Содержание

Анонс

...

1. Джентельменское соглашение

Реальность и модель.

Множество Ω — список всех исходов.

Не знаешь как решать — рисуй дерево!

Пример дерева. Красная шапочка, все дороги ведут в усадьбу Бабушке, а встреченный волк дарит цветы, всего пять дорог.

Событие, случайная величина.

Интуитивно: событие — утверждение об исходе эксперимента, которое может быть истинным или ложным, случайная величина — числовое описание исхода эксперимента.

Перемножение вероятностей. А почему они умножаются?

Случайные величины: время в пути, число левых поворотов, число встреченных волков.

Табличка распределения.

Вероятность, математическое ожидание.

Формально, $A \subseteq \Omega$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Упражнение. Подбрасываем монетку до двух орлов подряд, X — число бросков. Найдите $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$, $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(X = 5)$, $\mathbb{P}(X > 5)$ и $a = \mathbb{E}(X)$.

Обращаем внимание: ожидаемое число левых поворотов и наиболее вероятное число левых поворотов — это разные величины.

При поиске вероятностей использовали степени букв! Это хорошая идея, чтобы потом писать производящие функции! Например,

$$\mathbb{P}(THHHHTT) = \mathbb{P}(TH^4T^2)$$

Угадайте a.

Решаем через одну неизвестную:

$$a = 0.5(a + 1) + 0.25(a + 2) + 0.25 \cdot 2$$

О школьниках: на первом занятии было 17 человек.

2. Деревья и уравнения на ожидания

1. Роберт Адлер нажимает на кнопку «Вкл/Выкл» на пульте дистанционного управления телевизором. Изначально телевизор включён. Батарейки у пульта садятся, поэтому в первый раз кнопка срабатывает с вероятностью 1/2, а далее вероятность срабатывания кнопки падает, причем падает совершенное непредсказуемым образом.

   а) Какова вероятность того, что после 2022 нажатий телевизор окажется включён?

   б) Кто такой Роберт Адлер?

2. Какова вероятность того, что у здесь собравшихся есть хотя бы одно совпадение по дням рождения? А если бы нас собралось 50 человек?

3. Илья Муромец стоит на развилке у камня. От камня начинаются ещё три дороги. Каждая из дорог оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые те три дороги оканчиваются камнем...И так далее до бесконечности. На каждой дороге живёт трёхголовый Змей Горыныч. Каждый Змей Горыныч бодрствует независимо от других с вероятностью одна третья.

   а) Какова вероятность того, что ИМ встретит ЗГ, если выбирает дороги равновероятно?

   б) Какова вероятность того, что у ИМ *существует* хотя бы один путь, избегающий встречи с бодрствующими ЗГ?

4. Подбрасываем монетку бесконечное количество раз.

   а) Сколько в среднем ждать до появления последовательности HTT? А до THT?

   б) Какова вероятность того, что последовательность HTT будет выкинута раньше THT?

   в) Сколько в среднем ждать до появления HTT или THT?

5. Неправильную монетку с вероятностью «орла» равной 0.7 подбрасывают до первого «орла». Чему равно среднее количество подбрасываний? Орлов? Решек? Какова вероятность чётного числа бросков?

6. В каждой вершине треугольника по ёжику. Каждую минуту с вероятностью 0.5 каждый ежик независимо от других двигается по часовой стрелке, с вероятностью 0.5 — против часовой стрелки. Обозначим T — время до встречи всех ежей в одной вершине.

   Найдите $\mathbb{P}(T = 1)$, $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 3)$, $\mathbb{E}(T)$.

7. Саша и Маша поженились и решили, что будут заводить новых детей до тех пор, пока в их семье не будут дети обоих полов. Обозначим X — количество детей в их семье. Найдите $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{E}(X)$.

8. Вася подкидывает кубик до тех пор, пока на кубике не выпадет единица, или пока он сам не скажет «Стоп». Вася получает столько рублей, сколько выпало на кубике при последнем броске. Вася хочет максимизировать свой ожидаемый выигрыш.

   а) Как выглядит оптимальная стратегия? Чему равен ожидаемый выигрыш при использовании оптимальной стратегии?

   б) Какова средняя продолжительность игры при использовании оптимальной стратегии?

   в) Как выглядит оптимальная стратегия и чему равен ожидаемый выигрыш, если за каждое подбрасывание Вася платит 35 копеек?

1. Роберт Адлер нажимает на кнопку «Вкл/Выкл» на пульте дистанционного управления телевизором. Изначально телевизор включён. Батарейки у пульта садятся, поэтому в первый раз кнопка срабатывает с вероятностью 1/2, а далее вероятность срабатывания кнопки падает, причем падает совершенное непредсказуемым образом.

   а) Какова вероятность того, что после 2022 нажатий телевизор окажется включён?

   б) Кто такой Роберт Адлер?

2. Какова вероятность того, что у здесь собравшихся есть хотя бы одно совпадение по дням рождения? А если бы нас собралось 50 человек?

3. Илья Муромец стоит на развилке у камня. От камня начинаются ещё три дороги. Каждая из дорог оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые те три дороги оканчиваются камнем…И так далее до бесконечности. На каждой дороге живёт трёхголовый Змей Горыныч. Каждый Змей Горыныч бодрствует независимо от других с вероятностью одна третья.

   а) Какова вероятность того, что ИМ встретит ЗГ, если выбирает дороги равновероятно?

   б) Какова вероятность того, что у ИМ *существует* хотя бы один путь, избегающий встречи с бодрствующими ЗГ?

4. Подбрасываем монетку бесконечное количество раз.

   а) Сколько в среднем ждать до появления последовательности HTT? А до THT?

   б) Какова вероятность того, что последовательность HTT будет выкинута раньше THT?

   в) Сколько в среднем ждать до появления HTT или THT?

5. Неправильную монетку с вероятностью «орла» равной 0.7 подбрасывают до первого «орла». Чему равно среднее количество подбрасываний? Орлов? Решек? Какова вероятность чётного числа бросков?

6. В каждой вершине треугольника по ёжику. Каждую минуту с вероятностью 0.5 каждый ежик независимо от других двигается по часовой стрелке, с вероятностью 0.5 — против часовой стрелки. Обозначим T — время до встречи всех ежей в одной вершине.

   Найдите $\mathbb{P}(T = 1)$, $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 3)$, $\mathbb{E}(T)$.

7. Саша и Маша поженились и решили, что будут заводить новых детей до тех пор, пока в их семье не будут дети обоих полов. Обозначим X — количество детей в их семье. Найдите $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{E}(X)$.

8. Вася подкидывает кубик до тех пор, пока на кубике не выпадет единица, или пока он сам не скажет «Стоп». Вася получает столько рублей, сколько выпало на кубике при последнем броске. Вася хочет максимизировать свой ожидаемый выигрыш.

   а) Как выглядит оптимальная стратегия? Чему равен ожидаемый выигрыш при использовании оптимальной стратегии?

   б) Какова средняя продолжительность игры при использовании оптимальной стратегии?

   в) Как выглядит оптимальная стратегия и чему равен ожидаемый выигрыш, если за каждое подбрасывание Вася платит 35 копеек?

3. todo...

Уравнение на ожидание
Условная вероятность
Равновероятные исходы: сложные примеры
Случайные перестановки (заключенные, старушка, а-б-в, старушка два)
Статистика

4. Загоночная работа

5. Лог. КЛШ-2022

1.

В теховском файле \newpage стоит, чтобы легко было скопировать секцию, для печати двух копий подряд на одном листе. Это позволяет экономить бумагу и время при печати :)

5.1. Плакат

6. Решения

7. Источники мудрости

передалать потом в bib-файл

1.