

## Финал ФМТ TOP SECRET! Судейский экземпляр top-3 столов!

За одну итерацию оппонирования можно получить максимум 1 балл. Вольные стрелки приносят команде от 0 до 3 баллов. Штрафы за выход за три минуты при решении своей задачи: от 0 до 30 секунд — 1 балл штрафа, от 30 до 60 секунд — 2 балла штрафа и далее 3 балла штрафа.

### 1. Реши систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{46} + y^{46} = 1 \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что  $x^2 \in [0; 1]$  и  $y^2 \in [0; 1]$ . Замечаем, что  $x^{46} \leq x^2$  и  $y^{46} \leq y^2$ . Из второго уравнения следует, что  $x^{46} = x^2$  и  $y^{46} = y^2$ . Получаем четыре решения:  $(0, \pm 1)$  и  $(\pm 1, 0)$ .

За все решения без строго доказательства ставим 1 балл и снимаем. За часть решений ставим 0 баллов и переход.

### 2. Саша Тимошков нарисовал две окружности: большую с радиусом $R$ и маленькую с радиусом $r$ , касающиеся внешним образом. Затем Саша провел общую касательную прямую к этим окружностям.

Артём Майдуров ухитрился вписать третью окружность, которая касается первых двух окружностей и прямой. Используя смекалку, найди радиус окружности имени Артёма Майдурова.

Решений два: окружность имени Артёма может быть между первыми и прямой или вне этого участка. Спроецируем центры трёх окружностей на прямую, отрезок проекции состоит из двух частей:  $x$  и  $y$ . Радиусы:  $R$ ,  $r$ ,  $R_a$ .

$$\begin{cases} (R - R_a)^2 + x^2 = (R + R_a)^2 \\ (r - R_a)^2 + y^2 = (r + R_a)^2 \\ (R - r)^2 + (x + y)^2 = (R + r)^2 \end{cases}$$

В одном случае неизвестной является  $R_a = 1/(1/\sqrt{r} + 1/\sqrt{R})^2$ . В другом случае можно сменить названия окружностей и найти  $r = 1/(1/\sqrt{R} - 1/\sqrt{R_a})^2$ .

Ответ:  $R_a = 1/(1/\sqrt{r} \pm 1/\sqrt{R})^2$

### 3. Михаил и Садовский тянут за противоположные концы пружины жесткостью 1 Н/м в противоположных направлениях с силой 2 Н.

На какую длину растянется пружина?

Середина пружины не движется значит, можно прибить ее к земле и рассматривать растяжение двух пружин половинной длины жесткостью 2 Н/м каждая. Общее растяжение — 2 м.

### 4. Зондер Миша Торшин старует от столовой и бежит с рыбной котлетой 100 метров по прямой к первому корпусу. Голодная и хитрая школьница Даша бежит в $\sqrt{2}$ раз медленнее зондера.

Найди площадь территории, стартуя с которой, школьница успеет перехватить котлету, оказавшись на траектории зондера не позже него.

Можно развернуть время вспять и считать, что школьницы убегают от Миши в каждой точке его пути. Получаем два прямоугольных треугольника с гипотенузой 100 метров суммарной площадью  $100^2/2$  и кусок круга площадью  $3\pi 100^2/8$ . Итоговый ответ:  $100^2/8(4 + 3\pi)$ .

## Финал ФМТ TOP SECRET! Судейский экземпляр top-3 столов!

За одну итерацию оппонирования можно получить максимум 1 балл. Вольные стрелки приносят команде от 0 до 3 баллов. Штрафы за выход за три минуты при решении своей задачи: от 0 до 30 секунд — 1 балл штрафа, от 30 до 60 секунд — 2 балла штрафа и далее 3 балла штрафа.

### 1. Реши систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{46} + y^{46} = 1 \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что  $x^2 \in [0; 1]$  и  $y^2 \in [0; 1]$ . Замечаем, что  $x^{46} \leq x^2$  и  $y^{46} \leq y^2$ . Из второго уравнения следует, что  $x^{46} = x^2$  и  $y^{46} = y^2$ . Получаем четыре решения:  $(0, \pm 1)$  и  $(\pm 1, 0)$ .

За все решения без строго доказательства ставим 1 балл и снимаем. За часть решений ставим 0 баллов и переход.

### 2. Саша Тимошков нарисовал две окружности: большую с радиусом $R$ и маленькую с радиусом $r$ , касающиеся внешним образом. Затем Саша провел общую касательную прямую к этим окружностям.

Артём Майдуров ухитрился вписать третью окружность, которая касается первых двух окружностей и прямой. Используя смекалку, найди радиус окружности имени Артёма Майдурова.

Решений два: окружность имени Артёма может быть между первыми и прямой или вне этого участка. Спроецируем центры трёх окружностей на прямую, отрезок проекции состоит из двух частей:  $x$  и  $y$ . Радиусы:  $R$ ,  $r$ ,  $R_a$ .

$$\begin{cases} (R - R_a)^2 + x^2 = (R + R_a)^2 \\ (r - R_a)^2 + y^2 = (r + R_a)^2 \\ (R - r)^2 + (x + y)^2 = (R + r)^2 \end{cases}$$

В одном случае неизвестной является  $R_a = 1/(1/\sqrt{r} + 1/\sqrt{R})^2$ . В другом случае можно сменить названия окружностей и найти  $r = 1/(1/\sqrt{R} - 1/\sqrt{R_a})^2$ .

Ответ:  $R_a = 1/(1/\sqrt{r} \pm 1/\sqrt{R})^2$

### 3. Михаил и Садовский тянут за противоположные концы пружины жесткостью 1 Н/м в противоположных направлениях с силой 2 Н.

На какую длину растянется пружина?

Середина пружины не движется значит, можно прибить ее к земле и рассматривать растяжение двух пружин половинной длины жесткостью 2 Н/м каждая. Общее растяжение — 2 м.

### 4. Зондер Миша Торшин старует от столовой и бежит с рыбной котлетой 100 метров по прямой к первому корпусу. Голодная и хитрая школьница Даша бежит в $\sqrt{2}$ раз медленнее зондера.

Найди площадь территории, стартуя с которой, школьница успеет перехватить котлету, оказавшись на траектории зондера не позже него.

Можно развернуть время вспять и считать, что школьницы убегают от Миши в каждой точке его пути. Получаем два прямоугольных треугольника с гипотенузой 100 метров суммарной площадью  $100^2/2$  и кусок круга площадью  $3\pi 100^2/8$ . Итоговый ответ:  $100^2/8(4 + 3\pi)$ .



## Финал ФМТ

1. Реши систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{46} + y^{46} = 1 \end{cases}$$

2. Саша Тимошков нарисовал две окружности: большую с радиусом  $R$  и маленькую с радиусом  $r$ , касающиеся внешним образом. Затем Саша провел общую касательную прямую к этим окружностям.

Артём Майдунов ухитрился вписать третью окружность, которая касается первых двух окружностей и прямой. Используя смекалку, найди радиус окружности имени Артёма Майдунова.

3. Михаил и Садовский тянут за противоположные концы пружины жесткостью 1 Н/м в противоположных направлениях с силой 2 Н.

На какую длину растянется пружина?

4. Зондер Миша Торшин старует от столовой и бежит с рыбной котлетой 100 метров по прямой к первому корпусу. Голодная и хитрая школьница Даша бежит в  $\sqrt{2}$  раз медленнее зондера.

Найди площадь территории, стартуя с которой, школьница успеет перехватить котлету, оказавшись на траектории зондера не позже него.



## Финал ФМТ

1. Реши систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^{46} + y^{46} = 1 \end{cases}$$

2. Саша Тимошков нарисовал две окружности: большую с радиусом  $R$  и маленькую с радиусом  $r$ , касающиеся внешним образом. Затем Саша провел общую касательную прямую к этим окружностям.

Артём Майдунов ухитрился вписать третью окружность, которая касается первых двух окружностей и прямой. Используя смекалку, найди радиус окружности имени Артёма Майдунова.

3. Михаил и Садовский тянут за противоположные концы пружины жесткостью 1 Н/м в противоположных направлениях с силой 2 Н.

На какую длину растянется пружина?

4. Зондер Миша Торшин старует от столовой и бежит с рыбной котлетой 100 метров по прямой к первому корпусу. Голодная и хитрая школьница Даша бежит в  $\sqrt{2}$  раз медленнее зондера.

Найди площадь территории, стартуя с которой, школьница успеет перехватить котлету, оказавшись на траектории зондера не позже него.