

При умножении комплексных чисел их длины умножаются, а углы (аргументы) складываются.

1. Храбро возведи в степень комплексные числа

а) $(1 + i)^2$;

б) i^2 ;

в) $(1 - i)^5$;

2. Упрости так, чтобы ежу было понятно

а) $(2 + 3i) \cdot (1 - i)$;

б) $(2 + 5i)/(1 - i)$;

в) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$;

3. Реши уравнение в комплексных числах

а) $z^2 = -1$;

б) $z^2 = i$;

в) $z^2 = 1 + i$;

4. Вечная черепаха всю жизнь движется по прямой. В первый час своей жизни движется со скоростью 10 км/ч, затем каждый час её скорость падает на 20%.

Какой путь черепаха пройдет за свою бесконечную жизнь?

5. Вечный черепах стартует в начале координат. Изначально ползёт вправо со скоростью 10 км/ч, затем каждый час поворачивает на 90° влево и снижает скорость на 20%.

В какую точку он стремится?

6. Нарисуй и найди

а) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$;

в) $\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{1}{13} + \dots + \arctan \frac{1}{n^2+3n+3} + \dots$;

б) $\tan(\arctan(n+2) - \arctan(n+1))$;

При умножении комплексных чисел их длины умножаются, а углы (аргументы) складываются.

1. Храбро возведи в степень комплексные числа

а) $(1 + i)^2$;

б) i^2 ;

в) $(1 - i)^5$;

2. Упрости так, чтобы ежу было понятно

а) $(2 + 3i) \cdot (1 - i)$;

б) $(2 + 5i)/(1 - i)$;

в) $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$;

3. Реши уравнение в комплексных числах

а) $z^2 = -1$;

б) $z^2 = i$;

в) $z^2 = 1 + i$;

4. Вечная черепаха всю жизнь движется по прямой. В первый час своей жизни движется со скоростью 10 км/ч, затем каждый час её скорость падает на 20%.

Какой путь черепаха пройдет за свою бесконечную жизнь?

5. Вечный черепах стартует в начале координат. Изначально ползёт вправо со скоростью 10 км/ч, затем каждый час поворачивает на 90° влево и снижает скорость на 20%.

В какую точку он стремится?

6. Нарисуй и найди

а) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$;

в) $\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{1}{13} + \dots + \arctan \frac{1}{n^2+3n+3} + \dots$;

б) $\tan(\arctan(n+2) - \arctan(n+1))$;

1. Вспомни, чему равно i^2 ? А чему равно $(-i)^2$?

2. Забыв о предрассудках, храбро реши уравнения в комплексных числах

а) $x^2 + 2x + 5 = 0$;

в) $(x - i - 2)(x + 2 + 3i) = 0$;

б) $x^2 - 6x + 10 = 0$;

г) $x^2 - (2 + 3i)x - 2 + 2i = 0$;

3. Найди числа

а) $\tan(\arctan 32 - \arctan 17)$;

г) $\sin(\arctan(1/5) + \arctan(1/7))$;

б) $\tan(\arctan(1/5) + \arctan(1/7))$;

д) $\tan(\arcsin(1/5) + \arcsin(1/7))$;

в) $\cos(\arctan(1/5) - \arctan(1/7))$;

е) $\tan(\arctan(n + 2) - \arctan(n + 1))$;

4. Тебя ждут новые уравнения в комплексных числах!

а) $z^2 = -1$;

в) $z^2 = 1 + i$;

д) $z^6 = -1$;

б) $z^2 = i$;

г) $z^3 = 1$;

е) $z^4 = -i$;

5. Улитка стартует в начале координат. Изначально улитка ползёт вправо со скоростью 1 км/ч, через час поворачивает на 90° против часовой стрелки и снижает скорость в два раза. После поворота ползёт два часа, снова поворачивает на 90° против часовой стрелки и снова снижает скорость в два раза. После нового поворота ползёт три часа и так далее. После очередного поворота ползёт на один час дольше со скоростью в два раза меньше предыдущей.

В какую точку стремится улитка?

1. Вспомни, чему равно i^2 ? А чему равно $(-i)^2$?

2. Забыв о предрассудках, храбро реши уравнения в комплексных числах

а) $x^2 + 2x + 5 = 0$;

в) $(x - i - 2)(x + 2 + 3i) = 0$;

б) $x^2 - 6x + 10 = 0$;

г) $x^2 - (2 + 3i)x - 2 + 2i = 0$;

3. Найди числа

а) $\tan(\arctan 32 - \arctan 17)$;

г) $\sin(\arctan(1/5) + \arctan(1/7))$;

б) $\tan(\arctan(1/5) + \arctan(1/7))$;

д) $\tan(\arcsin(1/5) + \arcsin(1/7))$;

в) $\cos(\arctan(1/5) - \arctan(1/7))$;

е) $\tan(\arctan(n + 2) - \arctan(n + 1))$;

4. Тебя ждут новые уравнения в комплексных числах!

а) $z^2 = -1$;

в) $z^2 = 1 + i$;

д) $z^6 = -1$;

б) $z^2 = i$;

г) $z^3 = 1$;

е) $z^4 = -i$;

5. Улитка стартует в начале координат. Изначально улитка ползёт вправо со скоростью 1 км/ч, через час поворачивает на 90° против часовой стрелки и снижает скорость в два раза. После поворота ползёт два часа, снова поворачивает на 90° против часовой стрелки и снова снижает скорость в два раза. После нового поворота ползёт три часа и так далее. После очередного поворота ползёт на один час дольше со скоростью в два раза меньше предыдущей.

В какую точку стремится улитка?

Для числа $w = a + bi$ сопряжённым числом называется $\bar{w} = a - bi$. Иногда обозначают как w^* .

- Известно, что $|w| = 7$. Найди $w \cdot \bar{w}$.
- Как коротко можно обозначить $\bar{w}/|w|^2$?
- Элегантно найди $(5 + 12i)^{-1}$.
- Тебя ещё поджидают уравнения в комплексных числах!

а) $z^2 = -1$;	в) $z^2 = 1 + i$;	д) $z^6 = -1$;
б) $z^2 = i$;	г) $z^3 = 1$;	е) $z^4 = -i$;
- Нарисуй на плоскости

а) $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$;	г) $\pi/4 < \operatorname{Arg} z < \pi/2$;
б) $ z - i > 2$;	
в) $ z - 1 + z + 1 = 3$;	д) $ z - i = z + i $;
- Выведи формулы для $\cos(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha + \beta)$ при известных $\cos \alpha, \sin \alpha, \cos \beta, \sin \beta$.
- Точки A и B симметричны относительно точки C . Найди геометрическое место точек X , для которых $AX^2 + BX^2 = \text{const}$.

Для числа $w = a + bi$ сопряжённым числом называется $\bar{w} = a - bi$. Иногда обозначают как w^* .

- Известно, что $|w| = 7$. Найди $w \cdot \bar{w}$.
- Как коротко можно обозначить $\bar{w}/|w|^2$?
- Элегантно найди $(5 + 12i)^{-1}$.
- Тебя ещё поджидают уравнения в комплексных числах!

а) $z^2 = -1$;	в) $z^2 = 1 + i$;	д) $z^6 = -1$;
б) $z^2 = i$;	г) $z^3 = 1$;	е) $z^4 = -i$;
- Нарисуй на плоскости

а) $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$;	г) $\pi/4 < \operatorname{Arg} z < \pi/2$;
б) $ z - i > 2$;	
в) $ z - 1 + z + 1 = 3$;	д) $ z - i = z + i $;
- Выведи формулы для $\cos(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha + \beta)$ при известных $\cos \alpha, \sin \alpha, \cos \beta, \sin \beta$.
- Точки A и B симметричны относительно точки C . Найди геометрическое место точек X , для которых $AX^2 + BX^2 = \text{const}$.

Кватернион, $x = a + bi + cj + dk$, длина кватерниона $|x| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, сопряжённый кватернион $\bar{x} = a - bi - cj - dk$.

1. Храбро посчитай

а) $(2 + i + 2j + 3k) + (1 - 3i + j - 2k)$;

д) $x \cdot \bar{x}$ для $x = -3 + 2i - 3j + 4k$;

б) $ik, ijk, jki, j^3, i^{46}, k^{2023}$;

е) $(2 + i + 2j + 3k)/(1 - 3i + j - 2k)$;

в) $1/(1 - 3i + j - 2k)$;

ж) $|x|$ для $x = bi + cj + dk$;

г) $(2 + i + 2j + 3k)(1 - 3i + j - 2k)$;

з) $|x|$ для $x = \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{3}}(i - j + k)$;

2. Выведи общую формулу для обращения кватерниона: найди x^{-1} для $x = a + bi + cj + dk$.

3. Найди кватернион, направленный в ту же сторону, что и $x = 5i + 6j + 7k$, но имеющий единичную длину.

4. Посмотри на функцию $f(p) = qpq^{-1}$, где $q = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}(i + j - k)$. Найди $f(2i + 3j + 4k)$.

5. Снова посмотри на функцию $f(p) = qpq^{-1}$. Найди $f(q)$ и $f(5q)$.

6. Сколько корней имеет уравнение $x^2 = -1$ в кватернионах? Выпиши сколько не лень.

7. Сколько корней имеет уравнение $x^4 = 1$ в кватернионах? Выпиши сколько не лень.

Кватернион, $x = a + bi + cj + dk$, длина кватерниона $|x| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, сопряжённый кватернион $\bar{x} = a - bi - cj - dk$.

1. Храбро посчитай

а) $(2 + i + 2j + 3k) + (1 - 3i + j - 2k)$;

д) $x \cdot \bar{x}$ для $x = -3 + 2i - 3j + 4k$;

б) $ik, ijk, jki, j^3, i^{46}, k^{2023}$;

е) $(2 + i + 2j + 3k)/(1 - 3i + j - 2k)$;

в) $1/(1 - 3i + j - 2k)$;

ж) $|x|$ для $x = bi + cj + dk$;

г) $(2 + i + 2j + 3k)(1 - 3i + j - 2k)$;

з) $|x|$ для $x = \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{3}}(i - j + k)$;

2. Выведи общую формулу для обращения кватерниона: найди x^{-1} для $x = a + bi + cj + dk$.

3. Найди кватернион, направленный в ту же сторону, что и $x = 5i + 6j + 7k$, но имеющий единичную длину.

4. Посмотри на функцию $f(p) = qpq^{-1}$, где $q = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}(i + j - k)$. Найди $f(2i + 3j + 4k)$.

5. Снова посмотри на функцию $f(p) = qpq^{-1}$. Найди $f(q)$ и $f(5q)$.

6. Сколько корней имеет уравнение $x^2 = -1$ в кватернионах? Выпиши сколько не лень.

7. Сколько корней имеет уравнение $x^4 = 1$ в кватернионах? Выпиши сколько не лень.

1. Найди кватернион, направленный в ту же сторону, что и $x = 5i + 6j + 7k$, но имеющий единичную длину.
2. Найди несколько кватернионов, задающих перпендикулярное направление к направлению $5i + 6j + 7k$.
3. Для какого кватерниона обращение равно сопряжению, $q^{-1} = \bar{q}$?
4. При каком условии на кватернион q выполнено равенство $qpq^{-1} = q\bar{p}q$?
5. Посмотри на функцию $f(p) = qpq^{-1}$, где $q = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}(i + j - k)$. Найди длину $|q|$ и значение $f(2i + 3j + 4k)$.
6. Снова посмотри на функцию $f(p) = qpq^{-1}$. Найди $f(q)$ и $f(5q)$.
7. Поверни вектор $5i + 6j + 7k$ на 120° против часовой вокруг оси $2i + 3j - 4k$.
8. Ян Шапиро сначала повернул мир на 120° против часовой вокруг оси $2i + 3j - 4k$, а затем на 60° против часовой вокруг оси $-i + 2j + k$? Поворот вокруг какой оси и примерно на сколько градусов сделал Ян?

1. Найди кватернион, направленный в ту же сторону, что и $x = 5i + 6j + 7k$, но имеющий единичную длину.
2. Найди несколько кватернионов, задающих перпендикулярное направление к направлению $5i + 6j + 7k$.
3. Для какого кватерниона обращение равно сопряжению, $q^{-1} = \bar{q}$?
4. При каком условии на кватернион q выполнено равенство $qpq^{-1} = q\bar{p}q$?
5. Посмотри на функцию $f(p) = qpq^{-1}$, где $q = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}(i + j - k)$. Найди длину $|q|$ и значение $f(2i + 3j + 4k)$.
6. Снова посмотри на функцию $f(p) = qpq^{-1}$. Найди $f(q)$ и $f(5q)$.
7. Поверни вектор $5i + 6j + 7k$ на 120° против часовой вокруг оси $2i + 3j - 4k$.
8. Ян Шапиро сначала повернул мир на 120° против часовой вокруг оси $2i + 3j - 4k$, а затем на 60° против часовой вокруг оси $-i + 2j + k$? Поворот вокруг какой оси и примерно на сколько градусов сделал Ян?

Числа бывают два: загоночная

1. Найдит $(3 + 4i)(2 + 5i)$ и $(3 + 4i)/(2 + 5i)$;
2. Поверни комплексное число $(2 + 5i)$ на 60° против часовой стрелки.
3. Найди корни уравнения $w^3 = -i$ в комплексных числах.
4. Поверни кватернион $p = 3i + 5j$ на 120° по часовой стрелки вокруг оси k .
5. Поворот вокруг какой оси получится, если сначала повернуть мир вокруг оси $5i + 6j + 0k$ на 90° , а затем вокруг оси $0i + 2j + 3k$ на 90° ?
6. Реши уравнение $w^4 = 16$ в кватернионах.

Числа бывают два: загоночная

1. Найдит $(3 + 4i)(2 + 5i)$ и $(3 + 4i)/(2 + 5i)$;
2. Поверни комплексное число $(2 + 5i)$ на 60° против часовой стрелки.
3. Найди корни уравнения $w^3 = -i$ в комплексных числах.
4. Поверни кватернион $p = 3i + 5j$ на 120° по часовой стрелки вокруг оси k .
5. Поворот вокруг какой оси получится, если сначала повернуть мир вокруг оси $5i + 6j + 0k$ на 90° , а затем вокруг оси $0i + 2j + 3k$ на 90° ?
6. Реши уравнение $w^4 = 16$ в кватернионах.

Числа бывают два: загоночная

1. Найдит $(3 + 4i)(2 + 5i)$ и $(3 + 4i)/(2 + 5i)$;
2. Поверни комплексное число $(2 + 5i)$ на 60° против часовой стрелки.
3. Найди корни уравнения $w^3 = -i$ в комплексных числах.
4. Поверни кватернион $p = 3i + 5j$ на 120° по часовой стрелки вокруг оси k .
5. Поворот вокруг какой оси получится, если сначала повернуть мир вокруг оси $5i + 6j + 0k$ на 90° , а затем вокруг оси $0i + 2j + 3k$ на 90° ?
6. Реши уравнение $w^4 = 16$ в кватернионах.

1. Лог. КЛШ-2023

1.

В теховском файле \newpage стоит, чтобы легко было скопировать секцию, для печати двух копий подряд на одном листе. Это позволяет экономить бумагу и время при печати :)

1.1. Плакат

2. Решения

3. Источники мудрости

передать потом в bib-файл

1. https://github.com/bdemeshev/probability_dna
2. https://github.com/bdemeshev/probability_pro