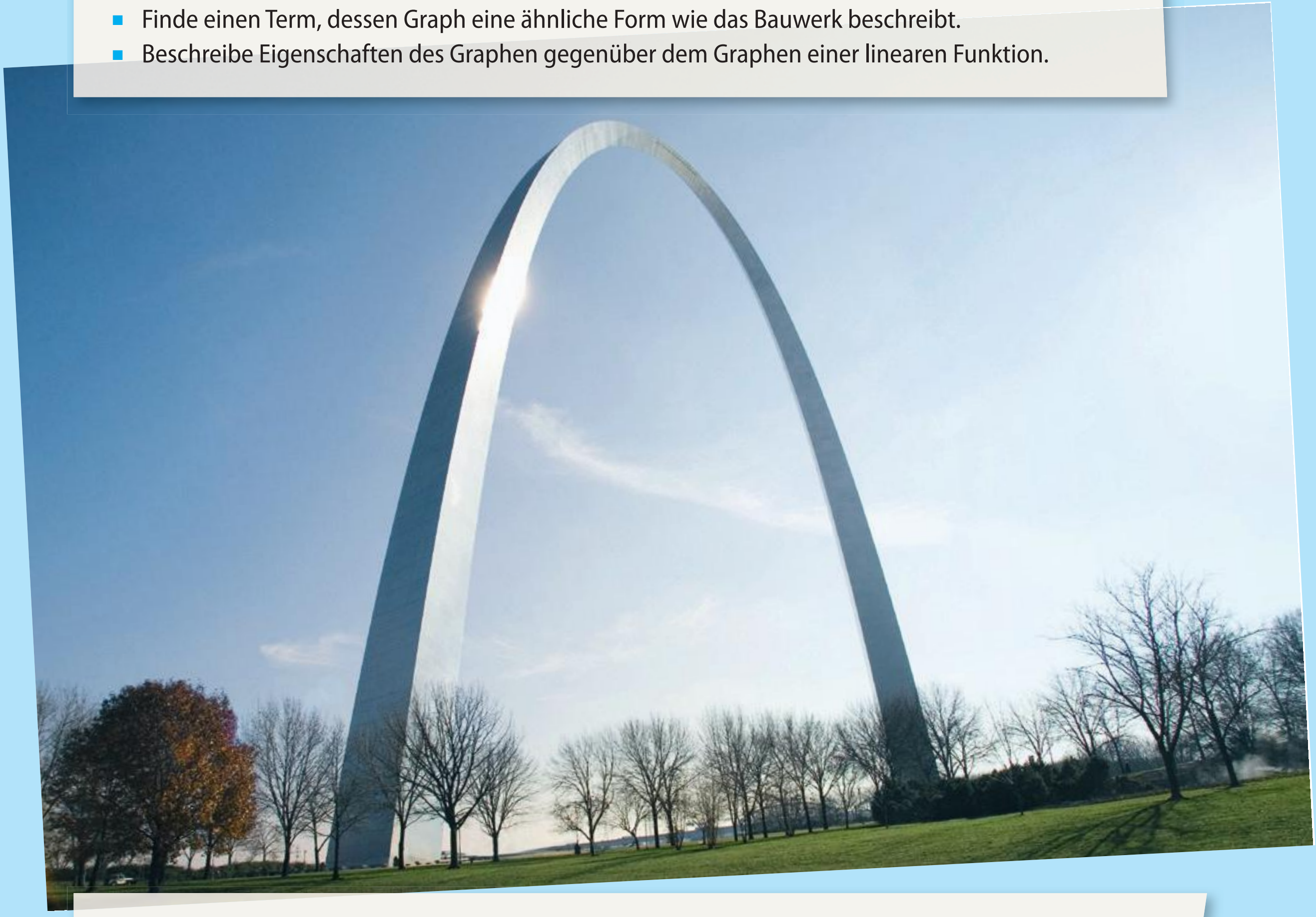
2 Quadratische Funktionen

Einstieg

- Beschreibe die Form des Bauwerks „Gateway Arch“ in St. Louis, Missouri, USA.
- Vereinfache die Darstellung des Bauwerks, indem du die Form mithilfe einer Linie in einem Koordinatensystem darstellst. Lege den höchsten Punkt des Bauwerks in den Koordinatenursprung. Begründe, dass es sich bei der Darstellung um den Graphen einer Funktion handelt.
- Finde einen Term, dessen Graph eine ähnliche Form wie das Bauwerk beschreibt.
- Beschreibe Eigenschaften des Graphen gegenüber dem Graphen einer linearen Funktion.



Ausblick

Am Ende dieses Kapitels hast du gelernt, …

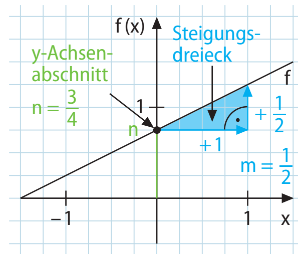
- quadratische Funktionen und ihre Eigenschaften zu erkennen und zu beschreiben.
- die Normalparabel als Grunddarstellung quadratischer Funktionen zu nutzen.
- Zusammenhänge zwischen dem Term und dem Graphen quadratischer Funktionen herzustellen.
- alltagsbezogene Aufgaben mithilfe quadratischer Funktionen zu bearbeiten.

2 Das kann ich schon …

Lineare Funktionen und ihre Eigenschaften erkennen

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = mx + n$ heißt **lineare Funktion**. Ihr Graph ist eine Gerade.

- Die Zahl m heißt Anstieg oder Steigung, für $m > 0$ steigt die Gerade („monoton steigend"), für $m < 0$ fällt die Gerade („monoton fallend"), für $m = 0$ verläuft die Gerade parallel zur x-Achse.
- Die Zahl n heißt y-Achsenabschnitt. Für $n > 0$ schneidet der Graph die y-Achse oberhalb, bei $n < 0$ unterhalb des Koordinatenursprungs. Für $n = 0$ verläuft der Graph durch den Koordinatenursprung.



Funktionsgleichung:
$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

Zwei Geraden $f(x) = m_1x + n_1$ und $g(x) = m_2x + n_2$ liegen …

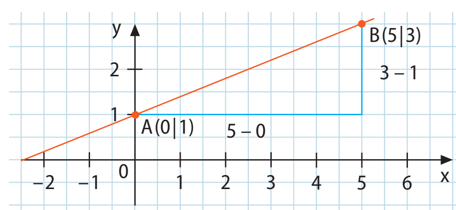
- **parallel** zueinander, wenn gilt: $\mathbf{m_1 = m_2}$.
- **senkrecht** zueinander, wenn gilt: $\mathbf{m_1 \cdot m_2 = -1}$.

Lineare Funktionen rechnerisch bestimmen

Wenn zwei beliebige Punkte A und B einer linearen Funktion bekannt sind, lässt sich daraus rechnerisch die Funktionsgleichung bestimmen.

1 Die Steigung m kann über die **Änderungsrate** (Differenzenquotient) berechnet werden:
$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

2 Hat man m bestimmt, lässt sich der y-Achsenabschnitt n berechnen, indem man die Koordinaten von A oder B in die Funktionsgleichung $f(x) = mx + n$ einsetzt. Die Zahl x_0 ist **Nullstelle** der Funktion, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.



$m = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{3 - 1}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

B einsetzen: $f(5) = 0{,}4 \cdot 5 + n = 3 \Rightarrow n = 1$

Funktionsgleichung: $f(x) = 0{,}4x + 1$

Nullstelle: $0{,}4x_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -2{,}5$

Lineare Gleichungen lösen

Um Gleichungen zu lösen, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1 Systematisches Probieren

Durch Einsetzen von Zahlen **der Reihe nach** oder durch **Einschachteln mit kleinen und großen Zahlen** versucht man, sich der Lösung einer Gleichung schrittweise zu nähern.

Beispiel:
$2x + 7 = 21$

x	2x + 7	
5	17	zu klein
6	19	zu klein
7	21	richtig

2 Äquivalenzumformung

Formt man eine Gleichung so um, dass sich die **Lösungsmenge nicht ändert**, so spricht man von einer Äquivalenzumformung. Äquivalenzumformungen liegen dann vor, wenn auf beiden Seiten der Gleichung …

- **dieselbe Zahl** (derselbe Term) **addiert** oder **subtrahiert** wird.
- mit derselben Zahl (demselben Term) **multipliziert** oder **dividiert** wird. Die Zahl darf jedoch nicht null sein.

Bestimme die Lösungsmenge in $\mathbb{Z}$:

$3x + 8 = -2 \quad | -8$

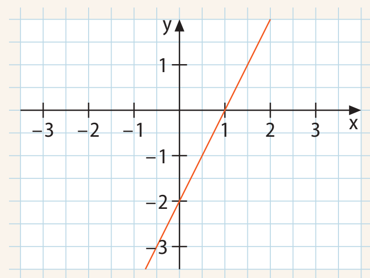
$3x = -10 \quad | :3$

$x = -\frac{10}{3}$

$-\frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$; $\mathbb{L} = \{\}$

Lineare Funktionen und ihre Eigenschaften erkennen

1 Gegeben ist jeweils eine Darstellung einer linearen Funktion. Übertrage in dein Heft und ergänze die fehlenden Darstellungen.

Gleichung	Wertetabelle	Verbale Beschreibung	Graph
$f(x) = 3x + 1$			
		Von der Hälfte einer Zahl wird 5 subtrahiert.	
			

Lineare Funktionen rechnerisch bestimmen

2 Die Punkte A und B liegen auf dem Graphen einer linearen Funktion. Ergänze die fehlenden Koordinaten.

a) $f(x) = 2x - 1$
$A(-3\,|\,?)$; $B(?\,|\,4)$

b) $f(x) = -4x + 1$
$A(1\,|\,?)$; $B(?\,|\,-15)$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
$A(2\,|\,?)$; $B(?\,|\,3)$

3 Der Graph einer linearen Funktion besitzt den Anstieg m und verläuft durch den Punkt P. Gib eine Funktionsgleichung an und beschreibe das Monotonieverhalten.

a) $m = \frac{1}{2}$; $P(0\,|\,0)$ **b)** $m = -3$; $P(2\,|\,4)$ **c)** $m = 2$; $P(1\,|\,-4)$ **d)** $m = 0$; $P(-3\,|\,-1)$

4 Der Graph einer linearen Funktion verläuft durch A und B. Gib eine Funktionsgleichung an.

a) $A(1\,|\,1)$; $B(5\,|\,5)$ **b)** $A(0\,|\,1)$; $B(1\,|\,5)$ **c)** $A(-4\,|\,3)$; $B(2\,|\,3)$ **d)** $A(16\,|\,0)$; $B(1\,|\,3{,}75)$

Lineare Gleichungen lösen

5 Löse die Gleichung im Bereich der reellen Zahlen mithilfe von Äquivalenzumformungen.

a) $2x + 3 = 18$ **b)** $2x - 3 = 11$ **c)** $x - 5 = 3x$

d) $14x = x + 26$ **e)** $x + 3 = 3 - x$ **f)** $\frac{1}{3}x + 2 = \frac{x}{5} - 1$

g) $-\frac{3}{8} + \frac{x}{2} = 4 - 3x$ **h)** $4x - \frac{34}{3} = -3 + \frac{3}{2}x$ **i)** $-\frac{4}{9} \cdot (12 - 6x) = -4x + 3$

6 Ergänze die Lücken so, dass $x = -3$ die Lösung der Gleichung ist.

a) $x + 8 = \square$ **b)** $\square \cdot x + 2 = -7$ **c)** $\square - x = 2{,}5x - 9$ **d)** $\frac{1}{3} \cdot (x - \square) = \frac{7}{x}$

Kap. 2.3

Bremsweg im Straßenverkehr

Ein wichtiger Aspekt beim Fahren im Straßenverkehr ist, dass die Geschwindigkeit der jeweiligen Situation angemessen sein muss. Nur so kann man zum Beispiel beim plötzlichen Auftauchen eines Kindes oder eines Balles auf der Fahrbahn noch reagieren. Im Notfall geschieht das durch ein abruptes Durchdrücken des Bremspedals, einer sogenannten Gefahrenbremsung.

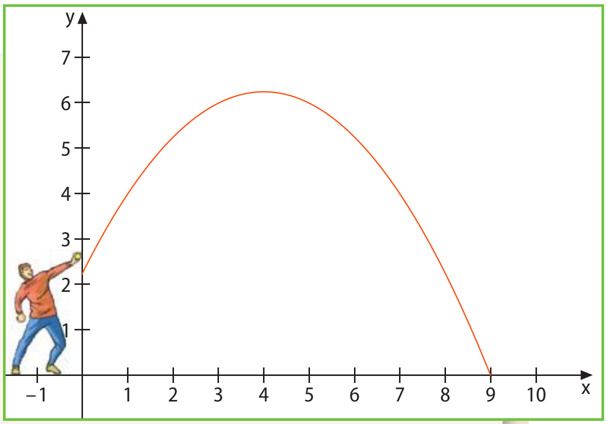
- 1 Schätze die Länge des Bremsweges, wenn ein PKW mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h plötzlich bremsen muss.
  2 Ein Moped fährt mit einer Geschwindigkeit von 45 km/h und muss eine Gefahrenbremsung durchführen. Schätze auch hier die Länge des Bremsweges.
- In der Fahrschule lernt man als Faustregel für die Länge des Bremsweges folgende Formel:

$$\text{Länge des Bremsweges in m} = \left(\frac{\text{Geschwindigkeit in km/h}}{10}\right)^2$$

  Vergleiche deine geschätzten Werte mit den errechneten nach der Faustregel.
- Stelle den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg grafisch dar.
- Wie verändert sich der Bremsweg, wenn man die Geschwindigkeit verdoppelt?

Kap. 2.5

Ballsport im Park



Durch die Funktion $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + \frac{9}{4}$ kann die Wurfkurve eines Balles im Intervall $0 \leq x \leq 9$ beschrieben werden, der aus einer Wurfhöhe von 2,25 m schräg nach oben geworfen wird.

- Erläutere die Bedeutung der Werte x und y.
- Wo befindet sich in der grafischen Darstellung der Abwurfpunkt?
- Ermittle die maximale Flughöhe des Balls.
- Erkläre, warum die Funktion nur für das oben angegebene Intervall gültig ist.
- Bestimme, wie weit der Ball geworfen wurde.
- Nach welcher Entfernung hat der Ball wieder seine Abwurfhöhe erreicht?
- Erläutere die Bedeutung des Schnittpunkts mit der y-Achse: Warum verläuft der Funktionsgraph nicht durch den Koordinatenursprung?

Kap. 2.6

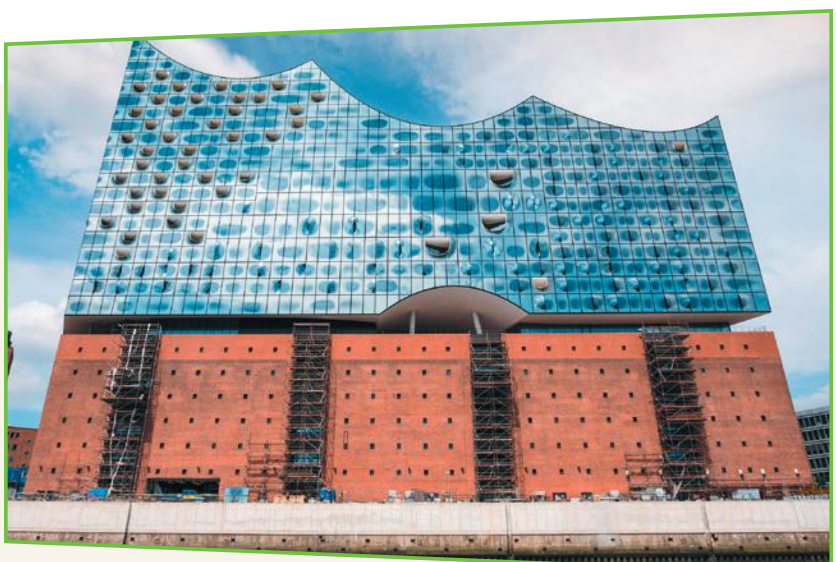
Glienicker Brücke

Die Glienicker Brücke führt über die Havel und verbindet Potsdam mit Berlin. Sie ist eine dreifeldrige Eisenfachwerkbrücke. Der mittlere Teil kann durch eine Parabel beschrieben werden und ist ca. 80 Meter breit. Der tiefste Punkt des Bogens befindet sich 5 Meter über der Fahrbahn. Die Brückenpfeiler stellen mit einer Höhe von ca. 30 Metern über der Fahrbahn die höchsten Punkte der Brücke dar.

- Skizziere den mittleren Teil der Brücke in einem geeigneten Koordinatensystem.
- Gib den Definitions- und Wertebereich des mittleren Brückenbogens an.
- Ermittle eine Gleichung der Parabel, durch die der mittlere Bogen beschrieben werden kann.

Kap. 2.7

Elbphilharmonie



Die Elbphilharmonie in Hamburg erhebt sich auf dem Sockel des ehemaligen Kaispeichers an der westlichen Spitze der Hafencity als gläserner Neubau mit geschwungener, parabelförmiger Dachlandschaft.

- Recherchiere im Internet die Höhe und Breite des Gebäudes.
- Skizziere die Bögen des Daches in einem geeigneten Koordinatensystem. Wähle auch einen günstigen Maßstab.
- Ermittle die Gleichungen der Bögen des Daches. Gib hierfür auch den Definitionsbereich an.

2

2.1 Die Normalparabel

Entdecken

- Betrachte die Abbildungen und beschreibe das Aussehen der Bögen.
- Entscheide, ob die Verläufe der Bögen mathematisch durch Funktionen beschrieben werden können. Begründe.
- Vergleiche den Verlauf der Bögen mit Graphen von linearen Funktionen.
- Gib weitere Beispiele dieser Art aus deiner Umwelt an.

Verstehen

Viele Sachverhalte in Natur und Technik können durch quadratische Funktionen beschrieben werden.

> **Quadratische Funktionen** werden im Allgemeinen durch die Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c, x \in \mathbb{R};\ a \neq 0)$ beschrieben.
> Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine **gekrümmte Kurve** und heißt Parabel.
>
> Die **einfachste quadratische Funktion** $(a = 1,\ b = c = 0)$ hat die Funktionsgleichung $\mathbf{f(x) = x^2}$.
> Der **Graph** dieser Funktion heißt **Normalparabel**. Der Punkt des Graphen, der den kleinsten Funktionswert hat, heißt **Scheitelpunkt S**.

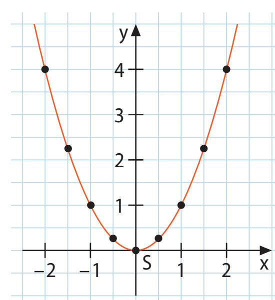
Beispiele

LE: Längeneinheit

1. Erstelle für $f(x) = x^2$ eine Wertetabelle. Zeichne die Normalparabel in ein Koordinatensystem (1 LE = 1 cm) und beschreibe ihren Verlauf.

Lösung:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
f (x)	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4



Die Normalparabel ist **symmetrisch** zur y-Achse, da das Quadrat einer Zahl und ihrer Gegenzahl jeweils gleich groß ist.
Der **Scheitelpunkt** der **Normalparabel** ist **S (0 | 0)**, da die y-Werte niemals negativ werden können.

Die y-Achse ist die Symmetrieachse der Normalparabel.

*Der **Definitionsbereich** $\mathbb{D}$ ist die Menge aller x-Werte, die man einsetzen darf.*
*Der **Wertebereich** $\mathbb{W}$ ist die Menge aller Werte, die als Funktionswerte $y = f(x)$ auftreten.*

2. Gegeben ist $f(x) = x^2$.
a) Gib den Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und den Wertebereich $\mathbb{W}$ an.
b) Gib die Nullstelle dieser Funktion an. Begründe.

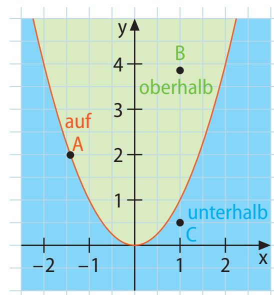
Lösung:
a) Es dürfen alle reellen Zahlen eingesetzt werden: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, jedoch erhält man durch Quadrieren keine negativen Zahlen als Funktionswerte: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$.
b) Die Funktion hat im Scheitelpunkt die Nullstelle $x = 0$, da $f(0) = 0^2 = 0$ gilt.

- Erkläre den Unterschied zwischen $f(x) = 2x$ und $f(x) = x^2$.
- Begründe, dass der Scheitelpunkt der Normalparabel auch „Tiefpunkt" genannt wird.
- Lukas behauptet: „Der Scheitelpunkt der Funktion $f(x) = x^2$ ist identisch mit der Nullstelle dieser Funktion." Hat Lukas recht? Begründe.

Nachgefragt

Aufgaben

oHiMi
3–6



1 Die Punkte A bis F liegen auf der Normalparabel.

a) Berechne die fehlenden Funktionswerte.
A(−2,8|) B(−1,4|) C(−0,3|) D(0,8|) E(1,2|) F(2,3|)

b) Berechne die fehlenden Argumente.
A(|100) B(|0,01) C(|64) D$\left(\ \middle|\ \frac{4}{9}\right)$ E(|1,69) F(|0,25)

2 Prüfe rechnerisch, ob folgende Punkte auf der Normalparabel liegen.

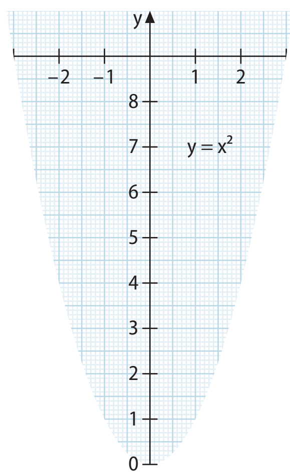
a) A(−12,5|156,25) **b)** B(−3,8|−14,44) **c)** C(−0,2|0,4)
d) D(0,81|0,65) **e)** E(5,1|26,01) **f)** F(16,4|268,96)

3 Entscheide, ob die gegebenen Punkte auf, oberhalb oder unterhalb der Normalparabel liegen. Begründe.

a) D(−9,8|96) **b)** E(−2,8|7,84) **c)** F(−0,6|0,4)
d) G(0,25|0,0625) **e)** H(4,1|8,2) **f)** I(13,4|179,65)

4 **a)** Die Punkte A, B und C liegen auf der Normalparabel. Gib jeweils den Spiegelpunkt bezüglich der y-Achse an.
A(1|1) B(−4|16) C(7|49)

b) Begründe, warum O(0|0) keinen Spiegelpunkt bezüglich der y-Achse besitzt.



5 Du kannst dir auch eine eigene Schablone für die Normalparabel basteln.
Zeichne zunächst die Normalparabel auf Millimeterpapier. Berechne dazu im Intervall $-3 \leq x \leq 3$ möglichst viele Werte. Klebe nun deine Zeichnung auf Pappe und schneide die Normalparabel aus.

6 Sandra möchte mithilfe einer Wertetabelle eine Normalparabel mit $f(x) = x^2$ zeichnen.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)							

Nutze zum Zeichnen die Schablone für die Normalparabel.

a) Erkläre, dass in der Wertetabelle keine negativen Argumente notwendig sind.

b) Zeichne die Normalparabel mindestens im Intervall $-3 \leq x \leq 3$.

c) Zeige, dass der Graph der Funktion $f(x) = x^2$ achsensymmetrisch ist. Kennzeichne hierfür gleiche Funktionswerte und die Symmetrieachse.

7 Finde anhand einer Zeichnung heraus, für welche Werte von x gilt:

a) $x^2 < x$ **b)** $x - 2 \geq x^2 - 4$ **c)** $2x < x^2 < 4$

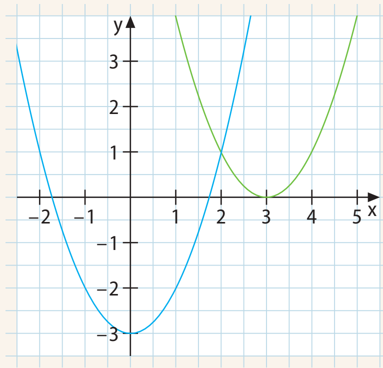
Überprüfe die Ergebnisse mit einem geeigneten Computerprogramm.

2.2 Parallelverschiebung von Parabeln der Form $f(x) = (x + d)^2$ und $f(x) = x^2 + e$

Entdecken

Untersuche die Auswirkungen der Parameter d und e auf den Graphen einer Normalparabel.

- Betrachte die Funktionsgleichungen $f_1(x) = (x - 3)^2$ und $f_2(x) = x^2 - 3$.
  Beschreibe die Unterschiede der Funktionsgleichungen, indem du die Funktionswerte für gleiche Argumente an Beispielen betrachtest.
- Stelle die folgenden Funktionen grafisch dar und vergleiche ihre Graphen gegenüber der Normalparabel. Du kannst auch ein Computerprogramm dazu nutzen.



1 $f(x) = (x + d)^2$ mit $d = 3; -2; -1; \frac{1}{2}$

2 $f(x) = x^2 + e$ mit $e = 3; -2; -1; \frac{1}{2}$

Verstehen

Eine Normalparabel kann parallel zur x-Achse und zur y-Achse verschoben werden.

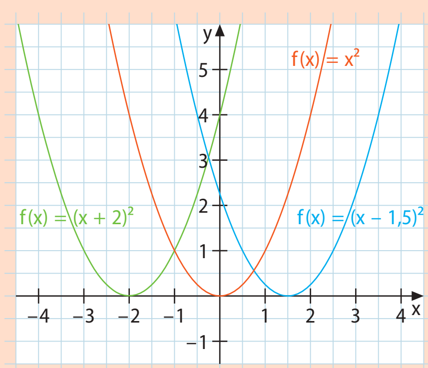
Der Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung …

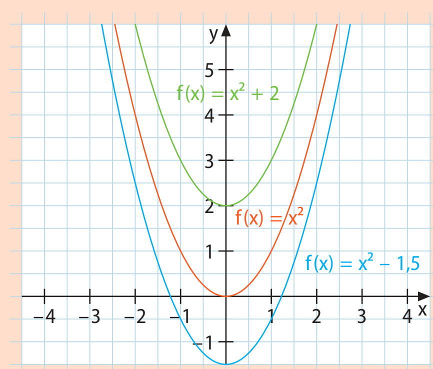
$\mathbf{f(x) = (x + d)^2}$ $(d, x \in \mathbb{R})$ ist eine **entlang der x-Achse** verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(-d\,|\,0)$.
Die Parabel ist symmetrisch zu $x = -d$ (Symmetrieachse). Es gilt:

$d = 0$ Normalparabel
$d < 0$ nach rechts verschobene Normalparabel
$d > 0$ nach links verschobene Normalparabel

$\mathbf{f(x) = x^2 + e}$ $(e, x \in \mathbb{R})$ entsteht durch Verschiebung der Normalparabel **entlang der y-Achse**. Sie hat den Scheitelpunkt $S(0\,|\,e)$.
Die Parabel ist symmetrisch zur y-Achse (Symmetrieachse). Es gilt:

$e = 0$ Normalparabel
$e < 0$ verschoben um e Einheiten nach unten
$e > 0$ verschoben um e Einheiten nach oben





Beispiele

1. Gib die Koordinaten der Scheitelpunkte der gegebenen quadratischen Funktionen an.

a) $f_1(x) = x^2 + 2{,}5$ **b)** $f_2(x) = (x - 2{,}5)^2$ **c)** $f_3(x) = (x + 2{,}5)^2$

Lösung:

a) $S(0\,|\,2{,}5)$ **b)** $S(2{,}5\,|\,0)$ **c)** $S(-2{,}5\,|\,0)$

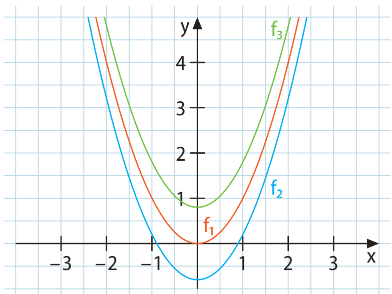
2. Zeichne die Graphen der drei Funktionen in ein Koordinatensystem. Gib jeweils den Scheitelpunkt an.

a) **1** $f_1(x) = x^2$ **2** $f_2(x) = x^2 - \frac{4}{5}$ **3** $f_3(x) = x^2 + \frac{4}{5}$

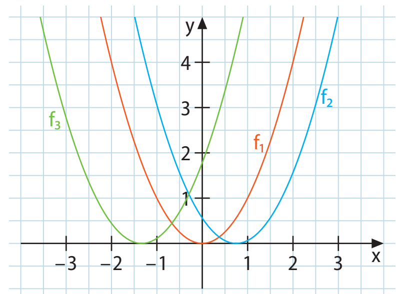
b) **1** $f_1(x) = x^2$ **2** $f_2(x) = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2$ **3** $f_3(x) = \left(x + \frac{4}{3}\right)^2$

Lösung:

a)



b)



a) **1** $S(0|0)$ **2** $S\left(0\middle|-\frac{4}{5}\right)$ **3** $S\left(0\middle|\frac{4}{5}\right)$

b) **1** $S(0|0)$ **2** $S\left(\frac{3}{4}\middle|0\right)$ **3** $S\left(-\frac{4}{3}\middle|0\right)$

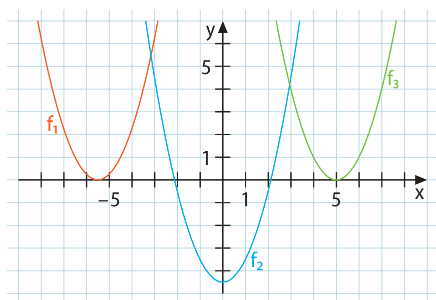
3. Gegeben sind verschobene Normalparabeln. Gib die zugehörigen Funktionsgleichungen an.

Lösung:

$f_1(x) = (x + 5{,}5)^2$

$f_2(x) = x^2 - 4{,}5$

$f_3(x) = (x - 5)^2$



Nachgefragt

Die Normalparabel wird um 3 LE nach rechts und um 2 LE nach unten verschoben.

- Gib den Scheitelpunkt und die Symmetrieachse an.
- Formuliere eine Vermutung über die zugehörige Funktionsgleichung und überprüfe diese mit einem Computerprogramm.

Aufgaben

oHiMi
1–4

1 Zeichne mithilfe der Normalparabel die Graphen der Funktionen.

a) $f(x) = x^2 + 1$ **b)** $f(x) = x^2 + 2{,}5$ **c)** $f(x) = x^2 + 3$ **d)** $f(x) = x^2 + 5$
e) $f(x) = x^2 - 0{,}5$ **f)** $f(x) = x^2 - 1{,}5$ **g)** $f(x) = x^2 - 3$ **h)** $f(x) = x^2 - 4{,}5$
i) $f(x) = (x - 0{,}7)^2$ **j)** $f(x) = (x + 1{,}9)^2$ **k)** $f(x) = (x + 5)^2$ **l)** $f(x) = (x - 3{,}4)^2$

2 Gegeben sind folgende Funktionen:

1 $f(x) = x^2 + 1{,}5$ **2** $f(x) = x^2 - 1{,}5$ **3** $f(x) = (x - 4)^2$ **4** $f(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2$

a) Gib jeweils den Scheitelpunkt und den Wertebereich an.
b) Stelle die Funktionen grafisch dar und ermittle die Nullstellen. Der Wert x_0 ist Nullstelle einer Funktion, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

Nutze eine Zeichenschablone für $f(x) = x^2$ wie auf S. 55.

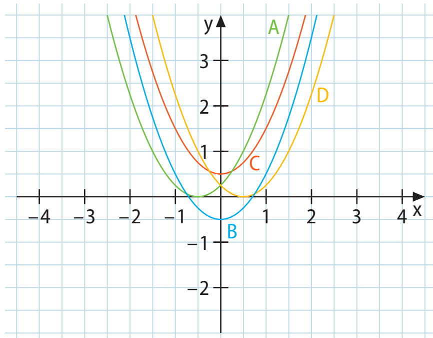
3 Gib für die Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$ den Definitions- und Wertebereich sowie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

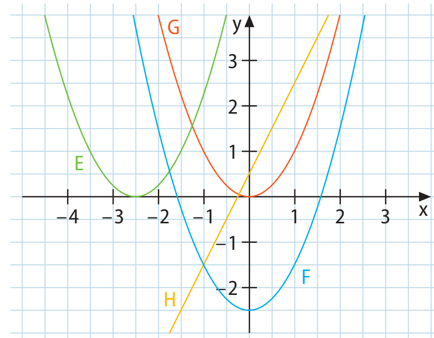
Erinnere dich an die binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - \ldots$

4 Gegeben sind die Graphen von Funktionen. Ordne den Graphen die zugehörige Funktionsgleichung zu.

1 $f(x) = x^2$ **2** $f(x) = x^2 - 0{,}5$ **3** $f(x) = x^2 + 0{,}5$ **4** $f(x) = (x - 0{,}5)^2$

5 $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$ **6** $f(x) = (x + 0{,}5)^2$ **7** $f(x) = x^2 - 2{,}5$ **8** $f(x) = (x + 2{,}5)^2$





5 Überprüfe rechnerisch, ob die angegebenen Punkte auf der Parabel liegen.

a) $f(x) = (x - 2)^2$ $P(3|1)$ $Q(5|-9)$

b) $f(x) = x^2 + 6$ $P(0|5)$ $Q\left(-\frac{1}{2}\middle|6{,}25\right)$

c) $f(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$ $P\left(-\frac{2}{3}\middle|1\right)$ $Q\left(-\frac{1}{3}\middle|0\right)$

6 Gegeben sind die Scheitelpunkte verschobener Normalparabeln.

1 $S(0|0{,}8)$ **2** $S\left(-\frac{3}{4}\middle|0\right)$ **3** $S(-3{,}5|0)$ **4** $S(0|-1{,}9)$ **5** $S(0|4)$ **6** $S(1{,}4|0)$

a) Zeichne die Graphen.

b) Gib die zugehörige Funktionsgleichung an.

c) Nenne mindestens zwei weitere Eigenschaften des jeweiligen Graphen.

7 Zeichne die Graphen der Funktionen gemeinsam in ein Koordinatensystem.

a) $f(x) = (x + d)^2$ für $d \in \{-3{,}5; -3; -2{,}5; -2; -1{,}5; -1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1\}$

b) $f(x) = x^2 + e$ für $e \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2, 3; 4\}$

8 Gib eine zugehörige Funktionsgleichung an.

a) Die Normalparabel ist um 1,5 Einheiten nach rechts verschoben.

b) Die verschobene Normalparabel besitzt den Scheitelpunkt $S(-\sqrt{2}|0)$.

c) Die Normalparabel ist um eine halbe Einheit nach unten verschoben.

d) Die Normalparabel wird an $x = 2$ gespiegelt.

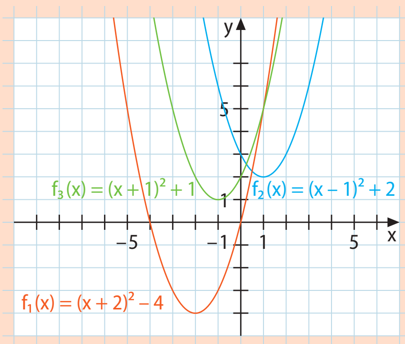
9 Übertrage die Tabelle in dein Heft und vervollständige die Sätze, sodass die Aussage wahr wird ($d, e \in \mathbb{R}$). Unterscheide verschiedene Fälle, falls nötig.

	$f(x) = (x+d)^2$	$f(x) = x^2 + e$
a) Der Graph der Funktion f heißt …		
b) Der Graph von f schneidet die y-Achse im Punkt …		
c) Die Funktion f hat genau eine Nullstelle für …		
d) Die Funktion f hat genau zwei Nullstellen für …		
e) Die Funktion f hat keine Nullstelle für …		

Der Wert x_0 ist Nullstelle einer Funktion, wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

Weiterdenken

Der Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $f(x) = (x + d)^2 + e$ $(x, d, e \in \mathbb{R})$ entsteht durch Verschiebung der Normalparabel entlang der x-Achse um $(-d)$ Einheiten und entlang der y-Achse um e Einheiten. Die Parabel hat den Scheitelpunkt $S(-d|e)$ und ist achsensymmetrisch zu $x = -d$.
Für die einzelnen Verschiebungen gelten die bekannten Zusammenhänge gegenüber der Normalparabel.



10 Der Scheitelpunkt einer Normalparabel f ist $S(-2|4)$.

a) Gib den Wertebereich $\mathbb{W}$ von f an.

b) Bestimme eine Funktionsgleichung von f.

c) Gib die x-Koordinaten der Punkte $Q_1 \in f$ und $Q_2 \in f$ an, die beide die y-Koordinate 5 haben.

11 Gib die Koordinaten des Scheitelpunktes S und den Wertebereich an.
Zeichne anschließend den Graphen der Funktion.

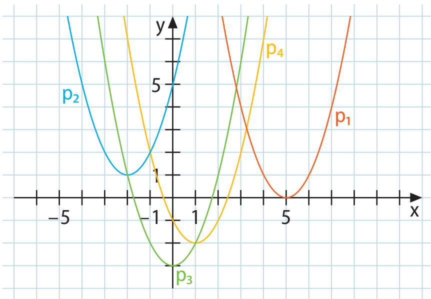
a) $f_1(x) = (x - 2)^2 - 3$

b) $f_2(x) = (x + 6)^2 + 4$

c) $f_3(x) = (x - 2)^2$

d) $f_4(x) = x^2 - 8$

12 Die Funktionen p_1 bis p_4 sind verschobene Normalparabeln. Gib zu den Graphen der Funktionen p_1 bis p_4 die Funktionsgleichungen an.



13 Die Lage einer Normalparabel wurde verändert. Gib mögliche Funktionsgleichungen an.

a) Verschiebung entlang der y-Achse um 3 Einheiten nach oben.

b) Verschiebung entlang der x-Achse um 2 Einheiten nach links.

c) Verschiebung entlang der y-Achse um 4 Einheiten nach unten und um 3 Einheiten entlang der x-Achse nach rechts.

d) Verschiebung entlang der x-Achse um 2 Einheiten.

e) Verschiebung entlang der y-Achse um 3 Einheiten.

14 Von den verschobenen Normalparabeln sind die Scheitelpunkte bekannt.
Gib die Funktionsgleichung an.

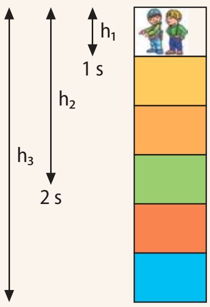
a) $S_1(0|6)$

b) $S_2(2|2)$

c) $S_3(-7|5)$

d) $S_4(3|0)$

Entdecken



Baumeister Bodo zeigt seinem Lehrling, wie er die Tiefe des Aufzugschachts des im Rohbau befindlichen Bürogebäudes bestimmen kann. Dazu lässt er vom obersten Ende des Aufzugschachts eine Stahlkugel fallen und bestimmt deren Fallzeit in Sekunden. Die Funktion f mit $f(x) = 5x^2$ ordnet der in Sekunden gemessenen Fallzeit ungefähr die Höhe in Metern zu.

- Erstelle für f eine Wertetabelle und zeichne den Graphen. Ermittle, aus welcher Höhe die Stahlkugel fallen gelassen wurde, wenn **1** $x = 1{,}5$; **2** $x = 2{,}0$ ist.
- Zeichne in ein Koordinatensystem die Normalparabel sowie die Graphen der Funktionen zu $f(x) = ax^2$ $(x \in \mathbb{R})$ mit **1** $a = -3$; **2** $a = -\frac{1}{3}$; **3** $a = \frac{1}{3}$; **4** $a = 3$.
  Vergleiche die Verläufe der Funktionen miteinander. Was stellst du fest?
  Du kannst auch ein Computerprogramm nutzen.

Verstehen

Die Normalparabel kann durch einen Faktor a gestreckt oder gestaucht werden.

Ist $a = 1$, so liegt eine Normalparabel vor. Ist $a = -1$, so liegt eine an der x-Achse gespiegelte Normalparabel vor.

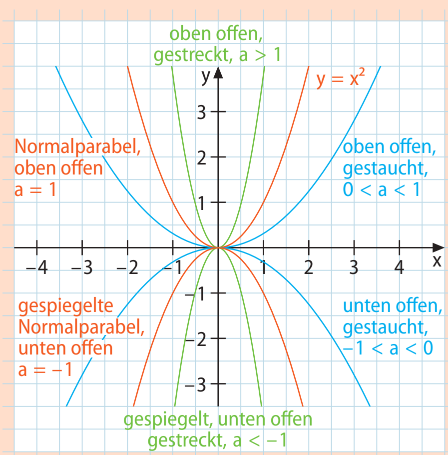
Eine gestreckte (gestauchte) Parabel ist „enger/schmäler" („weiter/breiter") als die Normalparabel.

Funktionen mit der Gleichung $f(x) = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $x \in \mathbb{R}$ beschreiben Parabeln, deren Scheitelpunkt S im Ursprung liegt.

Für die Form der Parabeln gilt:

Die Parabel ist für
- $a > 0$ nach **oben geöffnet**.
- $a < 0$ nach **unten geöffnet**.

Die Parabel ist für
- $|a| > 1$ **gestreckt.**
- $|a| < 1$ **gestaucht.**



Beispiele

1. Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Beschreibe die Form der Parabel zunächst ohne Zeichnung.

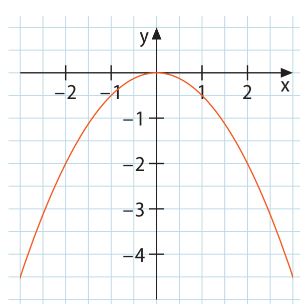
b) Fertige eine Wertetabelle für die Funktion f für $x \in [-3;\ 3]$ an und erhöhe x schrittweise um 1 Einheit. Zeichne den zugehörigen Graphen.

Lösung:

a) Da $a < 0$ ist, ist die Parabel nach unten geöffnet.
Da $|a| < 1$ ist, ist die Parabel gegenüber der Normalparabel gestaucht.

b)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2$	−4,5	−2	−0,5	0	−0,5	−2	−4,5



2. Der Punkt P $(1{,}2\,|\,-3{,}6)$ liegt auf einer Parabel mit $f(x) = ax^2$.
Bestimme die Gleichung der Parabel.
Lösung:
Einsetzen der Koordinaten des Punktes P $(1{,}2\,|\,-3{,}6)$ in $f(x) = ax^2$ liefert:
$-3{,}6 = a \cdot 1{,}2^2 \;|\; : 1{,}2^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2{,}5 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -2{,}5x^2$

Nachgefragt

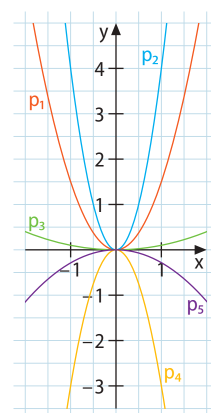
- Beschreibe den Verlauf des Graphen zu $f(x) = ax^2$ mit $x \in \mathbb{R}$, für $a = 0$.
- Ändert sich die Funktionsgleichung $f(x) = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $x \in \mathbb{R}$, wenn der zugehörige Graph an der x- bzw. y-Achse gespiegelt wird? Begründe.

Aufgaben

1 Zeichne den Graphen der Funktion f im angegebenen Intervall $(x \in \mathbb{R})$.
a) $f(x) = 1{,}2x^2$; $x \in [-3;\,3]$ **b)** $f(x) = -2x^2$; $x \in [-2;\,2]$
c) $f(x) = 0{,}75x^2$; $x \in [-3;\,3]$ **d)** $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$; $x \in [-4;\,4]$

Wähle für a) und c) die Schrittweite 1, für b) und d) 0,5.

2 Ordne den Graphen in der Randspalte die entsprechende Funktionsgleichung zu.
1 $f(x) = 0{,}1x^2$ **2** $f(x) = -\frac{2}{7}x^2$ **3** $f(x) = -3x^2$ **4** $f(x) = 1{,}5x^2$ **5** $f(x) = 4x^2$



3 Bestimme a so, dass P auf der Parabel $f(x) = ax^2$ $(a \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$ liegt.
a) $P(1\,|\,-3)$ **b)** $P(\sqrt{2}\,|\,-3)$ **c)** $P(1{,}6\,|\,-7{,}04)$ **d)** $P(-0{,}3\,|\,0{,}09)$ **e)** $P(\sqrt{5}\,|\,4)$

4

Der Punkt P $(-1{,}5\,|\,1{,}25)$ liegt oberhalb der Parabel mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

a) Überlege ohne Zeichnung, wie Eva zu dieser Feststellung kommen könnte.
b) Entscheide, ob der Punkt oberhalb, unterhalb oder auf dem Graphen liegt.
1 $P(4{,}4\,|\,7{,}26)$ $f(x) = -\frac{3}{8}x^2$ **2** $P(-4{,}8\,|\,-57{,}8)$ $f(x) = -2{,}5x^2$
3 $P(-1{,}5\,|\,0{,}45)$ $f(x) = 0{,}2x^2$ **4** $P(0{,}5\,|\,-0{,}8)$ $f(x) = 3{,}2x^2$

oHiMi
1–2

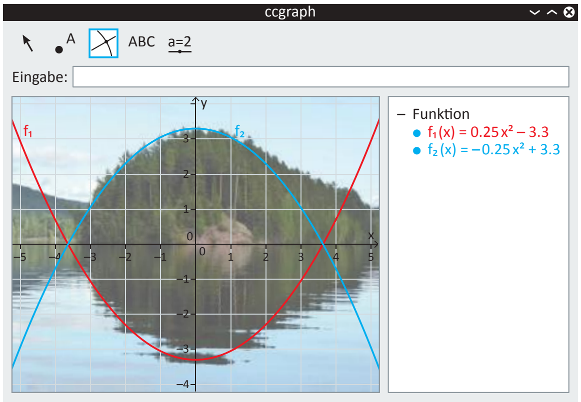
5 Bestimme die fehlenden Koordinaten so, dass gilt: A, B $\in$ f.
a) $A(-2\,|\,y_A)$ $B(x_B\,|\,4)$ $f(x) = 3x^2$ **b)** $A(x_A\,|\,-4{,}9)$ $B(-2\,|\,y_B)$ $f(x) = -0{,}4x^2$

Es soll gelten: $x_A < x_B$.

6 Gib bei jeder der vier Parabeln an, ob sie nach unten oder nach oben geöffnet ist und ob sie enger oder weiter als die Normalparabel ist. Übertrage dazu die Tabelle in dein Heft.

Funktionsgleichung	a	Die Parabel ist			
		enger	weiter	und nach oben geöffnet	und nach unten geöffnet
		als die Normalparabel			
$f_1(x) = 8x^2$					
$f_2(x) = -3x^2$					
$f_3(x) = 1{,}25x^2$					
$f_4(x) = -0{,}6x^2$					

7 Viele Sachverhalte aus Natur und Technik können durch quadratische Funktionen modelliert werden. An dem Foto wurde dies mit einem Computerprogramm probiert. Dabei sollte das Koordinatensystem günstig gewählt werden. Hier liegen die Scheitelpunkte der Parabeln auf der y-Achse.



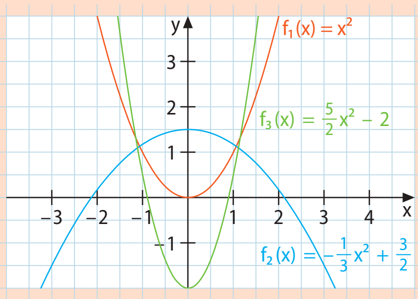
a) Vergleiche die beiden Graphen im Bild mit der Normalparabel und miteinander.

b) Stelle weitere Funktionen der Form $f(x) = ax^2$ für $a = 1$ $(-2; -1{,}5; -1; -0{,}5; 0{,}5; 2; 3; 4; 5)$ grafisch dar. Beschreibe den Einfluss des Parameters a auf den Verlauf des Graphen. Nutze ein Computerprogramm.

c) Beschreibe den Einfluss des Parameters e auf den Verlauf des Graphen der Funktion $f(x) = ax^2 + e$.

Weiterdenken

Der Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + e$ $(x, e \in \mathbb{R})$ entsteht durch Verschiebung der gestreckten bzw. gestauchten Normalparabel entlang der y-Achse. Die Parabel hat den Scheitelpunkt $S(0|e)$. Für die einzelnen Verschiebungen gelten die bekannten Zusammenhänge gegenüber der Normalparabel.



oHiMi
8–10

8 Skizziere die drei Graphen jeweils für $-5 \leq x \leq 5$ in ein Koordinatensystem.

a) $f_1(x) = x^2$ $\quad f_2(x) = -x^2$ $\quad f_3(x) = -x^2 - \frac{5}{4}$

b) $f_1(x) = x^2$ $\quad f_2(x) = 2x^2$ $\quad f_3(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}$

c) $f_1(x) = -0{,}5x^2$ $\quad f_2(x) = 0{,}5x^2$ $\quad f_3(x) = -0{,}5x^2 + 3$

9 Stelle die Funktionen in einem geeigneten Intervall grafisch dar.

a) $f(x) = -x^2 + 4$ **b)** $f(x) = 2x^2 - 2$ **c)** $f(x) = 0{,}5x^2 + 2$
d) $f(x) = -3x^2 + 1$ **e)** $f(x) = 0{,}25x^2 - 2$ **f)** $f(x) = -1{,}5x^2 - 0{,}5$

Beschreibungen:
- *gestreckt oder gestaucht*
- *nach oben oder nach unten geöffnet*
- *nach oben oder nach unten verschoben*

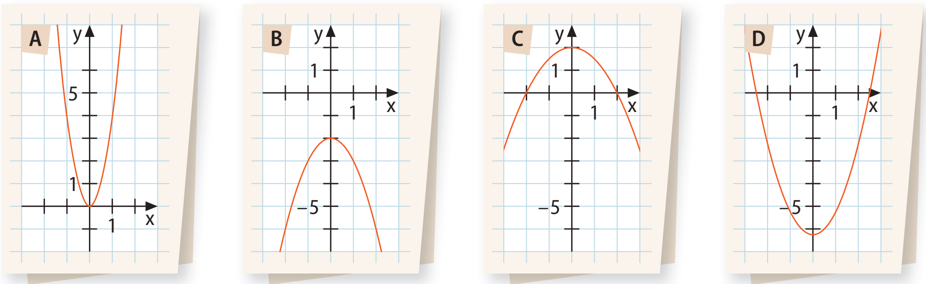
10 Vergleiche die Graphen der Funktionen mit der Normalparabel. Verwende dabei die in der Randspalte aufgeführten Begriffe.

a) $f(x) = 0{,}5x^2 + 3$ **b)** $f(x) = \frac{3}{7}x^2 - 9{,}5$
c) $f(x) = -7{,}5x^2 + 3$ **d)** $f(x) = -3x^2 + 0$

Beispiel: $f(x) = 3{,}5x^2 - 7$
Die Parabel ist nach oben geöffnet. Sie ist um 7 Einheiten auf der y-Achse nach unten verschoben und gestreckt (schmale Öffnung).

11 Ordne die Funktionsgleichungen den Graphen zu.

1 $f(x) = x^2 - 6{,}25$ **2** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ **3** $f(x) = 4x^2$ **4** $f(x) = -x^2 - 2$



12 Gegeben ist der Graph einer quadratischen Funktion. Beschreibe in eigenen Worten das Vorgehen, wie die zugehörige Funktionsgleichung ermittelt wird. Bestimme auf diese Weise die Funktionsgleichung der dargestellten Graphen.

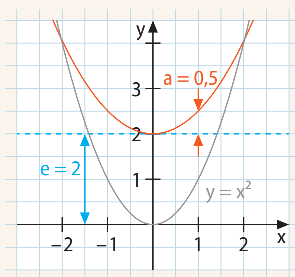
Beispiel:
Gesucht ist die Funktion $f(x) = ax^2 + e$

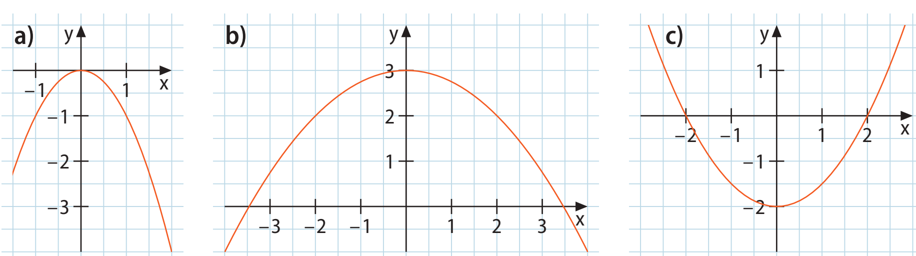
1 Parabel symmetrisch zur y-Achse und um zwei Einheiten nach oben verschoben $\Rightarrow f(x) = ax^2 + 2$

2 Ablesen eines Punktes des Graphen, z. B. $P(2|4)$

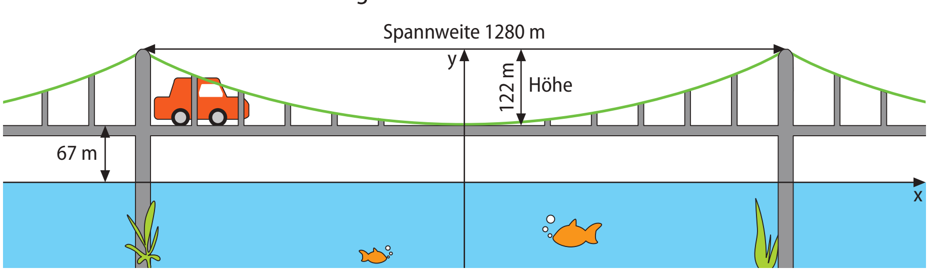
3 Einsetzen: $f(2) = a \cdot 2^2 + 2 = 4 \Rightarrow a = 0{,}5$

4 Funktionsgleichung: $f(x) = 0{,}5x^2 + 2$





13 Die Halteseile einer Hängebrücke haben etwa die Form einer Parabel. Die Fahrbahn der Golden Gate Bridge verläuft 67 m über dem Meer. Diese Brücke hat eine Spannweite von 1280 m und die Haltemaste überragen die Fahrbahn um 122 m.



Ermittle eine zugehörige Funktionsgleichung für das annähernd parabelförmige Halteseil.

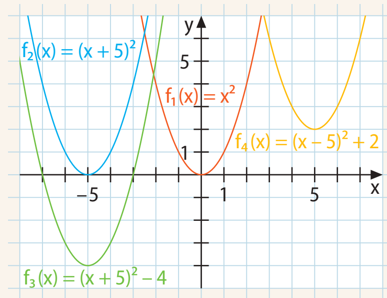
Golden Gate Bridge

Skizziere zunächst das Koordinatensystem mit der Parabel.

Entdecken

Dargestellt sind die Graphen quadratischer Funktionen in der sogenannten Scheitelpunktform $f(x) = (x + d)^2 + e$ im Vergleich zur Normalparabel.

- Gib die Scheitelpunkte an. Erkläre den Begriff „Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion".
- Ordne den Funktionen die zugehörigen Gleichungen in der Form $f(x) = x^2 + px + q$ zu.
  1 $f(x) = x^2 + 10x + 25$ **2** $f(x) = x^2 - 10x + 27$
  3 $f(x) = x^2 + 10x + 21$
- Gib weitere Funktionen in der Scheitelpunkt- und Normalform so an, dass die Scheitelpunkte S im I. bzw. III. Quadranten liegen.



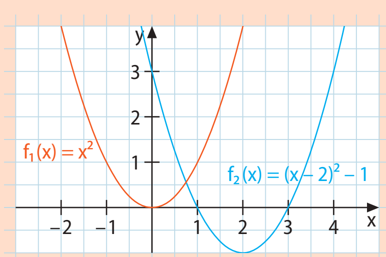
Verstehen

Es gibt verschiedene Darstellungsmöglichkeiten einer Funktionsgleichung.

Eine Funktionsgleichung der Form …

$\mathbf{f(x) = (x + d)^2 + e}$ bzw.
$\mathbf{f(x) = a(x + d)^2 + e}$ $(a, d, e, x \in \mathbb{R})$ heißt **Scheitelpunktform** einer quadratischen Funktion. Die verschobene Normalparabel hat den Scheitelpunkt $S(-d\,|\,e)$.

Es gilt:
- Verschiebung der Normalparabel um d Längeneinheiten parallel zur x-Achse
  für … $d > 0$ nach links
  $d < 0$ nach rechts
- Verschiebung der Normalparabel um e Längeneinheiten parallel zur y-Achse
  für … $e > 0$ nach oben
  $e < 0$ nach unten



$\mathbf{f(x) = x^2 + px + q}$ $(p, q, x \in \mathbb{R})$ heißt **Normalform** einer quadratischen Funktion. Die Scheitelpunktform kann in die Normalform umgeformt werden.

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + d)^2 + e \\ &= x^2 + 2dx + d^2 + e \\ &= x^2 + px + q \end{aligned}$$

ausmultiplizieren ↓ quadrat. Ergänzung ↑

Das heißt: $p = 2d$
$d = \frac{p}{2}$ und
$q = d^2 + e$
$e = -d^2 + q$
$e = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$
$e = -\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right)$
$e = -D$ („Diskriminante" D)

Die verschobene Normalparabel hat den Scheitelpunkt
$S\left(-\frac{p}{2}\,\middle|\,-D\right)$, das heißt $S\left(-\frac{p}{2}\,\middle|\,-\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right)$.

Scheitelpunktform
Quadratische Ergänzung *Ausmultiplizieren*
Normalform

*Die **Diskriminante** (lat. discriminare: unterscheiden) ist der Term $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$.*

Beispiele

1. Gib die Koordinaten der Scheitelpunkte und die Normalform der Funktionen an.
a) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ **b)** $f(x) = (x + 1)^2 - 0{,}1$ **c)** $f(x) = (x - 4)^2 + 1$
Lösung:
a) $S(2\,|\,1)$
$f(x) = x^2 - 4x + 5$
b) $S(-1\,|\,-0{,}1)$
$f(x) = x^2 + 2x + 0{,}9$
c) $S(4\,|\,1)$
$f(x) = x^2 - 8x + 17$

2. Bestimme die Koordinaten des Scheitelpunktes von $f(x) = x^2 + 6x - 4$.

Lösung:

$f(x) = x^2 + px + q$ Vergleiche und man erhält: $p = 6$; $q = -4$

$f(x) = x^2 + 6x - 4$ Einsetzen liefert: $x_S = -\frac{p}{2} = -\frac{6}{2} = -3$

$$y_S = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = -3^2 - 4 = -13$$

Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(-3|-13)$.

Beachte: Du musst die Rechenzeichen vor p und q als Vorzeichen mitnehmen.

3. Eine verschobene Normalparabel hat den Scheitelpunkt $S(3|-4)$.

a) Bestimme die Scheitelpunktform und die Normalform.

b) Stelle die Funktion grafisch dar.

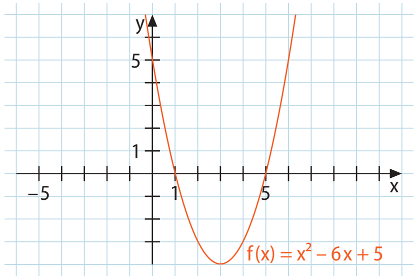
Lösung:

a) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ Scheitelpunktform

$= x^2 - 6x + 9 - 4$

$= x^2 - 6x + 5$ Normalform

b)



Nachgefragt

- Dustin behauptet, dass die Koordinaten eines Scheitelpunkts, der im IV. Quadranten liegt, immer positiv sind. Widerlege seine Aussage.
- Bestimme p und q bei $y = x^2 + 4$ und $y = x^2 + 2x$.

Aufgaben

oHiMi 1–4

1 **a)** $f(x) = x^2 - 4x$ **b)** $f(x) = x^2 + 2x + 1$ **c)** $f(x) = x^2 - 6x + 7$
d) $f(x) = x^2 + 3x - 0{,}75$ **e)** $f(x) = x^2 - x - 1$ **f)** $f(x) = x^2 - 5x + 4{,}75$

Ermittle den Scheitelpunkt der Funktionsgraphen.

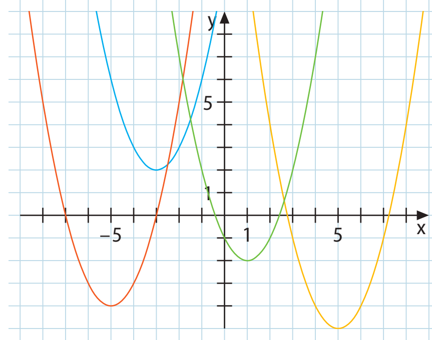
2 Ordne die Scheitelpunkte den entsprechenden Funktionsgleichungen zu.

1 $S(1\|1)$	2 $S(3\|0)$	A $f(x) = x^2 - 2x$	B $f(x) = x^2 + 3x + 7{,}25$
3 $S(-3\|5)$	4 $S(0{,}25\|2)$	C $f(x) = x^2 - 2x + 2$	D $f(x) = x^2 - 6x + 9$
5 $S(-2{,}5\|7)$	6 $S(1\|-1)$	E $f(x) = x^2 + 5x + 13{,}25$	F $f(x) = x^2 - 0{,}5x + 2{,}0625$
7 $S(-1{,}5\|5)$	8 $S(0{,}75\|0)$	G $f(x) = x^2 + 6x + 14$	H $f(x) = x^2 - 1{,}5x + 0{,}5625$

3 Ordne der Scheitelpunktform $f(x) = (x - 2)^2 - 4$ die Gleichung der Normalform zu. Begründe deine Entscheidung.

1 $f(x) = x^2 + 4x$	2 $f(x) = x^2 - 4x - 8$	3 $f(x) = x^2 - 4x$	4 $f(x) = x^2 + 4x + 8$

4 Gegeben sind die Graphen von verschobenen Normalparabeln.



a) Ermittle die zugehörigen Funktionsgleichungen in der Normalform.
b) Gib jeweils die Koordinaten eines weiteren Punktes an, der die Gleichung erfüllt. Überprüfe am Graphen.
c) Gib die Anzahl der Nullstellen an.
d) Erläutere den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Nullstellen und der Diskriminante anhand dieser Beispiele.
e) Ermittle mindestens zwei Funktionen, die nur eine Nullstelle haben. Gib die Diskriminanten an.

5 Bestimme rechnerisch die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel. Gib anschließend die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform an.

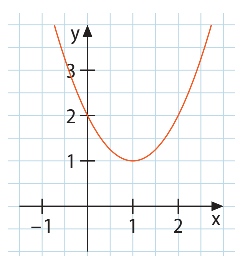
a) $f(x) = x^2 + 3x + 5$ **b)** $f(x) = x^2 - 6x + 8$ **c)** $f(x) = x^2 - 2{,}5x - 9$
d) $f(x) = x^2 + \frac{1}{8}x - 3$ **e)** $f(x) = x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{10}$ **f)** $f(x) = x^2 + 7{,}5x - 6{,}9$

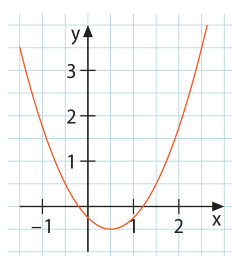
6 Gegeben ist der Scheitelpunkt einer verschobenen Normalparabel. Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung.

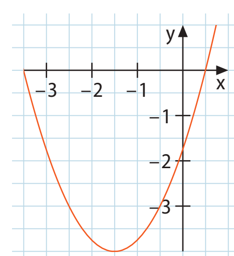
a) $S(2|3)$ **b)** $S(-2|4)$ **c)** $S(-3|-6)$ **d)** $S(-1{,}5|4)$

7 **a)** Welcher Graph gehört zu welcher Funktionsgleichung? Ordne zu und begründe.

A $f(x) = x^2 - x - 0{,}25$ **B** $f(x) = x^2 - 2x + 2$ **C** $f(x) = x^2 + 3x - 1{,}75$

1


2


3


b) Ermittle jeweils die zugehörige Funktionsgleichung von f in Scheitelpunktform.
c) Gib jeweils die Funktionsgleichung der Parabel an, die entsteht, wenn man f an der y-Achse spiegelt.
d) Ermittle jeweils die Funktionsgleichung der Parabel, die entsteht, wenn man f an der x-Achse spiegelt.

Wiederhole die binomischen Formeln:
$(a + b)^2 = a^2 + \ldots$
$(a - b)^2 = a^2 - \ldots$

8 Ermittle die Koordinaten des Scheitelpunktes. Gib die Anzahl der Nullstellen an.

a) $f(x) = (x - 1{,}5)^2 - 3$ **b)** $f(x) = x^2 + 5x + \frac{25}{4}$ **c)** $f(x) = x^2 + 2x - 1$
d) $f(x) = (x + 5)^2 + 3$ **e)** $f(x) = x^2 - 9x + \frac{81}{4}$ **f)** $f(x) = x^2 + 11x + 30{,}25$

9 Beschreibe die Graphen der Funktionen.

1 $f(x) = x^2 - 1909$ **2** $f(x) = 2x^2$ **3** $f(x) = (x - 1909)^2$

10 Ermittle die Normalform der quadratischen Funktionen mit folgenden Eigenschaften. Erläutere dein Vorgehen.

Es können auch zwei Funktionen diese Eigenschaften besitzen.

a) Die verschobene Normalparabel ist nach oben geöffnet. Die Nullstellen der Parabel sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.
b) Die gestreckte Parabel ist symmetrisch zur y-Achse und verläuft durch den Punkt $A(-1|0)$. Der Scheitelpunkt ist 1,5 LE vom Koordinatenursprung entfernt.
c) Der Wertebereich der verschobenen Normalparabel ist $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq -10$. Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt $P(0|6)$.
d) Der Wertebereich der verschobenen und gespiegelten Normalparabel ist $y \in \mathbb{R}$, $y \leq 1$. Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt $P(0|-5{,}25)$.
e) Die nach oben geöffnete und gestauchte Parabel ist symmetrisch zur Gerade $x = -1$. Die Punkte $A(-5|7)$ und $B(1|1)$ liegen auf der Parabel.

11 Bestimme jeweils p und q so, dass die Punkte A und B auf der Parabel $f(x) = x^2 + px + q$ liegen, und gib dann die Scheitelpunktform an.
a) $A(1|2)$; $B(0|0)$ **b)** $A(1|3)$; $B(-1|11)$ **c)** $A(1|-1)$; $B(-1|1)$

12 Finde jeweils heraus, für welchen Wert von q der Scheitelpunkt S der Parabel auf der x-Achse liegt.
a) $f(x) = x^2 + 8x + q$ **b)** $f(x) = x^2 - 6x + q$ **c)** $f(x) = x^2 + 2{,}4x + q$

13 Bestimme jeweils denjenigen Wert von p, für den der Scheitelpunkt S der Parabel auf der positiven x-Achse liegt.
a) $f(x) = x^2 + px + 16$ **b)** $f(x) = x^2 - px + 49$ **c)** $f(x) = x^2 + px + 2$

14 Untersuche jeweils, ob die Scheitel der drei Parabeln f_1, f_2 und f_3 auf einer Geraden liegen.

a)	$f_1(x) = x^2$	$f_2(x) = (x-2)^2 + 2$	$f_3(x) = (x+1)^2 - 1$
b)	$f_1(x) = x^2$	$f_2(x) = (x+2)^2 + 4$	$f_3(x) = (x-0{,}5)^2 + 1$
c)	$f_1(x) = (x-1)^2$	$f_2(x) = x^2 + 1$	$f_3(x) = (x-3)^2 - 2$
d)	$f_1(x) = (x-1)^2 + 2$	$f_2(x) = x^2 + 2x + 3$	$f_3(x) = x^2 - x + 2{,}25$

15 Die Graphen G_f der Funktionen $f(x) = x^2 + px + p$; $D_f = \mathbb{R}$, mit $p \in \mathbb{R}$ bilden eine Schar von Parabeln.
a) Zeichne die drei Parabeln $f_0(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 + 2x + 2$ und $f_{-2}(x) = x^2 - 2x - 2$.
b) Zeige, dass der Punkt $G(-1|1)$ auf jeder der Parabeln f_p liegt.
c) Bestimme p so, dass die Parabel f_p durch den Punkt $(1|9)$ verläuft.
d) Ermittle die Koordinaten des Scheitelpunkts S_p von f_p in Abhängigkeit von p.
e) Zeige zunächst, dass die Scheitelpunkte der Parabeln f_0, f_2 und f_{-2} auf der Parabel $f^*(x) = -x^2 - 2x$ liegen, und dann, dass die Scheitelpunkte aller Parabeln f_p auf f^* liegen.

Lucas' Ergebnis zu d):
$S_p\left(-\frac{p}{2}\middle|p - \frac{p^2}{4}\right)$
Hat Lucas Recht?

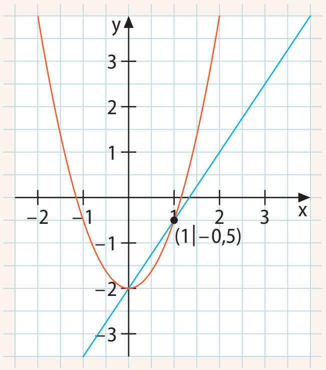
16 Gegeben ist die Parabel $f(x) = x^2 - 6x + 9$ und die Parabeln zu den Funktionen $g_a(x) = x^2 - 6x + a$ mit $a \in \mathbb{R}$.
Ermittle den Wert des Parameters a so, dass g_a die Parabel f …
a) im Scheitelpunkt berührt.
b) in keinem Punkt schneidet.
c) in 2 Punkten schneidet.

Entdecken

René hat die Aufgabe, seinen Mitschülern grafische Darstellungen mit seinem bisherigen Wissen zu beschreiben. Kannst du ihm helfen?

- Gib Eigenschaften der Funktionen an, die der grafischen Darstellung entnommen werden können.
- Ermittle die zugehörige Funktionsgleichung beider Funktionsgraphen.
- Stelle die Funktion s(x) als Summe der beiden Funktionen grafisch dar und beschreibe die Eigenschaften dieser neuen Funktion.

$s(x) = f(x) + g(x)$



Verstehen

Eine quadratische Funktion lässt sich auch in einer allgemeinen Form angeben.

Eine quadratische Funktion in der **allgemeinen Form** $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ bzw. ihren Graphen kann man anhand der bisher untersuchten Eigenschaften beschreiben.

Definitionsbereich $\mathbb{D}$ Menge der Argumente (x-Werte)

Wertebereich $\mathbb{W}$ Menge der Funktionswerte (y-Werte mit $y = f(x)$)

Scheitelpunkt
- $S\left(-\frac{b}{2a}\middle|\frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ für $f(x) = ax^2 + bx + c$

Spezialfälle:
- $S(-d|e)$ für $f(x) = (x + d)^2 + e$
- $S\left(-\frac{p}{2}\middle|-D\right)$ für $f(x) = x^2 + px + q$ mit $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

Beachte:
Die Gleichung $0 = ax^2 + bx + c$ kann durch Division durch a in $0 = x^2 + px + q$ umgeformt werden.

Form der Parabel
- $a = 1$ (verschobene) Normalparabel
- nach oben geöffnet für $a > 0$; nach unten geöffnet für $a < 0$
- gestreckt für $|a| > 1$; gestaucht für $|a| < 1$

Nullstellen x_0 mit $f(x_0) = 0$
- zwei Nullstellen für $D > 0$
- eine Nullstelle für $D = 0$
- keine Nullstelle für $D < 0$

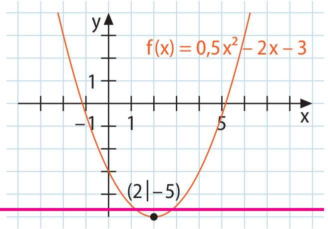
Die Diskriminante D ermöglicht eine Aussage über die Anzahl der Nullstellen.

Monotonie Für $x_1 < x_2$ ist die Funktion …
- monoton steigend, wenn $f(x_1) < f(x_2)$.
- monoton fallend, wenn $f(x_1) > f(x_2)$.

Symmetrie achsensymmetrisch zur Symmetrieachse durch S parallel zur y-Achse

Beispiele

1. Ermittle den Scheitelpunkt des Graphen von $f(x) = 0,5x^2 - 2x - 3$.
Lösung:
1. Möglichkeit:
Der Graph wird mit einer Wertetabelle gezeichnet.
Der Scheitelpunkt kann nun abgelesen werden: $S(2|-5)$.



2. Möglichkeit:

$f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 3$

$= 0{,}5 \cdot (x^2 - 4x - 6)$ Ausklammern

$= 0{,}5 \cdot (x^2 - 4x + 4 - 4 - 6)$ Quadratische Ergänzung, sodass eine binomische Formel angewendet werden kann.

$= 0{,}5 \cdot \left((x - 2)^2 - 10\right)$

$= 0{,}5 \cdot (x - 2)^2 - 5$ Scheitelpunktform mit $S(2|-5)$

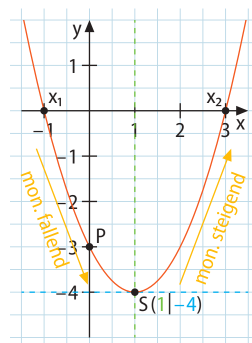
3. Möglichkeit:

$S\left(-\frac{b}{2a}\middle|\frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ für $a = 0{,}5$; $b = -2$; $c = -3$ ermitteln: $S(2|-5)$

2. Ermittle die Eigenschaften des Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Lösung:

Definitionsbereich $\mathbb{D}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertebereich $\mathbb{W}$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$ mit $y \geq -4$
Scheitelpunkt	$S(1|-4)$
Form der Parabel	nach oben geöffnete, um 1 LE nach rechts und um 4 LE nach unten verschobene Normalparabel
Nullstellen	$x_1 = -1$; $x_2 = 3$, erkennbar am Funktionsgraph
Monotonie	Für $x < 1$ ist die Funktion monoton fallend. Für $x > 1$ ist die Funktion monoton steigend.
Symmetrie	achsensymmetrisch zur Geraden mit $x = 1$



Mathematisch korrekt müsste man sagen:
- *Verschiebung nach rechts/links: in positive/negative x-Richtung*
- *Verschiebung nach oben/unten: in positive/negative y-Richtung*

Nachgefragt

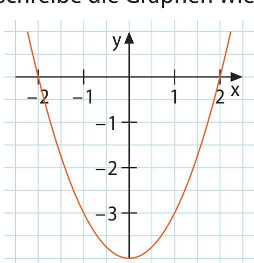
- Beschreibe einem Mitschüler ein Beispiel für eine nach unten geöffnete und gestauchte Parabel ohne Nullstelle. Dein Mitschüler skizziert den Graphen. Vergleicht.
- Erläutere anhand selbst gewählter quadratischer Funktionen den Zusammenhang zwischen Scheitelpunkt und Wertebereich (Scheitelpunkt und Nullstellen).

Aufgaben

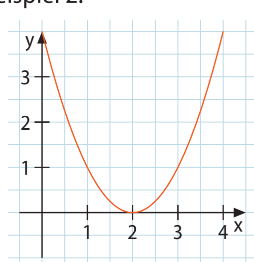
oHiMi 1–10

1 Beschreibe die Graphen wie in Beispiel 2.

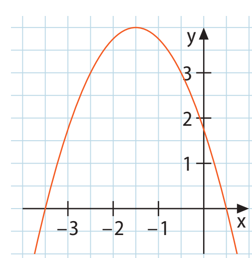
a)



b)



c)



2 Stimmt das? Begründe. Der Graph einer Funktion ist monoton …

a) steigend, wenn mit größer werdenden x-Werten auch die y-Werte steigen.

b) fallend, wenn mit kleiner werdenden x-Werten auch die y-Werte kleiner werden.

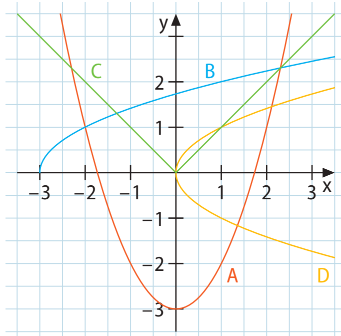
c) fallend bis zum x-Wert des Scheitelpunktes.

d) steigend bis zum y-Wert des Scheitelpunktes, wenn die Parabel nach unten geöffnet ist.

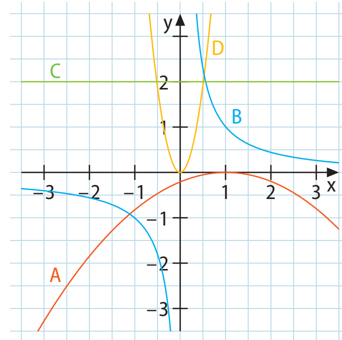
Am besten machst du dir eine Skizze.

3 Entscheide, ob Graphen quadratischer Funktionen gegeben sind. Begründe.

a)



b)



4 Gegeben sind die Scheitelpunkte verschobener Normalparabeln.
A (0 | 6); B (−16 | 0); C (−5 | −5); D (1 | −25); E (2 | −4); F (−6 | −36)

a) Gib Eigenschaften der Parabeln an, ohne sie zu zeichnen.

b) Gib für mindestens drei der Parabeln jeweils eine Gleichung einer linearen Funktion so an, dass ihr Graph mit der verschobenen Normalparabel …
1 keinen Punkt … **2** einen Punkt … **3** zwei Punkte …
gemeinsam hat.

5 Ordne den Funktionsgleichungen die Eigenschaften der zugehörigen Graphen zu, ohne diese zu zeichnen.
Es können auch mehrere Eigenschaften zutreffend sein.

a) $f(x) = 2x^2 - 1$ **b)** $f(x) = -2x^2 - 1$ **c)** $f(x) = -0{,}5x^2 + 1$

d) $f(x) = -x^2 + 2$ **e)** $f(x) = x^2$ **f)** $f(x) = -2x^2 + \frac{1}{2}$

Die Parabel …
1 ist gestaucht. **2** ist gestreckt. **3** ist nach oben geöffnet.
4 verläuft durch den Punkt P (1 | 1). **5** hat zwei Nullstellen.

6 Gegeben sind die Funktionen f und g $(x \in \mathbb{R})$.
1 $f(x) = -x + 1$ $g(x) = x^2 - 2x - 1$
2 $f(x) = x + 1$ $g(x) = x^2 - 2x - 1$

a) Bestimme grafisch die Schnittpunkte der Graphen von f und g.

b) Ermittle die Gleichung der Funktion $s(x) = f(x) + g(x)$ sowie ihren Graphen. Gib zwei Eigenschaften von s an.

7 Mithilfe der binomischen Formeln kann man quadratische Terme umformen: Bestimme Nullstellen und Scheitelpunkt der Funktion auf verschiedene Arten.

1. binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. binomische Formel: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

a) $f(x) = (x - 3)^2$ **b)** $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 2)$

c) $f(x) = (x + 2{,}5)^2$ **d)** $f(x) = \left(x + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)$

e) $f(x) = x^2 - 6{,}25$ **f)** $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{9}$

Die Scheitelpunktform kann in die allgemeine Form der Gleichung einer Parabel überführt werden und umgekehrt:

$$f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e \xrightarrow{\text{ausquadrieren}} f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e \xleftarrow{\text{quadratisch ergänzen}} f(x) = ax^2 + bx + c$$

Scheitelpunktform — allgemeine Form

$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $d, e \in \mathbb{R}$
$b, c \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$

Weiterdenken

8 **a)** Begründe mit eigenen Worten die Umformungen der allgemeinen Form in die Scheitelpunktform.

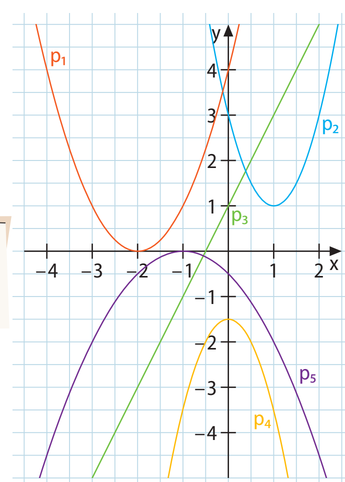
$$\begin{aligned}
& y = ax^2 + bx + c \\
\Leftrightarrow\; & y = a \cdot \left(x^2 + \tfrac{b}{a}x\right) + c \\
\Leftrightarrow\; & y = a \cdot \left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2\right) + c \quad \text{quadratische Ergänzung von } \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\; & y = a \cdot \left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2}\right] + c \\
\Leftrightarrow\; & y = a \cdot \left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \tfrac{b^2}{4a} \quad \Rightarrow \quad S\left(-\tfrac{b}{2a} \,\middle|\, c - \tfrac{b^2}{4a}\right)
\end{aligned}$$

b) Überführe die Funktionsgleichung $f(x) = y = 2x^2 + 4x + 6$ in die Scheitelpunktform und gib den Scheitelpunkt an.

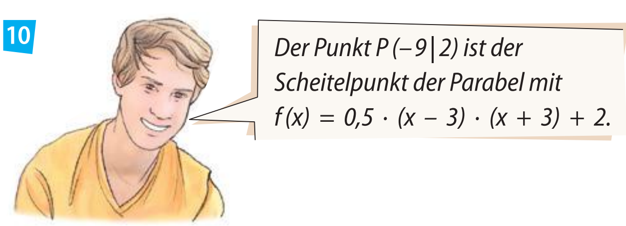
c) Die Funktion $f(x) = ax^2 + 8x - 6$ hat den Scheitelpunkt $S(-1 \mid -10)$. Bestimme a. Gib anschließend die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform an.

9 Ordne den Graphen die zugehörige Funktionsgleichung zu. Begründe deine Entscheidung.

A $f(x) = -0{,}5 \cdot (x + 1)^2$ **B** $f(x) = 2x + 1$
C $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ **D** $f(x) = (x + 2)^2$
E $f(x) = -2x^2 - 1{,}5$



10



Hat Sid Recht? Begründe.

11 Bestimme die Koordinaten des Scheitelpunktes S, die Gleichung der Symmetrieachse s und die Wertemenge der zugehörigen Funktion.

Nutze den Graphen der Funktion.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ **b)** $f(x) = -0{,}5x^2 + 8x + 18$ **c)** $f(x) = -3x^2 - 6x + 9$
d) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x$ **e)** $f(x) = 3x^2 - 30x + 70$ **f)** $f(x) = -4x^2 + 16x - 16$
g) $f(x) = -x^2 - 3x - 1{,}25$ **h)** $f(x) = 5x^2 - 10$ **i)** $f(x) = -2x^2 + 12x + 19$

Entdecken

Überlege dir, welche Angaben du benötigst für das Aufstellen einer …
- Geradengleichung der Form $f(x) = mx + n$ mit $m, n, x \in \mathbb{R}$.
- Parabelgleichung der Form $f(x) = a \cdot (x + d)^2 + e$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $d, e, x \in \mathbb{R}$.
- Parabelgleichung der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $b, c, x \in \mathbb{R}$.

Verstehen

Man kann Parabeln nur dann eindeutig bestimmen, wenn bestimmte Parameter bekannt sind.

Um Parabeln zeichnen oder deren Funktionsgleichung aufstellen zu können, braucht man …
- für die **Scheitelpunktform** der quadratischen Funktion $f(x) = a \cdot (x + d)^2 + e$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $d, e, x \in \mathbb{R}$ den Koeffizienten a sowie die Koordinaten $-d$ und e des **Scheitelpunktes S**.
- für die **allgemeine Form** der quadratischen Funktion $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $b, c, x \in \mathbb{R}$ die **drei Koeffizienten a, b und c**.

Man nennt a, b und c in der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ auch Parmeter.

Beispiel: Die Punkte $P(-6|3)$ und $Q(-2|-5)$ liegen auf einer an der x-Achse gespiegelten Normalparabel $(x \in \mathbb{R})$.

Gespiegelte Normalparabel $\Rightarrow a = -1$; P, Q in die allgemeine Form einsetzen liefert:

I $\;3 = -1 \cdot (-6)^2 + b \cdot (-6) + c$	I $\;3 = -36 - 6b + c$	I $\;3 = -36 - 6b + c$
II $\;-5 = -1 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$	II $\;-5 = -4 - 2b + c$	II $\;c = -1 + 2b$

(II) in (I) liefert: $3 = -36 - 6b - 1 + 2b \;\Leftrightarrow\; b = -10$ (*)
(*) in (II) liefert: $c = -1 + 2 \cdot (-10) \;\Leftrightarrow\; c = -21$

Die Funktionsgleichung der Parabel lautet: $f(x) = -x^2 - 10x - 21$.

Die Lösung erfolgt analog, wenn statt der Koeffizienten b und c die zwei Koeffizienten a und b oder a und c gesucht sind.

Beispiele

1. Gib die Gleichung der Parabel mit $f(x) = -4x^2 + bx + 2$ $(b, x \in \mathbb{R})$ an, wenn $P(-1|-5)$ auf der Parabel liegt.
Lösung:
P einsetzen liefert: $-5 = -4 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2 \;\Leftrightarrow\; b = 3$; $f(x) = -4x^2 + 3x + 2$

Die Lösung erfolgt analog, wenn statt des Koeffizienten b der Koeffizient a oder c unbekannt ist.

2. Ermittle die Gleichung für eine Parabel, wenn der Scheitelpunkt $S(-3|2)$ und ein auf der Parabel liegender Punkt $P(1|-5)$ bekannt sind.
Lösung:
Einsetzen der Punktkoordinaten von S und P in die Scheitelpunktform liefert:
$-5 = a \cdot (1 - (-3))^2 + 2 \;\Leftrightarrow\; a = -\frac{7}{16}$, somit $f(x) = -\frac{7}{16} \cdot (x + 3)^2 + 2$

3. Wie lautet die Gleichung der Parabel, wenn bekannt ist: $S(3|-3)$ und $b = -3$?
Lösung:
Aus der allgemeinen Formel für die Koordinaten des Scheitelpunkts folgt:
$$\left.\begin{array}{lcl} 3 = -\dfrac{(-3)}{2a} & \Leftrightarrow & a = \dfrac{1}{2} \\ -3 = c - \dfrac{(-3)^2}{4 \cdot \frac{1}{2}} & \Leftrightarrow & c = 1{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 1{,}5$$

4. Stelle die Funktionsgleichung für eine an der x-Achse gespiegelte und verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(3|-7)$ auf.
Lösung:
gespiegelte Normalparabel $\Rightarrow$ $a = -1$; $f(x) = -(x - 3)^2 - 7$

Nachgefragt

- In welchen Fällen reichen zwei Punkte, die auf der Parabel liegen, aus, um die Gleichung der Parabel angeben zu können? Erläutere.
- Lässt sich die Gleichung einer Parabel angeben, wenn nur die Gleichung der Symmetrieachse und der Wertebereich bekannt sind? Begründe.

Aufgaben

$P \in f$ bedeutet: Der Punkt P liegt auf dem Graphen der Funktion f.

oHiMi 2–5

1 Ermittle die Gleichung der quadratischen Funktion f in der allgemeinen Form und zeichne den zugehörigen Graphen, wenn Folgendes bekannt ist:
a) $S(1|6)$, $P(-1|2) \in f$ **b)** $S(-2|-3)$, $P(2|1) \in f$
c) $S(-4|6)$, $P(-6|-2) \in f$ **d)** $S\left(\frac{1}{4}\middle|-8\frac{7}{8}\right)$; $b = 1$
e) $S(-0{,}5|-17)$; $c = -16$ **f)** $S(72|44)$; $a = -\frac{1}{3}$
g) $f(x) = ax^2 - 6x + 3$ $Q(2|-5) \in f$; $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
h) $f(x) = -x^2 - 4x + c$ $Q(-3|6) \in f$; $c \in \mathbb{R}$
i) $f(x) = -2x^2 + bx + 6$ $Q(-3|0) \in f$; $b \in \mathbb{R}$
j) $f(x) = 0{,}5x^2 - 4x + c$ $Q(0|6) \in f$; $c \in \mathbb{R}$
k) $P(4|-13)$, $Q(-4|-5) \in f$; $c = -1$ und $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $b \in \mathbb{R}$
l) $P(1{,}5|4{,}5)$, $Q(-1|-0{,}5) \in f$; $b = 0{,}5$ und $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $c \in \mathbb{R}$
m) $P(-6|1)$, $Q(7|-5) \in f$; $a = -0{,}5$ und $b, c \in \mathbb{R}$

2 Bestimme den fehlenden Koeffizienten so, dass der angegebene Punkt auf der Parabel liegt.
a) $f(x) = a \cdot (x + 1)^2 + 3$ $P(-2|7)$ **b)** $f(x) = -2 \cdot (x - 2)^2 - c$ $Q(-1|-20)$

3 Von einer Parabel sind die Koordinaten eines Punktes $P(-3|21)$ bekannt.
a) Welche zusätzlichen Informationen müssen bekannt sein, damit man die Parabelgleichung angeben kann? Finde verschiedene Möglichkeiten.
b) Gib dir für die Fälle aus a) konkrete Werte vor und berechne damit jeweils die Koordinaten des Scheitelpunktes S.

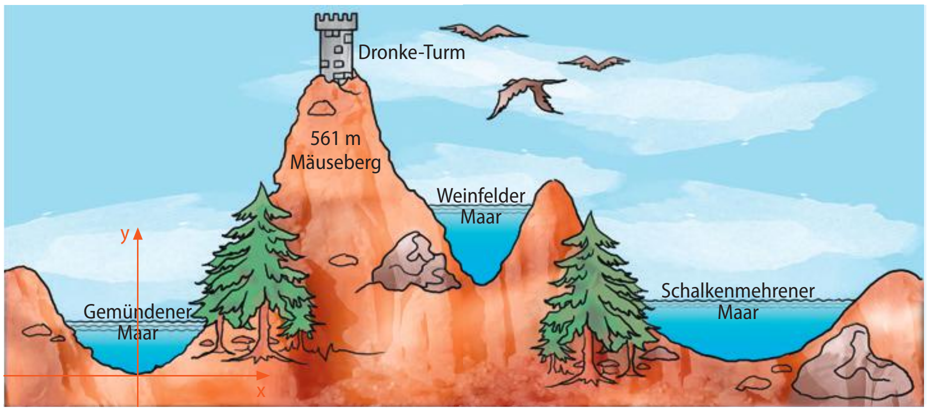
4 Gegeben ist eine Funktion $f(x) = ax^2 + 4x + c$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$.
a) Bestimme die Koeffizienten a und c so, dass gilt: $P(0|-4)$, $Q(-8|-4) \in f$.
b) Ermittle, welchen Wert $a = c$ besitzen muss, damit $R(0|-1)$ auf f liegt.

5 Überprüfe, ob es möglich ist, $a = b$ so zu wählen, dass $S_1(-0{,}5|4)$ bzw. $S_2(0{,}5|-4)$ Scheitelpunkt der Parabel mit $f(x) = ax^2 + bx + 5$ wird.

6 Die Parameter a, b und c der Funktionsgleichung einer Parabel f haben alle denselben Wert. Ermittle die Funktionsgleichung, wenn f durch P verläuft.
a) $P(-2|-6)$ **b)** $P(-3{,}5|2{,}5)$ **c)** $P(2|7)$

Aufgaben

1 In der Eifel gibt es in den Kratern erloschener Vulkane annähernd kreisförmige Seen, die man Maare nennt.



a) Die Querschnitte der Maare können mit Funktionsgleichungen der Form $f(x) = ax^2$ beschrieben werden. Für welches Maar ist der Faktor a am kleinsten? Entscheide anhand der Skizze.

b) Der Querschnitt des Gemündener Maars wird annähernd durch die Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}0016x^2$ beschrieben. Die maximale Tiefe dieses Sees beträgt 38 m. Ermittle den Durchmesser der Wasserfläche.

c) Berechne die Tiefe des Gemündener Maars in 1 Meter Entfernung von der tiefsten Stelle.

d) Berechne die Wasserfläche des annähernd kreisförmigen Sees in Hektar.

Unabhängig von der Form und Bewegung des Körpers betrachtet man bei Flugbahnen nur den Schwerpunkt des Körpers (hier z. B. die Badehose).

2 Die Klippenspringer von Acapulco sind weltberühmt. Sie springen von einem 35 m hohen Felsen in den Pazifik. Durch Überdecken mit einem Koordinatensystem kann die Flugbahn dieser Springer als Parabel modelliert werden.

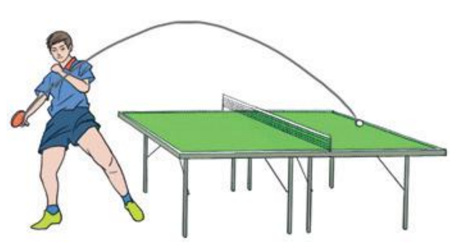
a) Der Funktionswert des Scheitelpunkts entspricht der maximalen Höhe von 35,5 m, obwohl der Fels nur 35 m hoch ist. Begründe.

b) Ermittle die Funktionsgleichung dieser Flugparabel.

c) Ein anderer Springer springt von einem 10 m hohen Sprungturm. Gehe von einer identischen Flugkurve aus und bestimme so erneut die Funktionsgleichung der Flugparabel. In welcher horizontalen Entfernung vom Absprungpunkt taucht der Springer ins Wasser ein?

Lege das Koordinatensystem geschickt fest.

3 Bei der Tischtennis-Weltmeisterschaft 2017 in Düsseldorf verteidigte der Chinese Ma Long mit einer sogenannten „Ballonabwehr". Der Tischtennisball wird dabei in einem 3,8 m hohen Bogen 10,6 m weit zurück auf die Platte gespielt. Wie lautet eine Funktionsgleichung dieser Flugparabel?

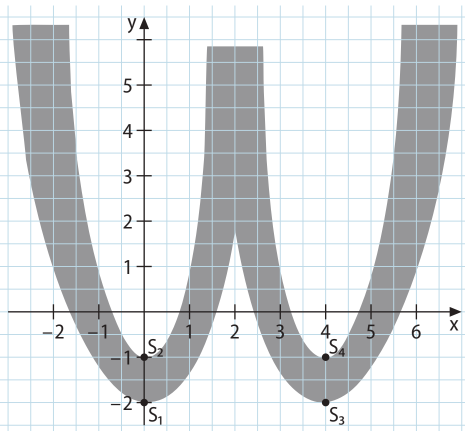


4 In jedem Freizeitpark ist die Fütterung der Delfine eine Attraktion. Die Delfine schwimmen in Richtung Pfleger, springen dann 3 m hoch und 8 m weit aus dem Wasser heraus und schnappen sich den Fisch.

a) Skizziere diese Parabel (1 cm entspricht 1 m).

b) Bestimme eine Funktionsgleichung der parabelförmigen Flugbahn.

5 Das Logo der Firma Willi Würstchen ist ein graues W. Die Abbildung zeigt das Logo, das mit einem Koordinatensystem hinterlegt wurde. Näherungsweise kann man die Ränder des Buchstabens mit vier Parabeln beschreiben (Scheitelpunkte S_1 bis S_4).

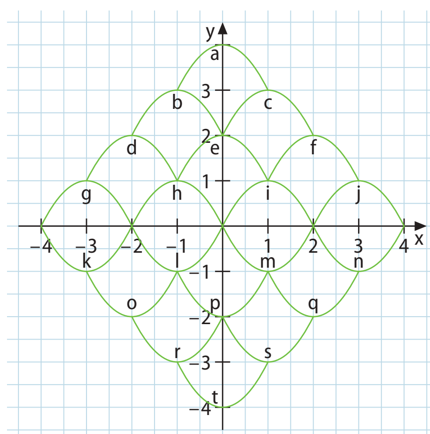


a) Gib die Koordinaten der Scheitelpunkte S_1 bis S_4 und die Nullstellen der Funktionen möglichst genau an.

b) Ermittle die Funktionsgleichungen der Parabeln mit den Scheiteln S_1 und S_2.

c) Zeichne alle Parabeln in dein Heft. Nutze Symmetrien und färbe das Logo. Beschreibe die Unterschiede zwischen deiner Kopie und dem Original.

6 In der Abbildung siehst du eine „Traube" aus insgesamt 20 verschobenen bzw. gespiegelten und verschobenen Normalparabeln. Die Parabeln sind durch Buchstaben gekennzeichnet.



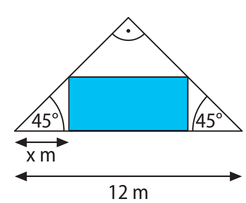
Die Buchstaben a bis j stehen unter, die Buchstaben k bis t über dem entsprechenden Bogen.

a) Bestimme für alle Parabelbögen k bis t die Scheitelpunkte und Funktionsgleichungen der Form $f(x) = x^2 + px + q$.

b) Worin unterscheiden sich z. B. die Parabeln a und t, b und r, … usw.?

c) Ermittle die Funktionsgleichungen für die Parabelbögen a bis j.

7 In einem Dachstudio soll an der 12 m breiten Giebelwand ein bodentiefes, rechteckiges Kunstwerk so installiert werden, dass zwei Ecken mit der Bodenkante zusammenfallen und die beiden anderen Ecken mit den Dachschrägen.
Um möglichst große Gestaltungsfreiheit zu haben, möchte der Künstler für sein Kunstwerk den größtmöglichen Flächeninhalt haben.



a) Bestimme den Flächeninhalt des Kunstwerks in Abhängigkeit von x.

b) Begründe, dass für $x = 0$ und $x = 6$ der Termwert für den Flächeninhalt null ist.

c) Berechne x für den größten Flächeninhalt und gib diesen an.

d) Finde mit einer Wertetabelle den x-Wert, für den das Kunstwerk quadratisch ist.

e) Berechne, um wie viel Prozent die quadratische Fläche kleiner ist als die größte rechteckige Fläche.

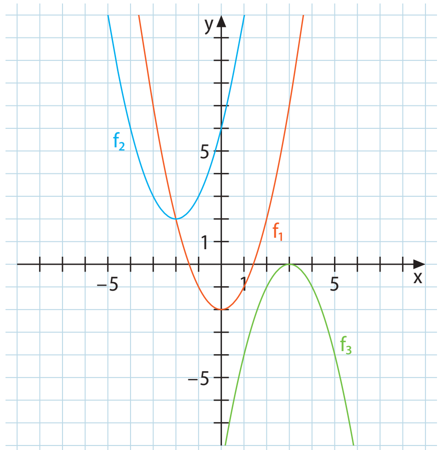
2 Aufgaben zur Differenzierung

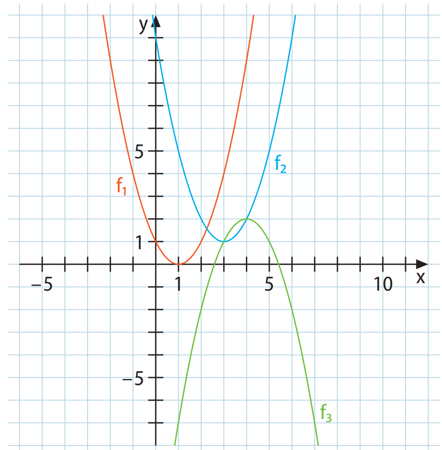
zu 2.1 **1** Zeichne folgende Parabeln und gib an, wie diese aus der Normalparabel entstanden sind.

a) $f(x) = x^2 + 1$
b) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$

a) $f(x) = (x + 1)^2$
b) $f(x) = (x + 4)^2 + a$

zu 2.2 **2** Gib die Funktionsgleichung und die Koordinaten des Scheitelpunktes folgender Parabeln an.





3 Bestimme c so, dass der Graph von f durch den Punkt P verläuft.

a) $f(x) = x^2 + c$ $P(0|1)$
b) $f(x) = (x + 2)^2 + c$ $P(1|1)$

a) $f(x) = x^2 + c$ $P(2|6)$
b) $f(x) = (x + c)^2 + 4$ $P(1|4)$

zu 2.3 **4** Ist die Aussage für die angegebene Funktion f (x) richtig oder falsch? Begründe.
a) Wenn $a > 0$, dann ist die Parabel immer nach oben geöffnet.
b) Wenn $a < 0$, dann hat die Funktion immer 2 Nullstellen.
c) Der Graph der Funktion ist um c-Einheiten entlang der y-Achse verschoben.
d) Der Koeffizient a gibt an, ob der Graph gestreckt oder gestaucht ist.
e) Wenn $a = 1$, dann entsteht eine verschobene Normalparabel.
f) Wenn $a = 0$, dann entsteht eine Normalparabel.

$f(x) = ax^2 + c$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

zu 2.4 **5** Beschreibe die Graphen der Funktionen.

a) $f(x) = x^2 + 2017$
b) $f(x) = (x + 2017)^2$
c) $f(x) = 2x^2 + 2017$

a) $f(x) = -3x^2 - 2017$
b) $f(x) = (x - 2017)^2 + 2$
c) $f(x) = -3 \cdot (x - 2017)^2$

zu 2.5 **6** Gib die Eigenschaften (Definitionsbereich, Wertebereich, Scheitelpunkt, Anzahl der Nullstellen, Monotonie, Gleichung der Symmetrieachse) folgender Funktionsgraphen an.

a) $f(x) = (x - 5)^2 + 2$
b) $f(x) = -2x^2 + x$

a) $f(x) = x^2 + 2x - 8$
b) $f(x) = -2x^2 + 2x - 4$

7 Ermittle jeweils den Scheitelpunkt des Graphen der quadratischen Funktion. **zu 2.5**

a) $f(x) = (x - 3)^2$
b) $f(x) = 2x^2 + 2x$
c) $f(x) = x^2 + 2x + 2$

a) $f(x) = (x - 3)^2 + 1$
b) $f(x) = -2x^2 + x$
c) $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$

8 Gib eine Gleichung einer Parabel mit folgenden Eigenschaften an. Die Parabel … **zu 2.6**

a) ist nach oben geöffnet, hat eine Nullstelle, ist um 2 Einheiten in positive x-Richtung verschoben.
b) ist gestreckt um den Faktor 3, hat den Scheitelpunkt $S(-1|-6)$.
c) hat eine Nullstelle im Koordinatenursprung.

a) ist nach unten geöffnet, hat keine Nullstelle, hat einen Scheitelpunkt auf der y-Achse.
b) ist gestaucht um den Faktor 0,5, ist nach unten geöffnet, hat den Scheitelpunkt $S(1|1)$.
c) hat zwei Nullstellen bei $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$.

9 Ermittle für die Brücken eine Funktionsgleichung, wenn … **zu 2.7**

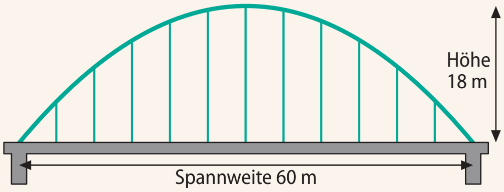
die y-Achse auch gleichzeitig Symmetrieachse der Parabel ist.

Bogenbrücke im Kromlauer Park
Höhe: 6,5 m; Spannweite: 15,6 m

die y-Achse nicht Symmetrieachse der Parabel ist.

Müngstener Brücke
Höhe: 69 m; Spannweite: 79 m

10 Eine parabelförmige Brücke über die Autobahn ist 75 m hoch und insgesamt 270 m breit.



a) Bestimme eine Funktionsgleichung g der parabelförmigen Brücke, bei der der höchste Punkt der Brücke auf der y-Achse liegt und die beiden Eckpunkte auf der x-Achse liegen.
b) Viele Brückenbögen werden zusätzlich durch senkrechte Träger verstärkt. Der Abstand zwischen den einzelnen Brückenträgern ist gleich. Berechne diesen.

a) Bestimme eine Funktionsgleichung g der parabelförmigen Brücke, bei der der linke Punkt der Brücke im Koordinatenursprung liegt.
b) Für eine bessere Stabilität der Brücke wurden 11 senkrechte Träger in gleichen Abständen eingezogen. Berechne die Länge der einzelnen Träger.

Vermischte Aufgaben

oHiMi
3–5, 10–11

1

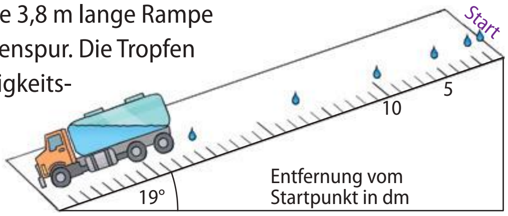
1 $f(x) = x^2 - 1$	2 $f(x) = x^2 - 0{,}25$	3 $f(x) = x^2 + 5$	4 $f(x) = x^2 + 1{,}5$

a) Zeichne den Graphen der Funktion mithilfe einer Wertetabelle $(-3 \le x \le 3)$.
b) Gib die Koordinaten des Scheitelpunktes S an und bestimme die Nullstellen der Parabel, falls vorhanden.

2 Finde heraus, ob der Punkt A auf der Parabel der Funktion liegt.
a) $f(x) = x^2$; $A(1{,}9|3{,}9)$
b) $f(x) = x^2 - 3{,}25$; $A(1{,}5|-1)$
c) $f(x) = x^2 - 12$; $A(3|3)$
d) $f(x) = x^2 + 20$; $A(-\sqrt{5}|25)$

3 Ist die Aussage für eine Funktion mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + e$ richtig oder falsch? Begründe.
a) Wenn a negativ ist, ergibt sich eine nach unten geöffnete Parabel.
b) Für $a > 0$ ist der Scheitelpunkt S der Tiefpunkt der Parabel.
c) Der Summand e gibt den Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse an.
d) Je größer e ist, desto weiter ist die Parabel nach oben verschoben.
e) Ist $a = 0$ und $e = 0$, dann erhält man eine Normalparabel.
f) Je kleiner a, desto schmaler die Öffnung der Parabel.
g) Wenn a positiv und e negativ ist, dann schneidet die Parabel die x-Achse genau zwei Mal.
h) Für $a = 0$ ist der Graph eine Gerade parallel zur x-Achse.
i) Der Koeffizient a gibt an, um wie viele Einheiten die Parabel auf der y-Achse verschoben wird.
j) Wenn a und e negativ sind, schneidet die Parabel die x-Achse in zwei Punkten.

4 In einem Experiment fährt ein Wagen eine 3,8 m lange Rampe herunter und hinterlässt dabei eine Tropfenspur. Die Tropfen entstehen dadurch, dass aus einem Flüssigkeitsbehälter regelmäßig nach einer Viertelsekunde ein Tropfen fällt.



Kannst du die Beobachtung erklären?

a) Beschreibe die Tropfenspur. Was fällt dir auf?
b) Übertrage die Tabelle in dein Heft und ergänze sie.

Fahrzeit t (in Viertelsekunden)	0	1	2	3	4
Entfernung s des Tropfens vom Startpunkt (in dm)	0				

Für das Koordinatensystem: 1 Viertelsekunde ≙ 1 cm, 10 dm ≙ 1 cm

c) Stelle die Wertepaare in einem Koordinatensystem dar.
d) Finde einen Term, der die Fahrstrecke in Abhängigkeit von der Fahrzeit beschreibt.

5 Beschreibe bei jeder Funktion, ob die zugehörige Parabel …
1 nach oben oder unten geöffnet ist. **2** gestreckt oder gestaucht ist.

Forme gegebenenfalls zunächst zur Funktionsgleichung $f(x) = y$ um.

a) $y = 1{,}5x^2$
b) $y = -0{,}9x^2$
c) $y = \frac{5}{4}x^2$
d) $y = -3{,}2x^2$
e) $2y = x^2$
f) $5x^2 + y = 0$
g) $2x^2 + 3y = 0$
h) $y + 4x^2 = 0$

6 Bestimme die Eigenschaften der jeweiligen Funktion und zeichne die zugehörige Parabel.

a) $f(x) = -x^2$ **b)** $f(x) = x^2 + 4$ **c)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ **d)** $f(x) = (x - 1)^2$

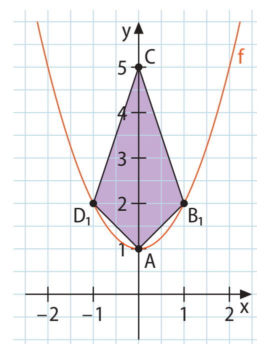
e) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **f)** $f(x) = x^2 - x + 1$ **g)** $f(x) = -x^2 + 1{,}5$ **h)** $f(x) = 2x^2 - 8$

7 Ermittle jeweils eine Gleichung einer quadratischen Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$, deren Graph …

Findest du mehrere Lösungen?

a) eine verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(-4\,|\,-2)$ ist.
b) gestreckt und symmetrisch zur y-Achse ist und keine Nullstelle besitzt.
c) eine nach unten geöffnete und gestauchte Parabel ist. Die Parabel ist symmetrisch zu $x = 3$.
d) eine verschobene Normalparabel mit den Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$ ist.
e) eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 5$ ist.

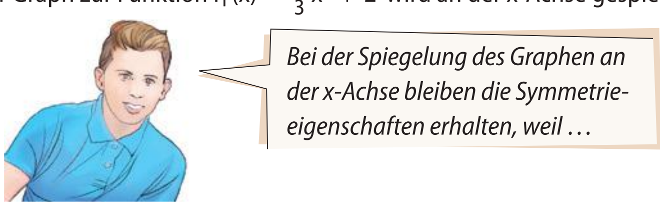
8 Dargestellt sind der Graph zur Funktion $f(x) = x^2 + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ sowie das Viereck AB_1CD_1 mit $A(0\,|\,1)$, $B_1(1\,|\,2)$, $C(0\,|\,5)$ und $D_1(-1\,|\,2)$. Die Punkte $B_n(x\,|\,x^2 + 1)$ und $D_n(-x\,|\,x^2 + 1)$ liegen auf der Parabel $f(x > 0)$.



a) Zeige, dass die Punkte B_n durch Achsenspiegelung an der y-Achse auf die Punkte D_n abgebildet werden können.
b) Handelt es sich bei den Vierecken AB_nCD_n um Drachenvierecke? Begründe.

9 Der Graph zur Funktion $f_1(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2$ wird an der x-Achse gespiegelt.

a)



Vervollständige Jacobs Aussage.
b) Wie lautet die Funktionsgleichung des gespiegelten Graphen?
c) Gib an, durch welche Achsenspiegelung der Graph zur Funktion $f_2(x) = \frac{1}{3}(x + 1)^2 + 2$ auf sich selbst abgebildet werden kann.

10 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0{,}5 \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$.
a) Begründe, welche Art von Funktion vorliegt.
b) Gib die Nullstellen der Funktion f ohne weitere Berechnung an.

11 Ermittle, welche Gleichungen jeweils dieselbe Funktion beschreiben.

1 $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1{,}5$

2 $f(x) = \sqrt{2} \cdot \left(x - 4\sqrt{2}\right)^2 - 33\sqrt{2}$

3 $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x - 4$

4 $f(x) = -\frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 3\frac{2}{3}$

5 $f(x) = \sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x + 5$

6 $f(x) = -\frac{3}{4} \cdot \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - 2\frac{5}{6}$

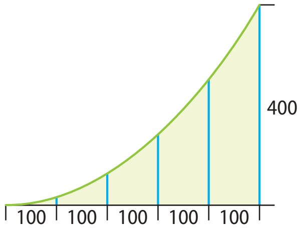
7 $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 16x - \sqrt{2}$

8 $f(x) = \sqrt{2} \cdot (x - 1)^2 - \sqrt{2} + 5$

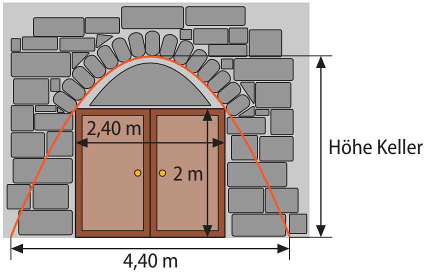
12 Ermittle die Gleichung der quadratischen Funktion f in der allgemeinen Form.
a) $A(5|-1)$, $B(10|4)$ liegen auf $f(x) = 0{,}2x^2 - bx + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$.
b) Der Graph der Funktion f stellt eine an der x-Achse gespiegelte und verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(-3|4)$ dar.
c) $A(3|-1)$, $B(2|-7)$ liegen auf $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Die Gleichung der Symmetrieachse des Graphen zu f lautet: $x = 4$.

13 Die Carrick-a-Rede ist eine Insel in Nordirland, die man nur zu Fuß über eine schmale Hängebrücke erreichen kann. Sie überspannt eine Meerenge von 20 m, der tiefste Punkt der Brücke liegt 30 m über der Wasseroberfläche. Ermittle eine Gleichung für die parabelförmige Hängebrücke, wenn sie 0,4 m durchhängt.

14 Die Abbildung zeigt eine Skateboardrampe. Die befahrbare Fläche nennt man Skatingboden, sie hat etwa die Form einer Parabel (Maße in cm).
a) Gib eine Funktionsgleichung für den Verlauf des Skatingbodens an.
b) Berechne die Höhen der Träger.

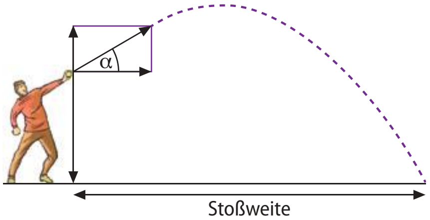


15 Oftmals werden Kellertüren durch Bögen abgestützt, um die Lasten des darüber liegenden Mauerwerks gut zu verteilen. Das Weingut „Riesling" plant für den Weinkeller den Bau eines neuen parabelförmigen Eingangs. Um mit einem Gabelstapler in den Weinkeller fahren zu können, muss der Eingang nebenstehende Bedingungen erfüllen:



a) Bestimme eine Funktionsgleichung dieses parabelförmigen Eingangs.
b) Wie hoch muss der Keller mindestens sein, damit man den Eingang in dieser Form mauern kann?

16 Der Kugelstoßer David Storl wurde 2011 in Daegu (Südkorea) als erster Deutscher Weltmeister mit einer Weite von 21,78 m. Aufgrund der Eigenschaften der Kugel entspricht die Flugbahn beim Kugelstoßen ziemlich genau einer Parabel.
Bei einem von David Storls Trainingsstößen wurden mithilfe einer Videokamera und einer normierten Leinwand drei Punkte der Flugbahn der Kugel gemessen:
$P_1(0|2{,}24)$ $P_2(1|2{,}92)$ $P_3(2|3{,}52)$



a) Ermittle die Höhe und die Weite von Davids Trainingsstoß. Vergleiche den Trainingsstoß mit der Siegerweite bei der Weltmeisterschaft 2011.
b) Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel für eine Stoßweite von 18,54 m und eine Abwurfhöhe von 1,92 m. Beschreibe dein Vorgehen. Verwende für den Parameter b den Wert 1.

17 Wird ein Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach unten geworfen, so gilt die Formel $s(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t$.

Die Fallbeschleunigung g ist ortsabhängig, in Deutschland beträgt sie etwa $9{,}81\,\frac{m}{s^2}$. Üblicherweise werden Rechnungen genau genug, wenn man für $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ nimmt.

a) Erkläre die physikalische Bedeutung der Größen s, t, v_0 und g.

b) Ein Stein wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 12\,\frac{m}{s}$ von einer 80 m hohen Felsklippe senkrecht nach unten ins Meer geworfen.

1. Berechne die Zeit, bis der Stein ins Wasser fällt.
2. Wie hoch über dem Wasser befindet sich der Stein 2 s nach seinem Abwurf?
3. Stelle den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar.

18 Auf einer Wiese soll ein rechteckiger Weideplatz eingezäunt werden. Es stehen 24 m Zaun zur Verfügung.

a) Überprüfe, ob die gegebenen Rechtecke mit den Seitenlängen a und b diese Bedingung erfüllen. Gib, falls zutreffend, den zugehörigen Flächeninhalt an.

1. $a = 2\,m;\ b = 10\,m$
2. $a = 4\,m;\ b = 8\,m$
3. $a = 6\,m;\ b = 8\,m$
4. $a = 7\,m;\ b = 5\,m$

b) Ermittle den Flächeninhalt des Weideplatzes in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des Rechtecks.

c) Stelle die Funktion grafisch dar und zeige damit die Angaben von a).

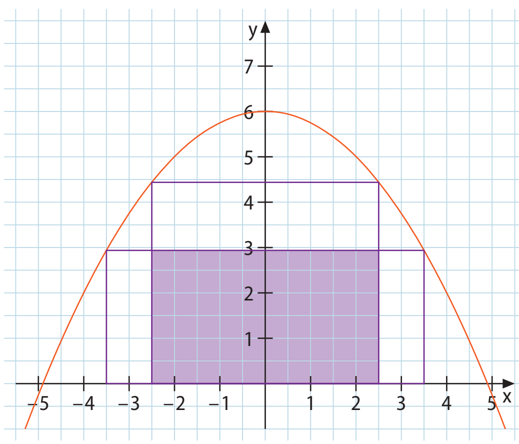
d) Bestimme die Seitenlängen des Weideplatzes anhand des folgenden Vorgehens. Gib den maximalen Flächeninhalt an.

Bei solchen **Extremwertaufgaben** geht man wie folgt vor:	**Beispiel:**
1 Formel für die zu optimierende Größe in Abhängigkeit von mehreren Variablen aufstellen (Hauptbedingung).	$A = a \cdot b$
2 Ersetzen einer Variablen durch die andere (Nebenbedingung), dann einsetzen.	$u = 2 \cdot (a + b)$ $A(a) = -a^2 + 12a$
3 Wert für maximalen (oder minimalen) Funktionswert bestimmen.	$a = \ldots$
4 Zugehörigen Wert bestimmen.	$b = \ldots$

19 Löse ebenso mit dem Verfahren von Aufgabe 18.

a) Ermittle zwei positive Zahlen mit maximalem Produkt so, dass deren Summe 12 ergibt.

b) Gegeben ist eine Parabel durch $f(x) = 6 - 0{,}25x^2$. In den Ausschnitt der Ebene, der zwischen Parabel und x-Achse liegt, ist ein Rechteck so einzubeschreiben, dass dessen Umfang am größten ist. Ermittle die Seitenlängen des Rechtecks.



Werkzeug

Der Begriff Mindmap geht auf den britischen Psychologen Tony Buzan zurück und heißt übersetzt Gedankenlandkarte.

Du hast bereits verschiedene Funktionen kennengelernt: direkt proportionale Funtionen, lineare Funktionen und quadratische Funktionen. Jede dieser Funktionen hat besondere Eigenschaften.
Es ist gar nicht so leicht, bei all den unterschiedlichen Informationen den Überblick zu behalten. Eine einfache und sehr gute Methode kann dir dabei helfen: die **Mindmap**.
Wie man eine Mindmap erstellt, wird dir im Folgenden am Beispiel „lineare Funktionen" erklärt.

Schritt 1:
Schreibe genau in die Mitte des Blattes das Thema und hebe es farbig hervor.

Wenn ich an lineare Funktionen denke, fallen mir viele Eigenschaften ein. Ich muss eine Ordnung herstellen.

Schritt 2:
Von der Mitte aus werden auf die Hauptäste der Mindmap die Begriffe geschrieben, die nach dem zentralen Begriff am wichtigsten sind.

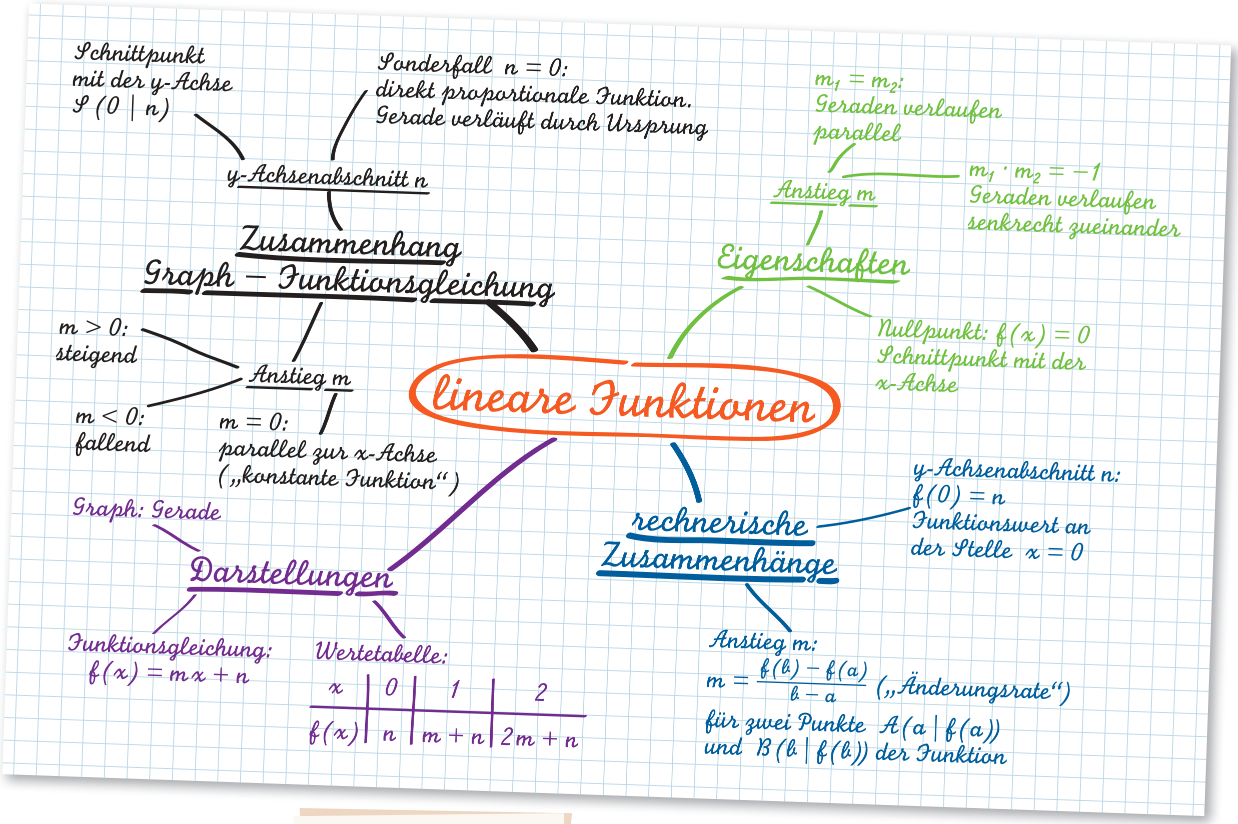
Wir haben durchgenommen, was lineare Funktionen sind, wie man sie auf verschiedene Arten darstellen kann und welche Eigenschaften sie haben.

Schritt 3:
Jeder Zweig kann sich weiter verästeln, um neue Begriffe aufzuführen oder mehr ins Detail zu gehen.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Funktionsgleichung aufzustellen: Es sind zwei Punkte gegeben oder …

Schritt 4:
Es ist möglich, Verknüpfungen zwischen den Zweigen herzustellen.

Direkt propotionale Funktionen sind Sonderfälle linearer Funktionen mit dem Nullpunkt N(0|0).



1 **a)** Beschreibe Zusammenhänge zwischen verschiedenen Ästen in dem dargestellten Mindmap.
b) Mache Vorschläge, wie man ein solches Mindmap anders ordnen kann.

2 Erstelle in einer Kleingruppe ein Mindmap zu quadratischen Funktionen.
Stellt das Mindmap in der Klasse vor.

Ideen für Bestandteile:

Normalparabel | Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ | Scheitelpunktform

Das kann ich!

Überprüfe deine Fähigkeiten und Kompetenzen. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben und bewerte anschließend deine Lösungen mit einem Smiley. Hinweise zum Nacharbeiten findest du auf der folgenden Seite. Die Lösungen stehen im Anhang.

Das kann ich **wirklich gut!**	Das kann ich **fast!**	Das muss ich **noch üben!**

1 Die Punkte A bis D liegen auf einer Normalparabel.
A (–1,2 | □); B (3,1 | □); C (□ | 3,24); D (□ | 5,76)
Bestimme die fehlenden Werte.

2 Gegeben sind die Funktionsgleichungen:

1 $f(x) = x^2$ **2** $f(x) = (x - 2)^2$

3 $f(x) = 1{,}5x^2 - 6$ **4** $f(x) = -0{,}5x^2 + 3$

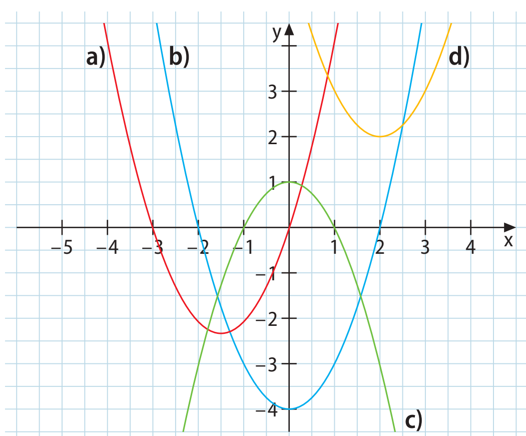
a) Stelle die Funktionen in einem Koordinatensystem grafisch dar.

b) Beschreibe die Graphen von **2** – **4** im Vergleich zur Normalparabel.

3 Zeichne eine Normalparabel mit Scheitel S (0 | 0). Zeichne in das gleiche Koordinatensystem die Graphen quadratischer Funktionen ebenfalls mit Scheitel S (0 | 0) und folgenden Eigenschaften. Gib jeweils die Funktionsgleichung an.

a) gestauchte Parabel **b)** gespiegelte Parabel

4 Gib die Scheitelpunkte der Parabeln an. Bestimme die Eigenschaften der Funktionen.



5 Gib mindestens drei Eigenschaften der Funktionen an. Stelle sie grafisch dar.

a) $f(x) = -\frac{4}{5}x^2 + 0{,}5$ **b)** $f(x) = x^2 - 4x + 3$

c) $f(x) = (x + 1) \cdot (x - 1)$ **d)** $f(x) = x \cdot (x - 2{,}5)$

6 Entscheide, ob Gleichungen quadratischer Funktionen gegeben sind. Begründe.

a) $f(x) = 3x + 4$ **b)** $f(x) = x \cdot x - 3$

c) $f(x) = x^{-2}$ **d)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x$

e) $f(x) = x\,(x - 0{,}5) \cdot (x + 3)$

7 **1** $f(x) = x^2 - 8x + 9$ **2** $f(x) = 0{,}5x^2 + 5x + 28{,}5$

Löse jeweils die Aufgabe.

a) Liegt die Symmetrieachse der Parabel rechts oder links von der y-Achse?

b) Der Punkt P auf der Parabel hat die Koordinaten (2 | □).

8 Bestimme jeweils die Funktionsgleichung der verschobenen bzw. gespiegelten Normalparabel in Scheitelpunkt- und allgemeiner Form.

a) Die nach oben geöffnete Parabel von f_1 hat den Scheitelpunkt S (–1,2 | –1,5).

b) Der Graph von f_2 entstand durch Verschiebung des Graphen von f_1 um 3,4 Einheiten nach rechts und 3 Einheiten nach unten.

c) f_3 hat die Nullstellen bei $x_1 = -3$ und $x_2 = 5$.

d) Der Graph von f_4 entstand durch Spiegelung des Graphen von f_1 an der y-Achse.

e) Der Graph von f_5 entstand durch Spiegelung des Graphen von f_1 an der x-Achse.

f) Der größte Funktionswert von f_6 liegt bei –3 und ist –1,5.

g) Der Graph von f_7 ist nach unten geöffnet und hat den Scheitelpunkt im Koordinatenursprung.

9 Der Punkt P liegt jeweils auf dem Graphen einer Funktion der Form $f(x) = ax^2$.

1 $P(5|-37{,}5)$ **2** $P(-2|1)$
3 $P(-3|-4{,}5)$ **4** $P(-6|90)$
5 $P(-1{,}5|0{,}9)$ **6** $P\left(-\frac{1}{4}\middle|\frac{1}{4}\right)$
7 $P(2{,}8|-4{,}9)$ **8** $P(-0{,}9|-8{,}1)$

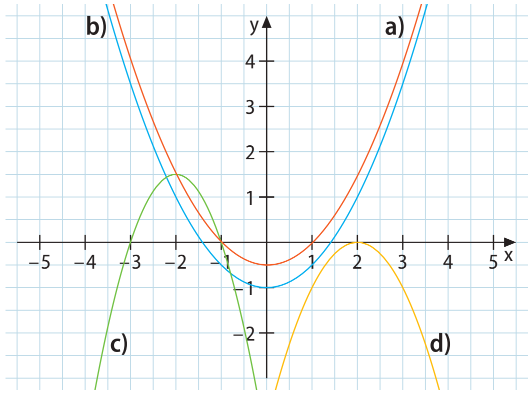
a) Entscheide, ob a positiv oder negativ ist. Begründe.
b) Bestimme a, indem du den Graphen mit der Normalparabel vergleichst.

10 Gegeben ist der Punkt P, der auf der Parabel mit der angegebenen Funktionsgleichung liegt.

1 $P(-1|8)$; $f(x) = ax^2 + 6$
2 $P(-4|0)$; $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + c$
3 $P(-1|-2)$; $f(x) = ax^2 + 2$

a) Berechne a bzw. c.
b) Gib die Koordinaten des Scheitelpunktes S der Parabel an.

11 Gib Funktionsgleichungen zu den Parabeln an.



12 Betrachtet man den Querschnitt eines Hühnereis, so kann man dessen Umrisse näherungsweise durch Parabeln beschreiben. Besorge dir ein Ei, vermiss es und stelle es mithilfe von Parabelbögen in einem Koordinatensystem dar. Vergleiche die Lösung mit einem Partner.

Aufgaben für Lernpartner

Sind folgende Behauptungen richtig oder falsch? Begründe schriftlich.

A Eine um 3 LE nach links und 1 LE nach oben verschobene Normalparabel hat den Scheitelpunkt $S(3|1)$.

B Die Funktionsgleichung der an der x-Achse gespiegelten Normalparabel heißt $f(x) = -x^2$.

C Jede Gerade mit der Gleichung $f(x) = mx + n$ schneidet die Normalparabel $f(x) = x^2$ in zwei Punkten.

D Wenn in der Gleichung $f(x) = ax^2 + e$ der Faktor $a = 5$ ist, ist der Graph eine gestreckte Parabel.

E Wenn in der Gleichung $f(x) = ax^2 + e$ der Summand $e = -5$ ist, schneidet die Parabel der Funktion die y-Achse im Punkt $P(0|-5)$.

F Die folgenden Gleichungen sind Funktionsgleichungen von quadratischen Funktionen.
a) $y = 2x + 2$ **b)** $x^2 = y - 1$ **c)** $x^2 = 2y$

Ich kann …	Aufgaben	Hilfe
überprüfen, ob gegebene Punkte auf einer Parabel liegen.	1, 6, 9, F	S. 54
quadratische Funktionen durch Verschiebung und Stauchung/Streckung der Normalparabel beschreiben.	2, 3, 4, A, D	S. 56, 60
Eigenschaften quadratischer Funktionen bestimmen.	5, 7, C, E	S. 68
Funktionsgleichungen quadratischer Funktionen bestimmen.	8, 9, 10, 11, B	S. 64, 72
quadratische Funktionen im Alltag anwenden.	12	S. 74

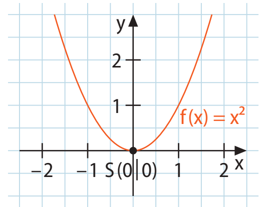
2 Auf einen Blick

Seite 54

Die Normalparabel

Die Gleichung $\mathbf{y = x^2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ beschreibt eine **quadratische Funktion f.** Ihr Graph ist eine **Normalparabel**.
Der Punkt **S (0 | 0)** heißt **Scheitelpunkt**.

Eigenschaften:
- $f(x) \geq 0$
- $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$ (minimaler Funktionswert)



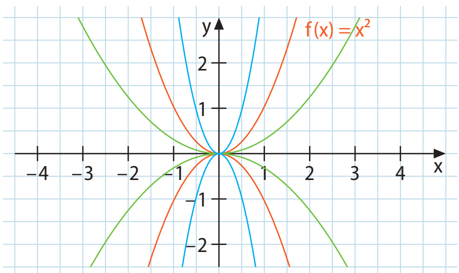
Seite 60

Stauchung und Streckung

Funktionen mit der Gleichung $f(x) = ax^2$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $x \in \mathbb{R}$ beschreiben Parabeln, deren Scheitelpunkt S im Ursprung liegt.

$\mathbf{a > 0}$: nach **oben geöffnete** Parabel
$\mathbf{a < 0}$: nach **unten geöffnete** Parabel

$\mathbf{|a| > 1}$: **gestreckte** Parabel
$\mathbf{|a| < 1}$: **gestauchte** Parabel

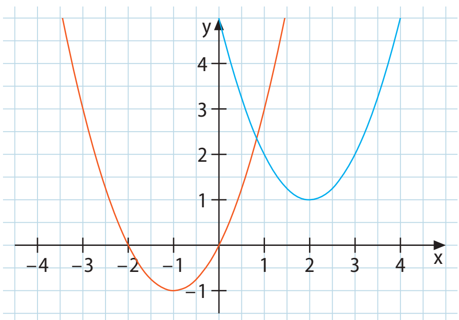


Seite 64

Scheitelpunkt- und Normalform

Der Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $\mathbf{f(x) = (x + d)^2 + e}$ bzw.
$\mathbf{f(x) = a(x + d)^2 + e}$ **(Scheitelpunktform)** ist eine zu $x = -d$ symmetrische Parabel mit dem Scheitelpunkt **S (−d | e)**.

Die **Normalform** einer quadratischen Funktion ist $\mathbf{f(x) = x^2 + px + q}$ ($p, q \in \mathbb{R}$). Der Graph ist eine verschobene Normalparabel mit $\mathbf{S} = \left(-\frac{p}{2} \,\middle|\, -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right)$.
An der Diskriminante $\mathbf{D} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \mathbf{q}$ erkennt man die Anzahl der Nullstellen der Parabel.
$D > 0$ zwei Nullstellen
$D = 0$ eine Nullstelle
$D < 0$ keine Nullstelle

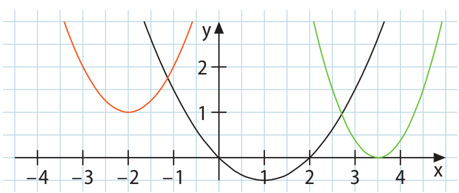


$f(x) = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x$ S (−1 | −1)
$f(x) = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$ S (2 | 1)

Seite 68

Allgemeine Form

Der Graph einer quadratischen Funktion $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ **(allgemeine Form)** ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkt
$S\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.



$f(x) = (x + 2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5$
$f(x) = 0{,}5 \cdot (x - 1)^2 - 0{,}5 = 0{,}5x^2 - x$
$f(x) = 1{,}5 \cdot (x - 3{,}5)^2$
$= 1{,}5x^2 - 10{,}5x + 18{,}375$