

Содержание

|     |                       |   |
|-----|-----------------------|---|
| 1   | Парабола              | 2 |
| 2   | Заметай               | 2 |
| 3   | Дели, Коси и Заметай  | 3 |
| 4   | Эллипс                | 3 |
| 5   | Экспонента и логарифм | 3 |
| 6   | Косинус и синус       | 3 |
| 7   | Загоночная работа     | 3 |
| 8   | Лог. КЛШ-2022         | 4 |
| 8.1 | Плакат . . . . .      | 4 |
| 9   | Решения               | 4 |
| 10  | Источники мудрости    | 4 |

Анонс

...

## 1. Парабола

Три алгебраических вида. Важно уметь быстро строить из любого вида!

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - x_v) + y_v$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Совет: рисуйте сразу, не переводя из одного вида в другой.

Вопрос: правда ли, что все круги одинаковой формы, но разного размера?

Вопрос: правда ли, что все параболы одинаковой формы, но разного размера?

Подумайте о  $y = x^2$  и  $y = 6x^2$ .

Два геометрических определения.

Парабола — множество точек, находящихся на одинаковом расстоянии от заданной точки  $F$  и заданной прямой  $d$ . Точка  $F$  называется фокусом, а прямая  $d$  — директрисой.

Упражнение. Даны фокус  $F$  и директриса  $d$ . Как геометрически построить какую-нибудь точку на параболе?

Парабола — кривая, отражающая параллельно идущие лучи в одну точку  $F$ .

Доказательство того, определение через множество точек обладает свойством фокусировки лучей.

Шок-контент. Все параболы одинаковой формы! Ведь при увеличении можно произвольным образом менять расстояние между фокусом и директрисой, а именно им всё и определяется. Алгебраически,  $y = 6x^2$ ,  $6y = 6^2x^2$ ,  $\tilde{y} = \tilde{x}^2$ .

Упражнение. Дан фокус  $F$  и директриса  $d$ . Как наиболее просто выбрать оси? Запишите уравнение параболы в выбранных осях.

Упражнение. Дана парабола  $y = x^2$ . Найдите фокус и директрису.

Упражнение. Дана парабола  $y = 2x^2 + 6x + 7$ . Найдите фокус и директрису.

О школьниках: на первом занятии было 17 человек.

## 2. Заметай

Вспоминаем, что парабола сама построится в виде огибающей, если нарисовать все касательные.

Вопрос: как можно описать прямую?

Ответ (дали школьники): с помощью двух точек.

Вопрос: как можно описать дружное семейство прямых?

Здесь школьники четкого ответа не придумали.

Прямая определяется двумя точками. Если добавить параметр  $a$  в координаты этих двух точек, то получится семейство прямых! А можно добавить и несколько параметров.

Как убить время и заработать деньги с помощью параболы?

Упражнение. Нарисуйте семейство прямых, проходящих через  $L(0, a) - R(10 - a, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Запишите формулой это семейство. Найдите (п)огибающую визуально и аналитически. Находить уравнение огибающей проще в новых координатах,  $x' = y - x$ ,  $y' = x + y$ .

google: envelope / string art / огибающая / изонить

Рисуем прямые или отрезки в любом количестве. Размечаем все прямые с равным шагом на каждой прямой. Соединяем размеченные точки на паре прямых семейством прямых, получаем огибающую семейства. Повторяем с разными парами прямых, получаем разные огибающие.

Упражнение. Нарисуйте семейство прямых, проходящих через  $L(a, a) - R(10 - a, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Запишите формулой это семейство. Найдите (п)огибающую визуально и аналитически. Подумайте, в каких ортогональных координатах удобнее находить уравнение огибающей.

Снова шок-контент: форма огибающей семейства не зависит от того, взяты ли ортогональные оси или прямые под углом в один градус для построения семейства огибающих.

doodle: параболы между лучами пучка прямых, параболы в шестигольнике.

Можно делать поделки или NFT :)

О школьниках: на занятии было 17 человек.

### 3. Дели, Коси и Заметай

аддитивность, принцип Кавальери, принцип Мамикона

Площадь окружности с помощью разрезов.

Коси

Скошенная колода карт.

Эллипс. Определение как растянутой окружности. Уравнение эллипса, площадь эллипса.

Заметай.

Вопрос. Кто вел палкой вдоль забора?

Площадь кольца — два способа. Можно вычесть окружности, можно обойти касательным отрезком меньшую окружность.

Аргументация метода: через приближение окружности многоугольником.

Важно! «Палка» должна быть касательной к «забору», осталось в задаче увидеть «забор».

Вопрос. Кто тащил игрушку на веревочке?

Трактриса.

Вопрос. Кто на велике специально заезжал в лужу?

Площадь между следами колес велосипеда при повороте.

О школьниках: на занятии было 17 человек.

### 4. Площадь под параболой

Упражнение. Обходим половину эллипса касательным отрезком, даны длины полуосей и длина отрезка. Находим площадь.

Вопрос. Как меняется формула параболы  $y = x^2$  при сжатии вдоль горизонтальной оси в 3 раза?

Школьники дают ответы:  $y = 3x^2$  и  $y = 9x^2$ . Разбираем, где верный.

Упражнение. Параболы  $y = x^2$  и  $y = 4x^2$ . Горизонтальная линия параллельная оси  $x$ . Как связаны площади над левой параболой и между левой и правой параболой?

Ответ. По принципу Кавальери «коси» площади равны.

Упражнение. Парабола  $y = x^2$ . Касательная в точке  $a$ . Где она пересечет ось  $x$ ?

Алгебраическое решение: находим уравнение прямой, проходящей через  $(a, a^2)$ , затем находим условие единственности решения системы из параболы и прямой. Наклон при этом равен  $2a$ , и далее находим точку пересечения  $a/2$ .

Геометрическое решение.  $P$  — точка на параболе,  $F$  — фокус,  $T$  — точка на директрисе, ближайшая к  $P$ . Строим серединный перпендикуляр к  $FT$ , он будет касательной в  $P$ . Горизонтальная ось проходит через середину  $FT$ , следовательно касательная пересекает ось  $x$  в точке  $a/2$ .

Совместное действие. Сравниваем площадь «лепестка» между  $y = 4x^2$  и секущей, и криволинейного треугольника между  $y = x^2$ , касательным отрезком в точке  $a$  и горизонтальной осью. Они равны. Акку-

ратно переносим типичный «заметающий» отрезок  $LR$ ,  $(b/2, 0) - (b, b^2)$ , так чтобы точка  $L$  переехала в начало координат, получаем  $L'R'$ ,  $(0, 0) - (b/2, b^2)$ . Обнаруживаем, что  $L'R'$  в точности лежит в «лепестке» между  $y = 4x^2$  и секущей. Обнаруживаем, что площади лепестка и криволинейного треугольника равны. Обнаруживаем, что площадь на левой параболы, площадь между левой и правой параболой и площадь под правой параболой равны по  $1/3$  от площади прямоугольника  $a^3$ .

Далее ищем площадь под  $y = 5x^2$ ,  $y = 6x^2 + 17$ . Проще всего нарисовать прямоугольник с вершиной параболы в вершине и поделить его площадь на три. Можно и растягивать параболу  $y = x^2$  по вертикали в нужное число раз, но это дольше.

## 5. Эллипс

## 6. Экспонента и логарифм

## 7. Косинус и синус

Формула для косинуса

## 8. Неразобрано

Вывод уравнения параболы в плохих координатах.  $L(a, 0) - R(0, 10 - a)$ .

Алгоритм: находим точку пересечения двух отрезков  $LR(a)$  и  $LR(b)$ . Находим предел  $b \rightarrow a$ , хватает естественного определения предела. Получается что-то типа  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = c$ .

Огибающая прямоугольных треугольников. Гипербола.

Огибающая скользящей лестницы. Астроида.

Огибающая треугольников с постоянным периметром. Окружность.

## 9. Загоночная работа

## 10. Лог. КЛШ-2022

1.

В теховском файле \newpage стоит, чтобы легко было скопировать секцию, для печати двух копий подряд на одном листе. Это позволяет экономить бумагу и время при печати :)

### 10.1. Плакат

## 11. Решения

## 12. Источники мудрости

передать потом в bib-файл

1. <https://math.stackexchange.com/questions/475666/>
2. <https://en.wikipedia.org/wiki/Parabola>
3. <http://www.physicsinsights.org/>
4. <https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbola>
5. <https://www.mathed.page/parabolas/geometry/>
6. <https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse>