

ANALYTISCHE GEOMETRIE IM RAUM			
Gegeben: Ein Punkt			
Aufgabe 1. Ortsvektor bestimmen			
Gegeben: Zwei Punkte			
Aufgaben:			
2.1. Abstand berechnen	2.2. Mittelpunkt berechnen	2.3. Verschiebungsvektor bestimmen	2.4. Geradengleichung bestimmen
Gegeben: Drei Punkte			
Aufgabe 3. Parametergleichung der Ebene bestimmen			
Gegeben: Ein Vektor			
Aufgaben:			
4.1. Länge berechnen	4.2. Gegenvektor berechnen	4.3. Mit einer Zahl multiplizieren	
4.4. Orthogonalen Vektor bestimmen			
Gegeben: Zwei Vektoren			
Aufgaben:			
5.1. Addieren	5.2. Subtrahieren	5.3. Lineare Kombination berechnen	
5.4. Kollinearität oder Parallelität prüfen	5.5. Skalarprodukt berechnen	5.6. Orthogonalität prüfen	
5.7. Winkel berechnen	5.8. Vektorprodukt berechnen	5.9. Normalenvektor berechnen	
Gegeben: Eine Gerade			
Aufgaben:			
6.1. Punktprobe	6.2. Spurpunkte berechnen	6.3. Orthogonale Gerade bestimmen	
6.4. Abstand von einem Punkt berechnen			
Gegeben: Zwei Geraden			
Aufgaben:			
7.1. Lagebeziehung bestimmen	7.2. Schnittwinkel berechnen	7.3. Abstand berechnen	
Gegeben: Eine Ebene			
Aufgaben:			
8.1. Form umwandeln	8.2. Punktprobe	8.3. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen bestimmen	
8.4. Spurgeraden bestimmen	8.5. Abstand von einem Punkt berechnen		
Gegeben: Zwei Ebenen			
Aufgaben:			
9.1. Lagebeziehung bestimmen	9.2. Abstand berechnen	9.3. Schnittwinkel berechnen	9.4. Orthogonalität prüfen
Gegeben: Eine Gerade und eine Ebene			
Aufgaben:			
10.1. Lagebeziehung bestimmen	10.2. Abstand berechnen	10.3. Schnittwinkel berechnen	

**Gegeben:** Ein Punkt  $A(4 | 2 | -3)$ .

**Aufgabe 1.** Bestimme den Ortsvektor zum Punkt  $A$ .

**Definition:** Es ist einfach der Vektor, der den Koordinatenursprung mit dem Punkt  $A$  verbindet.

*Lösung*

$A$  hat den Ortsvektor  $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

**Gegeben:** Zwei Punkte  $A(1 | 3 | -2)$  und  $B(-4 | 2 | 5)$ .

**Aufgabe 2.1.** Berechne den Abstand zwischen den Punkte  $A$  und  $B$ .

**Formel:** Den Abstand zwischen zwei Punkte  $A(a_1 | a_2 | a_3)$  und  $B(b_1 | b_2 | b_3)$  ist gegeben durch

$$d(A; B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

*Lösung*

Der Abstand zwischen  $A$  und  $B$  ist also

$$d(A; B) = \sqrt{((-4) - 1)^2 + (2 - 3)^2 + (5 - (-2))^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2 + (7)^2} = \sqrt{25 + 1 + 49} = \sqrt{75} \approx 8,66 \text{ LE.}$$

**Gegeben:** Zwei Punkte  $A(1 | 3 | -2)$  und  $B(-4 | 2 | 5)$ .

**Aufgabe 2.2.** Berechne den Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AB}$ .

**Formel:** Der Mittelpunkt der Strecke zwischen  $A(a_1 | a_2 | a_3)$  und  $B(b_1 | b_2 | b_3)$  ist gegeben durch

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2} \mid \frac{a_2 + b_2}{2} \mid \frac{a_3 + b_3}{2}\right).$$

*Lösung*

Der Mittelpunkt ist

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2} \mid \frac{a_2 + b_2}{2} \mid \frac{a_3 + b_3}{2}\right) = M\left(\frac{1 + (-4)}{2} \mid \frac{3 + 2}{2} \mid \frac{(-2) + 5}{2}\right) = M\left(-\frac{3}{2} \mid \frac{5}{2} \mid \frac{3}{2}\right).$$

**Gegeben:** Zwei Punkte  $A(2 | 3 | -5)$  und  $B(-7 | 5 | 9)$ .

**Aufgabe 2.3.** Bestimme den Verschiebungsvektor von  $A$  nach  $B$ . Auch Verbindungsvektor genannt.

**Formel:** Der Verschiebungsvektor von  $A(a_1 | a_2 | a_3)$  nach  $B(b_1 | b_2 | b_3)$  ist gegeben durch  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ .

*Lösung*

Der Verschiebungsvektor von  $A$  nach  $B$  ist  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 - 2 \\ 5 - 3 \\ 9 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$ .

**Gegeben:** Zwei Punkte  $A(2 | 3 | -5)$  und  $B(-7 | 5 | 9)$ .

**Aufgabe 2.4.** Bestimme die Parameterform der Geraden, die durch  $A$  und  $B$  geht.

**Ansatz:**  $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ .

*Lösung*

Wir haben  $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$  und  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 - 2 \\ 5 - 3 \\ 9 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$ .

Die Parameterform der Geradengleichung lautet also  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$ .

**Gegeben:** Drei Punkte  $A(2 \mid 5 \mid -4)$ ,  $B(4 \mid -1 \mid 9)$  und  $C(-3 \mid -6 \mid 8)$ .

**Aufgabe 3.** Bestimme die Parameterform der Ebene, die durch  $A$ ,  $B$  und  $C$  geht.

**Ansatz:**  $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BC}$ .

*Lösung*

Wir haben  $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ -1-5 \\ 9-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$  und  $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3-4 \\ -6-(-1) \\ 8-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Die Parameterform der Ebenengleichung lautet also  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

**Gegeben:** Ein Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 4.1.** Berechne die Länge des Vektors  $\vec{a}$ . Auch Betrag genannt.

**Formel:**  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ .

*Lösung*

$\vec{a}$  hat die Länge  $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ LE}$ .

**Gegeben:** Ein Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 4.2.** Berechne den Gegenvektor zu  $\vec{a}$ .

**Definition:** Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  heißen Gegenvektoren, wenn  $\vec{a} = -\vec{b}$ . Grafisch bedeutet das der gleiche Pfeile in umgekehrter Richtung.

*Lösung*

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  hat den Gegenvektor  $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Gegeben:** Ein Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 4.3.** Multipliziere  $\vec{a}$  mit der Zahl 2.

**Definition:**  $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$ . Diese Multiplikation nennen wir skalare Multiplikation.

*Lösung*

$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

**Gegeben:** Ein Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 4.4.** Bestimme einen Vektor, der orthogonal (senkrecht) zu  $\vec{a}$  ist.

**Fakt:** Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal wenn ihr Skalarprodukt (siehe **Aufgabe 5.5.**) ist dann 0.

*Lösung*

Wir brauchen also einen Vektor  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ , so dass  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  gilt. Wir können  $\vec{b}$  als  $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  wählen.

**Gegeben:** Zwei Vektoren  $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 5.1.** Addiere die zwei Vektoren.

**Definition:** Die Addition von  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  ist definiert als  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$ .

*Lösung*

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Gegeben:** Zwei Vektoren  $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 5.2.** Subtrahiere die zwei Vektoren.

**Definition:** Die Subtraktion von  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  ist definiert als  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$ .

*Lösung*

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Gegeben:** Zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 5.3.** Berechne  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ .

**Definition:** Eine lineare Kombination von Vektoren ist eine Summe von Vektoren, wobei jeder Vektor noch mit einer Zahl multipliziert werden kann.

*Lösung*

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Wir sagen  $\begin{pmatrix} 18 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix}$  ist eine lineare Kombination von den Vektoren  $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Gegeben:** Zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 5.4.** Prüfe ob  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  kollinear (parallel) sind.

**Definition:** Es existiert eine reelle Zahl  $r$ , sodass  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  gilt. Die zeigen in dieselbe Richtung, aber können unterschiedliche Längen haben.

*Lösung*

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I:} & 8 = -2r \quad | :(-2) \\ \text{II:} & 4 = -r \quad | :(-1) \\ \text{III:} & -12 = 3r \quad | :3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I:} & -4 = r \\ \text{II:} & -4 = r \\ \text{III:} & -4 = r \end{array}$$

Die Vektoren sind kollinear (parallel), da wir den gleichen Wert für  $r$  erhalten haben.

**Gegeben:** Zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 5.5.** Berechne das Skalarprodukt von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

**Definition:** Das Skalarprodukt von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist gegeben durch  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ .

*Lösung*

Wir haben  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + (-2) \cdot 0 = 42$ .

**Gegeben:** Zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 5.6.** Prüfe ob  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  orthogonal zueinander sind.

**Definition:** Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn sie einen rechten Winkel bilden. Ihr Skalarprodukt ist genau dann 0.

*Lösung*

Wir haben  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 4 + 4 \cdot (-2) = 0$ .  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind also orthogonal zueinander.

**Gegeben:** Zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 5.7.** Berechnen den Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

**Formel:**  $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ . Hier  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  ist das Skalarprodukt und  $|\vec{a}|$  und  $|\vec{b}|$  sind die Längen von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

*Lösung*

Nach der obigen Formel haben wir

$$\cos(\alpha) = \frac{|2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 9|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2}} = \frac{|56|}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{121}} = \frac{56}{66}.$$

Also,  $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{56}{66}\right) \approx 31,95^\circ$  und  $180^\circ - \alpha = 360^\circ - 31,95 = 148,05^\circ$ .

Bei der Berechnung wird immer der kleinere Winkel betrachtet, der Schnittwinkel ist also  $31,95^\circ$ .

**Gegeben:** Zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 5.8.** Berechne das Vektorprodukt von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

**Definition:** Das Vektorprodukt von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist gegeben durch  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ .

*Lösung*

Wir haben  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Gegeben:** Zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 5.9.** Berechne den Normalenvektor zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

**Ansatz:**  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

*Lösung*

Aus **Aufgabe 5.8.** haben wir  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Das Vektor  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist ein Vektor, der orthogonal (senkrecht) zu den beiden Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist.

**Gegeben:** Eine Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 6.1.** Liegt der Punkt  $A(-1 | -2 | 14)$  auf  $g$ ?

*Lösung*

**Schritt 1:** Punkt für  $\vec{x}$  in die Geradengleichung einsetzen.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:** Gleichungssystem aufstellen und  $r$  zeilenweise berechnen.

$$\begin{array}{lll} \text{I: } -1 = 2 - r & | -2 & \text{I: } -3 = -r \quad | :(-1) & \text{I: } 3 = r \\ \text{II: } -2 = -4 + 2r & | +4 & \Rightarrow \text{II: } 2 = 2r & | :2 & \Rightarrow \text{II: } 1 = r \\ \text{III: } 14 = 5 + 3r & | -5 & \text{III: } 9 = 3r & | :3 & \text{III: } 3 = r \end{array}$$

Wir haben verschiedene Werte für  $r$  erhalten.

**Fazit:** Der Punkt  $A$  liegt nicht auf der Geraden  $g$ .

*Bemerkung:* Falls wir denselben Wert  $r$  erhalten haben, würde der Punkt auf der Geraden liegen.

**Gegeben:** Eine Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 6.2.** Bestimme die Spurpunkte von  $g$ .

**Definition:** Ein Spurpunkt ist der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Koordinatenebene.

*Lösung*

Schnittpunkt mit der  $xy$ -Ebene:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**I:**  $x = 1 + r$

**II:**  $y = 2 + r$

$\Rightarrow$  **III:**  $-3 = r \Rightarrow$

**Einsetzen in I:**  $x = 1 + (-3) = -2$

**Einsetzen in II:**  $y = 2 + (-3) = -1$

**III:**  $0 = 3 + r \mid -3$

$S_{xy}(-2 \mid -1 \mid 0)$ .

Schnittpunkt mit der  $xz$ -Ebene:  $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**I:**  $x = 1 + r$

**II:**  $0 = 2 + r \mid -2 \Rightarrow$

**II:**  $-2 = r \Rightarrow$

**Einsetzen in I:**  $x = 1 + (-2) = -1$

**Einsetzen in III:**  $z = 3 + (-2) = 1$

**III:**  $z = 3 + r$

$S_{xz}(-1 \mid 0 \mid 1)$ .

Schnittpunkt mit der  $yz$ -Ebene:  $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**I:**  $0 = 1 + r \mid -1$

**II:**  $y = 2 + r$

$\Rightarrow$  **I:**  $-1 = r \Rightarrow$

**Einsetzen in II:**  $y = 2 + (-1) = 1$

**Einsetzen in III:**  $z = 3 + (-1) = 2$

**III:**  $z = 3 + r \mid -3$

$S_{yz}(0 \mid 1 \mid 2)$ .

**Gegeben:** Eine Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 6.3.** Bestimme eine Gerade, die orthogonal zu  $g$  ist.

*Lösung*

Wähle einen Vektor der orthogonal zu  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  ist (vergleiche **Aufgabe 4.4.**). Zum Beispiel  $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Die Gleichung der

orthogonalen Geraden lautet also  $g_{\text{orthogonal}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Gegeben:** Eine Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 6.4.** Berechne den Abstand des Punktes  $P(-2 | 1 | 2)$  von der Geraden  $g$ .

**Methode:** Lotfußpunktverfahren.

*Lösung*

**Schritt 1:** Hilfsebene  $H$  erstellen.

Erstelle eine Hilfsebene  $H$ , die durch den Punkt  $P(-2 | 1 | 2)$  geht und zu dem Richtungsvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  orthogonal ist. Wir haben also die Hilfsebene  $H: [\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ .

**Schritt 2:**  $H$  in Koordinatenform umwandeln (siehe **Aufgabe 8.1.2**).

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H: x - 5y + 2z = d.$$

$P$  in  $H$  einsetzen um  $d$  zu bestimmen:

$$\begin{aligned} (-2) - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 &= d \\ -2 - 5 + 4 &= d \\ -3 &= d \end{aligned}$$

$$H: x - 5y + 2z = -3.$$

**Schritt 3:** Parameterform der Gerade umschreiben.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r \\ 2-5r \\ 2r \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1+r \\ y &= 2-5r \\ z &= 2r \end{aligned}$$

**Schritt 4:**  $x$ ,  $y$  und  $z$  in Koordinatenform der Ebene  $H$  einsetzen um  $r$  zu bestimmen.

$$\begin{aligned} (1+r) - 5 \cdot (2-5r) + 2 \cdot (2r) &= -3 \\ 1+r - 10 + 25r + 4r &= -3 \\ 30r - 9 &= -3 \quad | +9 \\ 30r &= 6 \quad | :30 \\ r &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

**Schritt 5:** Setzt den Wert für  $r$  in  $g$  ein um den Schnittpunkt  $S$  zu bestimmen.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{5} \\ 2 - 5 \cdot \frac{1}{5} \\ 2 \cdot \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow S\left(\frac{6}{5} \mid 1 \mid \frac{2}{5}\right).$$

**Schritt 6:** Berechne den Abstand zwischen  $S$  und  $P$ .

Wir haben die Punkte  $P(-2 | 1 | 2)$  und  $S(\frac{6}{5} | 1 | \frac{2}{5})$ .

$$d(P; S) = \sqrt{\left(\frac{6}{5} - (-2)\right)^2 + (1 - 1)^2 + \left(\frac{2}{5} - 2\right)^2} \approx 3,58 \text{ LE. Der Abstand zwischen } P \text{ und } g \text{ ist also } 3,58 \text{ LE.}$$



**Gegeben:** Zwei Geraden  $g$  und  $h$ .

**Aufgabe 7.1.** Bestimme die Lagebeziehung von  $g$  und  $h$ .

Vorgehensweise			
<b>1. Frage:</b> Sind die Richtungsvektoren von $g$ und $h$ kollinear?			
<b>Ja</b>		<b>Nein</b>	
<b>2. Frage:</b> Liegt der Stützpunkt von $g$ auf $h$ ?		<b>2. Frage:</b> Haben $g$ und $h$ einen Schnittpunkt?	
<b>Ja</b>	<b>Nein</b>	<b>Ja</b>	<b>Nein</b>
<b>7.1.1.</b> identisch.	<b>7.1.2.</b> echt parallel.	<b>7.1.3.</b> schneiden sich.	<b>7.1.4.</b> windschief.

**Gegeben:**  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 7.1.1.** Bestimme die Lagebeziehung von  $g$  und  $h$ .

*Lösung*

**Schritt 1:** Richtungsvektoren auf Kollinearität prüfen.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I:} & 8 = -2r \quad | :(-2) \\ \text{II:} & 4 = -r \quad | :(-1) \\ \text{III:} & -12 = 3r \quad | :3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I:} & -4 = r \\ \text{II:} & -4 = r \\ \text{III:} & -4 = r \end{array}$$

Die Richtungsvektoren sind kollinear, da wir den gleichen Wert für  $r$  erhalten haben.

**Schritt 2:** Liegt der Stützpunkt von  $g$  auf  $h$ ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{lll} \text{I:} & 1 = -5 + 8s & | +5 \\ \text{II:} & 2 = -1 + 4s & | +1 \\ \text{III:} & 1 = 10 - 12s & | -10 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lll} \text{I:} & 6 = 8s & | :8 \\ \text{II:} & 3 = 4s & | :4 \\ \text{III:} & -9 = -12s & | :(-12) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I:} & 3/4 = s \\ \text{II:} & 3/4 = s \\ \text{III:} & 3/4 = s \end{array}$$

Wir haben einen eindeutigen Wert für  $s$ . Der Stützpunkt  $(1 | 2 | 1)$  von  $g$  liegt auf  $h$ .

**Fazit:** Die Geraden  $g$  und  $h$  sind identisch.

**Gegeben:**  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 7.1.2.** Bestimme die Lagebeziehung von  $g$  und  $h$ .

*Lösung*

**Schritt 1:** Richtungsvektoren auf Kollinearität prüfen.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I: } 2 = -r & | :(-1) \\ \text{II: } -8 = 4r & | :4 \\ \text{III: } 6 = -3r & | :(-3) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I: } -2 = r \\ \text{II: } -2 = r \\ \text{III: } -2 = r \end{array}$$

Die Richtungsvektoren sind kollinear, da wir den gleichen Wert für  $r$  erhalten haben.

**Schritt 2:** Liegt der Stützpunkt von  $g$  auf  $h$ ?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I: } 2 = 2 - s & | -2 & \text{I: } 0 = -s & | :(-1) & \text{I: } 0 = s \\ \text{II: } 3 = 2 + 4s & | -2 & \Rightarrow \text{II: } 1 = 4s & | :4 & \Rightarrow \text{II: } 1/4 = s \\ \text{III: } 1 = 2 - 3s & | -2 & \text{III: } -1 = -3s & | :(-3) & \text{III: } 1/3 = s \end{array}$$

Wir haben verschiedene Werte für  $s$ . Der Stützpunkt  $(2 | 3 | 1)$  von  $g$  liegt nicht auf  $h$ .

**Fazit:** Die Geraden  $g$  und  $h$  sind echt parallel.

**Gegeben:**  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 7.1.3.** Bestimme die Lagebeziehung von  $g$  und  $h$ .

*Lösung*

**Schritt 1:** Richtungsvektoren auf Kollinearität prüfen.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I: } 2 = 3r & | :3 \\ \text{II: } 1 = -4r & | :(-4) \\ \text{III: } -1 = r \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I: } 2/3 = r \\ \text{II: } -1/4 = r \\ \text{III: } -1 = r \end{array}$$

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, da wir verschiedene Werte für  $r$  erhalten haben.

**Schritt 2:** Auf Schnittpunkt prüfen.

Geradengleichungen gleichsetzen und auflösen:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I: } 7 + 2r = -1 + 3s & \text{II+III: } 1 = 7 - 3s & | -7 \\ \text{II: } -5 + r = 2 - 4s & \Rightarrow -6 = -3s & | :(-3) \\ \text{III: } 6 - r = 5 + s & 2 = s & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{Einsetzen in III: } 6 - r = 5 + 2 & | -6 \\ -r = 1 & | :(-1) \\ r = -1 & \end{array}$$

**Überprüfen in I:**  $7 + 2 \cdot (-1) = -1 + 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 5 = 5 \checkmark$

**Überprüfen in II:**  $-5 + (-1) = 2 - 4 \cdot 2 \Leftrightarrow -6 = -6 \checkmark$

**Fazit:** Die Geraden  $g$  und  $h$  schneiden sich.

**Berechnung des Schnittpunktes:** Den Wert für  $r$  in  $g$  einsetzen:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ .

Die Geraden  $g$  und  $h$  schneiden sich im Punkt  $S(5 | -6 | 7)$ .

**Gegeben:**  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 7.1.4.** Bestimme die Lagebeziehung von  $g$  und  $h$ .

*Lösung*

**Schritt 1:** Richtungsvektoren auf Kollinearität prüfen.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I: } 1 = -3r \mid :(-3) \\ \text{II: } 1,5 = -4r \mid :(-4) \\ \text{III: } 2 = -5r \mid :(-5) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I: } -\frac{1}{3} = r \\ \text{II: } -\frac{3}{8} = r \\ \text{III: } -\frac{2}{5} = r \end{array}$$

Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, da wir verschiedene Werte für  $r$  erhalten haben.

**Schritt 2:** Auf Schnittpunkt prüfen.

Geradengleichungen gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} \text{I: } 5 + r = 2 - 3s \mid \cdot 2 & \text{I: } 10 + 2r = 4 - 6s & \text{III-I: } 1 = -2 + s \mid +2 & \text{Einsetzen in III: } 11 + 2r = 2 - 5 \cdot 3 \mid -11 \\ \text{II: } 4 + 1,5r = 6 - 4s & \Rightarrow \text{II: } 4 + 1,5r = 6 - 4s & \Rightarrow 3 = s & 2r = -24 \mid :2 \\ \text{III: } 11 + 2r = 2 - 5s & \text{III: } 11 + 2r = 2 - 5s & & r = -12 \end{array}$$

**Überprüfen in I:**  $5 + (-12) = 2 - 3 \cdot 3 \Leftrightarrow -7 = -7 \checkmark$

**Überprüfen in II:**  $4 + 1,5 \cdot (-12) = 6 - 4 \cdot 3 \Leftrightarrow -14 = -6$  (falsche Aussage)

Wir haben eine falsche Aussage erhalten.

**Fazit:** Die Geraden  $g$  und  $h$  sind windschief.

**Gegeben:** Zwei Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 7.2.** Bestimme den Schnittwinkel zwischen  $g$  und  $h$ .

**Erklärung:** Wenn sich zwei Geraden schneiden, dann haben sie einen Schnittwinkel. Der Schnittwinkel ist der Winkel zwischen den jeweiligen Richtungsvektoren.

*Lösung*

$g$  und  $h$  schneiden sich im Punkt  $(1 \mid 2 \mid 3)$ . Der Schnittwinkel ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ . Nach **Aufgabe 5.7.** ist dieser  $31,95^\circ$ .

**Gegeben:** Zwei Geraden  $g$  und  $h$

**Aufgabe 7.3.** Bestimmen den Abstand zwischen  $g$  und  $h$ .

### Fälle

**7.3.1.** Windschiefe Geraden

**7.3.2.** echt Parallel Geraden

Schneidende und identische Geraden haben Null Abstand

**Gegeben:** Zwei windschiefe Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 7.3.1.** Bestimmen den Abstand zwischen  $g$  und  $h$ .

**Formel:** Der Abstand zwischen zwei windschiefe geraden  $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$  und  $h: \vec{x} = \vec{c} + r \cdot \vec{d}$  ist gegeben durch  $d(g; h) = \frac{|(\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$  bestimmen, wobei  $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{d}$ .

*Lösung*

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d(g; h) = \frac{|(\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{\left| \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9}} = \frac{|-2|}{3} = \frac{2}{3} \text{ LE}$$

**Gegeben:** Zwei parallele Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 7.3.2.** Bestimmen den Abstand zwischen  $g$  und  $h$ .

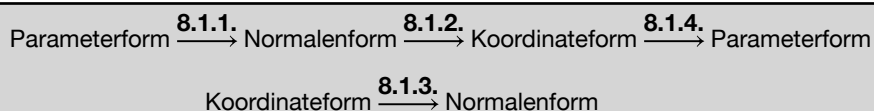
**Vorgehensweise:** Wähle einen Punkt  $P$  aus  $g$ . Bestimme den Abstand zwischen  $h$  und  $P$  (vergleiche **Aufgabe 6.4.**).

*Lösung*

Wir wählen den Stützpunkt  $(-2 | 1 | 2)$  von  $g$  als  $P$ . Der Abstand zwischen  $P$  und  $h$  nach **Aufgabe 6.4.** ist 3,58 LE.

**Gegeben:** Eine Ebenengleichung in bestimmter Form.

**Aufgabe 8.1.** Die Ebenengleichung in eine andere Form umwandeln.



**Aufgabe 8.1.1.**  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  in Normalenform umwandeln.

*Lösung*

**Schritt 1:** Normalenvektor berechnen.

Der Normalvektor  $\vec{n}$  ist gleich dem Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 0 \\ 3 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 2:** Stützvektor wählen.

Wir wählen den gleichen Stützvektor, und zwar  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Schritt 3:**  $\vec{a}$  und  $\vec{n}$  in Normalenform einsetzen.

$$E: [\vec{x} - \vec{a}] \cdot \vec{n} = 0$$

$$E: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$$

**Aufgabe 8.1.2.**  $E: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$  in Koordinatenform umwandeln.

*Lösung*

**Schritt 1:** Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$  bestimmen.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2, b = -3 \text{ und } c = 9$$

Wir haben also  $E: 2x - 3y + 9z = d$ .

**Schritt 2:**  $d$  bestimmen.

Wir setzen den Stützpunkt  $(1 \mid -2 \mid 5)$  in  $E$  ein:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 9 \cdot 5 &= d \\ 2 + 6 + 45 &= d \\ 53 &= d \end{aligned}$$

Die Koordinatengleichung lautet also  $E: 2x - 3y + 9z = 53$ .

**Aufgabe 8.1.3.** E:  $4x - 10y - z = -8$  in Normalenform umwandeln.

*Lösung*

**Schritt 1:** Normalenvektor  $\vec{n}$  ablesen.

Die Koordinate des Normalenvektors entsprechen den Koeffizienten von  $x$ ,  $y$  und  $z$ . Wir haben also

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Schritt 2:** Stützvektor  $\vec{a}$  bestimmen.

Finde einen beliebigen Punkt, der die Koordinatengleichung erfüllt.

Zum Beispiel  $(1 \mid 1 \mid 2)$  da  $4 \cdot 1 - 10 \cdot 1 - 2 = -8$ . Nun  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Schritt 3:**  $\vec{a}$  und  $\vec{n}$  in Normalenform einsetzen.

$$E: [\vec{x} - \vec{a}] \cdot \vec{n} = 0$$

$$E: [\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

**Aufgabe 8.1.4.** E:  $2x + 4y - 3z = 12$  in Parameterform umwandeln.

*Lösung*

**Schritt 1:** Koordinatenform nach  $x$  auflösen.

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 3z &= 12 & | -4y + 3z \\ 2x &= 12 - 4y + 3z & | :2 \\ x &= 6 - 2y + 1,5z \end{aligned}$$

**Schritt 2:**  $y$  durch  $r$  und  $z$  durch  $s$  ersetzen.

$$y = r$$

$$z = s$$

$$x = 6 - 2r + 1,5s$$

**Schritt 3:** Parameterform aufstellen.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2r + 1,5s \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<b>Gegeben:</b> Eine Ebene in bestimmter Form. <b>Aufgabe 8.2.</b> Liegt ein Punkt auf der Ebene?		
<b>8.2.1.</b> Parameterform	<b>8.2.2.</b> Normalenform	<b>8.2.3.</b> Koordinatenform
<b>Aufgabe 8.2.1.</b> Liegt der Punkt $P(0 0 3)$ auf $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$		
<p><i>Lösung</i> Parameterform in Normalenform umwandeln (siehe <b>Aufgabe 8.1.1.</b>). Wir haben also  <math>E: [\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 0</math>. Dann ähnlich wie unten bei <b>Aufgabe 8.2.2.</b> vorgehen:  <math>E: [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 0</math>. Der Punkt <math>P</math> liegt auf <math>E</math>.</p>		
<b>Aufgabe 8.2.2.</b> Liegt der Punkt $P(4 -4 5)$ auf $E: [\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$ ?		
<p><i>Lösung</i> Punkt für <math>\vec{x}</math> in die Ebenengleichung einsetzen:  <math>[\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 9 = 0</math>. Der Punkt <math>P</math> liegt auf <math>E</math>.</p>		
<b>Aufgabe 8.2.3.</b> Liegt der Punkt $P(1 2 -3)$ auf $E: 2x + 4y + 5z = 20$ ?		
<p><i>Lösung</i> Punkt in die Ebenengleichung einsetzen: <math>E: 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = -5 \neq 20</math>. Der Punkt <math>P</math> liegt nicht auf <math>E</math>.</p>		

<b>Gegeben:</b> Eine Ebene $E: 2x + 4y + 5z = 20$ . <b>Aufgabe 8.3.</b> Bestimme die Achsenabschnitte. Das heißt Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.	
<p><i>Lösung</i> Schnittpunkt mit der <math>x</math>-Achse:  <math>2x + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 20</math>  <math>2x = 20 \quad   :2</math>  <math>x = 10</math>  <math>S_x(10 0 0)</math></p> <p>Schnittpunkt mit der <math>y</math>-Achse:  <math>2 \cdot 0 + 4y + 5 \cdot 0 = 20</math>  <math>4y = 20 \quad   :4</math>  <math>y = 5</math>  <math>S_y(0 5 0)</math></p> <p>Schnittpunkt mit der <math>z</math>-Achse:  <math>2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5z = 20</math>  <math>5z = 20 \quad   :5</math>  <math>z = 4</math>  <math>S_z(0 0 4)</math></p>	

**Gegeben:** Eine Ebene  $E$ :  $2x + 4y + 5z = 20$ .

**Aufgabe 8.4.** Bestimme die Spurgeraden.

**Definition:** Spurgeraden sind einfach die Schnittgeraden mit der Koordinatenebenen.

*Lösung*

Zuerst bestimmen wir den Schnittpunkt der Ebene mit den Koordinatenachsen.

Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse:

$$2x + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 20$$

$$2x = 20 \quad | : 2$$

$$x = 10$$

$$S_x(10|0|0)$$

Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse:

$$2 \cdot 0 + 4y + 5 \cdot 0 = 20$$

$$4y = 20 \quad | : 4$$

$$y = 5$$

$$S_y(0|5|0)$$

Schnittpunkt mit der  $z$ -Achse:

$$2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5z = 20$$

$$5z = 20 \quad | : 5$$

$$z = 4$$

$$S_z(0|0|4)$$

Schnittgerade mit  $xy$ -Ebene:

$$g_{xy}: \vec{x} = \overrightarrow{OS_x} + r \cdot \overrightarrow{S_xS_y}$$

$$g_{xy}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade mit  $yz$ -Ebene:

$$g_{yz}: \vec{x} = \overrightarrow{OS_y} + r \cdot \overrightarrow{S_yS_z}$$

$$g_{yz}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade mit  $xz$ -Ebene:

$$g_{xz}: \vec{x} = \overrightarrow{OS_x} + r \cdot \overrightarrow{S_xS_z}$$

$$g_{xz}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$



**Gegeben:** Eine  $E: 3x + 2y + z = 11$

**Aufgabe 8.5.** Berechne den Abstand des Punktes  $A(2|4|1)$  von  $E$ .

**Formel:** Den Abstand zwischen  $A(a_1|a_2|a_3)$  und  $E: ax + by + cz = d$  können wir mithilfe der

$$\text{Formel } d(P; E) = \frac{|a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c \cdot a_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ berechnen.}$$

*Lösung*

Der Abstand ist gegeben durch

$$d(P; E) = \frac{|3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 - 11|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}} \approx 1,07 \text{ LE.}$$

**Gegeben:** Zwei Ebenen  $E_1$  und  $E_2$

**Aufgabe 9.1.** Bestimme die Lagebeziehung von  $E_1$  und  $E_2$ .

### Vorgehensweise

Eine Ebene  $E_1$  in Koordinatenform und die andere Ebene  $E_2$  in Parameterform. Unten stehenden drei Schritte ausführen. Es gibt drei Fälle.

**9.1.1.** identisch

**9.1.2.** echt parallel

**9.1.3.** schneiden sich in einer Gerade

### Vorgehensweise

Zwei Ebenen in Normalenform oder in Koordinatenform. Prüfe ob Normalenvektoren kollinear (parallel) sind. Es gibt drei Fälle.

**9.1.4.** identisch

**9.1.5.** echt parallel

**9.1.6.** schneiden sich in einer Gerade

**Gegeben:**  $E_1: -x - y - 2z = -5$  und  $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 9.1.1.** Bestimme die Lagebeziehung zwischen  $E_1$  und  $E_2$ .

*Lösung*

**Schritt 1:** Parameterform der Ebene  $E_2$  umschreiben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-r \\ r+2s \\ 2-s \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1-r \\ y = r+2s \\ z = 2-s \end{matrix}$$

**Schritt 2:**  $x$ ,  $y$  und  $z$  in Koordinatenform der Ebene  $E_1$  einsetzen. Falls möglich nach  $r$  oder nach  $s$  auflösen.

$$\begin{aligned} -(1-r) - (r+2s) - 2 \cdot (2-s) &= -5 \\ -1 + r - r - 2s - 4 + 2s &= -5 \\ -5 &= -5 \text{ (wahre Aussage)} \end{aligned}$$

**Schritt 3:** Ergebnis interpretieren.

Wir haben eine wahre Aussage erhalten.

**Fazit:** Die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  sind identisch.

**Gegeben:**  $E_1: x - 4y + 3z = 9$  und  $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 9.1.2.** Bestimme die Lagebeziehung zwischen  $E_1$  und  $E_2$ .

**Lösung**

**Schritt 1:** Parameterform der Ebene  $E_2$  umschreiben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 + 6r + 3s \\ 5 + 8r + 4s \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= -7 + 6r + 3s \\ z &= 5 + 8r + 4s \end{aligned}$$

**Schritt 2:**  $x$ ,  $y$  und  $z$  in Koordinatenform der Ebene  $E_1$  einsetzen. Falls möglich nach  $r$  und nach  $s$  auflösen.

$$\begin{aligned} (3) - 4 \cdot (-7 + 6r + 3s) + 3 \cdot (5 + 8r + 4s) &= 9 \\ 3 + 28 - 24r - 12s + 15 + 24r + 12s &= 9 \\ 46 &= 9 \text{ (falsche Aussage)} \end{aligned}$$

**Schritt 3:** Ergebnis interpretieren.

Wir haben eine falsche Aussage erhalten.

**Fazit:** Die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  sind echt parallel zueinander.

**Gegeben:**  $E_1: 4x + 3y + 6z = 36$  und  $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 9.1.3.** Bestimme die Lagebeziehung zwischen  $E_1$  und  $E_2$ .

**Lösung**

**Schritt 1:** Parameterform der Ebene  $E_2$  umschreiben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3r + 3s \\ 2r \\ 3 - r - s \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 3r + 3s \\ y &= 2r \\ z &= 3 - r - s \end{aligned}$$

**Schritt 2:**  $x$ ,  $y$  und  $z$  in Koordinatenform der Ebene  $E_1$  einsetzen. Falls möglich nach  $r$  und nach  $s$  auflösen.

$$\begin{aligned} 4 \cdot (3r + 3s) + 3 \cdot (2r) + 6 \cdot (3 - r - s) &= 36 \\ 12r + 12s + 6r + 18 - 6r - 6s &= 36 \\ 12r + 6s + 18 &= 36 & | -18 \\ 12r + 6s &= 18 & | -12r \\ 6s &= 18 - 12r & | :6 \\ s &= 3 - 2r \end{aligned}$$

**Schritt 3:** Ergebnis interpretieren.

Die obige Gleichung war nach  $s$  auflösbar.

**Fazit:** Die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  schneiden sich.

**Berechnung der Schnittgerade:** Wir setzen den obigen Term für  $s$  in  $x$ ,  $y$ , und  $z$  von  $E_2$  ein.

$$x = 3r + 3s = 3r + 3 \cdot (3 - 2r) = 3r + 9 - 6r = -3r + 9$$

$$y = 2r$$

$$z = 3 - r - s = 3 - r - (3 - 2r) = 3 - r - 3 + 2r = r$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3r + 9 \\ 2r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Gegeben:**  $E_1: 3x - 4y - z = 3$  und  $E_2: -6x + 8y + 2z = -6$

**Aufgabe 9.1.4.** Bestimme die Lagebeziehung zwischen  $E_1$  und  $E_2$ .

*Lösung*

Normalenvektoren auf Kollinearität prüfen:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I: } -6 = 3r & | :3 \\ \text{II: } 8 = -4r & | :(-4) \\ \text{III: } 2 = r & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I: } -2 = r \\ \text{II: } -2 = r \\ \text{III: } -2 = r \end{array}$$

Die Normalenvektoren sind parallel. Zudem sind die Ebenengleichungen Vielfache voneinander:

$$E_1: 3x - 4y - z = 3 \quad | \cdot (-2) \Rightarrow E_2: 6x + 8y + 2z = -6.$$

**Fazit:**  $E_1$  und  $E_2$  sind identisch.

**Gegeben:**  $E_1: 2x + 3y - z = 5$  und  $E_2: 4x + 6y - 2z = 3$

**Aufgabe 9.1.5.** Bestimme die Lagebeziehung zwischen  $E_1$  und  $E_2$ .

*Lösung*

Normalenvektoren auf Kollinearität prüfen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I: } 2 = 4r & | :4 \\ \text{II: } 3 = 6r & | :6 \\ \text{III: } -1 = -2r & | :(-2) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I: } 1/2 = r \\ \text{II: } 1/2 = r \\ \text{III: } 1/2 = r \end{array}$$

Die Normalenvektoren sind parallel. Um zu prüfen, ob die Ebenen nicht identisch sind, wähle einen beliebigen Punkt aus  $E_1$  zum Beispiel  $(0|0|5)$  und setze in die Ebenengleichung von  $E_2$ :

$$\begin{aligned} 4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 2 \cdot (-5) &= 3 \\ 10 &\neq 3 \end{aligned}$$

**Fazit:**  $E_1$  und  $E_2$  sind echt parallel

**Gegeben:**  $E_1: 2x - y + z = 1$  und  $E_2: 3x + 2y - z = 3$

**Aufgabe 9.1.6.** Bestimme die Lagebeziehung zwischen  $E_1$  und  $E_2$ .

*Lösung*

Normalenvektoren auf Kollinearität prüfen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I: } 2 = 3r & | :3 \\ \text{II: } -1 = 2r & | :2 \\ \text{III: } 1 = -r & | :(-1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I: } 2/3 = r \\ \text{II: } -1/2 = r \\ \text{III: } -1 = r \end{array}$$

Normalenvektoren sind nicht parallel. **Fazit:**  $E_1$  und  $E_2$  scheiden sich.

**Berechnung der Schnittgerade:**

$$\begin{array}{ll} \text{I: } 2x - y + z = 1 & | \cdot 2 \\ \text{II: } 3x + 2y - z = 3 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I: } 2x - 2y + 2z = 2 & | \cdot 2 \\ \text{II: } 3x + 2y - z = 3 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I+II: } 7x + z = 5 & | -7x \\ & z = 5 - 7x \end{array}$$

Setzt  $z = 5 - 7x$  in eine der Gleichung ein und stell nach  $y$  um:

$$\begin{aligned} 2x - y + (5 - 7x) &= 1 \\ 2x - y + 5 - 7x &= 1 \\ -5x - y + 5 &= 1 & | -5 + 5x \\ -y &= -4 + 5x & | :(-1) \\ y &= 4 - 5x \end{aligned}$$

Setze  $x = r$  und stelle nun die Geradengleichung auf:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 4 - 5r \\ 5 - 7r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

**Gegeben:** Zwei echt parallele Ebenen  $E_1: 2x - 3y + 6z = -2$  und  $E_2: 3x + 2y + z = 11$

**Aufgabe 9.2.** Berechne den Abstand zwischen  $E_1$  und  $E_2$ .

**Bemerkung:** Identische und schneidende Ebenen haben Null Abstand.

*Lösung*

Wähle einen beliebigen Punkt auf  $E_1$ . Zum Beispiel  $P(2 | 4 | 1)$  ist auf  $E_1$ , da  $2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = -2$ . Jetzt berechnen wir den Abstand zwischen  $P$  und  $E_2$ . Nach **Aufgabe 8.5.** ist dieser 1,07 LE.

**Gegeben:**  $E_1: 2x + 4y + 4z = 10$  und  $E_2: 6x + 2y + 9z = -4$

**Aufgabe 9.3.** Berechne den Schnittwinkel zwischen  $E_1$  und  $E_2$ .

**Definition:** Der Schnittwinkel ist der Winkel zwischen ihre Normalenvektoren.

**Bemerkung:** Falls nicht ablesbar, müssen wir zuerst den Normalenvektor berechnen (siehe **Aufgabe 8.1.1**)

*Lösung*

$E_1$  und  $E_2$  besitzen die Normalenvektoren  $n_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $n_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ . Nach **Aufgabe 5.7.** der Winkel zwischen  $n_1$  und  $n_2$  beträgt  $31,95^\circ$ .

**Gegeben:** Zwei Ebenen  $E_1: -2x + y + 3z = -4$  und  $E_2: x - y + z = 1$ .

**Aufgabe 9.4.** Sind die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  orthogonal zueinander?

**Definition:** Zwei Ebenen sind orthogonal zueinander, wenn ihre Normalenvektoren orthogonal sind.

**Bemerkung:** Falls nicht ablesbar, müssen wir zuerst den Normalenvektor berechnen (siehe **Aufgabe 8.1.1**)

*Lösung*

$E_1$  und  $E_2$  besitzen die Normalenvektoren  $n_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$n_1 \cdot n_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 0$ . Da ihr Skalarprodukt 0 ist, sind  $E_1$  und  $E_2$  orthogonal zueinander.

**Gegeben:** Eine Gerade  $g$  und eine Ebene  $E$ .

**Aufgabe 10.1.** Bestimme die Lagebeziehung zwischen  $g$  und  $E$ .

### Vorgehensweise

Ebenengleichung in Koordinatenform umwandeln, falls sie nicht schon in dieser Form ist (siehe **Aufgaben 8.1.1.** und **8.1.2.**). Dann unten stehenden drei Schritte ausführen. Es gibt drei Fälle.

**10.1.1.** Gerade liegt in der Ebene

**10.1.2.** Gerade und Ebene sind parallel

**10.1.3.** schneiden sich in einem Punkt

**Gegeben:**  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $E: x + 2y + 3z = 9$ .

**Aufgabe 10.1.1.** Bestimme die Lagebeziehung zwischen  $g$  und  $E$ .

*Lösung*

**Schritt 1:** Parameterform der Gerade umschreiben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+r \\ 2+r \\ 1-r \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2+r \\ y = 2+r \\ z = 1-r \end{matrix}$$

**Schritt 2:**  $x$ ,  $y$  und  $z$  in Koordinatenform der Ebene  $E$  einsetzen.

$$\begin{aligned} (2+r) + 2 \cdot (2+r) + 3 \cdot (1-r) &= 9 \\ 2+r + 4+2r + 3-3r &= 9 \\ 9 &= 9 \text{ (wahre Aussage)} \end{aligned}$$

**Schritt 3:** Ergebnis interpretieren.

Wir haben eine wahre Aussage erhalten.

**Fazit:** Die Gerade  $g$  liegt in der Ebene  $E$ .

**Gegeben:**  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $E: x + 2y + 3z = 9$ .

**Aufgabe 10.1.2.** Bestimme die Lagebeziehung zwischen  $g$  und  $E$ .

*Lösung*

**Schritt 1:** Parameterform der Gerade umschreiben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+r \\ 3+r \\ 1-r \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2+r \\ y = 3+r \\ z = 1-r \end{matrix}$$

**Schritt 2:**  $x$ ,  $y$  und  $z$  in Koordinatenform der Ebene  $E$  einsetzen.

$$\begin{aligned} (2+r) + 2 \cdot (3+r) + 3 \cdot (1-r) &= 9 \\ 2+r + 6+2r + 3-3r &= 9 \\ 11 &= 9 \text{ (falsche Aussage)} \end{aligned}$$

**Schritt 3:** Ergebnis interpretieren.

Wir haben eine falsche Aussage erhalten.

**Fazit:** Die Gerade  $g$  liegt echt parallel zu der Ebene  $E$ .

**Gegeben:**  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $E: x + 2y + 3z = 9$ .

**Aufgabe 10.1.3.** Bestimme die Lagebeziehung zwischen  $g$  und  $E$ .

*Lösung*

**Schritt 1:** Parameterform der Gerade umschreiben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2r \\ 3 + r \\ 1 - r \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 - 2r \\ y = 3 + r \\ z = 1 - r \end{array}$$

**Schritt 2:**  $x$ ,  $y$  und  $z$  in Koordinatenform der Ebene  $E$  einsetzen.

$$\begin{aligned} (2 - 2r) + 2 \cdot (3 + r) + 3 \cdot (1 - r) &= 9 \\ 2 - 2r + 6 + 2r + 3 - 3r &= 9 \\ 11 - 3r &= 9 \quad | -11 \\ -3r &= -2 \quad | : (-3) \\ r &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

**Schritt 3:** Ergebnis interpretieren.

Wir haben einen eindeutigen Wert für  $r$ .

**Fazit:** Die Gerade  $g$  und die Ebene  $E$  schneiden sich in einem Punkt.

**Berechnung des Schnittpunkts:** Wir setzen den Wert von  $r$  in  $x$ ,  $y$ , und  $z$  ein.

$$x = 2 - 2r = 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y = 3 + r = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

$$z = 1 - r = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Die Gerade  $g$  und Ebene  $E$  schneiden sich im Punkt  $S_x(\frac{2}{3} | \frac{11}{3} | \frac{1}{3})$ .

**Gegeben:**  $E: -x - y - z = -8$  und  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 10.2.** Berechne den Abstand zwischen  $E$  und  $g$ .

**Bemerkung:** Falls der Ebenengleichung nicht in Koordinatenform ist, zuerst in Koordinatenform umwandeln (siehe **Aufgaben 8.1.1.** und **8.1.2.**).

*Lösung*

Wähle einen beliebigen Punkt auf der Geraden  $g$ , zum Beispiel den Stützpunkt  $P(1 | 4 | -3)$ . Berechne den Abstand zwischen diesen Punkt  $P$  und der Ebene  $E$  (vergleiche **Aufgabe 8.5.**):

$$d(P; E) = \frac{|(-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) - (-8)|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \approx 3,46 \text{ LE.}$$

**Gegeben:**  $E: 4x - 3y = 1$  und  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 10.3.** Berechne den Schnittwinkel zwischen der Ebene  $E$  und der Gerade  $g$ .

**Formel:**  $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{b}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{b}|}$ , wobei

- $\vec{n}$  ist der Normalenvektor der Ebene und  $\vec{b}$  ist der Richtungsvektor der Gerade,
- $\vec{n} \cdot \vec{b}$  ist das Skalarprodukt und wir nehmen davon den Betrag  $|\vec{n} \cdot \vec{b}|$ ,
- $|\vec{n}|$  und  $|\vec{b}|$  sind die Längen von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

**Bemerkung:** Von der Koordinatenform und der Normalenform kann man den Normalenvektor sofort ablesen. Falls die Ebenengleichung in Parameterform gegeben ist, müssen wir zuerst den Normalenvektor berechnen (siehe **Aufgabe 8.1.1**).

Lösung

Wir haben  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

$$\sin(\alpha) = \frac{|4 \cdot 0 + (-3) \cdot 4 + 0 \cdot 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{|0 - 12 + 0|}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{25}} = \frac{|-12|}{25} = \frac{12}{25}.$$

Also,  $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{12}{25}\right) \approx 28,7^\circ$  und  $180^\circ - \alpha = 180^\circ - 28,7 = 151,3^\circ$ .

Der kleinere Winkel ist der gesuchte Winkel, und zwar  $28,7^\circ$ .

### Vektor

Ein Vektor gibt eine Verschiebung an. Grafisch wird ein Vektor als Pfeil dargestellt. Zwei Pfeile, die gleich lang sind und in die gleiche Richtung zeigen, stellen den gleichen Vektor dar. Ein Vektor hat 3 Koordinaten, die als Spalte geschrieben werden.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  bedeutet eine Verschiebung um 4 in die positive  $x$ -Richtung, um 2 in die positive  $y$ -Richtung und 3 in

die negative  $z$ -Richtung. Kurz geschrieben: 4 nach vorne, 2 nach rechts und 3 nach unten.