TOP SECRET!!! Судейский экземпляр!!! **ФМТ: финал** **Обычные столы**

За одну итерацию оппонирования можно получить максимум 1 балл. Вольные стрелки приносят команде от 0 до 3 баллов. Штрафы за выход за три минуты при решении своей задачи: от 0 до 30 секунд — 1 балл штрафа, от 30 до 60 секунд — 2 балла штрафа и далее 3 балла штрафа.

1. На подносе лежат 16 оладушек. Зондера по очереди делят все 16 оладушек на две кучи. После каждого дележа все оладушки возвращаются на поднос, размеры кучек не фиксированные.

   Какое наименьшее количество зондеров нужно, чтобы любая пара оладушек хотя бы раз оказалась разделённой в разные кучи?

   Кодируем каждую оладушку с помощью четырёх бит. Четырёх зондеров хватает. Зондер номер k кладёт в первую кучу те оладушки, у которых на k-м месте стоит 1. Трёх — не хватает: после первого зондера останется как минимум 8 неразлучных оладушек, после второго — 4, после третьего — 2.

2. В трапеции $ABCD$ с основанием AD угол D прямой. Первая окружность радиуса 1 касается сторон AB, BC и CD. Вторая окружность радиуса 3 касается сторон AB, CD, AD и первой окружности.

   Найди площадь трапеции.

   Достроим до угла: центры окружностей лежат на биссектрисе. Касание окружностей — точка E. Обозначим, $AD = m + 3$, $BC = t + 1$. Прямоугольный треугольник с углом $30°$. Весь угол равен $60°$, угол A равен $30°$.

   Боковая сторона трапеции равна $1 + 2\sqrt{3} + 3$. Другая боковая сторона: $m + 2\sqrt{3} + t = 2(1 + 2\sqrt{3} + 3)$.

   Отсюда $m + t = 8 + 2\sqrt{3}$. Площадь

   $$S = (m + t + 4)(4 + 2\sqrt{3})/2 = 30 + 16\sqrt{3}.$$

   Арифметика или ответ через синус $15°$ — 2 и снять.

   Найден угол и площадь записана через отрезки касательных — 2 и снять.

   Найден угол в $30°$ и далее ересь — 1 балл и переход.

3. Во вращающейся с постоянной угловой скоростью ω карусели радиуса r располагается Ваня Адо. Ваня бросает абсолютно чёрный футбольный мяч со скоростью v и ловит его, оказавшись в диаметрально противоположной точке карусели. Определи, при каких значениях скорости v это возможно.

   Ускорение свободного падения равно g.

   Время поворота карусели $t = (\pi + 2\pi n)/\omega$.

   Компенсации скорости вращения, $v_z = \omega r$.

$$v_x = \frac{2r}{t}, \quad v_y = gt/2$$

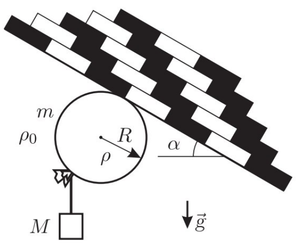
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{2r\omega}{\pi + 2\pi n}\right)^2 + \left(\frac{g}{2\omega}(\pi + 2\pi n)\right)^2 + (\omega r)^2}$$

   Забыт период: 2 балла и снять. Если забыта гравитация и всё есть: 1 балл и снять. Если забыта компенсация скорости вращения: 1 балл и снять. Если забыто две компоненты, то 0 и переход. Забыта цифра 2 — 1 балл и снять.

4. Роберт Гринштейн с помощью небольшого грузика «подвесил» к наклонному потолку воздушный шарик.

   При какой минимальной массе груза M шарик находится в покое?

   Шарик имеет форму сферы радиусом R, ни проскальзывания, ни вращения нет, масса резиновой оболочки шарика m, плотность газа внутри шарика ρ, плотность атмосферы ρ_0, потолок имеет угол наклона α.



   Выберем для вычисления моментов сил горизонтальную ось, проходящую через точку касания шарика и потолка. Максимально возможный момент:

$$L_M = Mg(R + R\sin\alpha).$$

   Условие на момент:

$$Mg(R + R\sin\alpha) \geq (\rho_0 gV - mg - \rho gV)R\sin\alpha$$

   Отсюда

$$M \geq \frac{\left(\frac{4}{3}(\rho_0 - \rho)\pi R^3 - m\right)\sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$$

   Если написаны моменты и ничего далее — 1 балл и снять. Если написаны моменты и найден максимальный момент — 2 балла и снять.

   И равенство и неравенство в ответе — 3 балла.

За одну итерацию оппонирования можно получить максимум 1 балл. Вольные стрелки приносят команде от 0 до 3 баллов. Штрафы за выход за три минуты при решении своей задачи: от 0 до 30 секунд — 1 балл штрафа, от 30 до 60 секунд — 2 балла штрафа и далее 3 балла штрафа.

1. На подносе лежат 16 оладушек. Зондера по очереди делят все 16 оладушек на две кучи. После каждого дележа все оладушки возвращаются на поднос, размеры кучек не фиксированные.

   Какое наименьшее количество зондеров нужно, чтобы любая пара оладушек хотя бы раз оказалась разделённой в разные кучи?

   Кодируем каждую оладушку с помощью четырёх бит. Четырёх зондеров хватает. Зондер номер k кладёт в первую кучу те оладушки, у которых на k-м месте стоит 1. Трёх — не хватает: после первого зондера останется как минимум 8 неразлучных оладушек, после второго — 4, после третьего — 2.

2. В трапеции $ABCD$ с основанием AD угол D прямой. Первая окружность радиуса 1 касается сторон AB, BC и CD. Вторая окружность радиуса 3 касается сторон AB, CD, AD и первой окружности.

   Найди площадь трапеции.

   Достроим до угла: центры окружностей лежат на биссектрисе. Касание окружностей — точка E. Обозначим, $AD = m + 3$, $BC = t + 1$. Прямоугольный треугольник с углом $30°$. Весь угол равен $60°$, угол A равен $30°$.

   Боковая сторона трапеции равна $1 + 2\sqrt{3} + 3$. Другая боковая сторона: $m + 2\sqrt{3} + t = 2(1 + 2\sqrt{3} + 3)$.

   Отсюда $m + t = 8 + 2\sqrt{3}$. Площадь

   $$S = (m + t + 4)(4 + 2\sqrt{3})/2 = 30 + 16\sqrt{3}.$$

   Арифметика или ответ через синус $15°$ — 2 и снять.

   Найден угол и площадь записана через отрезки касательных — 2 и снять.

   Найден угол в $30°$ и далее ересь — 1 балл и переход.

3. Во вращающейся с постоянной угловой скоростью ω карусели радиуса r располагается Ваня Адо. Ваня бросает абсолютно чёрный футбольный мяч со скоростью v и ловит его, оказавшись в диаметрально противоположной точке карусели. Определи, при каких значениях скорости v это возможно.

   Ускорение свободного падения равно g.

   Время поворота карусели $t = (\pi + 2\pi n)/\omega$.

   Компенсации скорости вращения, $v_z = \omega r$.

$$v_x = \frac{2r}{t}, \quad v_y = gt/2$$

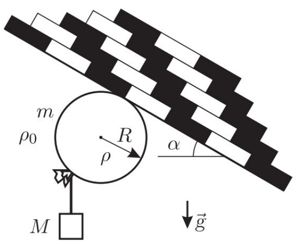
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{2r\omega}{\pi + 2\pi n}\right)^2 + \left(\frac{g}{2\omega}(\pi + 2\pi n)\right)^2 + (\omega r)^2}$$

   Забыт период: 2 балла и снять. Если забыта гравитация и всё есть: 1 балл и снять. Если забыта компенсация скорости вращения: 1 балл и снять. Если забыто две компоненты, то 0 и переход. Забыта цифра 2 — 1 балл и снять.

4. Роберт Гринштейн с помощью небольшого грузика «подвесил» к наклонному потолку воздушный шарик.

   При какой минимальной массе груза M шарик находится в покое?

   Шарик имеет форму сферы радиусом R, ни проскальзывания, ни вращения нет, масса резиновой оболочки шарика m, плотность газа внутри шарика ρ, плотность атмосферы ρ_0, потолок имеет угол наклона α.



   Выберем для вычисления моментов сил горизонтальную ось, проходящую через точку касания шарика и потолка. Максимально возможный момент:

$$L_M = Mg(R + R\sin\alpha).$$

   Условие на момент:

$$Mg(R + R\sin\alpha) \geq (\rho_0 gV - mg - \rho gV)R\sin\alpha$$

   Отсюда

$$M \geq \frac{\left(\frac{4}{3}(\rho_0 - \rho)\pi R^3 - m\right)\sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$$

   Если написаны моменты и ничего далее — 1 балл и снять. Если написаны моменты и найден максимальный момент — 2 балла и снять.

   И равенство и неравенство в ответе — 3 балла.

1. На подносе лежат 16 оладушек. Зондера по очереди делят все 16 оладушек на две кучи. После каждого дележа все оладушки возвращаются на поднос, размеры кучек не фиксированные.

   Какое наименьшее количество зондеров нужно, чтобы любая пара оладушек хотя бы раз оказалась разделённой в разные кучи?

2. В трапеции $ABCD$ с основанием AD угол D прямой. Первая окружность радиуса 1 касается сторон AB, BC и CD. Вторая окружность радиуса 3 касается сторон AB, CD, AD и первой окружности.

   Найди площадь трапеции.

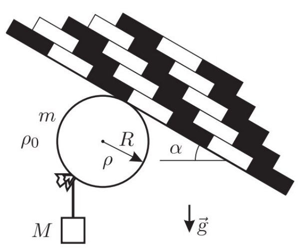
3. Во вращающейся с постоянной угловой скоростью ω карусели радиуса r располагается Ваня Адо. Ваня бросает абсолютно чёрный футбольный мяч со скоростью v и ловит его, оказавшись в диаметрально противоположной точке карусели. Определи, при каких значениях скорости v это возможно.

   Ускорение свободного падения равно g.

4. Роберт Гринштейн с помощью небольшого грузика «подвесил» к наклонному потолку воздушный шарик.

   При какой минимальной массе груза M шарик находится в покое?

   Шарик имеет форму сферы радиусом R, ни проскальзывания, ни вращения нет, масса резиновой оболочки шарика m, плотность газа внутри шарика ρ, плотность атмосферы ρ_0, потолок имеет угол наклона α.



ФМТ: финал   КЛШ 7^2

1. На подносе лежат 16 оладушек. Зондера по очереди делят все 16 оладушек на две кучи. После каждого дележа все оладушки возвращаются на поднос, размеры кучек не фиксированные.

   Какое наименьшее количество зондеров нужно, чтобы любая пара оладушек хотя бы раз оказалась разделённой в разные кучи?

2. В трапеции $ABCD$ с основанием AD угол D прямой. Первая окружность радиуса 1 касается сторон AB, BC и CD. Вторая окружность радиуса 3 касается сторон AB, CD, AD и первой окружности.

   Найди площадь трапеции.

3. Во вращающейся с постоянной угловой скоростью ω карусели радиуса r располагается Ваня Адо. Ваня бросает абсолютно чёрный футбольный мяч со скоростью v и ловит его, оказавшись в диаметрально противоположной точке карусели. Определи, при каких значениях скорости v это возможно.

   Ускорение свободного падения равно g.

4. Роберт Гринштейн с помощью небольшого грузика «подвесил» к наклонному потолку воздушный шарик.

   При какой минимальной массе груза M шарик находится в покое?

   Шарик имеет форму сферы радиусом R, ни проскальзывания, ни вращения нет, масса резиновой оболочки шарика m, плотность газа внутри шарика ρ, плотность атмосферы ρ_0, потолок имеет угол наклона α.