Суперфинал и финал

Желаем успехов!

1. Сторона куба равна 5. В центре каждой грани куба вырезают квадратную дырку размером 2×2. Дырки сквозные, их стороны параллельны соответствующим рёбрам куба. Найди объем оставшейся части куба.

2. Рыбак находится на льдине, верхняя поверхность льдины находится над водой. Льдина имеет вид вертикального цилиндра. Определи наименьшую возможную площадь льдины, если масса рыбака — m, а толщина льдины — h. Плотность воды равна ρ_1, плотность льда — ρ_2, где $\rho_1 > \rho_2$. Ускорение свободного падения равно g.

3. В треугольнике $\triangle ABC$ сторона BC равна $2\sqrt{3}/3$. Медианы треугольника AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O, и известно, что точки O, B_1, C_1, A лежат на одной окружности. Найди длину медианы AA_1.

4. Подвешенному на нити шарику сообщили начальную скорость в горизонтальном направлении. Когда нить отклонилась на угол $\alpha = \pi/6$ от вертикали, ускорение шарика оказалось направленным горизонтально. Найди $\cos\beta$, где β — это угол максимального отклонения нити.

Суперфинал и финал

Желаем успехов!

1. Сторона куба равна 5. В центре каждой грани куба вырезают квадратную дырку размером 2×2. Дырки сквозные, их стороны параллельны соответствующим рёбрам куба. Найди объем оставшейся части куба.

2. Рыбак находится на льдине, верхняя поверхность льдины находится над водой. Льдина имеет вид вертикального цилиндра. Определи наименьшую возможную площадь льдины, если масса рыбака — m, а толщина льдины — h. Плотность воды равна ρ_1, плотность льда — ρ_2, где $\rho_1 > \rho_2$. Ускорение свободного падения равно g.

3. В треугольнике $\triangle ABC$ сторона BC равна $2\sqrt{3}/3$. Медианы треугольника AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O, и известно, что точки O, B_1, C_1, A лежат на одной окружности. Найди длину медианы AA_1.

4. Подвешенному на нити шарику сообщили начальную скорость в горизонтальном направлении. Когда нить отклонилась на угол $\alpha = \pi/6$ от вертикали, ускорение шарика оказалось направленным горизонтально. Найди $\cos\beta$, где β — это угол максимального отклонения нити.

Турнир в 15:10, Прага, суперфинал: $\chi - \sigma$. Тарту, финал: $\pi - \xi$.

1. вырезаемая часть куба равна $60 - 16 = 44$, оставшая часть куба равна $125 - 44 = 81$

2. $$mg + \rho_2 hSg = \rho_1 hSg$$
$$S = \frac{m}{h(\rho_1 - \rho_2)}$$

3. Углы $\angle OAB_1$ и $\angle OC_1B$ равны. Опираются на одну дугу.

   Треугольники $\triangle OA_1C$ и $\triangle CA_1A$ подобны.

   Пусть $OA_1 = x$, $BC = a$, тогда

$$\frac{x}{a/2} = \frac{a/2}{3x}$$

   $a = 2\sqrt{3}x$

   $x = 1/3$

   Ответ: 1.

4. Второй закон Ньютона:

$$\frac{mv^2}{R} = T - mg\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Горизонтальное ускорение:

$$mg = T\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Получаем

$$\frac{v^2}{R} = \frac{2g}{\sqrt{3}} - g\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Закон сохранения энергии

$$\frac{v^2}{2} + gR\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right) = gR(1 - \cos\beta)$$

   Делим на $R/2$ и подставляем:

$$\frac{v^2}{R} + 2g(1 - \sqrt{3}/2) = 2g(1 - \cos\beta)$$

   Итого

$$\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -2\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{5\sqrt{3}}{12}$$