
xlabel('N');title('MSE dels estimadors arrodonits R=10000 i \lambda=1')
legend('MSE experimental Estimador A','MSE experimental Estimador B','MSE
experimental Estimador C','MSE teòric Estimador A','MSE teòric Estimador
B','MSE teòric Estimador C')
```



MSE dels estimadors arrodonits R=100 i λ=1
MSE experimental Estimador A
MSE experimental Estimador B
MSE experimental Estimador C
MSE teòric Estimador A
MSE teòric Estimador B
MSE teòric Estimador C
N



MSE dels estimadors arrodonits R=1000 i λ=1
MSE experimental Estimador A
MSE experimental Estimador B
MSE experimental Estimador C
MSE teòric Estimador A
MSE teòric Estimador B
MSE teòric Estimador C
N



En l'activitat anterior hem vist que per a R=100 els resultats experimentals estaven a prop de la línia teòrica, per a R=1000 estaven gairebé a sobre d'aquesta i per a R=10000 estaven quasi exactament a sobre d'aquesta.

Com era d'esperar, ara veiem que no és el cas, ni tan sols per a R=10000.

L'estimador C ha empitjorat, ja que el MSEC experimental està per sobre del teòric. Comença a 0.45 i conforme augmentem N tendeix a 0.5.

El MSE de l'estimador A primer dóna resultats experimentals pitjors, ja que està per sobre del MSE teòric per a N menors que 15, i després millora, amb resultats per sota del MSE teòric a partir de N igual a 15. Tendeix cap a 0 per a N més grans.

Amb l'estimador B passa el mateix: primer el seu MSE calculat experimentalment dóna resultats pitjors que els teòrics, ja que per a N per sota de 10 els valors experimentals estan per sobre dels valors teòrics, i per N a partir de 10 el MSE experimental millora el MSE teòric. També tendeix cap a 0 per a N grans i sempre es troba per sota del MSEA.

Per tant, continuem considerant l'estimador B com el millor de tots tres.