Содержание

Анонс

…

1. Парабола

Три алгебраических вида. Важно уметь быстро строить из любого вида!

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - x_{\text{в}}) + y_{\text{в}}$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Совет: рисуйте сразу, не переводя из одного вида в другой.

Вопрос: правда ли, что все круги одинаковой формы, но разного размера?

Вопрос: правда ли, что все параболы одинаковой формы, но разного размера?

Подумайте о $y = x^2$ и $y = 6x^2$.

Два геометрических определения.

Парабола — множество точек, находящихся на одинаковом расстоянии от заданной точки F и заданной прямой d. Точка F называется фокусом, а прямая d — директрисой.

Упражнение. Даны фокус F и директриса d. Как геометрически построить какую-нибудь точку на параболе?

Парабола — кривая, отражающая параллельно идущие лучи в одну точку F.

Доказательство того, определение через множество точек обладает свойством фокусировки лучей.

Шок-контент. Все параболы одинаковой формы! Ведь при увеличении можно произвольным образом менять расстояние между фокусом и директрисой, а именно им всё и определяется. Алгебраически, $y = 6x^2$, $6y = 6^2x^2$, $\tilde{y} = \tilde{x}^2$.

Упражнение. Дан фокус F и директриса d. Как наиболее просто выбрать оси? Запишите уравнение параболы в выбранных осях.

Упражнение. Дана парабола $y = x^2$. Найдите фокус и директрису.

Упражнение. Дана парабола $y = 2x^2 + 6x + 7$. Найдите фокус и директрису.

О школьниках: на первом занятии было 17 человек.

2. Заметай

Вспоминаем, что парабола сама построится в виде огибающей, если нарисовать все касательные.

Вопрос: как можно описать прямую?

Ответ (дали школьники): с помощью двух точек.

Вопрос: как можно описать дружное семейство прямых?

Здесь школьники четкого ответа не придумали.

Прямая определяется двумя точками. Если добавить параметр a в координаты этих двух точек, то получится семейство прямых! А можно добавить и несколько параметров.

Как убить время и заработать деньги с помощью параболы?

Упражнение. Нарисуйте семейство прямых, проходящих через $L(0, a) - R(10 - a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$. Запишите формулой это семейство. Найдите (п)огибающую визуально и аналитически. Находить уравнение огибающей проще в новых координатах, $x' = y - x$, $y' = x + y$.

google: envelope / string art / огибающая / изонить

Рисуем прямые или отрезки в любом количестве. Размечаем все прямые с равным шагом на каждой прямой. Соединяем размеченные точки на паре прямых семейством прямых, получаем огибающую семейства. Повторяем с разными парами прямых, получаем разные огибающие.

Упражнение. Нарисуйте семейство прямых, проходящих через $L(a, a) - R(10 - a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$. Запишите формулой это семейство. Найдите (п)огибающую визуально и аналитически. Подумайте, в каких ортогональных координатах удобнее находить уравнение огибающей.

Снова шок-контент: форма огибающей семейства не зависит от того, взяты ли ортогональные оси или прямые под углом в один градус для построения семейства огибающих.

doodle: параболы между лучами пучка прямых, параболы в шестигольнике.

Можно делать поделки или NFT :)

О школьниках: на занятии было 17 человек.

3. Дели, Коси и Заметай

аддитивность, принцип Кавальери, принцип Мамикона

Площадь окружности с помощью разрезов.

Коси

Скошенная колода карт.

Эллипс. Определение как растянутой окружности. Уравнение эллипса, площадь эллипса.

Заметай.

Вопрос. Кто вел палкой вдоль забора?

Площадь кольца — два способа. Можно вычесть окружности, можно обойти касательным отрезком меньшую окружность.

Аргументация метода: через приближение окружности многоугольником.

Важно! «Палка» должна быть касательной к «забору», осталось в задаче увидеть «забор».

Вопрос. Кто тащил игрушку на веревочке?

Трактриса.

Вопрос. Кто на велике специально заезжал в лужу?

Площадь между следами колес велосипеда при повороте.

О школьниках: на занятии было 17 человек.

4. Площадь под параболой

Упражнение. Обходим половину эллипса касательным отрезком, даны длины полуосей и длина отрезка. Находим площадь.

Вопрос. Как меняется формула параболы $y = x^2$ при сжатии вдоль горизонтальной оси в 3 раза?

Школьники дают ответы: $y = 3x^2$ и $y = 9x^2$. Разбираем, где верный.

Упражнение. Параболы $y = x^2$ и $y = 4x^2$. Горизонтальная линия параллельная оси x. Как связаны площади над левой параболой и между левой и правой параболой?

Ответ. По принципу Кавальери «коси» площади равны.

Упражнение. Парабола $y = x^2$. Касательная в точке a. Где она пересечет ось x?

Алгебраическое решение: находим уравнение прямой, проходящей через (a, a^2), затем находим условие единственности решения системы из параболы и прямой. Наклон при этом равен $2a$, и далее находим точку пересечения $a/2$.

Геометрическое решение. P — точка на параболе, F — фокус, T — точка на директрисе, ближайшая к P. Строим серединный перпендикуляр к FT, он будет касательной в P. Горизонтальная ось проходит через середину FT, следовательно касательная пересекает ось x в точке $a/2$.

Совместное действие. Сравниваем площадь «лепестка» между $y = 4x^2$ и секущей, и криволинейного треугольника между $y = x^2$, касательным отрезком в точке a и горизонтальной осью. Они равны. Аккуратно переносим типичный «заметающий» отрезок LR, $(b/2, 0) - (b, b^2)$, так чтобы точка L переехала в начало координат, получаем $L'R'$, $(0, 0) - (b/2, b^2)$. Обнаруживаем, что $L'R'$ в точности лежит в «лепестке» между $y = 4x^2$ и секущей. Обнаруживаем, что площади лепестка и криволинейного треугольника равны. Обнаруживаем, что площадь на левой параболой, площадь между левой и правой параболой и площадь под правой параболой равны по $1/3$ от площади прямоугольника a^3.

Далее ищем площадь под $y = 5x^2$, $y = 6x^2 + 17$. Проще всего нарисовать прямоугольник с вершиной параболы в вершине и поделить его площадь на три. Можно и растягивать параболу $y = x^2$ по вертикали в нужное число раз, но это дольше.

О школьниках: на занятии было 17 человек.

5. Кубическая кривая

Упражнение. Находим длину тени касательной под $y = x^3$, находим площадь под $y = x^3$. Полностью аналогично параболе.

Упражнение. Вывод уравнения параболы в плохих координатах. $L(a, 0) - R(0, 1-a)$. Алгоритм: находим точку пересечения двух отрезков $LR(a)$ и $LR(b)$, $x = (1 - b)(1 - a)$. Находим предел $b \to a$, хватает естественного определения предела. Получаем точку касания $x = (1 - a)^2$ и $y = a^2$. Отсюда следует уравнение куска параболы $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

О школьниках: на занятии было 17 человек. В конце немного торопились, задержались минуты на 2, кажется, школьникам понравилось неожиданная формула для параболы.

6. Эллипс

7. Экспонента и логарифм

8. Косинус и синус

Формула для косинуса

9. Неразобрано

Огибающая прямоугольных треугольников. Гипербола.

Огибающая скользящей лестницы. Астроида.

Огибающая треугольников с постоянным периметром. Окружность.

10. Загоночная работа

11. Лог. КЛШ-2022

1.

В теховском файле \newpage стоит, чтобы легко было скопировать секцию, для печати двух копий подряд на одном листе. Это позволяет экономить бумагу и время при печати :)

11.1. Плакат

12. Решения

13. Источники мудрости

передалать потом в bib-файл

1. https://math.stackexchange.com/questions/475666/
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Parabola
3. http://www.physicsinsights.org/
4. https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbola
5. https://www.mathed.page/parabolas/geometry/
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse