Szymon Kłodowski

Obowiązkowe zadanie obliczeniowe

Wariant 4.4

Potencjał grawitacyjny

1. Problem obliczeniowy:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi \mathrm{G}\rho(x)$$

$$\Phi(0) = -5\mathrm{G}$$

$$\Phi(3) = -4\mathrm{G}$$

$$\rho(x)\begin{cases} 0 & dla\ x \in [0,1] \\ 10^{11} & dla\ x \in (1,2] \\ 0 & dla\ x \in (2,3] \end{cases}$$

Gdzie *Φ* to poszukiwana funkcja

$$[0,3] \ni x \to \Phi(x) \in \mathbb{R}$$

2. Doprowadzenie problemu do sformułowania wariacyjnego

$$\Phi'' = 4\pi \mathrm{G}\rho$$

Gdzie G to stała grawitacyjna równa $6{,}67430(15) \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$.

Mnożymy naszą funkcję przez funkcję *v:*

$$\Phi'' v = 4\pi \mathrm{G}\rho v$$

Gdzie *v* jest ograniczona przez:

$$v(0) = 0 \qquad v(3) = 0$$

Następnie całkujemy na dziedzinie po *x:*

$$\int_0^3 \Phi'' v \, dx = \int_0^3 4\pi \mathrm{G} \rho v \, dx$$

$$[\Phi' v]_0^3 - \int_0^3 \Phi' v' dx = 4\pi \mathrm{G} \int_0^3 \rho v \, dx$$

Skoro $v(0) = v(3) = 0$ oraz ρ(x) przyjmuje wartość stałą różną od zera jedynie dla przedziału (1,2], zatem dostajemy:

$$-\int_0^3 \Phi' v' = 4\pi \mathrm{G} 10^{11} \int_1^2 v \, dx$$

Mamy zatem:

$$B(\Phi, v) = -\int_0^3 \Phi' v' \, dx$$

$$L(v) = 4\pi \mathrm{G} 10^{11} \int_1^2 v \, dx$$

Możemy stworzyć podprzestrzeń elementów skończonych, gdzie każda pojedyncza funkcja jest opisana wzorem:

$$e_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{dla } x \in (x_{i-1}; x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{dla } x \in (x_i; x_{i+1}) \\ 0 & \text{dla } p.p. \end{cases}$$

Gdzie $x_i = \frac{3i}{N}$, gdzie N to liczba przedziałów na które ma zostać podzielony przedział.

Następnie możemy zrobić shift warunku brzegowego Dirichleta

$$\phi = \Psi + \widetilde{\Phi}$$

$$\Phi(0) = \Psi(0) + \widetilde{\Phi}(0) \qquad \Phi(3) = \Psi(3) + \widetilde{\Phi}(3)$$

$$-5\mathrm{G} e_0 = \Psi(0) + \widetilde{\Phi}(0) \qquad -4\mathrm{G} e_N = \Psi(3) + \widetilde{\Phi}(3)$$

$$\Psi(0) = 0 \qquad \widetilde{\Phi}(0) = -5\mathrm{G}e_0 \qquad \Psi(0) = 0 \qquad \widetilde{\Phi}(3) = -4\mathrm{G}e_N$$

Zatem równanie, które będę rozwiązywał MES wygląda następująco:

$$-\int_0^3 \Psi' v' dx = 4\pi \mathrm{G} 10^{11} \int_1^2 v\, dx$$

Gdzie rozwiązanie problemu, to znaczy nasza funkcja Φ, będzie wyglądałą następująco:

$$\Phi(x) = -5\mathrm{G}e_0 + \text{rozwiązanie MES} - 4\mathrm{G}e_N$$

3. Potencjalne usprawnienia kodu

a) Wiemy że $B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i)$, zatem wystarczy policzyć jedno z tych i przekleić do drugiego.

b) Dla i,j takich, że $|i-j| > 1$, e_i oraz e_j nie mają takiego przedziału punktów na których oba na raz są różne od zera, zatem dla takich i,j mamy $B(e_i, e_j) = 0$. Zatem można uzupełnić te miejsca zerami w macierzy

c) Zauważając, że części wspólne dziedzin funkcji e_i i e_j na których są różne od 0 nie zajmują całych przedziałów całkowania a tylko jakąś część możemy zmniejszyć zakres całkowania zwiększając tym samy dokładność kwadratury Gaussa-Legendre'a