Bestimmtes Integral und Flächeninhalt

Das **bestimme Integral** gibt den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse über einem Intervall $[a;b]$ an.

Man schreibt: $\int_a^b f(x)\ dx$.

a und b sind die Grenzen des Integrals.

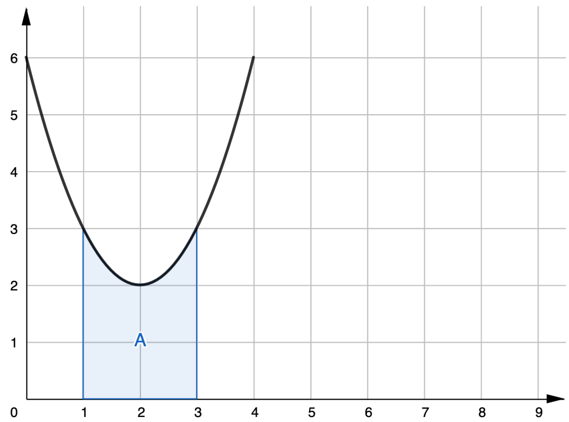
Orientierter Flächeninhalt heißt, dass die Inhalte von Flächen oberhalb der x-Achse ein positives Vorzeichen und Flächen unterhalb der x-Achse ein negatives Vorzeichen besitzen.

Bemerkung: Orientier Flächeninhalt kann positiv oder negativ sein, aber der Flächeninhalt ist immer positiv.

Beispiele

1. $f(x) = x^2 - 4x + 6$. Intervall: $[1;3]$.

$$\text{A} = \int_1^3 (x^2 - 4x + 6)\ dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + 6x\right]_1^3$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x\right]_1^3$$
$$= \left[\frac{3^3}{3} - 2\cdot 3^2 + 6\cdot 3\right] - \left[\frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 6\cdot 1\right]$$
$$= 9 - \frac{13}{3} = \frac{14}{3} = 4{,}67.$$

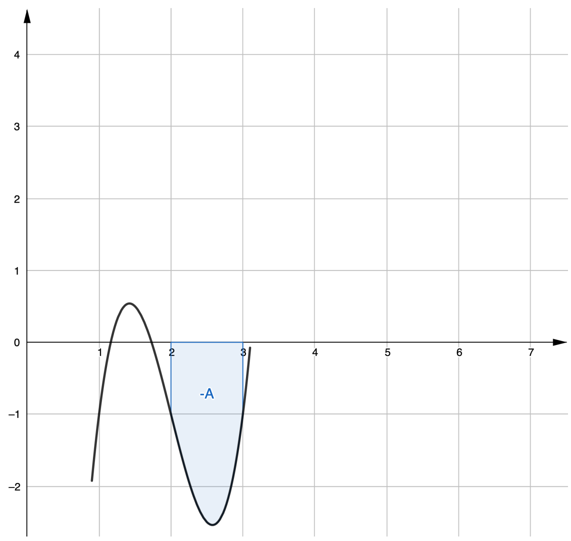


2. $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 25$. Intervall: $[2;3]$.

$$\text{-A} = \int_2^3 (4x^3 - 24x^2 + 44x - 25)\ dx$$
$$= \left[4\cdot\frac{x^4}{4} - 24\cdot\frac{x^3}{3} + 44\cdot\frac{x^2}{2} - 25x\right]_2^3$$
$$= \left[x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 25x\right]_2^3$$
$$= \left[3^4 - 8\cdot 3^3 + 22\cdot 3^2 - 25\cdot 3\right] - \left[2^4 - 8\cdot 2^3 + 22\cdot 2^2 - 25\cdot 2\right]$$
$$= [-12] - [-10] = -12 + 10 = -2.$$

-A $= -2 \rightarrow$ A $= 2$.

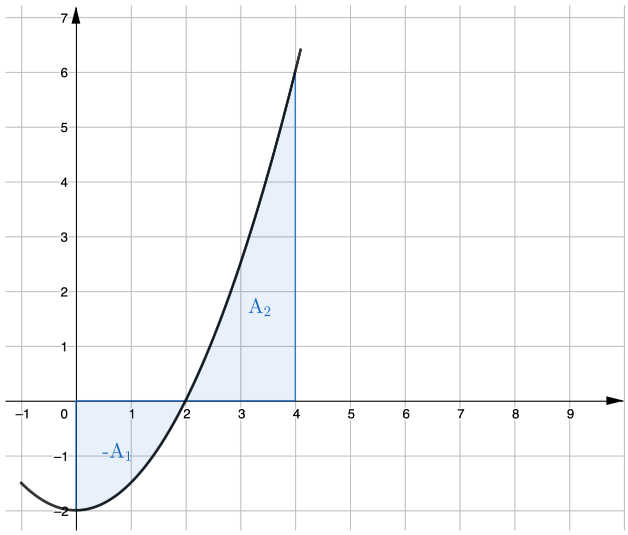
Das integral ist negativ, aber der Flächeninhalt A ist immer positiv.



Liegen Teile der Fläche oberhalb und Teile unterhalb der x-Achse, so muss die gesamte Fläche mit mehreren Integralen berechnet werden. Dazu muss die Nullstellen der Funktion, die im Intervall liegt, beachtet werden.

Beispiel

3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$. Intervall: $[0; 4]$.



Bemerkung: Der gesuchte Flächeninhalt ist nicht

$$\int_0^4 (\frac{1}{2}x^2 - 2)\ dx.$$

Nullstellen:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0 \mid \cdot 2$$
$$x^2 - 4 = 0 \mid +4$$
$$x^2 = 4 \mid \sqrt{}$$
$$x_1 = 2 \text{ und } x_2 = -2.$$

Die Nullstelle $x_1 = 2$ liegt im Intervall $[0; 4]$.

<u>A₁</u>

$$\text{-A}_1 = \int_0^2 (\frac{1}{2}x^2 - 2)\ dx$$
$$= [\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - 2x]_0^2$$
$$= [\frac{1}{6}x^3 - 2x]_0^2$$
$$= [\frac{1}{6}2^3 - 2 \cdot 2] - [\frac{1}{6}0^3 - 2 \cdot 0]$$
$$= -\frac{8}{3} - 0 = -\frac{8}{3}.$$

$$\text{-A}_1 = -\frac{8}{3} \rightarrow \text{A}_1 = \frac{8}{3}.$$

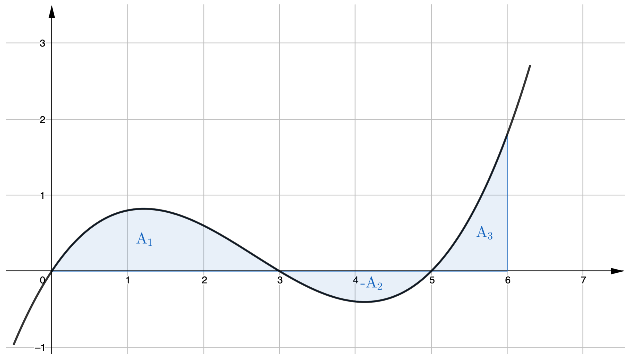
<u>A₂</u>

$$\text{A}_2 = \int_2^4 (\frac{1}{2}x^2 - 2)\ dx$$
$$= [\frac{1}{6}x^3 - 2x]_2^4 \text{ (Die Stammfunktion haben wir von oben genommen)}$$
$$= [\frac{1}{6}4^3 - 2 \cdot 4] - [\frac{1}{6}2^3 - 2 \cdot 2]$$
$$= [\frac{8}{3}] - [-\frac{8}{3}] = \frac{16}{3}.$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt

$$\text{A}_1 + \text{A}_2 = \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 8.$$

4. $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}8x^2 + 1{,}5x$. Intervall: $[0; 6]$.



Nullstellen:

$$0{,}1x^3 - 0{,}8x^2 + 1{,}5x = 0$$

$$x \cdot (0{,}1x^2 - 0{,}8x + 1{,}5) = 0$$

$x = 0$ und

$$0{,}1x^2 - 0{,}8x + 1{,}5 = 0 \mid : 0{,}1$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

$$x_{1/2} = -\left(\frac{-8}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - (15)}$$

$$= 4 \pm 1$$

$x_1 = 5$ und $x_2 = 3$.

Alle Nullstellen liegen im Intervall $[0; 6]$.

<u>A_1</u>

$$A_1 = \int_0^3 (0{,}1x^3 - 0{,}8x^2 + 1{,}5x)\, dx$$

$$= \left[0{,}1 \cdot \frac{x^4}{4} - 0{,}8 \cdot \frac{x^3}{3} + 1{,}5 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= \left[0{,}1 \cdot \frac{3^4}{4} - 0{,}8 \cdot \frac{3^3}{3} + 1{,}5 \cdot \frac{3^2}{2}\right] - \left[0{,}1 \cdot \frac{0^4}{4} - 0{,}8 \cdot \frac{0^3}{3} + 1{,}5 \cdot \frac{0^2}{2}\right]$$

$$= 1{,}58 - 0 = 1{,}58.$$

<u>A_2</u>

$$-A_2 = \int_3^5 (0{,}1x^3 - 0{,}8x^2 + 1{,}5x)\, dx$$

$$= \left[0{,}1 \cdot \frac{x^4}{4} - 0{,}8 \cdot \frac{x^3}{3} + 1{,}5 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_3^5$$

$$= \left[0{,}1 \cdot \frac{5^4}{4} - 0{,}8 \cdot \frac{5^3}{3} + 1{,}5 \cdot \frac{5^2}{2}\right] - \left[0{,}1 \cdot \frac{3^4}{4} - 0{,}8 \cdot \frac{3^3}{3} + 1{,}5 \cdot \frac{3^2}{2}\right]$$

$$= 1{,}04 - 1{,}58 = -0{,}54.$$

$-A_1 = -0{,}54 \rightarrow A_1 = 0{,}54.$

<u>A_3</u>

$$A_3 = \int_5^6 (0{,}1x^3 - 0{,}8x^2 + 1{,}5x)\, dx$$

$$= \left[0{,}1 \cdot \frac{x^4}{4} - 0{,}8 \cdot \frac{x^3}{3} + 1{,}5 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_5^6$$

$$= \left[0{,}1 \cdot \frac{6^4}{4} - 0{,}8 \cdot \frac{6^3}{3} + 1{,}5 \cdot \frac{6^2}{2}\right] - \left[0{,}1 \cdot \frac{5^4}{4} - 0{,}8 \cdot \frac{5^3}{3} + 1{,}5 \cdot \frac{5^2}{2}\right]$$

$$= 1{,}8 - 1{,}04 = 0{,}76.$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt

$A_1 + A_2 + A_3 = 1{,}58 + 0{,}54 + 0{,}76 = 2{,}88.$

Für die Inhalte der Fläche, die von den Graphen zweier Funktionen f und g eingeschlossen wird, gilt:

$$A = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx \right|.$$

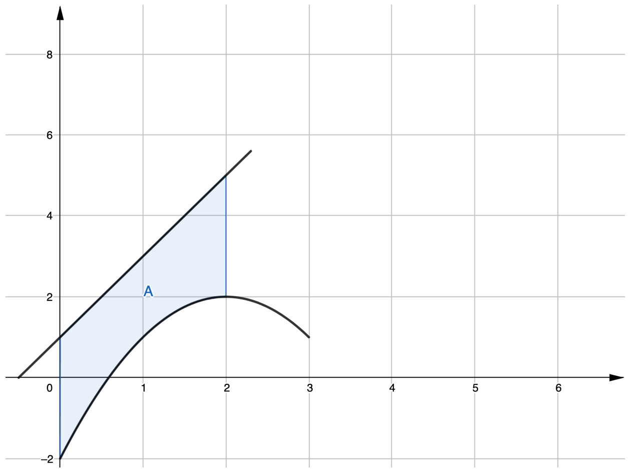
Hierbei ist es egal, ob Teile der Fläche oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse liegen. Es ist auch egal, welche Kurve in welchen Bereichen oberhalb der anderen Kurve liegt, weil von dem Integral der Betrag genommen werden muss.

Beispiel

5. $f(x) = -x^2 + 4x - 2;\ g(x) = 2x + 1.$
Intervall: $[0; 2]$.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= -x^2 + 4x - 2 - (2x + 1) \\ &= -x^2 + 4x - 2 - 2x - 1 \\ &= -x^2 + 2x - 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{A} &= \left| \int_0^2 (-x^2 + 2x - 3)\ dx \right| \\ &= \left| [-\frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x]_0^2 \right| \\ &= \left| [-\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x]_0^2 \right| \\ &= \left| [-\frac{2^3}{3} + 2^2 - 3 \cdot 2] - [-\frac{0^3}{3} + 0^2 - 3 \cdot 0] \right| \\ &= \left| -\frac{14}{3} \right| = \frac{14}{3} = 4{,}67. \end{aligned}$$



Schneiden sich die beiden Graphen im Intervall, in dem die Fläche berechnet werden soll, dann muss die Schnittstellen beachtet werden.

Beispiele

5. $f(x) = x + 2;\ g(x) = x^2 + x + 1.$
Intervall: zwischen den Schnittstellen

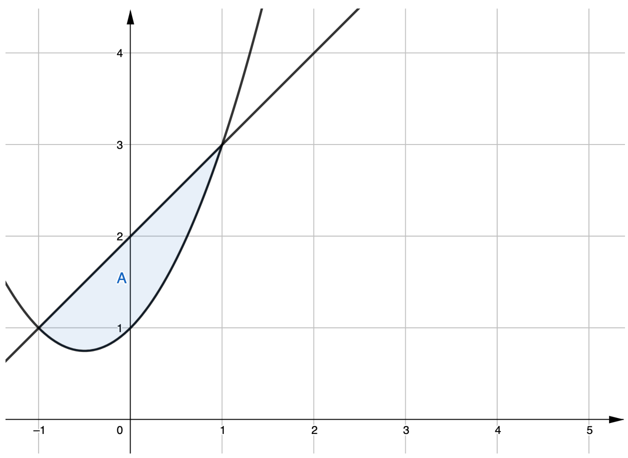
$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x + 2 - (x^2 + x + 1) \\ &= x + 2 - x^2 - x - 1 \\ &= -x^2 + 1. \end{aligned}$$

Schnittstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ f(x) - g(x) &= 0 \\ -x^2 + 1 &= 0 \mid -1 \\ -x^2 &= -1 \mid : (-1) \\ x^2 &= 1 \mid \sqrt{\ } \end{aligned}$$

$x_1 = 1$ und $x_2 = -1.$

$$\begin{aligned} \text{A} &= \left| \int_{-1}^1 (-x^2 + 1)\ dx \right| \\ &= \left| [-\frac{x^3}{3} + x]_{-1}^1 \right| \\ &= \left| [-\frac{1^3}{3} + 1] - [-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)] \right| \\ &= \left| [\frac{2}{3}] - [-\frac{2}{3}] \right| = \left| \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3} = 1{,}33. \end{aligned}$$



Beispiele

6. $f(x) = x^3 - x;\; g(x) = -x^3 + x^2 + 2x.$
Intervall: zwischen den Schnittstellen.

$$f(x) - g(x) = x^3 - x - (-x^3 + x^2 + 2x)$$
$$= x^3 - x + x^3 - x^2 - 2x$$
$$= 2x^3 - x^2 - 3x\,.$$

Schnittstellen:

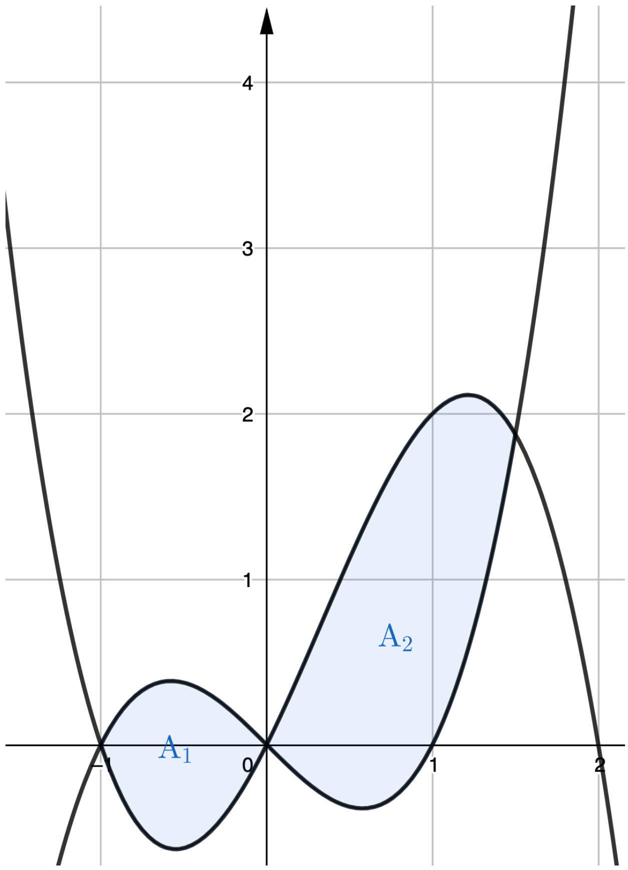
$$f(x) = g(x)$$
$$f(x) - g(x) = 0$$
$$2x^3 - x^2 - 3x = 0$$
$$x \cdot (2x^2 - x - 3) = 0$$

$x = 0$ und

$$2x^2 - x - 3 = 0 \mid :2$$
$$x^2 - 0{,}5x - 1{,}5 = 0$$

$$x_{1/2} = -\left(\frac{-0{,}5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-0{,}5}{2}\right)^2 - (-1{,}5)}$$
$$= 0{,}25 \pm 1{,}25$$

$x_1 = 1{,}5$ und $x_2 = -1.$



<u>A_1</u>

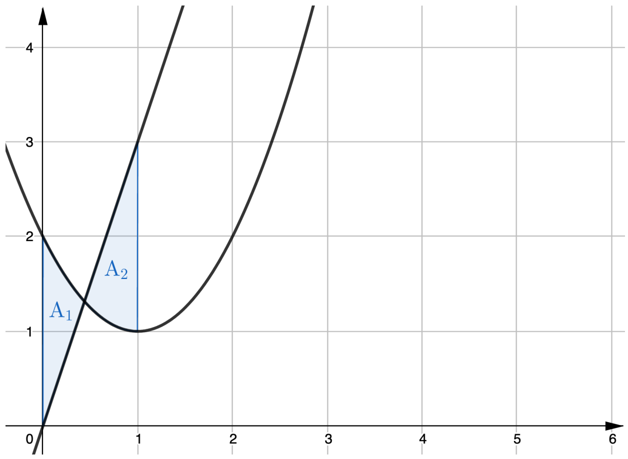
$$A_1 = \left| \int_{-1}^{0} (2x^3 - x^2 - 3x)\; dx \right|$$
$$= \left| \left[2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} \right|$$
$$= \left| \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} \right|$$
$$= \left| \left[\frac{1}{2} \cdot 0^4 - \frac{0^3}{3} - \frac{3}{2} \cdot 0^2\right] - \left[\frac{1}{2} \cdot (-1)^4 - \frac{(-1)^3}{3} - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2\right] \right|$$
$$= \left| [0] - \left[-\frac{2}{3}\right] \right| = \left| \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} = 0{,}67.$$

<u>A_2</u>

$$A_2 = \left| \int_{0}^{1{,}5} (2x^3 - x^2 - 3x)\; dx \right|$$
$$= \left| \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{1{,}5} \right|$$
$$= \left| \left[\frac{1}{2} \cdot (1{,}5)^4 - \frac{(1{,}5)^3}{3} - \frac{3}{2} \cdot (1{,}5)^2\right] - \left[\frac{1}{2} \cdot 0^4 - \frac{0^3}{3} - \frac{3}{2} \cdot 0^2\right] \right|$$
$$= \left| \left[\frac{-63}{32}\right] - [0] \right| = \left| \frac{-63}{32} \right| = \frac{63}{32} = 1{,}97.$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt
$A_1 + A_2 = 0{,}67 + 1{,}97 = 2{,}64.$

7. $f(x) = x^2 - 2x + 2$; $g(x) = 3x$.
Intervall: $[0; 1]$



$$f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 2 - (3x)$$
$$= x^2 - 2x + 2 - 3x$$
$$= x^2 - 5x + 2.$$

Schnittstellen:

$$f(x) = g(x)$$
$$f(x) - g(x) = 0$$
$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = -\left(\frac{-5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - (2)}$$
$$= 2{,}5 \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$$

$x_1 = 4{,}56$ und $x_2 = 0{,}44$.

Die Schnittstelle $x_2 = 0{,}44$ liegt im Intervall $[0; 1]$.

<u>A1</u>

$$A_1 = \left| \int_0^{0,44} (x^2 - 5x + 2)\ dx \right|$$
$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^{0,44} \right|$$
$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 2x\right]_0^{0,44} \right|$$
$$= \left| \left[\frac{(0{,}44)^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot (0{,}44)^2 + 2 \cdot (0{,}44)\right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 0^2 + 2 \cdot 0\right] \right|$$
$$= \left| [0{,}42] - [0] \right| = \left| 0{,}42 \right| = 0{,}42.$$

<u>A2</u>

$$A_2 = \left| \int_{0,44}^{1} (x^2 - 5x + 2)\ dx \right|$$
$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 2x\right]_{0,44}^{1} \right|$$
$$= \left| \left[\frac{1^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1\right] - \left[\frac{(0{,}44)^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot (0{,}44)^2 + 2 \cdot (0{,}44)\right] \right|$$
$$= \left| [-0{,}17] - [0{,}42] \right| = \left| -0{,}59 \right| = 0{,}59.$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt
$A_1 + A_2 = 0{,}42 + 0{,}59 = 1{,}01.$