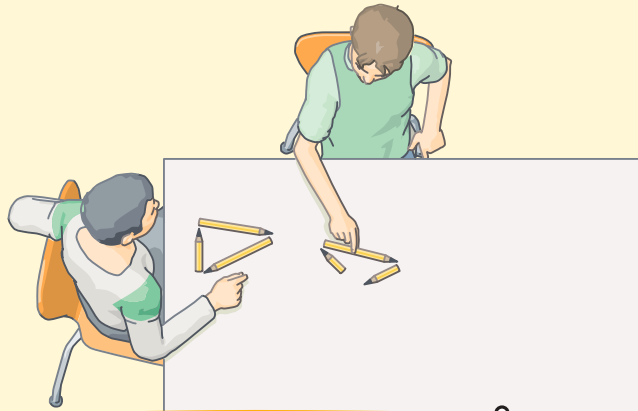
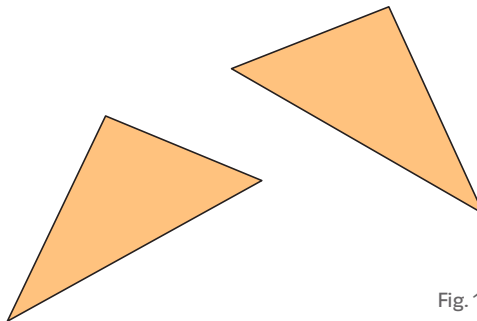


1 Kongruenz von Dreiecken



Die beiden Dreiecke in Fig. 1 stimmen in allen drei Seitenlängen überein. Wenn man die Dreiecke ausschneidet, kann man sie so übereinanderlegen, dass sie sich vollständig überdecken. Die beiden Dreiecke sind also kongruent.

Um zu prüfen, ob zwei Dreiecke kongruent sind, ist es nicht notwendig, alle Seitenlängen und Winkel zu kennen. Häufig genügt es, wenn drei Größen des Dreiecks übereinstimmen.



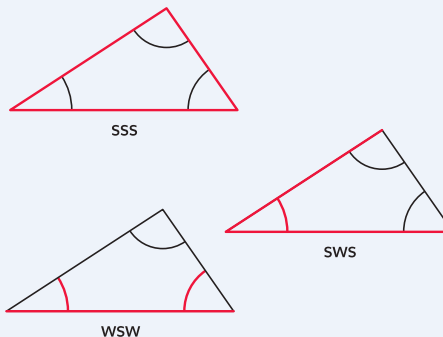
congruere (lat.)
= übereinstimmen

Fig. 1

Kongruenzsätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind zueinander kongruent, wenn sie in folgenden Größen übereinstimmen:

- in drei Seiten (sss),
- in zwei Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel (sws),
- in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln (wsw).



Sind drei Größen eines Dreiecks entsprechend den Kongruenzsätzen gegeben, so lässt sich ein Dreieck immer dann eindeutig konstruieren, wenn

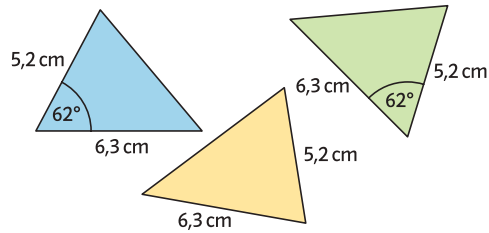
- bei drei vorgegebenen Streckenlängen die Summe der beiden kürzeren Strecken größer ist als die Länge der größten Strecke (vergleiche Beispiel 3),
- bei zwei vorgegebenen Winkelgrößen die Summe der beiden Winkelgrößen kleiner ist als 180° .

Beispiel 1 Kongruenz untersuchen

Welche Dreiecke sind kongruent?
Begründe.

Lösung

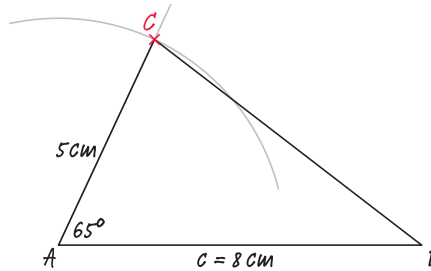
Das blaue und das grüne Dreieck sind kongruent, weil sie in zwei Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (sws).

**Beispiel 2 Dreieck konstruieren**

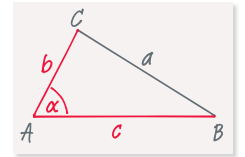
Konstruiere ein Dreieck ABC mit $b = 5\text{ cm}$; $c = 8\text{ cm}$ und $\alpha = 65^\circ$.

Lösung

Zeichne die Strecke c der Länge 8 cm mit den Endpunkten A und B. Trage den Winkel α an A an. Zeichne einen Kreisbogen mit dem Radius 5 cm um A. Der Schnittpunkt des Kreisbogens mit dem freien Schenkel des Winkels α ist die Ecke C des Dreiecks.



Eine **Planfigur** hilft beim Festlegen der Reihenfolge der Konstruktions-schritte.

**Beispiel 3 Konstruierbarkeit von Dreiecken**

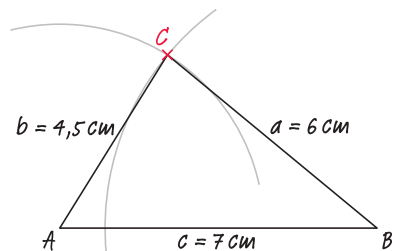
Konstruiere, falls möglich, aus den gegebenen Seitenlängen ein Dreieck.

a) $c = 7\text{ cm}$; $b = 4,5\text{ cm}$; $a = 6\text{ cm}$

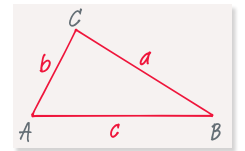
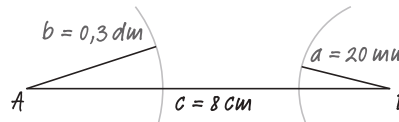
b) $a = 20\text{ mm}$; $b = 0,3\text{ dm}$; $c = 8\text{ cm}$

Lösung

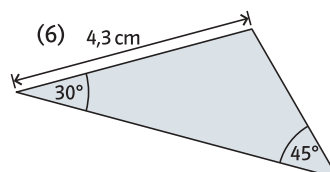
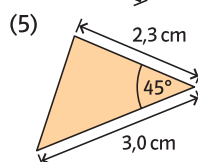
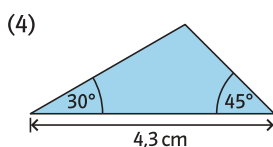
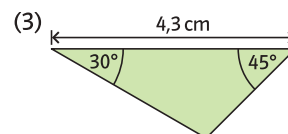
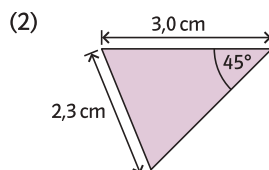
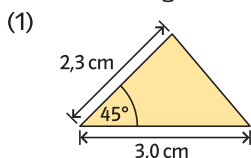
a) Zeichne eine Strecke c der Länge 7 cm mit den Endpunkten A und B. Zeichne um A einen Kreisbogen mit dem Radius $4,5\text{ cm}$ und um B einen Kreisbogen mit dem Radius 6 cm . Der Schnittpunkt der beiden Kreisbögen ist die Ecke C des Dreiecks. Verbinde A und C sowie B und C.



b) Es ist $2\text{ cm} + 3\text{ cm} < 8\text{ cm}$. Ein Dreieck mit den angegebenen Seitenlängen gibt es nicht. Versucht man trotzdem zu konstruieren, erhält man die nebenstehende Figur.

**Aufgaben**

- 1 Welche der folgenden Dreiecke sind zueinander kongruent? Gib an, welchen Kongruenzsatz du als Begründung verwenden kannst.



2 Sind die Dreiecke ABC und A'B'C' zueinander kongruent? Erstelle eine Planfigur und gib an, mit welchem Kongruenzsatz du argumentierst.

- a) $c = 4\text{ cm}$; $b = 7\text{ cm}$; $a = 5\text{ cm}$ und $c' = 4\text{ cm}$; $b' = 5\text{ cm}$; $a' = 7\text{ cm}$
- b) $a = 4,5\text{ cm}$; $b = 5\text{ cm}$; $\gamma = 70^\circ$ und $a = 5\text{ cm}$; $b = 4,5\text{ cm}$; $\gamma = 70^\circ$
- c) $b = 8,7\text{ cm}$; $\alpha = 67^\circ$; $\gamma = 45^\circ$ und $c' = 8,7\text{ cm}$; $\alpha' = 45^\circ$; $\gamma = 67^\circ$
- d) $b = 7,8\text{ cm}$; $c = 8,7\text{ cm}$; $\alpha = 45^\circ$ und $a' = 7,8\text{ cm}$; $c' = 8,7\text{ cm}$; $\beta' = 45^\circ$
- e) $c = 4\text{ cm}$; $\alpha = 70^\circ$; $\beta = 45^\circ$ und $b' = 4\text{ cm}$; $\alpha' = 70^\circ$; $\gamma' = 45^\circ$
- f) $c = 1,2\text{ cm}$; $\alpha = 49^\circ$; $\beta = 91^\circ$ und $a' = 1,2\text{ cm}$; $\beta' = 91^\circ$; $\gamma' = 49^\circ$
- g) $\text{Ü}\overline{\text{Ü}}$ Überlege dir selbst ähnliche Aufgaben und lasse sie deinen Partner lösen.

3 Konstruiere die folgenden Dreiecke. Fertige zuvor jeweils eine Planfigur an und beschreibe die Konstruktion.

- a) $b = 5\text{ cm}$; $\gamma = 45^\circ$; $\alpha = 60^\circ$
- b) $b = 4,6\text{ cm}$; $\alpha = 75^\circ$; $c = 8\text{ cm}$
- c) $a = 6,8\text{ cm}$; $\gamma = 110^\circ$; $b = 4,7\text{ cm}$
- d) $c = 0,7\text{ dm}$; $\beta = 35^\circ$; $\gamma = 80^\circ$
- e) $\overline{AB} = 45\text{ mm}$; $\alpha = 68^\circ$; $\gamma = 55^\circ$
- f) $\overline{AC} = 5,4\text{ cm}$; $\overline{BC} = 3,2\text{ cm}$; $\gamma = 75^\circ$
- g) $a = 7,5\text{ cm}$; $b = 4\text{ cm}$; $c = 5\text{ cm}$
- h) $c = 8\text{ cm}$; $a = 64\text{ mm}$; $b = 7,5\text{ cm}$

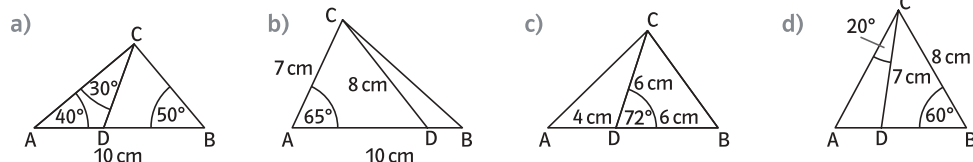
4 a) Untersuche, ob sich ein Dreieck mit den gegebenen Seitenlängen $a = 4\text{ cm}$, $b = 6,5\text{ cm}$ und $c = 25\text{ mm}$ konstruieren lässt.

b) Gib Seitenlängen an, aus denen sich kein Dreieck konstruieren lässt.

5 $\text{Ü}\overline{\text{Ü}}$ Von einem Dreieck ABC sind die Seite $b = 5,3\text{ cm}$ und der Winkel $\alpha = 30^\circ$ gegeben.

- a) Zeichne nach diesen Angaben zwei Dreiecke, die nicht zueinander kongruent sind. Vergleiche deine Dreiecke mit denen deines Partners.
- b) Ergänze jeweils eine Angabe, sodass je eine Aufgabe zu den Kongruenzsätzen wsw und sws entsteht. Lasse deinen Partner die zugehörigen Dreiecke konstruieren und kontrolliere seine Lösungen.

6 Konstruiere die Figur. Überlege dir zuvor die Reihenfolge der Konstruktionsschritte. Beschreibe dein Vorgehen.



7 Auf wie viele verschiedene Arten lässt sich das zwei Meter lange Metermaß zu einem Dreieck knicken?



8 Auf dem Münsterplatz in Ulm ist im Boden vor dem Haupteingang des Münsters eine Tafel eingelassen, welche die Richtungen und die Entfernungen (Luftlinie) Ulms zu verschiedenen Metropolen angibt. Bestimme mithilfe der Angaben auf der Tafel durch Konstruktion geeigneter Dreiecke folgende Entfernungen:

- a) London – Zürich
- b) Amsterdam – Paris



9 Untersuche, ob es die Kongruenzsätze (wws) und (www) gibt.



Bist du schon sicher?

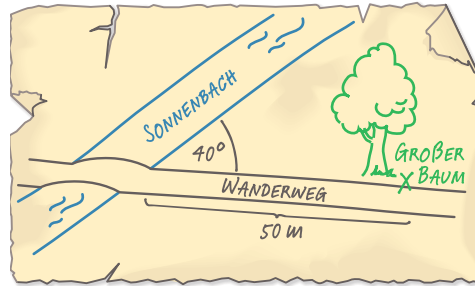
- 10 Konstruiere das Dreieck und beschreibe die Konstruktion. Bestimme anhand der Zeichnung die weiteren Größen im Dreieck. Nenne auch den zugehörigen Kongruenzsatz.
 a) $a = 3,5 \text{ cm}$; $b = 5,4 \text{ cm}$; $c = 7 \text{ cm}$ b) $a = 6 \text{ cm}$; $\beta = 42^\circ$; $\gamma = 61^\circ$
- 11 Gegeben sind die Punkte $A(1|0)$, $B(4|0)$, $C(3|2)$, $D(5|5)$, $E(2|5)$, $F(3|3)$, $G(-2|1)$, $H(2|1)$ und $I(1|-1)$. Welche der Dreiecke ABC , DEF und GHI sind kongruent?
- 12 Das Parallelogramm in Fig. 1 ist durch zwei Schnitte in vier Teildreiecke zerlegt worden. Welche Teildreiecke sind kongruent?



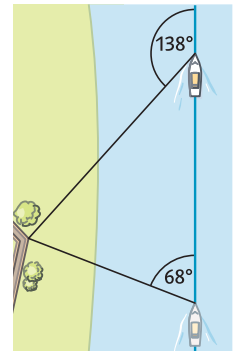
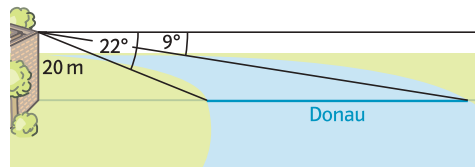
Fig. 1

→ Lösungen | Seite 176

- 13 Zeichne zueinander nicht kongruente Dreiecke, bei denen eine Seite $2,5 \text{ cm}$ lang ist, ein Winkel 45° und ein anderer Winkel 82° misst.
- 14 Auf der Rückseite der Schatzkarte steht: „Der Schatz befindet sich direkt am Sonnenbach und ist 40 m vom großen Baum entfernt.“ Finde den Schatz.



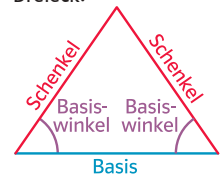
- 15 a) Theo blickt von der Stadtmauer auf die Donau. Er weiß, dass die Stadtmauer 20 m höher als der Wasserspiegel der Donau liegt. Nun peilt er die beiden Flussufer an und möchte damit die Breite der Donau bestimmen.
- b) Auf der Donau fährt ein Ausflugsboot. Es ist 110 m von Theos Standpunkt auf der Stadtmauer entfernt. Der Winkel zwischen der Fahrtrichtung und der Richtung zum Standpunkt beträgt 68° . Zwei Minuten später beträgt der entsprechende Winkel 138° . Bestimme daraus die zurückgelegte Strecke.



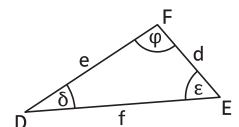
16 ☞ Gleichschenklige Dreiecke

- a) Moritz behauptet: „Bei einem gleichschenkligen Dreieck muss ich nur zwei Größen kennen, um es eindeutig konstruieren zu können.“ Was meinst du dazu?
- b) Moritz unterstreicht seine Behauptung, indem er drei „Kongruenzsätze für gleichschenklige Dreiecke“ formuliert. Wie könnten diese lauten?
- c) Erfinde drei Konstruktionsaufgaben für gleichschenklige Dreiecke und tausche sie zur Lösung mit deinem Partner aus.
- d) Welche Angaben muss man kennen, um ein gleichseitiges Dreieck eindeutig konstruieren zu können?

Bezeichnungen im gleichschenkligen Dreieck:



- 17 Entscheide, ob die Dreiecke ABC und DEF zueinander kongruent sind.
- a) $c = 5 \text{ cm}$; $\alpha = 72^\circ$; $\beta = 65^\circ$ und $f = 5 \text{ cm}$; $\delta = 65^\circ$; $\varepsilon = 72^\circ$
 b) $b = 7 \text{ cm}$; $\gamma = 38^\circ$; $\alpha = 85^\circ$ und $e = 7 \text{ cm}$; $\varphi = 38^\circ$; $\varepsilon = 85^\circ$
 c) $a = 34 \text{ mm}$; $\gamma = 80^\circ$; $\alpha = 25^\circ$ und $d = 3,4 \text{ cm}$; $\varepsilon = 75^\circ$; $\delta = 25^\circ$



- 18 Die Tabelle enthält die Werte einer proportionalen Zuordnung. Berechne die fehlenden Werte.

0,5	▲	2	8	●
◆	6	12	■	192

Kannst du das noch?

vgl. Seite 173
Lösungen | Seite 176