

Содержание

1	Джентельменское соглашение	2
2	Деревья и уравнения на ожидания	2
3	todo...	5
4	Загоночная работа	5
5	Лог. КЛШ-2022	6
5.1	Плакат . . . . .	6
6	Решения	6
7	Источники мудрости	6

Анонс

...

## 1. Джентельменское соглашение

Реальность и модель.

Множество  $\Omega$  — список всех исходов.

Не знаешь как решать — рисуй дерево!

Пример дерева. Красная шапочка, все дороги ведут в усадьбу Бабушке, а встреченный волк дарит цветы, всего пять дорог.

Событие, случайная величина.

Интуитивно: событие — утверждение об исходе эксперимента, которое может быть истинным или ложным, случайная величина — числовое описание исхода эксперимента.

Перемножение вероятностей. А почему они умножаются?

Случайные величины: время в пути, число левых поворотов, число встреченных волков.

Табличка распределения.

Вероятность, математическое ожидание.

Формально,  $A \subseteq \Omega$ ,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Упражнение. Подбрасываем монетку до двух орлов подряд,  $X$  — число бросков. Найдите  $\mathbb{P}(X = 2)$ ,  $\mathbb{P}(X = 3)$ ,  $\mathbb{P}(X = 4)$ ,  $\mathbb{P}(X = 5)$ ,  $\mathbb{P}(X > 5)$  и  $a = \mathbb{E}(X)$ .

Обращаем внимание: ожидаемое число левых поворотов и наиболее вероятное число левых поворотов — это разные величины.

При поиске вероятностей использовали степени букв! Это хорошая идея, чтобы потом писать производящие функции! Например,

$$\mathbb{P}(THHHHTT) = \mathbb{P}(TH^4T^2)$$

Угадайте  $a$ .

Решаем через одну неизвестную:

$$a = 0.5(a + 1) + 0.25(a + 2) + 0.25 \cdot 2$$

О школьниках: на первом занятии было 17 человек.

## 2. Подборка задач

Подборка задач для распечатки, уместается на один лист, разумно распечатать компактно, упаковав две А5 страницы на один лист А4 и потом разрезать.

1. Неправильную монетку с вероятностью «орла» равной 0.7 подбрасывают до первого «орла». Чему равно среднее количество подбрасываний? Орлов? Решек? Какова вероятность чётного числа бросков?
2. Подбрасываем монетку бесконечное количество раз.
  - а) Сколько в среднем ждать до появления последовательности НТТ? А до ТНТ?
  - б) Какова вероятность того, что последовательность НТТ будет выкинута раньше ТНТ?
  - в) Сколько в среднем ждать до появления НТТ или ТНТ?
3. Роберт Адлер нажимает на кнопку «Вкл/Выкл» на пульте дистанционного управления телевизором. Изначально телевизор включён. Батарейки у пульта садятся, поэтому в первый раз кнопка срабатывает с вероятностью  $1/2$ , а далее вероятность срабатывания кнопки падает, причем падает совершенное непредсказуемым образом.

- а) Какова вероятность того, что после 2022 нажатий телевизор окажется включён?
- б) Кто такой Роберт Адлер?
4. Какова вероятность того, что у здесь собравшихся есть хотя бы одно совпадение по дням рождения? А если бы нас собралось 50 человек?
5. Илья Муромец стоит на развилке у камня. От камня начинаются ещё три дороги. Каждая из дорог оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые те три дороги оканчиваются камнем...И так далее до бесконечности. На каждой дороге живёт трёхголовый Змей Горыныч. Каждый Змей Горыныч бодрствует независимо от других с вероятностью одна третья.
- а) Какова вероятность того, что ИМ встретит ЗГ, если выбирает дороги равновероятно?
- б) Какова вероятность того, что у ИМ *существует* хотя бы один путь, избегающий встречи с бодрствующими ЗГ?
6. В каждой вершине треугольника по ёжику. Каждую минуту с вероятностью 0.5 каждый ежик независимо от других движется по часовой стрелке, с вероятностью 0.5 — против часовой стрелки. Обозначим  $T$  — время до встречи всех ежей в одной вершине. Найдите  $\mathbb{P}(T = 1)$ ,  $\mathbb{P}(T = 2)$ ,  $\mathbb{P}(T = 3)$ ,  $\mathbb{E}(T)$ .
7. Саша и Маша поженились и решили, что будут заводить новых детей до тех пор, пока в их семье не будут дети обоих полов. Обозначим  $X$  — количество детей в их семье. Найдите  $\mathbb{P}(X = 4)$ ,  $\mathbb{E}(X)$ .
8. Вася подкидывает кубик до тех пор, пока на кубике не выпадет единица, или пока он сам не скажет «Стоп». Вася получает столько рублей, сколько выпало на кубике при последнем броске. Вася хочет максимизировать свой ожидаемый выигрыш.
- а) Как выглядит оптимальная стратегия? Чему равен ожидаемый выигрыш при использовании оптимальной стратегии?
- б) Какова средняя продолжительность игры при использовании оптимальной стратегии?
- в) Как выглядит оптимальная стратегия и чему равен ожидаемый выигрыш, если за каждое подбрасывание Вася платит 35 копеек?

### 3. Деревья и уравнения на ожидания

Упражнение. Неправильную монетку с вероятностью «орла» равной 0.7 подбрасывают до первого «орла». Чему равно среднее количество подбрасываний? Орлов? Решек? Какова вероятность чётного числа бросков?

Ищем математическое ожидание.

Через составление рекуррентного уравнения

$$a = 0.7 \cdot 1 + 0.3(1 + a).$$

Через мысленное повторение большого количества экспериментов и подсчета, сколько бросков придется на одного достигнутого орла.

Через нахождение таблички распределения и суммирования.

Записали случайные величины количества бросков  $N$  и количества решек  $R$  как функции. Например,  $N(HHT) = 3$  или  $R(HHHHT) = 4$ .

Вероятность для чётного бросков нашли только через суммирование (можно было уравнением).

И без формального определения ввели производящую функцию.

Множество (событие):

$$A = \{HT, HHHT, HHHHHT, \dots\}$$

Производящая функция (интересующий нас объект записанный как функция)

$$g(H, T) = H \cdot T + H \cdot H \cdot H \cdot T + H^5 T + \dots$$

Вероятность

$$\mathbb{P}(A) = g(0.3, 0.7) = 0.3 \cdot 0.7 + 0.3^3 0.7 + 0.3^5 0.7 + \dots$$

Упражнение. Подбрасываем монетку бесконечное количество раз.

Какова вероятность того, что последовательность НТТ будет выкинута раньше ТНТ?

Какова вероятность того, что последовательность ТТН будет выкинута раньше ТНТ?

$$A = \{HTT \text{ выпадет раньше } THT\}, \quad B = \{TTH \text{ выпадет раньше } THT\}$$

Нарисовали дерево с упрощениями. Срезали «уши» и назвали этот метод «методом Ван-Гога». На упрощенном дереве видно, что ситуация симметричная, поэтому  $\mathbb{P}(A) = 0.5$ .

Школьники в большинстве сами построили дерево для вычисления  $\mathbb{P}(B)$ . Оно уже не симметричное. По нему составляем вместе уравнение на  $b = \mathbb{P}(B)$ :

$$b = 0.5 + 0.25b$$

И получаем  $b = 2/3$ . Замечаем чудо! Число букв одинаковое и оказывается важен их порядок!

О школьниках: было 15 человек, трое не знали, что такое геометрическая прогрессия, поэтому просто выводили сумму с помощью домножения и вычитания. Искли слагаемые с парой в двух суммой и одно слагаемое «одинокое» без пары.

## 4. todo...

Уравнение на ожидание

Условная вероятность

Равновероятные исходы: сложные примеры

Случайные перестановки (заклученные, старушка, а-б-в, старушка два)

Статистика

## 5. Загоночная работа

## 6. Лог. КЛШ-2022

1.

В теховском файле \newpage стоит, чтобы легко было скопировать секцию, для печати двух копий подряд на одном листе. Это позволяет экономить бумагу и время при печати :)

### 6.1. Плакат

## 7. Решения

## 8. Источники мудрости

передать потом в bib-файл

1.