TOP SECRET! Сдать задачи после разбора!

1. Сначала зондер написал на доске число 3. Затем зондер в уме прибавил к числу 2, поделил сумму на 2 и выписал полученное число на доску. Затем зондер взял последнее выписанное число и повторил итерацию с ним. И так далее, снова и снова.

   Какое число зондер напишет на доске 11-м по счёту?

   Замечаем, что $a_0 = 3$ и $a_{n+1} = 1 + a_n/2$, отсюда $\Delta_{n+1} = \Delta_n/2$. Находим $a_1 = 2.5$, $\Delta_1 = -0.5$.

   Итого
   $$a_{10} = a_0 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{10} = 3 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{2^{10}} = 2 + \frac{1}{2^10}$$

   Один балл за понимание, что Δ_n падает в два раза. Также один балл за альтернативное решение, где игрок экспериментально обнаруживает, что $a_n = 2 + 1/2^n$.

2. В трапеции $ABCD$ известны основания $BC = a$ и $AD = b$, причем $a < b$. На стороне AB отмечена точка E, на стороне CD – точка F. Отрезок EF параллелен основаниям. Площадь трапеции $EBCF$ равны S_a, а трапеции $AEFD$ равна S_b.

   Чему равна длина EF?

   Достроим трапецию до треугольника. Обозначим площадь верхнего треугольника как S_t. Находим квадрат коэффициента подобия $(S_t + S_a + S_b)/S_t = b^2/a^2$.

   Нужная нам сторона равна $ET = a \cdot \sqrt{(S_a + S_t)/S_t} = \sqrt{a^2(1 + S_a/S_t)}$. Из первого уравнения $a^2(S_a + S_b)/S_t = b^2 - a^2$. Ответ: $ET = \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)S_a/(S_a + S_b)} = \sqrt{(b^2 S_a + a^2 S_b)/(S_a + S_b)}$.

   За верное уравнение с отношением площадей равным квадрату коэффициента подобия — один балл.

3. На расстоянии $L = 10$ м от стены лежит футбольный мяч. Юнит Адо-Решетнёв под «раз-два» бежит к мячу с постоянной скоростью $u = 10$ м/с в направлении перендикулярном плоскости стены. Добегая до мяча, юнит наносит удар и придаёт мячу горизонтальную скорость $v = 30$ м/с относительно пола. После удара юнит продолжает движение с прежней скоростью. Столкновение мяча со стеной абсолютно упругое.

   Через сколько секунд после удара юнит снова встретится с мячом?

   Общее расстояние пройденное мячом и юнитом равно $2L$, а суммарная скорость $u+v$, отсюда $t = 2L/(u+v) = 20/40 = 0.5$.

   Снимаем один балл при арифметической ошибке.

4. Из однородной проволки сопротивлением 5 Ом сделано кольцо. К проволоке присоединены две клеммы так, что сопротивление полученной цепи равняется 0.8 Ом.

   В каком соотношения точки присоединения клемм делят кольцо?

   Поделим кольцо на участки сопротивлением x и $R - x$. Решаем уравнение $1/r = 1/x + 1/(R - x)$. Получаем квадратное уравнение $x^2 - Rx + Rr = 0$ и решение $x = \frac{1}{2}\left(R \pm \sqrt{R^2 - 4rR}\right)$. Отношение равно $\frac{R+\sqrt{R^2-4rR}}{R-\sqrt{R^2-4rR}}$. В числах $8 : 2 = 4 : 1$.

   За выписанное уравнение $1/r = 1/x + 1/(R - x)$ ставим один балл.

Задачи для топ-3 столов:

5. Внутри параболы друг на друге лежат три квадрата: маленький, средний и большой. Центры квадратов лежат на оси симметрии параболы. У каждого квадрата ровно две вершины лежат на параболе, и ровно две стороны параллельны оси симметрии.

   Площадь маленького квадрата равна 16, среднего — 36.

   Чему равна площадь большего квадрата? Параметризуем параболу $y = kx^2$. Координаты вершины малого квадрата на параболе $(2, 4k)$. Координаты вершины среднего квадрата на параболе $(3, 9k)$. Из рисунка получаем уравнение $9k = 4k + 4$. Отсюда $k = 0.8$. Координата вершины крупного квадрата $(a, 0.8a^2)$ при этом $0.8a^2 = 9 \cdot 0.8 + 6 = 13.2$. Искомая площадь равна $4a^2 = 4 \cdot 13.2/0.8 = 66$.

   За нахождение формулы параболы $y = 0.8x^2$ — один балл.

6. Два арбуза одинаковой массы m связаны нитью, перекинутой через неподвижный блок. Школьница команды λ массы M, подпрыгнув, хватается за один из арбузов.

   Какой будет сила давления нити на блок? Ускорение обозначим школьницы с арбузом a, получаем систему:

$$\begin{cases} (M+m)a = (M+m)g - T \\ ma = T - mg \end{cases}$$

   Находим $a = Mg/(2m+M)$ и $T = 2mg(M+m)/(2m+M)$. Отсюда $N = 2T = 4gm(M+m)/(2m+M)$.

   За выписанную систему ставим один балл.

TOP SECRET! Судейский экземпляр обычных столов!

1. Сначала зондер написал на доске число 3. Затем зондер в уме прибавил к числу 2, поделил сумму на 2 и выписал полученное число на доску. Затем зондер взял последнее выписанное число и повторил итерацию с ним. И так далее, снова и снова.

   Какое число зондер напишет на доске 11-м по счёту?

   Замечаем, что $a_0 = 3$ и $a_{n+1} = 1 + a_n/2$, отсюда $\Delta_{n+1} = \Delta_n/2$. Находим $a_1 = 2.5$, $\Delta_1 = -0.5$.

   Итого
   $$a_{10} = a_0 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{10} = 3 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{2^{10}} = 2 + \frac{1}{2^1 0}$$

   Один балл за понимание, что Δ_n падает в два раза. Также один балл за альтернативное решение, где игрок экспериментально обнаруживает, что $a_n = 2 + 1/2^n$.

2. В трапеции $ABCD$ известны основания $BC = a$ и $AD = b$, причем $a < b$. На стороне AB отмечена точка E, на стороне CD — точка F. Отрезок EF параллелен основаниям. Площадь трапеции $EBCF$ равны S_a, а трапеции $AEFD$ равна S_b.

   Чему равна длина EF?

   Достроим трапецию до треугольника. Обозначим площадь верхнего треугольника как S_t. Находим квадрат коэффициента подобия $(S_t + S_a + S_b)/S_t = b^2/a^2$.

   Нужная нам сторона равна $ET = a \cdot \sqrt{(S_a + S_t)/S_t} = \sqrt{a^2(1 + S_a/S_t)}$. Из первого уравнения $a^2(S_a + S_b)/S_t = b^2 - a^2$. Ответ: $ET = \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)S_a/(S_a + S_b)} = \sqrt{(b^2 S_a + a^2 S_b)/(S_a + S_b)}$.

   За верное уравнение с отношением площадей равным квадрату коэффициента подобия — один балл.

3. На расстоянии $L = 10$ м от стены лежит футбольный мяч. Юнит Адо-Решетнёв под «раз-два» бежит к мячу с постоянной скоростью $u = 10$ м/с в направлении перендикулярном плоскости стены. Добегая до мяча, юнит наносит удар и придаёт мячу горизонтальную скорость $v = 30$ м/с относительно пола. После удара юнит продолжает движение с прежней скоростью. Столкновение мяча со стеной абсолютно упругое.

   Через сколько секунд после удара юнит снова встретится с мячом?

   Общее расстояние пройденное мячом и юнитом равно $2L$, а суммарная скорость $u + v$, отсюда $t = 2L/(u + v) = 20/40 = 0.5$.

   Снимаем один балл при арифметической ошибке.

4. Из однородной проволки сопротивлением 5 Ом сделано кольцо. К проволоке присоединены две клеммы так, что сопротивление полученной цепи равняется 0.8 Ом.

   В каком соотношения точки присоединения клемм делят кольцо?

   Поделим кольцо на участки сопротивлением x и $R - x$. Решаем уравнение $1/r = 1/x + 1/(R - x)$. Получаем квадратное уравнение $x^2 - Rx + Rr = 0$ и решение $x = \frac{1}{2}\left(R \pm \sqrt{R^2 - 4rR}\right)$. Отношение равно $\frac{R+\sqrt{R^2-4rR}}{R-\sqrt{R^2-4rR}}$. В числах $8 : 2 = 4 : 1$.

   За выписанное уравнение $1/r = 1/x + 1/(R - x)$ ставим один балл.

TOP SECRET! Судейский экземпляр top-3 столов!

1. Сначала зондер написал на доске число 3. Затем зондер в уме прибавил к числу 2, поделил сумму на 2 и выписал полученное число на доску. Затем зондер взял последнее выписанное число и повторил итерацию с ним. И так далее, снова и снова.

   Какое число зондер напишет на доске 11-м по счёту?

   Замечаем, что $a_0 = 3$ и $a_{n+1} = 1 + a_n/2$, отсюда $\Delta_{n+1} = \Delta_n/2$. Находим $a_1 = 2.5$, $\Delta_1 = -0.5$.

   Итого
$$a_{10} = a_0 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{10} = 3 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{2^{10}} = 2 + \frac{1}{2^10}$$

   Один балл за понимание, что Δ_n падает в два раза. Также один балл за альтернативное решение, где игрок экспериментально обнаруживает, что $a_n = 2 + 1/2^n$.

2. Внутри параболы друг на друге лежат три квадрата: маленький, средний и большой. Центры квадратов лежат на оси симметрии параболы. У каждого квадрата ровно две вершины лежат на параболе, и ровно две стороны параллельны оси симметрии.

   Площадь маленького квадрата равна 16, среднего — 36.

   Чему равна площадь большего квадрата?

   Параметризуем параболу $y = kx^2$. Координаты вершины малого квадрата на параболе $(2, 4k)$. Координаты вершины среднего квадрата на параболе $(3, 9k)$. Из рисунка получаем уравнение $9k = 4k + 4$. Отсюда $k = 0.8$. Координата вершины крупного квадрата $(a, 0.8a^2)$ при этом $0.8a^2 = 9 \cdot 0.8 + 6 = 13.2$. Искомая площадь равна $4a^2 = 4 \cdot 13.2/0.8 = 66$.

   За нахождение формулы параболы $y = 0.8x^2$ — один балл.

3. Из однородной проволки сопротивлением 5 Ом сделано кольцо. К проволоке присоединены две клеммы так, что сопротивление полученной цепи равняется 0.8 Ом.

   В каком соотношения точки присоединения клемм делят кольцо?

   Поделим кольцо на участки сопротивлением x и $R - x$. Решаем уравнение $1/r = 1/x + 1/(R - x)$. Получаем квадратное уравнение $x^2 - Rx + Rr = 0$ и решение $x = \frac{1}{2}\left(R \pm \sqrt{R^2 - 4rR}\right)$. Отношение равно $\frac{R+\sqrt{R^2-4rR}}{R-\sqrt{R^2-4rR}}$. В числах $8 : 2 = 4 : 1$.

   За выписанное уравнение $1/r = 1/x + 1/(R - x)$ ставим один балл.

4. Два арбуза одинаковой массы m связаны нитью, перекинутой через неподвижный блок. Школьница команды λ массы M, подпрыгнув, хватается за один из арбузов.

   Какой будет сила давления нити на блок?

   Ускорение обозначим школьницы с арбузом a, получаем систему:
$$\begin{cases} (M + m)a = (M + m)g - T \\ ma = T - mg \end{cases}$$

   Находим $a = Mg/(2m + M)$ и $T = 2mg(M + m)/(2m + M)$. Отсюда $N = 2T = 4gm(M + m)/(2m + M)$.

   За выписанную систему ставим один балл.

ФМТ тур-4

1. Сначала зондер написал на доске число 3. Затем зондер в уме прибавил к числу 2, поделил сумму на 2 и выписал полученное число на доску. Затем зондер взял последнее выписанное число и повторил итерацию с ним. И так далее, снова и снова.

   Какое число зондер напишет на доске 11-м по счёту?

2. В трапеции $ABCD$ известны основания $BC = a$ и $AD = b$, причем $a < b$. На стороне AB отмечена точка E, на стороне CD — точка F. Отрезок EF параллелен основаниям. Площадь трапеции $EBCF$ равны S_a, а трапеции $AEFD$ равна S_b.

   Чему равна длина EF?

3. На расстоянии $L = 10$ м от стены лежит футбольный мяч. Юнит Адо-Решетнёв под «раз-два» бежит к мячу с постоянной скоростью $u = 10$ м/с в направлении перендикулярном плоскости стены. Добегая до мяча, юнит наносит удар и придаёт мячу горизонтальную скорость $v = 30$ м/с относительно пола. После удара юнит продолжает движение с прежней скоростью. Столкновение мяча со стеной абсолютно упругое.

   Через сколько секунд после удара юнит снова встретится с мячом?

4. Из однородной проволки сопротивлением 5 Ом сделано кольцо. К проволоке присоединены две клеммы так, что сопротивление полученной цепи равняется 0.8 Ом.

   В каком соотношения точки присоединения клемм делят кольцо?

ФМТ тур-4

1. Сначала зондер написал на доске число 3. Затем зондер в уме прибавил к числу 2, поделил сумму на 2 и выписал полученное число на доску. Затем зондер взял последнее выписанное число и повторил итерацию с ним. И так далее, снова и снова.

   Какое число зондер напишет на доске 11-м по счёту?

2. В трапеции $ABCD$ известны основания $BC = a$ и $AD = b$, причем $a < b$. На стороне AB отмечена точка E, на стороне CD — точка F. Отрезок EF параллелен основаниям. Площадь трапеции $EBCF$ равны S_a, а трапеции $AEFD$ равна S_b.

   Чему равна длина EF?

3. На расстоянии $L = 10$ м от стены лежит футбольный мяч. Юнит Адо-Решетнёв под «раз-два» бежит к мячу с постоянной скоростью $u = 10$ м/с в направлении перендикулярном плоскости стены. Добегая до мяча, юнит наносит удар и придаёт мячу горизонтальную скорость $v = 30$ м/с относительно пола. После удара юнит продолжает движение с прежней скоростью. Столкновение мяча со стеной абсолютно упругое.

   Через сколько секунд после удара юнит снова встретится с мячом?

4. Из однородной проволки сопротивлением 5 Ом сделано кольцо. К проволоке присоединены две клеммы так, что сопротивление полученной цепи равняется 0.8 Ом.

   В каком соотношения точки присоединения клемм делят кольцо?

ФМТ тур-4

1. Сначала зондер написал на доске число 3. Затем зондер в уме прибавил к числу 2, поделил сумму на 2 и выписал полученное число на доску. Затем зондер взял последнее выписанное число и повторил итерацию с ним. И так далее, снова и снова.

   Какое число зондер напишет на доске 11-м по счёту?

2. Внутри параболы друг на друге лежат три квадрата: маленький, средний и большой. Центры квадратов лежат на оси симметрии параболы. У каждого квадрата ровно две вершины лежат на параболе, и ровно две стороны параллельны оси симметрии.

   Площадь маленького квадрата равна 16, среднего — 36.

   Чему равна площадь большего квадрата?

3. Из однородной проволки сопротивлением 5 Ом сделано кольцо. К проволоке присоединены две клеммы так, что сопротивление полученной цепи равняется 0.8 Ом.

   В каком соотношения точки присоединения клемм делят кольцо?

4. Два арбуза одинаковой массы m связаны нитью, перекинутой через неподвижный блок. Школьница команды λ массы M, подпрыгнув, хватается за один из арбузов.

   Какой будет сила давления нити на блок?

ФМТ тур-4

1. Сначала зондер написал на доске число 3. Затем зондер в уме прибавил к числу 2, поделил сумму на 2 и выписал полученное число на доску. Затем зондер взял последнее выписанное число и повторил итерацию с ним. И так далее, снова и снова.

   Какое число зондер напишет на доске 11-м по счёту?

2. Внутри параболы друг на друге лежат три квадрата: маленький, средний и большой. Центры квадратов лежат на оси симметрии параболы. У каждого квадрата ровно две вершины лежат на параболе, и ровно две стороны параллельны оси симметрии.

   Площадь маленького квадрата равна 16, среднего — 36.

   Чему равна площадь большего квадрата?

3. Из однородной проволки сопротивлением 5 Ом сделано кольцо. К проволоке присоединены две клеммы так, что сопротивление полученной цепи равняется 0.8 Ом.

   В каком соотношения точки присоединения клемм делят кольцо?

4. Два арбуза одинаковой массы m связаны нитью, перекинутой через неподвижный блок. Школьница команды λ массы M, подпрыгнув, хватается за один из арбузов.

   Какой будет сила давления нити на блок?