ANALYTISCHE GEOMETRIE IM RAUM

Gegeben: Ein Punkt
Aufgabe 1. Ortsvektor bestimmen

Gegeben: Zwei Punkte			
Aufgaben:			
2.1. Abstand berechnen	**2.2.** Mittelpunkt berechnen	**2.3.** Verschiebungsvektor bestimmen	**2.4.** Geradengleichung bestimmen

Gegeben: Drei Punkte
Aufgabe 3. Parametergleichung der Ebene bestimmen

Gegeben: Ein Vektor		
Aufgaben:		
4.1. Länge berechnen	**4.2.** Gegenvektor berechnen	**4.3.** Mit einer Zahl multiplizieren
4.4. Orthogonalen Vektor bestimmen		

Gegeben: Zwei Vektoren		
Aufgaben:		
5.1. Addieren	**5.2.** Subtrahieren	**5.3.** Lineare Kombination berechnen
5.4. Kollinearität oder Parallelität prüfen	**5.5.** Skalarprodukt berechnen	**5.6.** Orthogonalität prüfen
5.7. Winkel berechnen	**5.8.** Vektorprodukt berechnen	**5.9.** Normalenvektor berechnen

Gegeben: Eine Gerade		
Aufgaben:		
6.1. Punktprobe	**6.2.** Spurpunkte berechnen	**6.3.** Orthogonale Gerade bestimmen
6.4. Abstand von einem Punkt berechnen		

Gegeben: Zwei Geraden		
Aufgaben:		
7.1. Lagebeziehung bestimmen	**7.2.** Schnittwinkel berechnen	**7.3.** Abstand berechnen

Gegeben: Eine Ebene		
Aufgaben:		
8.1. Form umwandeln	**8.2.** Punktprobe	**8.3.** Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen bestimmen
8.4. Spurgeraden bestimmen	**8.5.** Abstand von einem Punkt berechnen	

Gegeben: Zwei Ebenen			
Aufgaben:			
9.1. Lagebeziehung bestimmen	**9.2.** Abstand berechnen	**9.3.** Schnittwinkel berechnen	**9.4.** Orthogonalität prüfen

Gegeben: Eine Gerade und eine Ebene		
Aufgaben:		
10.1. Lagebeziehung bestimmen	**10.2.** Abstand berechnen	**10.3.** Schnittwinkel berechnen

Gegeben: Ein Punkt $A(4\,|\,2\,|\,-3)$.
Aufgabe 1. Bestimme den Ortsvektor zum Punkt A.
Definition: Es ist einfach der Vektor, der den Koordinatenursprung mit dem Punkt A verbindet.

Lösung
A hat den Ortsvektor $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Gegeben: Zwei Punkte $A(1\,|\,3\,|\,-2)$ und $B(-4\,|\,2\,|\,5)$.
Aufgabe 2.1. Berechne den Abstand zwischen den Punkte A und B.
Formel: Den Abstand zwischen zwei Punkte $A(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3)$ und $B(b_1\,|\,b_2\,|\,b_3)$ ist gegeben durch

$$d(A;B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}.$$

Lösung
Der Abstand zwischen A und B ist also

$$d(A;B) = \sqrt{((-4)-1)^2+(2-3)^2+(5-(-2))^2} = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2+(7)^2} = \sqrt{25+1+49} = \sqrt{75} \approx 8{,}66 \text{ LE.}$$

Gegeben: Zwei Punkte $A(1\,|\,3\,|\,-2)$ und $B(-4\,|\,2\,|\,5)$.
Aufgabe 2.2. Berechne den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
Formel: Der Mittelpunkt der Strecke zwischen $A(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3)$ und $B(b_1\,|\,b_2\,|\,b_3)$ ist gegeben durch

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}\,\middle|\,\frac{a_2+b_2}{2}\,\middle|\,\frac{a_3+b_3}{2}\right).$$

Lösung
Der Mittelpunkt ist

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}\,\middle|\,\frac{a_2+b_2}{2}\,\middle|\,\frac{a_3+b_3}{2}\right) = M\left(\frac{1+(-4)}{2}\,\middle|\,\frac{3+2}{2}\,\middle|\,\frac{(-2)+5}{2}\right) = M\left(-\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{5}{2}\,\middle|\,\frac{3}{2}\right).$$

Gegeben: Zwei Punkte $A(2\,|\,3\,|\,-5)$ und $B(-7\,|\,5\,|\,9)$.
Aufgabe 2.3. Bestimme den Verschiebungsvektor von A nach B. Auch Verbindungsvektor genannt.
Formel: Der Verschiebungsvektor von $A(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3)$ nach $B(b_1\,|\,b_2\,|\,b_3)$ ist gegeben durch $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}$.

Lösung
Der Verschiebungsvektor von A nach B ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7-2 \\ 5-3 \\ 9-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Gegeben: Zwei Punkte $A(2\,|\,3\,|-5)$ und $B(-7\,|\,5\,|\,9)$.
Aufgabe 2.4. Bestimme die Parameterform der Geraden, die durch A und B geht.
Ansatz: $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AB}$.

Lösung
Wir haben $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7-2 \\ 5-3 \\ 9-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Die Parameterform der Geradengleichung lautet also $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Gegeben: Drei Punkte $A(2\,|\,5\,|\,-4)$, $B(4\,|\,-1\,|\,9)$ und $C(-3\,|\,-6\,|\,8)$.
Aufgabe 3. Bestimme die Parameterform der Ebene, die durch A, B und C geht.
Ansatz: $E\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lösung

Wir haben $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ -1-5 \\ 9-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3-4 \\ -6-(-1) \\ 8-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die Parameterform der Ebenengleichung lautet also $E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Gegeben: Ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Aufgabe 4.1. Berechne die Länge des Vektors $\vec{a}$. Auch Betrag genannt.
Formel: $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Lösung

$\vec{a}$ hat die Länge $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$ LE.

Gegeben: Ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Aufgabe 4.2. Berechne den Gegenvektor zu $\vec{a}$.
Definition: Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen Gegenvektoren, wenn $\vec{a} = -\,\vec{b}$. Grafisch bedeutet das der gleiche Pfeile in umgekehrter Richtung.

Lösung

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ hat den Gegenvektor $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Gegeben: Ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Aufgabe 4.3. Multipliziere $\vec{a}$ mit der Zahl 2.
Definition: $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$. Diese Multiplikation nennen wir skalare Multiplikation.

Lösung

$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Gegeben: Ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Aufgabe 4.4. Bestimme einen Vektor, der orthogonal (senkrecht) zu $\vec{a}$ ist.
Fakt: Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal wenn ihr Skalarprodukt (siehe **Aufgabe 5.5.**) ist dann 0.

Lösung

Wir brauchen also einen Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, so dass $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ gilt. Wir können $\vec{b}$ als $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen.

Gegeben: Zwei Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.1. Addiere die zwei Vektoren.

Definition: Die Addition von $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist definiert als $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$.

Lösung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Gegeben: Zwei Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.2. Subtrahiere die zwei Vektoren.

Definition: Die Subtraktion von $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist definiert als $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$.

Lösung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Gegeben: Zwei Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.3. Berechne $2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$.

Definition: Eine lineare Kombination von Vektoren ist eine Summe von Vektoren, wobei jeder Vektor noch mit einer Zahl multipliziert werden kann.

Lösung

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Wir sagen $\begin{pmatrix} 18 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix}$ ist eine lineare Kombination von den Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Gegeben: Zwei Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.4. Prüfe ob $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ kollinear (parallel) sind.

Definition: Es existiert eine reelle Zahl r, sodass $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt. Die zeigen in dieselbe Richtung, aber können unterschiedliche Längen haben.

Lösung

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{rl} \textbf{I:} & 8 = -2r \quad | :(-2) \\ \textbf{II:} & 4 = -r \quad | :(-1) \\ \textbf{III:} & -12 = 3r \quad | :3 \end{array} \implies \begin{array}{rl} \textbf{I:} & -4 = r \\ \textbf{II:} & -4 = r \\ \textbf{III:} & -4 = r \end{array}$$

Die Vektoren sind kollinear (parallel), da wir den gleichen Wert für r erhalten haben.

Gegeben: Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.5. Berechne das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Definition: Das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben durch $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

Lösung

Wir haben $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + (-2) \cdot 0 = 42$.

Gegeben: Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.6. Prüfe ob $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander sind.

Definition: Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn sie einen rechten Winkel bilden. Ihr Skalarprodukt ist genau dann 0.

Lösung

Wir haben $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 4 + 4 \cdot (-2) = 0$. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind also orthogonal zueinander.

Gegeben: Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.7. Berechnen den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Formel: $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$. Hier $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist das Skalarprodukt und $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ sind die Längen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Lösung

Nach der obigen Formel haben wir

$$\cos(\alpha) = \frac{|2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 9|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2}} = \frac{|56|}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{121}} = \frac{56}{66}.$$

Also, $\alpha = \cos^{-1}(\frac{56}{66}) \approx 31{,}95°$ und $180° - \alpha = 360° - 31{,}95 = 148{,}05°$.

Bei der Berechnung wird immer der kleinere Winkel betrachtet, der Schnittwinkel ist also $31{,}95°$.

Gegeben: Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.8. Berechne das Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Definition: Das Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben durch $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$.

Lösung

Wir haben $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gegeben: Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.9. Berechne den Normalenvektor zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Ansatz: $\vec{a} \times \vec{b}$.

Lösung

Aus **Aufgabe 5.8.** haben wir $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Vektor, der orthogonal (senkrecht) zu den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

Gegeben: Eine Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.1. Liegt der Punkt $A(-1 \,|\, -2 \,|\, 14)$ auf g?

Lösung

Schritt 1: Punkt für $\vec{x}$ in die Geradengleichung einsetzen.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Gleichungssystem aufstellen und r zeilenweise berechnen.

$$\begin{array}{rl} \textbf{I:} & -1 = 2 - r \quad | -2 \\ \textbf{II:} & -2 = -4 + 2r \quad | +4 \\ \textbf{III:} & 14 = 5 + 3r \quad | -5 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rl} \textbf{I:} & -3 = -r \quad | :(-1) \\ \textbf{II:} & 2 = 2r \quad | :2 \\ \textbf{III:} & 9 = 3r \quad | :3 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rl} \textbf{I:} & 3 = r \\ \textbf{II:} & 1 = r \\ \textbf{III:} & 3 = r \end{array}$$

Wir haben verschiedene Werte für r erhalten.

Fazit: Der Punkt A liegt nicht auf der Geraden g.

Bemerkung: Falls wir denselben Wert r erhalten haben, würde der Punkt auf der Geraden liegen.

Gegeben: Eine Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.2. Bestimme die Spurpunkte von g.

Definition: Ein Spurpunkt ist der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Koordinatenebene.

Lösung

Schnittpunkt mit der xy-Ebene: $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{l} \textbf{I: } x = 1 + r \\ \textbf{II: } y = 2 + r \\ \textbf{III: } 0 = 3 + r \mid -3 \end{array} \implies \textbf{III: } -3 = r \implies \begin{array}{l} \textbf{Einsetzen in I: } x = 1 + (-3) = -2 \\ \textbf{Einsetzen in II: } y = 2 + (-3) = -1 \end{array}$$

$S_{xy}(-2 \mid -1 \mid 0)$.

Schnittpunkt mit der xz-Ebene: $\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{l} \textbf{I: } x = 1 + r \\ \textbf{II: } 0 = 2 + r \mid -2 \\ \textbf{III: } z = 3 + r \end{array} \implies \textbf{II: } -2 = r \implies \begin{array}{l} \textbf{Einsetzen in I: } x = 1 + (-2) = -1 \\ \textbf{Einsetzen in III: } z = 3 + (-2) = 1 \end{array}$$

$S_{xz}(-1 \mid 0 \mid 1)$.

Schnittpunkt mit der yz-Ebene: $\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{l} \textbf{I: } 0 = 1 + r \mid -1 \\ \textbf{II: } y = 2 + r \\ \textbf{III: } z = 3 + r \mid -3 \end{array} \implies \textbf{I: } -1 = r \implies \begin{array}{l} \textbf{Einsetzen in II: } y = 2 + (-1) = 1 \\ \textbf{Einsetzen in III: } z = 3 + (-1) = 2 \end{array}$$

$S_{yz}(0 \mid 1 \mid 2)$.

Gegeben: Eine Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.3. Bestimme eine Gerade, die orthogonal zu g ist.

Lösung

Wähle einen Vektor der orthogonal zu $\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$ ist (vergleiche **Aufgabe 4.4.**). Zum Beispiel $\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$. Die Gleichung der orthogonalen Geraden lautet also $g_{\text{orthogonal}}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$.

Gegeben: Eine Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.4. Berechne den Abstand des Punktes $P(-2\,|\,1\,|\,2)$ von der Geraden g.
Methode: Lotfußpunktverfahren.

Lösung
Schritt 1: Hilfsebene H erstellen.

Erstelle eine Hilfsebene H, die durch den Punkt $P(-2\,|\,1\,|\,2)$ geht und zu dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal ist. Wir haben also die Hilfsebene H: $[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$.

Schritt 2: H in Koordinatenform umwandeln (siehe **Aufgabe 8.1.2**).

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow H: x - 5y + 2z = d.$$

P in H einsetzen um d zu bestimmen:

$$\begin{aligned} (-2) - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 &= d \\ -2 - 5 + 4 &= d \\ -3 &= d \end{aligned}$$

H: $x - 5y + 2z = -3$.

Schritt 3: Parameterform der Gerade umschreiben.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r \\ 2 - 5r \\ 2r \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= 1 + r \\ y &= 2 - 5r \\ z &= 2r \end{aligned}$$

Schritt 4: x, y und z in Koordinatenform der Ebene H einsetzen um r zu bestimmen.

$$\begin{aligned} (1 + r) - 5 \cdot (2 - 5r) + 2 \cdot (2r) &= -3 \\ 1 + r - 10 + 25r + 4r &= -3 \\ 30r - 9 &= -3 \quad | +9 \\ 30r &= 6 \quad\;\; | : 30 \\ r &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Schritt 5: Setzt den Wert für r in g ein um den Schnittpunkt S zu bestimmen.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{5} \\ 2 - 5 \cdot \frac{1}{5} \\ 2 \cdot \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \Longrightarrow S(\frac{6}{5}\,|\,1\,|\,\frac{2}{5}).$$

Schritt 6: Berechne den Abstand zwischen S und P.

Wir haben die Punkte $P(-2\,|\,1\,|\,2)$ und $S(\frac{6}{5}\,|\,1\,|\,\frac{2}{5})$.

$d(P; S) = \sqrt{(\frac{6}{5} - (-2))^2 + (1 - 1)^2 + (\frac{2}{5} - (2))^2} \approx 3{,}58$ LE. Der Abstand zwischen P und g ist also $3{,}58$ LE.

Gegeben: Zwei Geraden g und h.
Aufgabe 7.1. Bestimme die Lagebeziehung von g und h.

<table>
<tr><th colspan="4">Vorgehensweise</th></tr>
<tr><td colspan="4">1. Frage: Sind die Richtungsvektoren von g und h kollinear?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ja</td><td colspan="2">Nein</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Frage: Liegt der Stützpunkt von g auf h?</td><td colspan="2">2. Frage: Haben g auf h einen Schnittpunkt?</td></tr>
<tr><td>Ja</td><td>Nein</td><td>Ja</td><td>Nein</td></tr>
<tr><td>7.1.1. identisch.</td><td>7.1.2. echt parallel.</td><td>7.1.3. schneiden sich.</td><td>7.1.4. windschief.</td></tr>
</table>

Gegeben: $g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und $h\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}-5\\-1\\10\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}8\\4\\-12\end{pmatrix}$.
Aufgabe 7.1.1. Bestimme die Lagebeziehung von g und h.

Lösung
Schritt 1: Richtungsvektoren auf Kollinearität prüfen.

$$\begin{pmatrix}8\\4\\-12\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \textbf{I:} & 8 = -2r \quad |:(-2) \\ \textbf{II:} & 4 = -r \quad |:(-1) \\ \textbf{III:} & -12 = 3r \quad |:3 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \textbf{I:} & -4 = r \\ \textbf{II:} & -4 = r \\ \textbf{III:} & -4 = r \end{array}$$

Die Richtungsvektoren sind kollinear, da wir den gleichen Wert für r erhalten haben.

Schritt 2: Liegt der Stützpunkt von g auf h?

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-1\\10\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}8\\4\\-12\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \textbf{I:} & 1 = -5 + 8s \quad |+5 \\ \textbf{II:} & 2 = -1 + 4s \quad |+1 \\ \textbf{III:} & 1 = 10 - 12s \quad |-10 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \textbf{I:} & 6 = 8s \quad |:8 \\ \textbf{II:} & 3 = 4s \quad |:4 \\ \textbf{III:} & -9 = -12s \quad |:(-12) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \textbf{I:} & 3/4 = s \\ \textbf{II:} & 3/4 = s \\ \textbf{III:} & 3/4 = s \end{array}$$

Wir haben einen eindeutigen Wert für s. Der Stützpunkt $(1\,|\,2\,|\,1)$ von g liegt auf h.

Fazit: Die Geraden g und h sind identisch.

Gegeben: $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-8\\6\end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}$.

Aufgabe 7.1.2. Bestimme die Lagebeziehung von g und h.

Lösung

Schritt 1: Richtungsvektoren auf Kollinearität prüfen.

$$\begin{pmatrix}2\\-8\\6\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix} \implies \begin{array}{rl}\textbf{I:} & 2 = -r \quad |:(-1)\\ \textbf{II:} & -8 = 4r \quad |:4\\ \textbf{III:} & 6 = -3r \quad |:(-3)\end{array} \implies \begin{array}{rl}\textbf{I:} & -2 = r\\ \textbf{II:} & -2 = r\\ \textbf{III:} & -2 = r\end{array}$$

Die Richtungsvektoren sind kollinear, da wir den gleichen Wert für r erhalten haben.

Schritt 2: Lieft der Stützpunkt von g auf h?

$$\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rl}\textbf{I:} & 2 = 2 - s \quad |-2\\ \textbf{II:} & 3 = 2 + 4s \quad |-2\\ \textbf{III:} & 1 = 2 - 3s \quad |-2\end{array} \implies \begin{array}{rl}\textbf{I:} & 0 = -s \quad |:(-1)\\ \textbf{II:} & 1 = 4s \quad |:4\\ \textbf{III:} & -1 = -3s \quad |:(-3)\end{array} \implies \begin{array}{rl}\textbf{I:} & 0 = s\\ \textbf{II:} & 1/4 = s\\ \textbf{III:} & 1/3 = s\end{array}$$

Wir haben verschiedene Werte für s. Der Stützpunkt $(2\,|\,3\,|\,1)$ von g liegt nicht auf h.

Fazit: Die Geraden g und h sind echt parallel.

Gegeben: $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-5\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 7.1.3. Bestimme die Lagebeziehung von g und h.

Lösung

Schritt 1: Richtungsvektoren auf Kollinearität prüfen.

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix} \implies \begin{array}{rl}\textbf{I:} & 2 = 3r \quad |:3\\ \textbf{II:} & 1 = -4r \quad |:(-4)\\ \textbf{III:} & -1 = r\end{array} \implies \begin{array}{rl}\textbf{I:} & 2/3 = r\\ \textbf{II:} & -1/4 = r\\ \textbf{III:} & -1 = r\end{array}$$

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, da wir verschiedene Werte für r erhalten haben.

Schritt 2: Auf Schnittpunkt prüfen.

Geradengleichungen gleichsetzen und auflösen:

$$\begin{pmatrix}7\\-5\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rl}\textbf{I:} & 7 + 2r = -1 + 3s\\ \textbf{II:} & -5 + r = 2 - 4s\\ \textbf{III:} & 6 - r = 5 + s\end{array} \implies \begin{array}{rl}\textbf{II+III:} & 1 = 7 - 3s \quad |-7\\ & -6 = -3s \quad |:(-3)\\ & 2 = s\end{array} \implies \begin{array}{rl}\textbf{Einsetzen in III:} & 6 - r = 5 + 2 \quad |-6\\ & -r = 1 \quad |:(-1)\\ & r = -1\end{array}$$

Überprüfen in I: $7 + 2 \cdot (-1) = -1 + 2 \cdot 3 \iff 5 = 5$ ✓
Überprüfen in II: $-5 + (-1) = 2 - 4 \cdot 2 \iff -6 = -6$ ✓

Fazit: Die Geraden g und h schneiden sich.

Berechnung des Schnittpunktes: Den Wert für r in g einsetzen: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-5\\6\end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-6\\7\end{pmatrix}$.

Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt $S(5\,|-6\,|\,7)$.

Gegeben: $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7.1.4. Bestimme die Lagebeziehung von g und h.

Lösung

Schritt 1: Richtungsvektoren auf Kollinearität prüfen.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{ll} \textbf{I:} & 1 = -3r \mid :(-3) \\ \textbf{II:} & 1{,}5 = -4r \mid :(-4) \\ \textbf{III:} & 2 = -5r \mid :(-5) \end{array} \implies \begin{array}{ll} \textbf{I:} & -\frac{1}{3} = r \\ \textbf{II:} & -\frac{3}{8} = r \\ \textbf{III:} & -\frac{2}{5} = r \end{array}$$

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, da wir verschiedene Werte für r erhalten haben.

Schritt 2: Auf Schnittpunkt prüfen.

Geradengleichungen gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \textbf{I:} & 5 + r = 2 - 3s \mid \cdot 2 \\ \textbf{II:} & 4 + 1{,}5r = 6 - 4s \\ \textbf{III:} & 11 + 2r = 2 - 5s \end{array} \implies \begin{array}{ll} \textbf{I:} & 10 + 2r = 4 - 6s \\ \textbf{II:} & 4 + 1{,}5r = 6 - 4s \\ \textbf{III:} & 11 + 2r = 2 - 5s \end{array} \implies \begin{array}{ll} \textbf{III-I:} & 1 = -2 + s \mid +2 \\ & 3 = s \end{array} \implies \textbf{Einsetzen in III: } \begin{array}{rl} 11 + 2r = 2 - 5 \cdot 3 & \mid -11 \\ 2r = -24 & \mid :2 \\ r = -12 & \end{array}$$

Überprüfen in I: $5 + (-12) = 2 - 3 \cdot 3 \iff -7 = -7$ ✓
Überprüfen in II: $4 + 1{,}5 \cdot (-12) = 6 - 4 \cdot 3 \iff -14 = -6$ (falsche Aussage)

Wir haben eine falsche Aussage erhalten.

Fazit: Die Geraden g und h sind windschief.

Gegeben: Zwei Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7.2. Bestimme den Schnittwinkel zwischen g und h.
Erklärung: Wenn sich zwei Geraden schneiden, dann haben sie einen Schnittwinkel. Der Schnittwinkel ist der Winkel zwischen den jeweiligen Richtungsvektoren.

Lösung

g und h schneiden sich im Punkt $(1\,|\,2\,|\,3)$. Der Schnittwinkel ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$. Nach **Aufgabe 5.7.** ist dieser $31{,}95°$.

Gegeben: Zwei Geraden g und h **Aufgabe 7.3.** Bestimmen den Abstand zwischen g und h.		
Fälle		
7.3.1. Windschiefe Geraden	**7.3.2.** echt Parallel Geraden	Schneidende und identische Geraden haben Null Abstand

Gegeben: Zwei windschiefe Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.3.1. Bestimmen den Abstand zwischen g und h.

Formel: Der Abstand zwischen zwei windschiefe geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ und h: $\vec{x} = \vec{c} + r \cdot \vec{d}$ ist gegeben durch $d(g;h) = \dfrac{|(\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ bestimmen, wobei $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{d}$.

Lösung

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d(g;h) = \frac{|(\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9}} = \frac{|-2|}{3} = \frac{2}{3} \text{ LE}$$

Gegeben: Zwei parallele Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.3.2. Bestimmen den Abstand zwischen g und h.

Vorgehensweise: Wähle einen Punkt P aus g. Bestimme den Abstand zwischen h und P (vergleiche **Aufgabe 6.4.**).

Lösung

Wir wählen den Stützpunkt $(-2\,|\,1\,|\,2)$ von g als P. Der Abstand zwischen P und h nach **Aufgabe 6.4.** ist $3{,}58$ LE.

Gegeben: Eine Ebenengleichung in bestimmter Form.
Aufgabe 8.1. Die Ebenengleichung in eine andere Form umwandeln.

$$\text{Parameterform} \xrightarrow{\textbf{8.1.1.}} \text{Normalenform} \xrightarrow{\textbf{8.1.2.}} \text{Koordinateform} \xrightarrow{\textbf{8.1.4.}} \text{Parameterform}$$

$$\text{Koordinateform} \xrightarrow{\textbf{8.1.3.}} \text{Normalenform}$$

Aufgabe 8.1.1. $E\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ in Normalenform umwandeln.

Lösung
Schritt 1: Normalenvektor berechnen.
Der Normalvektor $\overrightarrow{n}$ ist gleich dem Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren.

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 0 \\ 3 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Schritt 2: Stützvektor wählen.
Wir wählen den gleichen Stützvektor, und zwar $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Schritt 3: $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{n}$ in Normalenform einsetzen.

$$E\colon [\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\,] \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

$$E\colon [\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 8.1.2. $E\colon [\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$ in Koordinatenform umwandeln.

Lösung
Schritt 1: Koeffizienten a, b und c bestimmen.

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = 2, b = -3 \text{ und } c = 9$$

Wir haben also $E\colon 2x - 3y + 9z = d$.

Schritt 2: d bestimmen.
Wir setzten den Stützpunk $(1\,|\,-2\,|\,5)$ in E ein:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 9 \cdot 5 &= d \\ 2 + 6 + 45 &= d \\ 53 &= d \end{aligned}$$

Die Koordinatengleichung lautet also $E : 2x - 3y + 9z = 53$.

Aufgabe 8.1.3. $E\colon 4x - 10y - z = -8$ in Normalenform umwandeln.

Lösung

Schritt 1: Normalenvektor $\vec{n}$ ablesen.

Die Koordinate des Normalenvektors entsprechen den Koeffizienten von x, y und z. Wir haben also

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Schritt 2: Stützvektor $\vec{a}$ bestimmen.
Finde einen beliebigen Punkt, der die Koordinatengleichung erfüllt.

Zum Beispiel $(1\,|\,1\,|\,2)$ da $4 \cdot 1 - 10 \cdot 1 - 2 = -8$. Nun $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Schritt 3: $\vec{a}$ und $\vec{n}$ in Normalenform einsetzen.

$$E\colon [\vec{x} - \vec{a}\,] \cdot \vec{n} = 0$$

$$E\colon [\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 8.1.4. $E\colon 2x + 4y - 3z = 12$ in Parameterform umwandeln.

Lösung

Schritt 1: Koordinatenform nach x auflösen.

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 3z = 12 \qquad & \mid -4y + 3z \\ 2x = 12 - 4y + 3z \qquad & \mid :2 \\ x = 6 - 2y + 1{,}5z \qquad & \end{aligned}$$

Schritt 2: y durch r und z durch s ersetzen.

$$y = r$$
$$z = s$$
$$x = 6 - 2r + 1{,}5s$$

Schritt 3: Parameterform aufstellen.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2r + 1{,}5s \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gegeben: Eine Ebene in bestimmter Form. **Aufgabe 8.2.** Liegt ein Punkt auf der Ebene?		
8.2.1. Parameterform	**8.2.2.** Normalenform	**8.2.3.** Koordinatenform

Aufgabe 8.2.1. Liegt der Punkt $P(0|0|3)$ auf E: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung

Parameterform in Normalenform umwandeln (siehe **Aufgabe 8.1.1.**). Wir haben also

$E\colon [\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$. Dann ähnlich wie unten bei **Aufgabe 8.2.2.** vorgehen:

$E\colon [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$. Der Punkt P liegt auf E.

Aufgabe 8.2.2. Liegt der Punkt $P(4|-4|5)$ auf E: $[\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$?

Lösung

Punkt für $\overrightarrow{x}$ in die Ebenengleichung einsetzen:

$[\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 9 = 0$. Der Punkt P liegt auf E.

Aufgabe 8.2.3. Liegt der Punkt $P(1|2|-3)$ auf E: $2x + 4y + 5z = 20$?

Lösung

Punkt in die Ebenengleichung einsetzen: $E\colon 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = -5 \neq 20$. Der Punkt P liegt nicht auf E.

Gegeben: Eine Ebene E: $2x + 4y + 5z = 20$.
Aufgabe 8.3. Bestimme die Achsenabschnitte. Das heißt Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Lösung

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} 2x + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 &= 20 \\ 2x &= 20 \mid :2 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

$S_x(10|0|0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 + 4y + 5 \cdot 0 &= 20 \\ 4y &= 20 \mid :4 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

$S_y(0|5|0)$

Schnittpunkt mit der z-Achse:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5z \cdot 0 &= 20 \\ 5z &= 20 \mid :5 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

$S_z(0|0|4)$

Gegeben: Eine Ebene E: $2x + 4y + 5z = 20$.
Aufgabe 8.4. Bestimme die Spurgeraden.
Definition: Spurgeraden sind einfach die Schnittgeraden mit der Koordinatenebenen.

Lösung
Zuerst bestimmen wir den Schnittpunkt der Ebene mit den Koordinatenachsen.

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$2x + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 20$$
$$2x = 20 \mid : 2$$
$$x = 10$$

$S_x(10|0|0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$2 \cdot 0 + 4y + 5 \cdot 0 = 20$$
$$4y = 20 \mid :4$$
$$y = 5$$

$S_y(0|5|0)$

Schnittpunkt mit der z-Achse:

$$2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5z = 20$$
$$5z = 20 \mid :5$$
$$z = 4$$

$S_z(0|0|4)$

Schnittgerade mit xy-Ebene:

$$g_{xy} : \vec{x} = \overrightarrow{OS_x} + r \cdot \overrightarrow{S_xS_y}$$

$$g_{xy} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade mit yz-Ebene:

$$g_{yz} : \vec{x} = \overrightarrow{OS_y} + r \cdot \overrightarrow{S_yS_z}$$

$$g_{yz} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade mit xz-Ebene:

$$g_{xz} : \vec{x} = \overrightarrow{OS_x} + r \cdot \overrightarrow{S_xS_z}$$

$$g_{xz} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gegeben: Eine $E\colon 3x + 2y + z = 11$
Aufgabe 8.5. Berechne den Abstand des Punktes $A(2\,|\,4\,|\,1)$ von E.
Formel: Den Abstand zwischen $A(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3)$ und $E\colon ax + by + cz = d$ können wir mithilfe der

Formel $d(P;E) = \dfrac{|\,a\cdot a_1 + b\cdot a_2 + c\cdot a_3 - d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ berechnen.

Lösung
Der Abstand ist gegeben durch

$$d(P;E) = \frac{|\,3\cdot 2 + 2\cdot 4 + 1\cdot 1 - 11\,|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}} \approx 1{,}07 \text{ LE.}$$

Gegeben: Zwei Ebenen E_1 und E_2
Aufgabe 9.1. Bestimme die Lagebeziehung von E_1 und E_2.

Vorgehensweise		
Eine Ebene E_1 in Koordinatenform und die andere Ebene E_2 in Parameterform. Unten stehenden drei Schritte ausführen. Es gibt drei Fälle.		
9.1.1. identisch	**9.1.2.** echt parallel	**9.1.3.** schneiden sich in einer Gerade
Voregehnsweise		
Zwei Ebenen in Normalenform oder in Koordinatenform. Prüfe ob Normalenvektoren kollinear (parallel) sind. Es gibt drei Fälle.		
9.1.4. identisch	**9.1.5.** echt parallel	**9.1.6.** schneiden sich in einer Gerade

Gegeben: $E_1\colon -x - y - 2z = -5$ und $E_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$
Aufgabe 9.1.1. Bestimme die Lagebeziehung zwischen E_1 und E_2.

Lösung
Schritt 1: Parameterform der Ebene E_2 umschreiben.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-r\\r+2s\\2-s\end{pmatrix} \implies \begin{aligned} x &= 1-r\\ y &= r+2s\\ z &= 2-s\end{aligned}$$

Schritt 2: x, y und z in Koordinatenform der Ebene E_1 einsetzen. Falls möglich nach r oder nach s auflösen.

$$\begin{aligned} -(1-r) - (r+2s) - 2\cdot(2-s) &= -5\\ -1 + r - r - 2s - 4 + 2s &= -5\\ -5 &= -5 \text{ (wahre Aussage)}\end{aligned}$$

Schritt 3: Ergebnis interpretieren.

Wir haben eine wahre Aussage erhalten.

Fazit: Die Ebenen E_1 und E_2 sind identisch.

Gegeben: E_1: $x - 4y + 3z = 9$ und E_2: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9.1.2. Bestimme die Lagebeziehung zwischen E_1 und E_2.

Lösung

Schritt 1: Parameterform der Ebene E_2 umschreiben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 + 6r + 3s \\ 5 + 8r + 4s \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -7 + 6r + 3s \\ z &= 5 + 8r + 4s \end{aligned}$$

Schritt 2: x, y und z in Koordinatenform der Ebene E_1 einsetzen. Falls möglich nach r und nach s auflösen.

$$(3) - 4 \cdot (-7 + 6r + 3s) + 3 \cdot (5 + 8r + 4s) = 9$$
$$3 + 28 - 24r - 12s + 15 + 24r + 12s = 9$$
$$46 = 9 \text{ (falsche Aussage)}$$

Schritt 3: Ergebnis interpretieren.

Wir haben eine falsche Aussage erhalten.

Fazit: Die Ebenen E_1 und E_2 sind echt parallel zueinander.

Gegeben: E_1: $4x + 3y + 6z = 36$ und E_2: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9.1.3. Bestimme die Lagebeziehung zwischen E_1 und E_2.

Lösung

Schritt 1: Parameterform der Ebene E_2 umschreiben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3r + 3s \\ 2r \\ 3 - r - s \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} x &= 3r + 3s \\ y &= 2r \\ z &= 3 - r - s \end{aligned}$$

Schritt 2: x, y und z in Koordinatenform der Ebene E_1 einsetzen. Falls möglich nach r und nach s auflösen.

$$4 \cdot (3r + 3s) + 3 \cdot (2r) + 6 \cdot (3 - r - s) = 36$$
$$12r + 12s + 6r + 18 - 6r - 6s = 36$$
$$12r + 6s + 18 = 36 \quad | - 18$$
$$12r + 6s = 18 \quad | - 12r$$
$$6s = 18 - 12r \quad | :6$$
$$s = 3 - 2r$$

Schritt 3: Ergebnis interpretieren.

Die obige Gleichung war nach s auflösbar.

Fazit: Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich.

Berechnung der Schnittgerade: Wir setzen den obigen Term für s in x, y, und z von E_2 ein.

$$x = 3r + 3s = 3r + 3 \cdot (3 - 2r) = 3r + 9 - 6r = -3r + 9$$
$$y = 2r$$
$$z = 3 - r - s = 3 - r - (3 - 2r) = 3 - r - 3 + 2r = r$$

$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3r + 9 \\ 2r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gegeben: E_1: $3x - 4y - z = 3$ und E_2: $-6x + 8y + 2x = -6$
Aufgabe 9.1.4. Bestimme die Lagebeziehung zwischen E_1 und E_2.

Lösung
Normalenvektoren auf Kollinearität prüfen:

$$\begin{pmatrix}-6\\8\\2\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix} \implies \begin{array}{ll}\textbf{I:} & -6 = 3r \quad |:3\\ \textbf{II:} & 8 = -4r \ |:(-4)\\ \textbf{III:} & 2 = r\end{array} \implies \begin{array}{ll}\textbf{I:} & -2 = r\\ \textbf{II:} & -2 = r\\ \textbf{III:} & -2 = r\end{array}$$

Die Normalenvektoren sind parallel. Zudem sind die Ebenengleichungen Vielfache voneinander:

E_1: $3x - 4y - z = 3 \ |\cdot(-2) \implies E_2$: $6x + 8y + 2z = -6$.
Fazit: E_1 und E_2 sind identisch.

Gegeben: E_1: $2x + 3y - z = 5$ und E_2: $4x + 6y - 2x = 3$
Aufgabe 9.1.5. Bestimme die Lagebeziehung zwischen E_1 und E_2.

Lösung
Normalenvektoren auf Kollinearität prüfen:

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix} \implies \begin{array}{ll}\textbf{I:} & 2 = 4r \quad |:4\\ \textbf{II:} & 3 = 6r \quad |:6\\ \textbf{III:} & -1 = -2r \ |:(-2)\end{array} \implies \begin{array}{ll}\textbf{I:} & 1/2 = r\\ \textbf{II:} & 1/2 = r\\ \textbf{III:} & 1/2 = r\end{array}$$

Die Normalenvektoren sind parallel. Um zu prüfen, ob die Ebenen nicht identisch sind, wähle einen beliebigen Punkt aus E_1 zum Beispiel $(0|0|5)$ und setze in die Ebenengleichung von E_2:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 2 \cdot (-5) &= 3\\ 10 &\neq 3 \end{aligned}$$

Fazit: E_1 und E_2 sind echt parallel

Gegeben: E_1: $2x - y + z = 1$ und E_2: $3x + 2y - z = 3$
Aufgabe 9.1.6. Bestimme die Lagebeziehung zwischen E_1 und E_2.

Lösung
Normalenvektoren auf Kollinearität prüfen:

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} \implies \begin{array}{ll}\textbf{I:} & 2 = 3r \quad |:3\\ \textbf{II:} & -1 = 2r \quad |:2\\ \textbf{III:} & 1 = -r \ |:(-1)\end{array} \implies \begin{array}{ll}\textbf{I:} & 2/3 = r\\ \textbf{II:} & -1/2 = r\\ \textbf{III:} & -1 = r\end{array}$$

Normalenvektoren sind nicht parallel. **Fazit:** E_1 und E_2 scheiden sich.
Berechnung der Schnittgerade:

$$\begin{array}{ll}\textbf{I:} & 2x - y + z = 1 \ |\cdot 2\\ \textbf{II:} & 3x + 2y - z = 3\end{array} \implies \begin{array}{ll}\textbf{I:} & 2x - 2y + 2z = 2 \ |\cdot 2\\ \textbf{II:} & 3x + 2y - z = 3\end{array} \implies \begin{array}{ll}\textbf{I+II:} & 7x + z = 5 \quad |-7x\\ & z = 5 - 7x\end{array}$$

Setzt $z = 5 - 7x$ in eine der Gleichung ein und stell nach y um:

$$\begin{aligned} 2x - y + (5 - 7x) &= 1\\ 2x - y + 5 - 7x &= 1\\ -5x - y + 5 &= 1 && |-5+5x\\ -y &= -4 + 5x && |:(-1)\\ y &= 4 - 5x \end{aligned}$$

Setze $x = r$ und stelle nun die Geradengleichung auf:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}r\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\\4-5r\\5-7r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-5\\-7\end{pmatrix}$$

Gegeben: Zwei echt parallele Ebenen E_1: $2x - 3y + 6z = -2$ und E_2: $3x + 2y + z = 11$
Aufgabe 9.2. Berechne den Abstand zwischen E_1 und E_2.
Bemerkung: Identische und schneidende Ebenen haben Null Abstand.

Lösung
Wähle einen beliebigen Punkt auf E_1. Zum Beispiel $P(2\,|\,4\,|\,1)$ ist auf E_1, da $2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = -2$. Jetzt berechnen wir den Abstand zwischen P und E_2. Nach **Aufgabe 8.5.** ist dieser $1{,}07$ LE.

Gegeben: E_1: $2x + 4y + 4z = 10$ und E_2: $6x + 2y + 9z = -4$
Aufgabe 9.3. Berechne den Schnittwinkel zwischen E_1 und E_2.
Definition: Der Schnittwinkel ist der Winkel zwischen ihre Normalenvektoren.
Bemerkung: Falls nicht ablesbar, müssen wir zuerst den Normalenvektor berechnen (siehe **Aufgabe 8.1.1**)

Lösung
E_1 und E_2 besitzen die Normalenvektoren $n_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $n_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$. Nach **Aufgabe 5.7.** der Winkel zwischen n_1 und n_2 beträgt $31{,}95°$.

Gegeben: Zwei Ebenen E_1: $-2x + y + 3z = -4$ und E_2: $x - y + z = 1$.
Aufgabe 9.4. Sind die Ebenen E_1 und E_2 orthogonal zueinander?
Definition: Zwei Ebenen sind orthogonal zueinander, wenn ihre Normalenvektoren orthogonal sind.
Bemerkung: Falls nicht ablesbar, müssen wir zuerst den Normalenvektor berechnen (siehe **Aufgabe 8.1.1**)

Lösung
E_1 und E_2 besitzen die Normalenvektoren $n_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$n_1 \cdot n_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 0$. Da ihr Skalarprodukt 0 ist, sind E_1 und E_2 orthogonal zueinander.

Gegeben: Eine Gerade g und eine Ebene E.
Aufgabe 10.1. Bestimme die Lagebeziehung zwischen g und E.

Vorgehensweise		
Ebenengleichung in Koordinatenform umwandeln, falls sie nicht schon in dieser Form ist (siehe **Aufgaben 8.1.1.** und **8.1.2.**). Dann unten stehenden drei Schritte ausführen. Es gibt drei Fälle.		
10.1.1. Gerade liegt in der Ebene	**10.1.2.** Gerade und Ebene sind parallel	**10.1.3.** schneiden sich in einem Punkt

Gegeben: $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E\colon\ x + 2y + 3z = 9$.
Aufgabe 10.1.1. Bestimme die Lagebeziehung zwischen g und E.

Lösung
Schritt 1: Parameterform der Gerade umschreiben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+r \\ 2+r \\ 1-r \end{pmatrix} \implies \begin{matrix} x = 2+r \\ y = 2+r \\ z = 1-r \end{matrix}$$

Schritt 2: x, y und z in Koordinatenform der Ebene E einsetzen.

$$\begin{aligned} (2+r) + 2 \cdot (2+r) + 3 \cdot (1-r) &= 9 \\ 2 + r + 4 + 2r + 3 - 3r &= 9 \\ 9 &= 9 \text{ (wahre Aussage)} \end{aligned}$$

Schritt 3: Ergebnis interpretieren.

Wir haben eine wahre Aussage erhalten.

Fazit: Die Gerade g liegt in der Ebene E.

Gegeben: $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E\colon\ x + 2y + 3z = 9$.
Aufgabe 10.1.2. Bestimme die Lagebeziehung zwischen g und E.

Lösung
Schritt 1: Parameterform der Gerade umschreiben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+r \\ 3+r \\ 1-r \end{pmatrix} \implies \begin{matrix} x = 2+r \\ y = 3+r \\ z = 1-r \end{matrix}$$

Schritt 2: x, y und z in Koordinatenform der Ebene E einsetzen.

$$\begin{aligned} (2+r) + 2 \cdot (3+r) + 3 \cdot (1-r) &= 9 \\ 2 + r + 6 + 2r + 3 - 3r &= 9 \\ 11 &= 9 \text{ (falsche Aussage)} \end{aligned}$$

Schritt 3: Ergebnis interpretieren.

Wir haben eine falsche Aussage erhalten.

Fazit: Die Gerade g liegt echt parallel zu der Ebene E.

Gegeben: $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E\colon x + 2y + 3z = 9$.

Aufgabe 10.1.3. Bestimme die Lagebeziehung zwischen g und E.

Lösung

Schritt 1: Parameterform der Gerade umschreiben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2r \\ 3+r \\ 1-r \end{pmatrix} \implies \begin{matrix} x = 2-2r \\ y = 3+r \\ z = 1-r \end{matrix}$$

Schritt 2: x, y und z in Koordinatenform der Ebene E einsetzen.

$$\begin{aligned} (2-2r) + 2\cdot(3+r) + 3\cdot(1-r) &= 9 \\ 2-2r+6+2r+3-3r &= 9 \\ 11-3r &= 9 \quad |-11 \\ -3r &= -2 \quad |:(-3) \\ r &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Schritt 3: Ergebnis interpretieren.

Wir haben einen eindeutigen Wert für r.

Fazit: Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich in einem Punkt.

Berechnung des Schnittpunkts: Wir setzen den Wert von r in x, y, und z ein.

$$x = 2-2r = 2-2\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y = 3+r = 3+\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

$$z = 1-r = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Die Gerade g und Ebene E schneiden sich im Punkt $S_x(\frac{2}{3}|\frac{11}{3}|\frac{1}{3})$.

Gegeben: $E\colon -x-y-z = -8$ und $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 10.2. Berechne den Abstand zwischen E und g.

Bemerkung: Falls der Ebenengleichung nicht in Koordinatenform ist, zuerst in Koordinatenform umwandeln (siehe **Aufgaben 8.1.1.** und **8.1.2.**).

Lösung

Wähle einen beliebigen Punkt auf der Geraden g, zum Beispiel den Stützpunkt $P(1\,|\,4\,|-3)$. Berechne den Abstand zwischen diesen Punkt P und der Ebene E (vergleiche **Aufgabe 8.5.**):

$$d(P;E) = \frac{|(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 4 + (-1)\cdot(-3) - (-8)|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \approx 3{,}46 \text{ LE}.$$

Gegeben: E: $4x - 3y = 1$ und g: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 10.3. Berechne den Schnittwinkel zwischen der Ebene E und der Gerade g.

Formel: $\sin(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{b}|}{\left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$, wobei

- $\overrightarrow{n}$ ist der Normalenvektor der Ebene und $\overrightarrow{b}$ ist der Richtungsvektor der Gerade,
- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{b}$ ist das Skalarprodukt und wir nehmen davon den Betrag $|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{b}|$,
- $|\overrightarrow{n}|$ und $|\overrightarrow{b}|$ sind die Längen von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$.

Bemerkung: Von der Koordinatenform und der Normalenform kann man den Normalenvektor sofort ablesen. Falls die Ebenengleichung in Parameterform gegeben ist, müssen wir zuerst den Normalenvektor berechnen (siehe **Aufgabe 8.1.1**).

Lösung

Wir haben $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\sin(\alpha) = \frac{|4 \cdot 0 + (-3) \cdot 4 + 0 \cdot 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{|0 - 12 + 0|}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{25}} = \frac{|-12|}{25} = \frac{12}{25}.$$

Also, $\alpha = \sin^{-1}(\frac{12}{25}) \approx 28{,}7°$ und $180° - \alpha = 180° - 28{,}7 = 151{,}3°$.

Der kleinere Winkel ist der gesuchte Winkel, und zwar $28{,}7°$.

Vektor
Ein Vektor gibt eine Verschiebung an. Grafisch wird ein Vektor als Pfeil dargestellt. Zwei Pfeile, die gleich lang sind und in die gleiche Richtung zeigen, stellen den gleichen Vektor dar. Ein Vektor hat 3 Koordinaten, die als Spalte geschrieben werden. $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ bedeutet eine Verschiebung um 4 in die positive x-Richtung, um 2 in die positive y-Richtung und 3 in die negative z-Richtung. Kurz geschrieben: 4 nach vorne, 2 nach rechts und 3 nach unten.