**ФМТ тур 3 TOP SECRET! Судейский экземпляр обычных столов!** За одну итерацию оппонирования можно получить максимум 1 балл. Вольные стрелки приносят команде от 0 до 3 баллов. Штрафы за выход за три минуты при решении своей задачи: от 0 до 30 секунд — 1 балл штрафа, от 30 до 60 секунд — 2 балла штрафа и далее 3 балла штрафа.

1. Реши систему уравнений

   $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{46} + y^{46} = 1 \end{cases}$$

   Из первого уравнения следует, что $x^2 \in [0; 1]$ и $y^2 \in [0; 1]$. Замечаем, что $x^{46} \leq x^2$ и $y^{46} \leq y^2$. Из второго второго уравнений следует, что $x^{46} = x^2$ и $y^{46} = y^2$. Получаем четыре решения: $(0, \pm 1)$ и $(\pm 1, 0)$.

   За все решения без строго доказательства ставим 1 балл и снимаем. За часть решений ставим 0 баллов и переход.

2. Ян Шапиро нарисовал прямоугольник $ABCD$ площадью 492. Точка $N$ делит сторону $BC$ пополам и $ND$ пересекает диагональ $AC$ в точке $O$.

   Проявив волю к победе, найди площадь четырёхугольника $ABNO$.

   Половинки стороны $BC$ обозначим $x$. Проведем прямую через точку $O$ параллельно $BC$, она поделит сторону $CD$ на отрезки $a$ и $b$. Из площади всего прямоугольника вычитаем два треугольника: Замечаем равенство площадей

   $$\frac{1}{2}x(a+b) + \frac{1}{2}b \cdot 2x = \frac{1}{2}2x(a+b) + \frac{1}{2}a \cdot x.$$

   Следовательно, $b = 2a$ и $S = 2x \cdot 3a - (\frac{1}{2}x(3a) + \frac{1}{2}2a \cdot 2x) = 205$.

3. Два взаимноперпендикулярных луча падают на поверхность озера Улюколь в одной точке. Показатель преломления воды равен $\sqrt{2}$. Угол падения одного из лучей равен $45°$.

   Поймав озарение, найди угол между лучами в воде.

   $\sqrt{2}\sin a = \sin 45°$, $\sqrt{2}\sin b = \sin 45°$, $a + b = 30° + 30° = 60°$. За ответ в $120°$ ставим 1 балл.

4. Михаил и Садовский тянут за противоположные концы пружины жесткостью 1 Н/м в противоположных направлениях с силой 2 Н.

   На какую длину растянется пружина?

   Середина пружины не движется значит, можно прибить ее к земле и рассматривать растяжение двух пружин половинной длины жесткостью 2 Н/м каждая. Общее растяжение — 2 м.

**ФМТ тур 3 TOP SECRET! Судейский экземпляр обычных столов!** За одну итерацию оппонирования можно получить максимум 1 балл. Вольные стрелки приносят команде от 0 до 3 баллов. Штрафы за выход за три минуты при решении своей задачи: от 0 до 30 секунд — 1 балл штрафа, от 30 до 60 секунд — 2 балла штрафа и далее 3 балла штрафа.

1. Реши систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{46} + y^{46} = 1 \end{cases}$$

   Из первого уравнения следует, что $x^2 \in [0;1]$ и $y^2 \in [0;1]$. Замечаем, что $x^{46} \leq x^2$ и $y^{46} \leq y^2$. Из второго второго уравнений следует, что $x^{46} = x^2$ и $y^{46} = y^2$. Получаем четыре решения: $(0, \pm 1)$ и $(\pm 1, 0)$.

   За все решения без строго доказательства ставим 1 балл и снимаем. За часть решений ставим 0 баллов и переход.

2. Ян Шапиро нарисовал прямоугольник $ABCD$ площадью 492. Точка $N$ делит сторону $BC$ пополам и $ND$ пересекает диагональ $AC$ в точке $O$.

   Проявив волю к победе, найди площадь четырёхугольника $ABNO$.

   Половинки стороны $BC$ обозначим $x$. Проведем прямую через точку $O$ параллельно $BC$, она поделит сторону $CD$ на отрезки $a$ и $b$. Из площади всего прямоугольника вычитаем два треугольника: Замечаем равенство площадей
$$\frac{1}{2}x(a+b) + \frac{1}{2}b \cdot 2x = \frac{1}{2}2x(a+b) + \frac{1}{2}a \cdot x.$$
   Следовательно, $b = 2a$ и $S = 2x \cdot 3a - (\frac{1}{2}x(3a) + \frac{1}{2}2a \cdot 2x) = 205$.

3. Два взаимноперпендикулярных луча падают на поверхность озера Улюколь в одной точке. Показатель преломления воды равен $\sqrt{2}$. Угол падения одного из лучей равен $45°$.

   Поймав озарение, найди угол между лучами в воде.

   $\sqrt{2}\sin a = \sin 45°$, $\sqrt{2}\sin b = \sin 45°$, $a + b = 30° + 30° = 60°$. За ответ в $120°$ ставим 1 балл.

4. Михаил и Садовский тянут за противоположные концы пружины жесткостью 1 Н/м в противоположных направлениях с силой 2 Н.

   На какую длину растянется пружина?

   Середина пружины не движется значит, можно прибить ее к земле и рассматривать растяжение двух пружин половинной длины жесткостью 2 Н/м каждая. Общее растяжение — 2 м.

## ФМТ тур 3

1. Реши систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{46} + y^{46} = 1 \end{cases}$$

2. Ян Шапиро нарисовал прямоугольник $ABCD$ площадью 492. Точка $N$ делит сторону $BC$ пополам и $ND$ пересекает диагональ $AC$ в точке $O$.

   Проявив волю к победе, найди площадь четырёхугольника $ABNO$.

3. Два взаимноперпендикулярных луча падают на поверхность озера Улюколь в одной точке. Показатель преломления воды равен $\sqrt{2}$. Угол падения одного из лучей равен $45°$.

   Поймав озарение, найди угол между лучами в воде.

4. Михаил и Садовский тянут за противоположные концы пружины жесткостью 1 Н/м в противоположных направлениях с силой 2 Н.

   На какую длину растянется пружина?


## ФМТ тур 3

1. Реши систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{46} + y^{46} = 1 \end{cases}$$

2. Ян Шапиро нарисовал прямоугольник $ABCD$ площадью 492. Точка $N$ делит сторону $BC$ пополам и $ND$ пересекает диагональ $AC$ в точке $O$.

   Проявив волю к победе, найди площадь четырёхугольника $ABNO$.

3. Два взаимноперпендикулярных луча падают на поверхность озера Улюколь в одной точке. Показатель преломления воды равен $\sqrt{2}$. Угол падения одного из лучей равен $45°$.

   Поймав озарение, найди угол между лучами в воде.

4. Михаил и Садовский тянут за противоположные концы пружины жесткостью 1 Н/м в противоположных направлениях с силой 2 Н.

   На какую длину растянется пружина?

**ФМТ тур 3 TOP SECRET! Судейский экземпляр top-3 столов!**

За одну итерацию оппонирования можно получить максимум 1 балл. Вольные стрелки приносят команде от 0 до 3 баллов. Штрафы за выход за три минуты при решении своей задачи: от 0 до 30 секунд — 1 балл штрафа, от 30 до 60 секунд — 2 балла штрафа и далее 3 балла штрафа.

1. Реши систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{46} + y^{46} = 1 \end{cases}$$

   Из первого уравнения следует, что $x^2 \in [0;1]$ и $y^2 \in [0;1]$. Замечаем, что $x^{46} \le x^2$ и $y^{46} \le y^2$. Из второго второго уравнений следует, что $x^{46} = x^2$ и $y^{46} = y^2$. Получаем четыре решения: $(0, \pm 1)$ и $(\pm 1, 0)$.

   За все решения без строго доказательства ставим 1 балл и снимаем. За часть решений ставим 0 баллов и переход.

2. Саша Тимошков нарисовал две окружности: большую с радиусом $R$ и маленькую с радиусом $r$, касающиеся внешним образом. Затем Саша провел общую касательную прямую к этим окружностям.

   Артём Майдуров ухитрился вписать третью окружность, которая касается первых двух окружностей и прямой.

   Используя смекалку, найди радиус окружности имени Артёма Майдурова.

   Решений два: окружность имени Артёма может быть между первыми и прямой или вне этого участка. Спроецируем центры трёх окружностей на прямую, отрезок проекции состоит из двух частей: $x$ и $y$. Радиусы: $R$, $r$, $R_a$.

$$\begin{cases} (R - R_a)^2 + x^2 = (R + R_a)^2 \\ (r - R_a)^2 + y^2 = (r + R_a)^2 \\ (R - r)^2 + (x + y)^2 = (R + r)^2 \end{cases}$$

   В одном случае неизвестной является $R_a = 1/(1/\sqrt{r} + 1/\sqrt{R})^2$. В другом случае можно сменить названия окружностей и найти $r = 1/(1/\sqrt{R} - 1/\sqrt{R_a})^2$.

   Ответ: $R_a = 1/(1/\sqrt{r} \pm 1/\sqrt{R})^2$

3. Михаил и Садовский тянут за противоположные концы пружины жесткостью 1 Н/м в противоположных направлениях с силой 2 Н.

   На какую длину растянется пружина?

   Середина пружины не движется значит, можно прибить ее к земле и рассматривать растяжение двух пружин половинной длины жесткостью 2 Н/м каждая. Общее растяжение — 2 м.

4. Зондер Миша Торшин старует от столовой и бежит с рыбной котлетой 100 метров по прямой к первому корпусу. Голодная и хитрая школьница Даша бегает в $\sqrt{2}$ раз медленнее зондера.

   Найди площадь территории, стартуя с которой, школьница успеет перехватить котлету, оказавшись на траектории зондера не позже него.

   Можно развернуть время вспять и считать, что школьницы убегают от Миши в каждой точке его пути. Получаем два прямоугольных треугольника с гипотенузой 100 метров суммарной площадью $100^2/2$ и кусок круга площадью $3\pi 100^2/8$. Итоговый ответ: $100^2/8(4 + 3\pi)$.

**ФМТ тур 3  TOP SECRET! Судейский экземпляр top-3 столов!**

За одну итерацию оппонирования можно получить максимум 1 балл. Вольные стрелки приносят команде от 0 до 3 баллов. Штрафы за выход за три минуты при решении своей задачи: от 0 до 30 секунд — 1 балл штрафа, от 30 до 60 секунд — 2 балла штрафа и далее 3 балла штрафа.

1. Реши систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{46} + y^{46} = 1 \end{cases}$$

   Из первого уравнения следует, что $x^2 \in [0;1]$ и $y^2 \in [0;1]$. Замечаем, что $x^{46} \leq x^2$ и $y^{46} \leq y^2$. Из второго второго уравнений следует, что $x^{46} = x^2$ и $y^{46} = y^2$. Получаем четыре решения: $(0, \pm 1)$ и $(\pm 1, 0)$.

   За все решения без строго доказательства ставим 1 балл и снимаем. За часть решений ставим 0 баллов и переход.

2. Саша Тимошков нарисовал две окружности: большую с радиусом $R$ и маленькую с радиусом $r$, касающиеся внешним образом. Затем Саша провел общую касательную прямую к этим окружностям.

   Артём Майдуров ухитрился вписать третью окружность, которая касается первых двух окружностей и прямой.

   Используя смекалку, найди радиус окружности имени Артёма Майдурова.

   Решений два: окружность имени Артёма может быть между первыми и прямой или вне этого участка. Спроецируем центры трёх окружностей на прямую, отрезок проекции состоит из двух частей: $x$ и $y$. Радиусы: $R$, $r$, $R_a$.

$$\begin{cases} (R - R_a)^2 + x^2 = (R + R_a)^2 \\ (r - R_a)^2 + y^2 = (r + R_a)^2 \\ (R - r)^2 + (x + y)^2 = (R + r)^2 \end{cases}$$

   В одном случае неизвестной является $R_a = 1/(1/\sqrt{r} + 1/\sqrt{R})^2$. В другом случае можно сменить названия окружностей и найти $r = 1/(1/\sqrt{R} - 1/\sqrt{R_a})^2$.

   Ответ: $R_a = 1/(1/\sqrt{r} \pm 1/\sqrt{R})^2$

3. Михаил и Садовский тянут за противоположные концы пружины жесткостью 1 Н/м в противоположных направлениях с силой 2 Н.

   На какую длину растянется пружина?

   Середина пружины не движется значит, можно прибить ее к земле и рассматривать растяжение двух пружин половинной длины жесткостью 2 Н/м каждая. Общее растяжение — 2 м.

4. Зондер Миша Торшин старует от столовой и бежит с рыбной котлетой 100 метров по прямой к первому корпусу. Голодная и хитрая школьница Даша бегает в $\sqrt{2}$ раз медленнее зондера.

   Найди площадь территории, стартуя с которой, школьница успеет перехватить котлету, оказавшись на траектории зондера не позже него.

   Можно развернуть время вспять и считать, что школьницы убегают от Миши в каждой точке его пути. Получаем два прямоугольных треугольника с гипотенузой 100 метров суммарной площадью $100^2/2$ и кусок круга площадью $3\pi 100^2/8$. Итоговый ответ: $100^2/8(4 + 3\pi)$.

## ФМТ тур 3

1. Реши систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{46} + y^{46} = 1 \end{cases}$$

2. Саша Тимошков нарисовал две окружности: большую с радиусом $R$ и маленькую с радиусом $r$, касающиеся внешним образом. Затем Саша провел общую касательную прямую к этим окружностям.

   Артём Майдуров ухитрился вписать третью окружность, которая касается первых двух окружностей и прямой.

   Используя смекалку, найди радиус окружности имени Артёма Майдурова.

3. Михаил и Садовский тянут за противоположные концы пружины жесткостью 1 Н/м в противоположных направлениях с силой 2 Н.

   На какую длину растянется пружина?

4. Зондер Миша Торшин старует от столовой и бежит с рыбной котлетой 100 метров по прямой к первому корпусу. Голодная и хитрая школьница Даша бегает в $\sqrt{2}$ раз медленнее зондера.

   Найди площадь территории, стартуя с которой, школьница успеет перехватить котлету, оказавшись на траектории зондера не позже него.

## ФМТ тур 3

1. Реши систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{46} + y^{46} = 1 \end{cases}$$

2. Саша Тимошков нарисовал две окружности: большую с радиусом $R$ и маленькую с радиусом $r$, касающиеся внешним образом. Затем Саша провел общую касательную прямую к этим окружностям.

   Артём Майдуров ухитрился вписать третью окружность, которая касается первых двух окружностей и прямой.

   Используя смекалку, найди радиус окружности имени Артёма Майдурова.

3. Михаил и Садовский тянут за противоположные концы пружины жесткостью 1 Н/м в противоположных направлениях с силой 2 Н.

   На какую длину растянется пружина?

4. Зондер Миша Торшин старует от столовой и бежит с рыбной котлетой 100 метров по прямой к первому корпусу. Голодная и хитрая школьница Даша бегает в $\sqrt{2}$ раз медленнее зондера.

   Найди площадь территории, стартуя с которой, школьница успеет перехватить котлету, оказавшись на траектории зондера не позже него.