Содержание

Анонс

...

1. Джентельменское соглашение

Реальность и модель.

Множество Ω — список всех исходов.

Не знаешь как решать — рисуй дерево!

Пример дерева. Красная шапочка, все дороги ведут в усадьбу Бабушке, а встреченный волк дарит цветы, всего пять дорог.

Событие, случайная величина.

Интуитивно: событие — утверждение об исходе эксперимента, которое может быть истинным или ложным, случайная величина — числовое описание исхода эксперимента.

Перемножение вероятностей. А почему они умножаются?

Случайные величины: время в пути, число левых поворотов, число встреченных волков.

Табличка распределения.

Вероятность, математическое ожидание.

Формально, $A \subseteq \Omega$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Упражнение. Подбрасываем монетку до двух орлов подряд, X — число бросков. Найдите $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$, $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(X = 5)$, $\mathbb{P}(X > 5)$ и $a = \mathbb{E}(X)$.

Обращаем внимание: ожидаемое число левых поворотов и наиболее вероятное число левых поворотов — это разные величины.

При поиске вероятностей использовали степени букв! Это хорошая идея, чтобы потом писать производящие функции! Например,

$$\mathbb{P}(THHHHTT) = \mathbb{P}(TH^4T^2)$$

Угадайте a.

Решаем через одну неизвестную:

$$a = 0.5(a + 1) + 0.25(a + 2) + 0.25 \cdot 2$$

О школьниках: на первом занятии было 17 человек.

2. Подборка задач

Подборка задач для распечатки, умещается на один лист, разумно распечатать компактно, упаковав две А5 страницы на один лист А4 и потом разрезать.

1. Неправильную монетку с вероятностью «орла» равной 0.7 подбрасывают до первого «орла». Чему равно среднее количество подбрасываний? Орлов? Решек? Какова вероятность чётного числа бросков?

2. Подбрасываем монетку бесконечное количество раз.

   а) Сколько в среднем ждать до появления последовательности HTT? А до THT?

   б) Какова вероятность того, что последовательность HTT будет выкинута раньше THT?

   в) Сколько в среднем ждать до появления HTT или THT?

3. Роберт Адлер нажимает на кнопку «Вкл/Выкл» на пульте дистанционного управления телевизором. Изначально телевизор включён. Батарейки у пульта садятся, поэтому в первый раз кнопка срабатывает с вероятностью 1/2, а далее вероятность срабатывания кнопки падает, причем падает совершенное непредсказуемым образом.

а) Какова вероятность того, что после 2022 нажатий телевизор окажется включён?

б) Кто такой Роберт Адлер?

4. Какова вероятность того, что у здесь собравшихся есть хотя бы одно совпадение по дням рождения? А если бы нас собралось 50 человек?

5. Илья Муромец стоит на развилке у камня. От камня начинаются ещё три дороги. Каждая из дорог оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые те три дороги оканчиваются камнем…И так далее до бесконечности. На каждой дороге живёт трёхголовый Змей Горыныч. Каждый Змей Горыныч бодрствует независимо от других с вероятностью одна третья.

   а) Какова вероятность того, что ИМ встретит ЗГ, если выбирает дороги равновероятно?

   б) Какова вероятность того, что у ИМ *существует* хотя бы один путь, избегающий встречи с бодрствующими ЗГ?

6. В каждой вершине треугольника по ёжику. Каждую минуту с вероятностью 0.5 каждый ежик независимо от других двигается по часовой стрелке, с вероятностью 0.5 — против часовой стрелки. Обозначим T — время до встречи всех ежей в одной вершине.

   Найдите $\mathbb{P}(T = 1)$, $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 3)$, $\mathbb{E}(T)$.

7. Саша и Маша поженились и решили, что будут заводить новых детей до тех пор, пока в их семье не будут дети обоих полов. Обозначим X — количество детей в их семье. Найдите $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{E}(X)$.

8. Вася подкидывает кубик до тех пор, пока на кубике не выпадет единица, или пока он сам не скажет «Стоп». Вася получает столько рублей, сколько выпало на кубике при последнем броске. Вася хочет максимизировать свой ожидаемый выигрыш.

   а) Как выглядит оптимальная стратегия? Чему равен ожидаемый выигрыш при использовании оптимальной стратегии?

   б) Какова средняя продолжительность игры при использовании оптимальной стратегии?

   в) Как выглядит оптимальная стратегия и чему равен ожидаемый выигрыш, если за каждое подбрасывание Вася платит 35 копеек?

3. Деревья и уравнения на ожидания

Упражнение. Неправильную монетку с вероятностью «орла» равной 0.7 подбрасывают до первого «орла». Чему равно среднее количество подбрасываний? Орлов? Решек? Какова вероятность чётного числа бросков?

Ищем математическое ожидание.

Через составление рекуррентного уравнения

$$a = 0.7 \cdot 1 + 0.3(1 + a).$$

Через мысленное повторение большого количества экспериментов и подсчета, сколько бросков придется на одного достигнутого орла.

Через нахождение таблички распределения и суммирования.

Записали случайные величины количества бросков N и количества решек R как функции. Например, $N(HHT) = 3$ или $R(HHHHT) = 4$.

Вероятность для чётного бросков нашли только через суммирование (можно было уравнением).

И без формального определения ввели производящую функцию.

Множество (событие):

$$A = \{HT, HHHT, HHHHHT, \ldots\}$$

Производящая функция (интересующий нас объект записанный как функция)

$$g(H, T) = H \cdot T + H \cdot H \cdot H \cdot T + H^5 T + \ldots$$

Вероятность

$$\mathbb{P}(A) = g(0.3, 0.7) = 0.3 \cdot 0.7 + 0.3^3 0.7 + 0.3^5 0.7 + \ldots$$

Упражнение. Подбрасываем монетку бесконечное количество раз.

Какова вероятность того, что последовательность HTT будет выкинута раньше THT?

Какова вероятность того, что последовательность TTH будет выкинута раньше THT?

$$A = \{HTT \text{ выпадет раньше } THT\}, \quad B = \{TTH \text{ выпадет раньше } THT\}$$

Нарисовали дерево с упрощениями. Срезали «уши» и назвали этот метод «методом Ван-Гога». На упрощенном дереве видно, что ситуация симметричная, поэтому $\mathbb{P}(A) = 0.5$.

Школьники в большинстве сами построили дерево для вычисления $\mathbb{P}(B)$. Оно уже не симметричное. По нему составляем вместе уравнение на $b = \mathbb{P}(B)$:

$$b = 0.5 + 0.25b$$

И получаем $b = 2/3$. Замечаем чудо! Число букв одинаковое и оказывается важен их порядок!

О школьниках: было 15 человек, трое не знали, что такое геометрическая прогрессия, поэтому просто выводили сумму с помощью домножения и вычитания. Искали слагаемые с парой в двух суммой и одно слагаемое «одинокое» без пары.

4. Задача о ежах

В каждой вершине треугольника по ёжику. Каждую минуту с вероятностью 0.5 каждый ёжик независимо от других двигается по часовой стрелке, с вероятностью 0.5 — против часовой стрелки. Обозначим T — время до встречи всех ёжиков в одной вершине для чаепития.

1. Постройте схему возможных взаимных позиций и найдите вероятности перехода между позициями.

2. Найдите $\mathbb{P}(T = 1)$, $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 3)$, $\mathbb{E}(T)$.

3. В момент каждого посещения позиции ежи получают по 100 шишек каждый. Обозначим количество шишек, собранных ежами к моменту чаепития, буквой R. Найдите $\mathbb{E}(R)$.

4. Найдите вероятность $\mathbb{P}(T - \text{чётное})$.

Удобно для наглядности обозначить вероятности перехода буквами, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. И в буквах даже $\mathbb{P}(T = 4)$ легко выписать.

Далее используем неожиданный трюк. Найти $\mathbb{E}(T)$ сразу сложно. Однако, легко составить систему на $\mathbb{E}(T \mid \text{ старт в } A)$, $\mathbb{E}(T \mid \text{ старт в } B)$, $\mathbb{E}(T \mid \text{ старт в })$.

Аналогичная система составляется для $\mathbb{E}(R)$ и для $\mathbb{P}(T - \text{чётное})$.

5. Условная вероятность

Решили задачу про тётю Машу и двух детей и про вероятность быть больным при условии, что человек по тесту болен.

Что-то я, вероятно, не докрутил, кажется школьники не оч впечатлились.

6. Условная подборка

1. Имеется три монетки. Две «правильных» и одна — с «орлами» по обеим сторонам. Петя выбирает одну монетку наугад и подкидывает её два раза. Оба раза выпадает «орел». Какова условная вероятность того, что монетка «неправильная»?

2. Два охотника одновременно выстрелили в одну утку. Первый попадает с вероятностью 0.4, второй — с вероятностью 0.7 независимо от первого.

   а) Какова вероятность того, что в утку попала ровно одна пуля?

   б) Какова условная вероятность того, что утка была убита первым охотником, если в утку попала ровно одна пуля?

3. Игрок получает 13 карт из колоды в 52 карты. Какова вероятность, что у него как минимум два туза, если известно, что у него есть хотя бы один туз? Какова вероятность того, что у него как минимум два туза, если известно, что у него есть туз пик?

4. У тети Маши — двое детей, один старше другого. Предположим, что вероятности рождения мальчика и девочки равны и не зависят от дня недели, а пол первого и второго ребенка независимы. Для каждой из четырех ситуаций найдите условную вероятность того, что у тёти Маши есть дети обоих полов.

   а) Известно, что хотя бы один ребенок — мальчик.

   б) Тетя Маша наугад выбирает одного своего ребенка и посылает к тете Оле, вернуть учебник по теории вероятностей. Это оказывается мальчик.

   в) Известно, что старший ребенок — мальчик.

   г) На вопрос: «А правда ли тетя Маша, что у вас есть сын, родившийся в пятницу?» тётя Маша ответила: «Да».

5. У Ивана Грозного n бояр. Каждый боярин берёт мзду независимо от других с вероятностью $1/2$.

   а) Какова вероятность того, что все бояре берут мзду, если случайно выбранный боярин берёт мзду?

   б) Какова вероятность того, что все бояре берут мзду, если хотя бы один из бояр берёт мзду?

6. Есть пять закрытых дверей. За одной из них — автомобиль, за остальными — по козе. Маша выбирает одну из дверей. Ведущий шоу, чтобы поддержать интригу, не открывает сразу выбранную Машей дверь. Сначала он открывает одну из дверей не выбранных Машей, причем ради интриги ведущий не открывает сразу и дверь с автомобилем. Из возможных вариантов он выбирает равновероятно. Допустим, ведущий открыл дверь номер 3. И в этот момент он предлагает Маше изменить ваш выбор двери.

   Имеет ли смысл Маше изменить свой выбор?

7. Аня хватается за верёвку в форме окружности в произвольной точке. Боря берёт мачете и с завязанными глазами разрубает верёвку в двух случайных независимых местах. Аня забирает себе тот кусок, за который держится. Боря забирает оставшийся кусок. Вся верёвка имеет единичную длину.

   а) Какова вероятность того, что у Ани верёвка длиннее?

   б) Какова вероятность того, что Ане досталось больше четверти веревки, если ей досталось меньше, чем Боре?

7. todo...

Уравнение на ожидание
Равновероятные исходы: сложные примеры
Случайные перестановки (заключенные, старушка, а-б-в, старушка два)
Статистика

8. Загоночная работа

9. Лог. КЛШ-2022

1.

В теховском файле \newpage стоит, чтобы легко было скопировать секцию, для печати двух копий подряд на одном листе. Это позволяет экономить бумагу и время при печати :)

9.1. Плакат

10. Решения

11. Источники мудрости

передалать потом в bib-файл

1. https://github.com/bdemeshev/probability_dna
2. https://github.com/bdemeshev/probability_pro