

1 Lineare Gleichungssysteme

Video:



1.1 Einsetzungsverfahren

Einführung

Das **Einsetzungsverfahren** ist ein Verfahren, mit dem du ein lineares Gleichungssystem lösen kannst. Du gehst immer in folgenden Schritten vor:

1. Stelle eine der Gleichungen nach einer der Variablen um.
2. Setze den umgestellten Term in die andere Gleichung ein.
3. Die Gleichung, die man erhält, besitzt nur noch eine Variable. Stelle nun nach dieser um.
4. Setze den erhaltenen Wert in die Gleichung ein, die man zu Beginn umgestellt hat, um den zweiten Wert zu erhalten.
5. Gib die Lösungsmenge an.

Beispiel:

$$\text{I:} \quad 3x - 6y = 0$$

$$\text{II:} \quad 2x + 2y = 6$$

Stelle eine der Gleichungen
nach einer der Variablen um:

$$\begin{array}{rcl} \text{II:} & 2x + 2y = 6 & | - 2y \\ & 2x = 6 - 2y & | : 2 \\ & x = 3 - y & \end{array}$$

Setze den umgestellten
Term in die andere Gleichung ein:

$$\text{in I:} \quad 3 \cdot (3 - y) - 6y = 0$$

Die Gleichung, die man erhält, besitzt nur
eine Variable. Stelle nach dieser Variablen um:

$$\begin{array}{rcl} 9 - 3y - 6y = 0 & & \\ 9 - 9y = 0 & & | - 9 \\ -9y = -9 & & | : (-9) \\ y = 1 & & \end{array}$$

Setze den erhaltenen Wert in die Gleichung ein,
die man zu Beginn umgestellt hat,
um den zweiten Wert zu erhalten:

$$\begin{array}{rcl} \text{in II:} & x = 3 - 1 & \\ & x = 2 & \end{array}$$

Gib die Lösungsmenge an:

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{(2 | 1)\}$$

Einstiegsaufgabe

Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren.

$$\text{I:} \quad x + 2y = 1$$

$$\text{II:} \quad 2x + 2y = 0$$

1.1 Einsetzungsverfahren

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1



1. Gib die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems an.

a) I: $x + 2,5y = 1$

b) I: $6x - 2y = 12$

c) I: $2x + 4y = 6$

II: $y = 3x$

II: $x = -0,5y + 5$

II: $y = 2x - 1$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2



2. Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren und gib die Lösungsmenge an. Stelle dazu zunächst nach einer Variablen um.

a) I: $x + y = 1$

b) I: $2x - y = 3$

c) I: $3x - 4y = 6$

II: $x - y = 2$

II: $2x + 2y = 0$

II: $-2x - 5y = 1$

3. Stelle ein passendes Gleichungssystem auf und löse es mit dem Einsetzungsverfahren. Formuliere einen Antwortsatz.

Oma Elke kauft 3 kg Trauben und 4 kg Kirschen. Sie muss dafür 30,00 € bezahlen. Greta zahlt für 5 kg Trauben und 2 kg Kirschen insgesamt einen Preis von 27,60 €.

Berechne für die Trauben und die Kirschen jeweils den Preis pro Kilogramm.



4. Löse das lineare Gleichungssystem und gib die Lösungsmenge an.

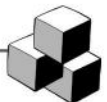
a) I: $y = -x + 15$

b) I: $-2x + 2y = 6$

II: $y = -1x + 6$

II: $3x - 3y = -9$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3



5. Überlege, wie du erkennen kannst, ob ein lineares Gleichungssystem keine oder unendlich viele Lösungen hat.

Formuliere hierfür einen Merksatz.

1.2 Gleichsetzungsverfahren

Video:



Einführung

Das **Gleichsetzungsverfahren** ist ein weiteres Verfahren, mit dem du ein lineares Gleichungssystem lösen kannst. Du gehst immer in folgenden Schritten vor:

- **Umstellen:**
 1. Stelle beide Gleichungen nach einer Variablen um. Beachte, dass du sie jeweils nach derselben Variablen umstellst.
- **Gleichsetzen:**
 2. Setze die beiden Terme, welche die andere Variable enthalten, gleich. Du erhältst eine Gleichung mit nur dieser Variablen.
 3. Stelle die Gleichung um und berechne den ersten Wert.
- **Einsetzen:**
 4. Setze den Wert in eine der umgestellten Gleichungen ein, um den zweiten Wert zu ermitteln.
 5. Gib die Lösungsmenge an.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x - 4y = 2 \\ \text{II:} & 2x - 6y = -2 \end{array}$$

Umstellen:

$$\begin{array}{llll} \text{I:} & 2x - 4y = 2 & | + 4y & \\ & 2x = 2 + 4y & | : 2 & \\ & x = 1 + 2y & & \end{array} \quad \begin{array}{llll} \text{II:} & 2x - 6y = -2 & | + 6y & \\ & 2x = -2 + 6y & | : 2 & \\ & x = -1 + 3y & & \end{array}$$

Gleichsetzen:

$$\begin{array}{llll} \text{I} = \text{II:} & 1 + 2y = -1 + 3y & | - 3y & | -1 \\ & -y = -2 & | \cdot (-1) & \\ & y = 2 & & \end{array}$$

Einsetzen:

$$\text{in I:} \quad x = 1 + 2 \cdot 2 = 5$$

$$\text{Lösungsmenge: } \mathbb{L} = \{(5 | 2)\}$$

Einstiegsaufgabe

Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren.

$$\text{I: } x - 4y = -4$$

$$\text{II: } x + y = 1$$

1.2 Gleichsetzungsverfahren

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1



1. Gib die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems an.

a) I: $y = 2x$

b) I: $x = \frac{1}{3}y + 2$

c) I: $y = -x + 5$

II: $y = -x + 3$

II: $x = -0,5x + 5$

II: $y = x + 1$

2. Stelle die Gleichungen nach x um.

a) $5 = x + y$

b) $25x - 15y = 5$

c) $7x - 0,5y = 35$

3. Stelle die Gleichungen nach y um.

a) $3y - 3x = 6$

b) $-y + 5x = 3$

c) $2,5x + 0,5y = -1$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2



4. Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren und gib die Lösungsmenge an.

a) I: $6x - 24 = 12y$

b) I: $30x - 15y = 45$

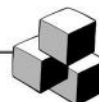
c) I: $y + 12x = 36$

II: $18x - 18y = 9$

II: $-3x + y = -15$

II: $1y - 2x = -1$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3



5. Stelle jeweils ein lineares Gleichungssystem auf und löse es im Anschluss.

- Die Summe zweier Zahlen ist 35. Das Dreifache der ersten Zahl ist das Vierfache der zweiten Zahl.
- Addiert man zum Doppelten der ersten Zahl 4, so erhält man das Fünffache der zweiten Zahl. Addiert man das Doppelte der ersten und das Fünffache der zweiten Zahl, so erhält man 16.
- In einer Herberge gibt es Dreibett- und Fünfbettzimmer. Es sind insgesamt 20 Zimmer, in denen 80 Jugendliche untergebracht werden können.
- Mirkos Vater ist 24 Jahre älter als Mirko. Vor 5 Jahren war er viermal so alt wie Mirko. Berechne das Alter der beiden.



1.3 Additionsverfahren

Video:



Einführung

Das dritte Verfahren, mit dem du ein lineares Gleichungssystem lösen kannst, ist das **Additionsverfahren**. Das Vorgehen zeigt das folgende **Beispiel**:

- Addiere die beiden Gleichungen so, dass eine Variable wegfällt.

$$\text{I: } 3x + 2y = 1$$

$$\text{II: } 2x - 2y = 9$$

$$\text{I + II: } 3x + 2x + 2y - 2y = 1 + 9$$

- Eine Variable fällt immer dann weg, wenn vor ihr dieselbe Zahl steht, diese aber ein anderes Vorzeichen hat.

$$\text{I: } 3x + 2y = 1$$

$$\text{II: } 2x - 2y = 9$$

$$\text{I + II: } 5x = 10$$

- Wenn beim Addieren der Gleichungen dieselbe Variable wegfällt, erhält man eine Gleichung mit nur einer Variablen und kann diese umstellen.

$$\begin{array}{l} \text{I + II: } 5x = 10 \quad | : 5 \\ x = 2 \end{array}$$

- Mithilfe des erhaltenen Wertes kann man den fehlenden Wert berechnen.

$$\begin{array}{l} \text{in II: } 2 \cdot 2 - 2y = 9 \quad | -4 \\ -2y = 5 \quad | : (-2) \\ y = -2,5 \end{array}$$

- Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(2 | -2,5)\}$

Falls beim Addieren der Gleichungen keine Variable wegfällt, muss man zunächst eine Gleichung mit einer passenden Zahl multiplizieren!

Beispiel:

$$\text{I: } 3x + 2y = 1$$

$$\text{II: } x - y = 9 \quad | \cdot 2$$

$$\text{I: } 3x + 2y = 1$$

$$\text{II: } 2x - 2y = 18$$

$$\text{I + II: } 5x = 19$$

Einstiegsaufgabe

Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren.

$$\text{I: } 4x - 6y = 0$$

$$\text{II: } -2x + y = 2$$

1.3 Additionsverfahren

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1



1. Addiere die Gleichungen.

a) I: $7x + 2y = 5$

II: $2x - 3y = 5$ | I + II

b) I: $0,75x + y = 10$

II: $2x - 0,5y = 6$ | I + II

c) I: $1,3x + (-5y) = 20$

II: $0,7x - 2y = 19$ | I + II

d) I: $3x + 2y = -2$

II: $2x - 2y = -8$ | I + II

2. Multipliziere jede Gleichung mit der angegebenen Zahl.

a) I: $3x + 3y = 1$ | $\cdot 2$

II: $3x - 2y = 9$ | $\cdot 3$

b) I: $1,5x + 2y = -1$ | $\cdot 2$

II: $-x - 5y = 4$ | $\cdot 3$

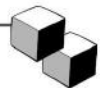
c) I: $\frac{1}{3}x + 2,5y = 1,5$ | $\cdot 2$

II: $-x - y = 12$

d) I: $7x + y = 28$ | $\cdot (-5)$

II: $5x - 9y = 10$ | $\cdot (-7)$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2



3. Addiere die Gleichungen und löse im Anschluss das Gleichungssystem.

a) I: $-5x + 10y = 5$

II: $5x - 20y = -15$

b) I: $2,5x + 7,5y = 10$

II: $8x - 7,5y = 11$

4. Führe zunächst eine geeignete Multiplikation der Gleichungen durch und löse das Gleichungssystem dann mit dem Additionsverfahren.

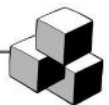
a) I: $3x + 3y = 12$

II: $-1,5x + 2y = 15$

b) I: $3x + 3y = 0$

II: $x - y = 6$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3



5. Bestimme die Lösungsmenge.

a) I: $-6x + 3y = -3$

II: $x - 4y = -10$

b) I: $x + y = 5$

II: $0,5x + 6y = 19$

c) I: $8x - 12y = -8$

II: $3x - 4y = -2$

d) I: $10x - 9y = 2$

II: $-5x + 4,5y = 2$

1.4 Lineare Gleichungssysteme zeichnerisch lösen

Video:



Einführung

Um ein **lineares Gleichungssystem** zeichnerisch zu lösen, zeichnest du die zugehörigen Graphen der beiden Gleichungen in ein Koordinatensystem und liest ihren Schnittpunkt ab. Dieser gehört zur Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Beispiel:

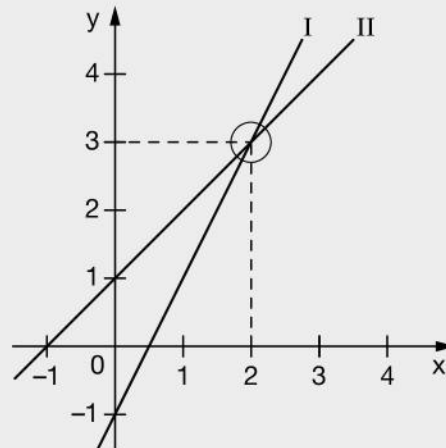
I: $y = 2x - 1$

II: $y = x + 1$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist durch die Koordinaten des Schnittpunktes gegeben:

$x = 2$ und $y = 3$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(2|3)\}$



Um die Graphen zeichnen zu können, ist es sinnvoll, die Gleichungen jeweils nach y umzustellen. Danach liest du den y -Achsenabschnitt ab und zeichnest die Graphen mithilfe ihrer jeweiligen Steigung:

I: $y = 2x - 1$

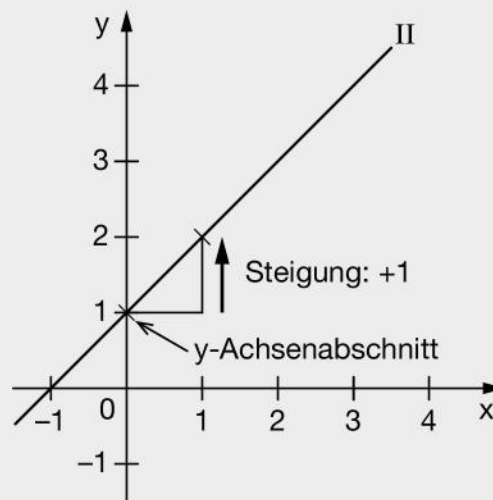
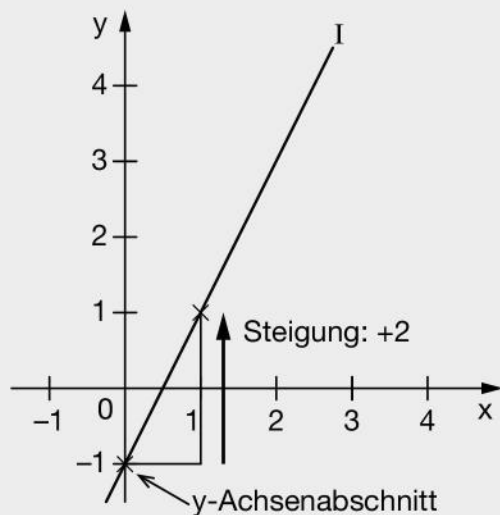
y -Achsenabschnitt: -1

Steigung: 2

II: $y = x + 1$

y -Achsenabschnitt: 1

Steigung: 1



Einstiegsaufgabe

Zeichne die beiden Graphen in ein Koordinatensystem und gib die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems an.

I: $y = 2x - 3$

II: $y = x - 1$

1.4 Lineare Gleichungssysteme zeichnerisch lösen

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1



1. Gib den y-Achsenabschnitt und die Steigung der Geraden an.

a) $y = 4x - 5$

b) $y = 0,5x + 1$

c) $7x - 2 = y$

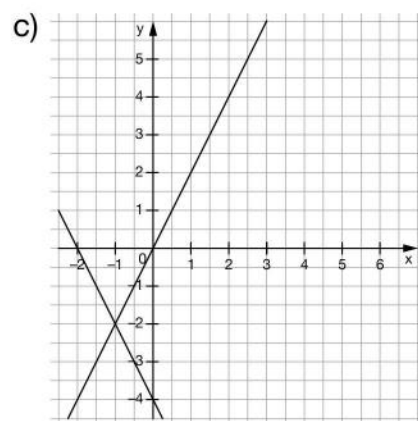
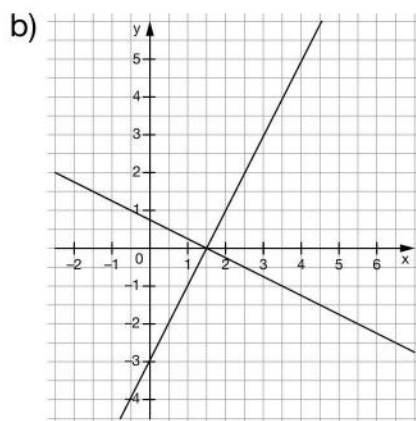
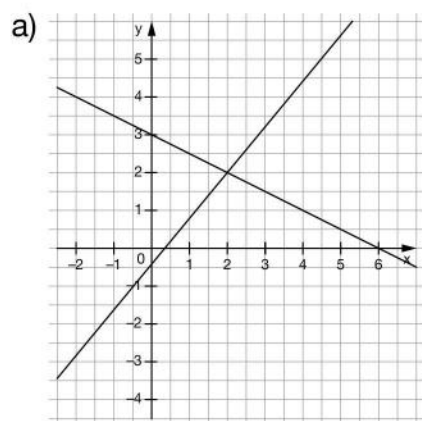
2. Stelle die folgenden Gleichungen nach y um.

a) $6x - 3y = 18$

b) $0,5x - y = 3$

c) $9x + 2y = 5$

3. Lies jeweils den Schnittpunkt der Graphen ab.



4. Löse das lineare Gleichungssystem zeichnerisch.

a) I: $y = x$

b) I: $y = 2x - 1$

c) I: $y = 0,5x - 2$

d) I: $y = -0,2x + 1$

II: $y = -x$

II: $y = -4x + 2$

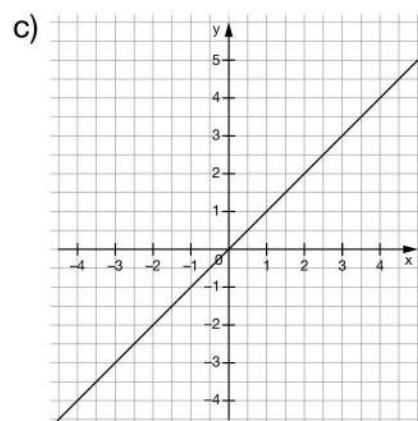
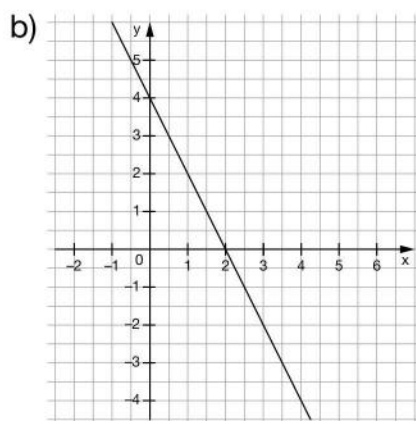
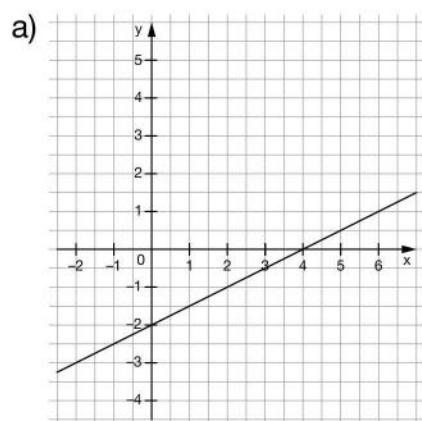
II: $y = x - 4$

II: $y = 0,4x - 0,8$

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2



5. Gib die Gleichungen der abgebildeten Geraden an.



6. Stelle die Gleichungen nach y um und zeichne die zugehörigen Geraden in ein Koordinatensystem.

a) $\frac{4}{5}x + y = 3$

b) $5x - 5y = 2$

c) $\frac{1}{2}x - 2y = 10$

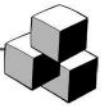
7. Löse das lineare Gleichungssystem zeichnerisch.

a) I: $2y = 4x$

b) I: $x + y = 2$

II: $y - 3 = -x - 1$

II: $2x - 4y = 6$

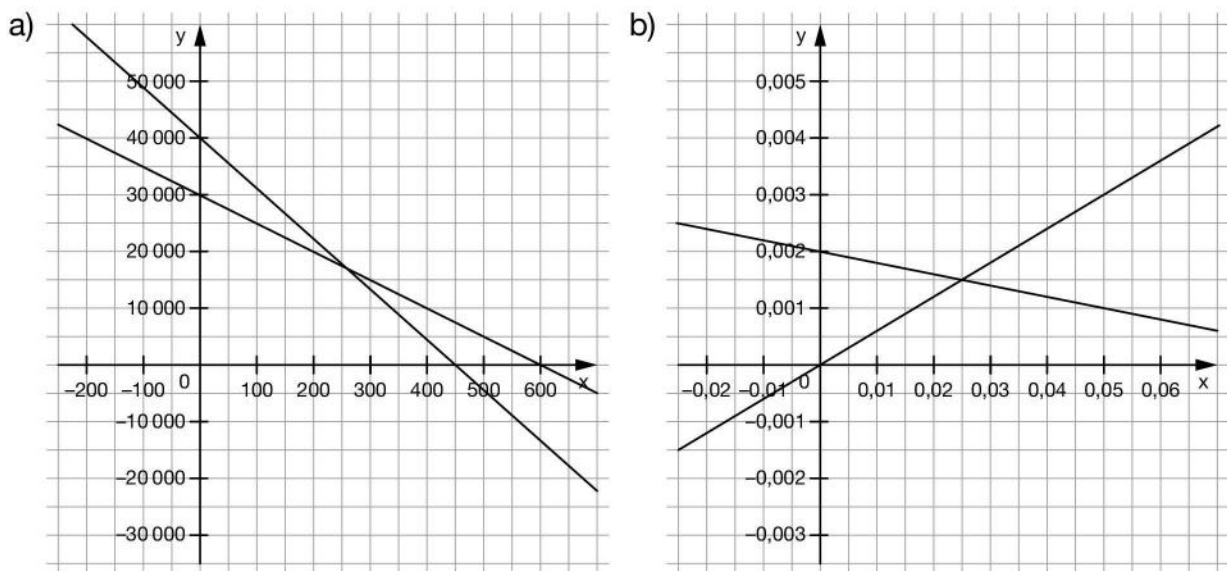
**Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3****8. Bestimme zeichnerisch die Lösungsmenge. Beschreibe deine Beobachtungen.**

a) I: $4x + 2y = -5$

b) I: $-6x - 3y = -6$

II: $4x + 2y = 7$

II: $18x + 9y = 18$

9. Formuliere einen Merksatz, wie du erkennst, dass ein lineares Gleichungssystem keine Lösung besitzt.**10. Formuliere einen Merksatz, wie du erkennst, dass ein lineares Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.****11. Stelle zu den gegebenen Graphen ein passendes Gleichungssystem auf und gib die Lösungsmenge an.****12. Löse das lineare Gleichungssystem mithilfe einer geeigneten Zeichnung.**

I: $x + y = 6$

II: $y = 2x - 3$

III: $\frac{3}{2}x - y = 1$

1.5 Lineare Gleichungssysteme aufstellen

Video:



Einführung

Zwei Produkte A und B werden verkauft und man möchte anhand der Einnahmen herausfinden, wie viele dieser Produkte jeweils verkauft wurden.

In solchen Fällen stellt man ein **lineares Gleichungssystem** auf. Zunächst benötigt man die Festlegung der Variablen:

x: Anzahl der verkauften Produkte A

y: Anzahl der verkauften Produkte B

x und y stehen in der Regel für das, was gesucht ist.

Wenn nun die Gesamteinnahme gegeben ist, muss die Anzahl x und y jeweils mit dem Einzelpreis multipliziert werden. Die Summe der Produkte ergibt die Gesamteinnahme:

a: Preis von Produkt A

b: Preis von Produkt B

G: Gesamteinnahme

$$\text{I: } a \cdot x + b \cdot y = G$$

Erste Gleichung des LGS

Nun erstellt man mit einer zweiten Bedingung aus dem Text eine zweite Gleichung. Zum Beispiel könnte die Gesamtzahl P der verkauften Produkte bekannt sein. Dann gilt:

$$\text{II: } x + y = P$$

Zweite Gleichung des LGS

Beispiel:

Eine Schülergruppe hat auf einem Weihnachtsbasar kleine Kerzen (Produkt A) für 0,80 € und große Kerzen (Produkt B) für 1,20 € verkauft. Sie hatten Einnahmen von insgesamt 26,00 €. Insgesamt haben sie 25 Kerzen verkauft.

Berechne die Anzahl der kleinen und die Anzahl der großen Kerzen, die verkauft wurden.

x: Anzahl der verkauften kleinen Kerzen

y: Anzahl der verkauften großen Kerzen

$$\text{I: } 0,8x + 1,2y = 26$$

$$\text{II: } x + y = 25$$

Die Lösungen des linearen Gleichungssystems sind $x = 10$ und $y = 15$.

Einstiegsaufgabe

Eine Schülergruppe verkauft auf einem Sommerbasar kleine Wasserflaschen für je 1,50 € und Limonade für jeweils 2,50 €. Sie haben insgesamt 157,50 € eingenommen und 75 Getränke verkauft. Berechne die Anzahl an Wasser- und Limonadenflaschen, die die Schüler verkauft haben.

1.5 Lineare Gleichungssysteme aufstellen

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 1



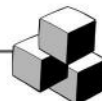
1. Ein gemeinnütziger Verein hat auf dem Vereinsfest Kinderpunsch (Produkt A) für 0,90 € pro Becher und Glühwein (Produkt B) für 1,10 € pro Becher verkauft. Insgesamt wurden 123,00 € eingenommen und 120 Getränke verkauft.
Berechne, wie viele Becher Glühwein und Kinderpunsch verkauft wurden.
2. Benjamin und Lukas gingen zur Eisdiele. Lukas kaufte sich drei Kugeln Eis und einen Milchshake und bezahlte 6,10 €. Benjamin kaufte sich vier Kugeln Eis und einen Milchshake und bezahlte 7,30 €. Ermittle den Preis für jeweils eine Kugel Eis und einen Milchshake. Löse mithilfe eines passenden linearen Gleichungssystems.
3. Cem und Lisa wollen sparen. Cem hat bereits 135,00 € gespart und bekommt jeden Monat 30,00 € Taschengeld. Lisa hat zwar noch nichts gespart, bekommt aber monatlich 45,00 € Taschengeld.
 - a) Bestimme, nach wie vielen Monaten beide den gleichen Betrag gespart haben.
 - b) Gib den Sparbetrag an.
 Stelle zunächst ein passendes lineares Gleichungssystem auf und löse es.
4. Eine Firma produziert zwei Bauteile A und B. Pro Teil A verdient sie im Verkauf 1,20 €, für Teil B 2,00 €. Die Produktion von Teil A kostet 50 Cent je Teil. Bauteil B kostet 1,30 € in der Produktion.
Die Firma hat im letzten Quartal Herstellungskosten von 1 800,00 € gehabt und im Verkauf 3 200,00 € eingenommen. Alle Bauteile wurden verkauft.
Berechne die Anzahl der hergestellten Bauteile A und B.

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 2



5. Gegeben sind zwei Zahlen, von denen eine doppelt so groß wie die andere ist. Addiert man zu der größeren Zahl 1 hinzu, erhält man das Dreifache der kleineren Zahl.
6. Hannah und Rafik sind zusammen 38 Jahre alt. Vor zehn Jahren war Hannah doppelt so alt wie Rafik. Bestimme das Alter der beiden.
7. In einer Jugendherberge gibt es insgesamt 30 Zimmer, von denen die einen Dreibett- und die anderen Fünfbettzimmern sind. 120 Jugendliche können dort zur gleichen Zeit übernachten. Ermittle die Anzahl der Dreibett- und Fünfbettzimmer.

Aufgaben mit Schwierigkeitsgrad 3



8. Familie Öztürk hat mehrere Hunde und mehrere Vögel. Zusammen haben die Tiere 14 Beine. Bestimme die Anzahl der Hunde und Vögel in der Familie.
9. Ein Rechteck habe einen Flächeninhalt von 400 cm^2 und einen Umfang von 100 cm.
 - a) Stelle ein Gleichungssystem auf, welches den Zusammenhang beschreibt.
 - b) Beurteile, ob es sich um ein lineares Gleichungssystem handelt.
 - c) Löse das Gleichungssystem und interpretiere das Ergebnis.