# Содержание



# Анонс

...

# 1. Джентельменское соглашение

Реальность и модель.

Множество $\Omega$ — список всех исходов.

Не знаешь как решать — рисуй дерево!

Пример дерева. Красная шапочка, все дороги ведут в усадьбу Бабушке, а встреченный волк дарит цветы, всего пять дорог.

Событие, случайная величина.

Интуитивно: событие — утверждение об исходе эксперимента, которое может быть истинным или ложным, случайная величина — числовое описание исхода эксперимента.

Перемножение вероятностей. А почему они умножаются?

Случайные величины: время в пути, число левых поворотов, число встреченных волков.

Табличка распределения.

Вероятность, математическое ожидание.

Формально, $A \subseteq \Omega$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Упражнение. Подбрасываем монетку до двух орлов подряд, $X$ — число бросков. Найдите $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$, $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(X = 5)$, $\mathbb{P}(X > 5)$ и $a = \mathbb{E}(X)$.

Обращаем внимание: ожидаемое число левых поворотов и наиболее вероятное число левых поворотов — это разные величины.

При поиске вероятностей использовали степени букв! Это хорошая идея, чтобы потом писать производящие функции! Например,

$$\mathbb{P}(THHHHTT) = \mathbb{P}(TH^4T^2)$$

Угадайте $a$.

Решаем через одну неизвестную:

$$a = 0.5(a + 1) + 0.25(a + 2) + 0.25 \cdot 2$$

О школьниках: на первом занятии было 17 человек.

# 2. Подборка задач

Подборка задач для распечатки, умещается на один лист, разумно распечатать компактно, упаковав две A5 страницы на один лист A4 и потом разрезать.

1. Неправильную монетку с вероятностью «орла» равной $0.7$ подбрасывают до первого «орла». Чему равно среднее количество подбрасываний? Орлов? Решек? Какова вероятность чётного числа бросков?

2. Подбрасываем монетку бесконечное количество раз.

   а) Сколько в среднем ждать до появления последовательности HTT? А до THT?

   б) Какова вероятность того, что последовательность HTT будет выкинута раньше THT?

   в) Сколько в среднем ждать до появления HTT или THT?

3. Роберт Адлер нажимает на кнопку «Вкл/Выкл» на пульте дистанционного управления телевизором. Изначально телевизор включён. Батарейки у пульта садятся, поэтому в первый раз кнопка срабатывает с вероятностью 1/2, а далее вероятность срабатывания кнопки падает, причем падает совершенное непредсказуемым образом.

а) Какова вероятность того, что после 2022 нажатий телевизор окажется включён?

б) Кто такой Роберт Адлер?

4. Какова вероятность того, что у здесь собравшихся есть хотя бы одно совпадение по дням рождения? А если бы нас собралось 50 человек?

5. Илья Муромец стоит на развилке у камня. От камня начинаются ещё три дороги. Каждая из дорог оканчивается камнем. И от каждого камня начинаются ещё три дороги. И каждые те три дороги оканчиваются камнем…И так далее до бесконечности. На каждой дороге живёт трёхголовый Змей Горыныч. Каждый Змей Горыныч бодрствует независимо от других с вероятностью одна третья.

   а) Какова вероятность того, что ИМ встретит ЗГ, если выбирает дороги равновероятно?

   б) Какова вероятность того, что у ИМ *существует* хотя бы один путь, избегающий встречи с бодрствующими ЗГ?

6. В каждой вершине треугольника по ёжику. Каждую минуту с вероятностью $0.5$ каждый ежик независимо от других двигается по часовой стрелке, с вероятностью $0.5$ — против часовой стрелки. Обозначим $T$ — время до встречи всех ежей в одной вершине.

   Найдите $\mathbb{P}(T = 1)$, $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 3)$, $\mathbb{E}(T)$.

7. Саша и Маша поженились и решили, что будут заводить новых детей до тех пор, пока в их семье не будут дети обоих полов. Обозначим $X$ — количество детей в их семье. Найдите $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{E}(X)$.

8. Вася подкидывает кубик до тех пор, пока на кубике не выпадет единица, или пока он сам не скажет «Стоп». Вася получает столько рублей, сколько выпало на кубике при последнем броске. Вася хочет максимизировать свой ожидаемый выигрыш.

   а) Как выглядит оптимальная стратегия? Чему равен ожидаемый выигрыш при использовании оптимальной стратегии?

   б) Какова средняя продолжительность игры при использовании оптимальной стратегии?

   в) Как выглядит оптимальная стратегия и чему равен ожидаемый выигрыш, если за каждое подбрасывание Вася платит 35 копеек?

## 3. Деревья и уравнения на ожидания

Упражнение. Неправильную монетку с вероятностью «орла» равной $0.7$ подбрасывают до первого «орла». Чему равно среднее количество подбрасываний? Орлов? Решек? Какова вероятность чётного числа бросков?

Ищем математическое ожидание.

Через составление рекуррентного уравнения

$$a = 0.7 \cdot 1 + 0.3(1 + a).$$

Через мысленное повторение большого количества экспериментов и подсчета, сколько бросков придется на одного достигнутого орла.

Через нахождение таблички распределения и суммирования.

Записали случайные величины количества бросков $N$ и количества решек $R$ как функции. Например, $N(HHT) = 3$ или $R(HHHHT) = 4$.

Вероятность для чётного бросков нашли только через суммирование (можно было уравнением).

И без формального определения ввели производящую функцию.

Множество (событие):

$$A = \{HT, HHHT, HHHHHT, \ldots\}$$

Производящая функция (интересующий нас объект записанный как функция)

$$g(H, T) = H \cdot T + H \cdot H \cdot H \cdot T + H^5 T + \ldots$$

Вероятность

$$\mathbb{P}(A) = g(0.3, 0.7) = 0.3 \cdot 0.7 + 0.3^3 0.7 + 0.3^5 0.7 + \ldots$$

Упражнение. Подбрасываем монетку бесконечное количество раз.

Какова вероятность того, что последовательность HTT будет выкинута раньше THT?

Какова вероятность того, что последовательность TTH будет выкинута раньше THT?

$$A = \{HTT \text{ выпадет раньше } THT\}, \quad B = \{TTH \text{ выпадет раньше } THT\}$$

Нарисовали дерево с упрощениями. Срезали «уши» и назвали этот метод «методом Ван-Гога». На упрощенном дереве видно, что ситуация симметричная, поэтому $\mathbb{P}(A) = 0.5$.

Школьники в большинстве сами построили дерево для вычисления $\mathbb{P}(B)$. Оно уже не симметричное. По нему составляем вместе уравнение на $b = \mathbb{P}(B)$:

$$b = 0.5 + 0.25b$$

И получаем $b = 2/3$. Замечаем чудо! Число букв одинаковое и оказывается важен их порядок!

О школьниках: было 15 человек, трое не знали, что такое геометрическая прогрессия, поэтому просто выводили сумму с помощью домножения и вычитания. Искали слагаемые с парой в двух суммой и одно слагаемое «одинокое» без пары.

# 4. Задача о ежах

В каждой вершине треугольника по ёжику. Каждую минуту с вероятностью $0.5$ каждый ёжик независимо от других двигается по часовой стрелке, с вероятностью $0.5$ — против часовой стрелки. Обозначим $T$ — время до встречи всех ёжиков в одной вершине для чаепития.

1. Постройте схему возможных взаимных позиций и найдите вероятности перехода между позициями.
2. Найдите $\mathbb{P}(T = 1)$, $\mathbb{P}(T = 2)$, $\mathbb{P}(T = 3)$, $\mathbb{E}(T)$.
3. В момент каждого посещения позиции ежи получают по 100 шишек каждый. Обозначим количество шишек, собранных ежами к моменту чаепития, буквой $R$. Найдите $\mathbb{E}(R)$.
4. Найдите вероятность $\mathbb{P}(T - \text{чётное})$.

Удобно для наглядности обозначить вероятности перехода буквами, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. И в буквах даже $\mathbb{P}(T = 4)$ легко выписать.

Далее используем неожиданный трюк. Найти $\mathbb{E}(T)$ сразу сложно. Однако, легко составить систему на $\mathbb{E}(T \mid \text{ старт в } A)$, $\mathbb{E}(T \mid \text{ старт в } B)$, $\mathbb{E}(T \mid \text{ старт в })$.

Аналогичная система составляется для $\mathbb{E}(R)$ и для $\mathbb{P}(T\text{— чётное})$.

## 5. Условная вероятность

Решили задачу про тётю Машу и двух детей и про вероятность быть больным при условии, что человек по тесту болен.

Что-то я, вероятно, не докрутил, кажется школьники не оч впечатлились.

## 6. Условная подборка

1. Имеется три монетки. Две «правильных» и одна — с «орлами» по обеим сторонам. Петя выбирает одну монетку наугад и подкидывает её два раза. Оба раза выпадает «орел». Какова условная вероятность того, что монетка «неправильная»?

2. Два охотника одновременно выстрелили в одну утку. Первый попадает с вероятностью 0.4, второй — с вероятностью 0.7 независимо от первого.

   а) Какова вероятность того, что в утку попала ровно одна пуля?

   б) Какова условная вероятность того, что утка была убита первым охотником, если в утку попала ровно одна пуля?

3. Игрок получает 13 карт из колоды в 52 карты. Какова вероятность, что у него как минимум два туза, если известно, что у него есть хотя бы один туз? Какова вероятность того, что у него как минимум два туза, если известно, что у него есть туз пик?

4. У тети Маши — двое детей, один старше другого. Предположим, что вероятности рождения мальчика и девочки равны и не зависят от дня недели, а пол первого и второго ребенка независимы. Для каждой из четырех ситуаций найдите условную вероятность того, что у тёти Маши есть дети обоих полов.

   а) Известно, что хотя бы один ребенок — мальчик.

   б) Тетя Маша наугад выбирает одного своего ребенка и посылает к тете Оле, вернуть учебник по теории вероятностей. Это оказывается мальчик.

   в) Известно, что старший ребенок — мальчик.

   г) На вопрос: «А правда ли тетя Маша, что у вас есть сын, родившийся в пятницу?» тётя Маша ответила: «Да».

5. У Ивана Грозного $n$ бояр. Каждый боярин берёт мзду независимо от других с вероятностью $1/2$.

   а) Какова вероятность того, что все бояре берут мзду, если случайно выбранный боярин берёт мзду?

   б) Какова вероятность того, что все бояре берут мзду, если хотя бы один из бояр берёт мзду?

6. Есть пять закрытых дверей. За одной из них — автомобиль, за остальными — по козе. Маша выбирает одну из дверей. Ведущий шоу, чтобы поддержать интригу, не открывает сразу выбранную Машей дверь. Сначала он открывает одну из дверей не выбранных Машей, причем ради интриги ведущий не открывает сразу и дверь с автомобилем. Из возможных вариантов он выбирает равновероятно. Допустим, ведущий открыл дверь номер 3. И в этот момент он предлагает Маше изменить ваш выбор двери.

   Имеет ли смысл Маше изменить свой выбор?

7. Аня хватается за верёвку в форме окружности в произвольной точке. Боря берёт мачете и с завязанными глазами разрубает верёвку в двух случайных независимых местах. Аня забирает себе тот кусок, за который держится. Боря забирает оставшийся кусок. Вся верёвка имеет единичную длину.

   а) Какова вероятность того, что у Ани верёвка длиннее?

   б) Какова вероятность того, что Ане досталось больше четверти веревки, если ей досталось меньше, чем Боре?

## 7. Решаем условные вероятности

Решили про монетку, про утку и охотников, с тузами без $C_n^k$ оказалось сложновато, но почти до конца дошли.

## 8. Немного про факториалы и шляпы

Дорешали задачу про Аню и Борю, делящих верёвку на плоскости. Обратили внимание на парадокс: возможные события могут иметь нулевую вероятность. Аргументировал аналогией с площадью. Если на плоскости ничего не нарисовано, то площадь нарисованного равна нулю. Если на плоскости нарисован отрезок, идеально математический, то площадь нарисованного тоже равна нулю, хотя что-то уже нарисовано. При первом знакомстве с задачей про Аню и Борю школьники давали ответ $1/2$, поэтому после решения с площадью на плоскости поменяли местами ход Бори и Ани, чтобы прокачать интуицию.

Вспомнили, что такое факториал, большинство школьников знали. Вспомнили или узнали, как посчитать число способов надеть 3 зелёных 2 красных и 4 синих шляпы на 10 человек. На этот вопрос знали ответ только двое школьников. Вернулись и дорешали задачу про туза пик. Согласились, что ответ громоздкий, но всё же уже доступный к дорешиванию на калькуляторе.

## 9. Оптимизация

1. Маша и Саша играют в быстрые шахматы. У них одинаковый класс игры и оба предпочитают играть белыми потому, что выигрывают белыми с вероятностью $0.7$. В ничью они никогда не играют.

   Партии играются до 10 побед. Первую партию Маша играет белыми.

   Она считает, что в следующей партии белыми должен играть тот, кто выиграл предыдущую партию. Саша считает, что ходить белыми нужно по очереди.

   При каком варианте правил у Маши больше шансы выиграть?

2. Злобный Дракон поймал принцесс Настю и Сашу и посадил в разные башни. Перед каждой из принцесс Злобный Дракон подбрасывает один раз правильную монетку. А дальше даёт каждой из них шанс угадать, как выпала монетка у её подруги. Если хотя бы одна из принцесс угадает, то Злобный Дракон отпустит принцесс на волю. Если обе принцессы ошибутся, то они навсегда останутся у него в заточении.

   Подобная практика у Злобного Дракона исследователями была отмечена уже давно, поэтому принцессы имели достаточно времени договориться на случай вероятного похищения.

   Как следует поступать принцессам при подобных похищениях?

3. Вася подкидывает кубик до тех пор, пока на кубике не выпадет единица, или пока он сам не скажет «Стоп». Вася получает столько рублей, сколько выпало на кубике при последнем броске. Вася хочет максимизировать свой ожидаемый выигрыш.

   а) Как выглядит оптимальная стратегия? Чему равен ожидаемый выигрыш при использовании оптимальной стратегии?

   б) Какова средняя продолжительность игры при использовании оптимальной стратегии?

   в) Как выглядит оптимальная стратегия и чему равен ожидаемый выигрыш, если за каждое подбрасывание Вася платит 35 копеек?

4. Андрей Абрикосов, Борис Бананов и Вова Виноградов играют одной командой в игру. В комнате три закрытых внешне неотличимых коробки: с абрикосами, бананами и виноградом. Общаться после начала игры они не могут, но могут заранее договориться о стратегии. Они заходят в комнату по очереди. Каждый из них может открыть две коробки по своему выбору. Перед следующим игроком коробки закрываются. Если Андрей откроет коробку абрикосами, Борис — с бананами, а Вова — с виноградом, то они выигрывают. Если хотя бы один из игроков не найдёт свой фрукт, то их команда проигрывает.

   Какова оптимальная стратегия?

5. Три игрока решили стреляться ради самой красивой девушки и организуют труэль (дуэль для трёх игроков). Игроки стреляют по очереди, $A$-$B$-$C$-$A$-.... Вероятности попадания в выбранную цель равны $p_a = 0.6$, $p_b = 0.5$ и $p_c = 0.4$, соответственно. Игра продолжается до определения единственного победителя, он и получает девушку в жёны.

   Как выглядит оптимальная стратегия каждого игрока?

6. Роковая дама играет в азартную игру. Перед дамой хорошо перетасованная колода в 52 карты. Дама открывает карты одну за одной. В любой момент дама может сделать пророчество «Следующая карта будет дамой». Если пророчество сбывается, то дама получает 100 рублей.

   Какова оптимальная стратегия дамы?

# 10. todo...

Уравнение на ожидание
Равновероятные исходы: сложные примеры
Случайные перестановки (заключенные, старушка, а-б-в, старушка два)
Статистика

# 11. Загоночная работа

# 12. Лог. КЛШ-2022

1.

В теховском файле \newpage стоит, чтобы легко было скопировать секцию, для печати двух копий подряд на одном листе. Это позволяет экономить бумагу и время при печати :)

## 12.1. Плакат

# 13. Решения

# 14. Источники мудрости

передалать потом в bib-файл

1. https://github.com/bdemeshev/probability_dna

2. https://github.com/bdemeshev/probability_pro