Problem chińskiego listonosza

Martyna Skiwniewska i Klaudia Stępień

Wyobraźmy sobie sytuację - musimy przejść przez wszystkie ulice miasta jednocześnie dostarczając listy do każdego z odbiorców, a następnie wrócić do punktu początkowego jakim jest poczta. Chcemy pokonać jak najkrótszą drogę, nie omijając żadnej z ulic. Znalezieniem takiej trasy zainteresował się w roku 1962 chiński matematyk Mei-Ko Kwan. Idea jego rozwiązania opiera się na stworzeniu analogicznego modelu w języku grafów. Każda krawędź grafu odpowiada konkretnej ulicy, jej waga długości ulicy, zaś wierzchołki to skrzyżowania ulic.

Rozpatrzmy najprostszy model jakim jest spójny graf nieskierowany. Wówczas zachodzi jedna z dwóch opcji: graf zawiera cykl Eulera bądź go nie zawiera. W pierwszym przypadku rozwiązanie jest oczywiste - cykl Eulera oznacza, że do każdego z wierzchołków docieramy tylko raz, zatem droga jaką pokonamy jest minimalna. Brak cyklu Eulera komplikuje rozwiązanie. Musimy wówczas doprowadzić do sytuacji, w której każdy z wierzchołków jest stopnia parzystego, gdyż jest to warunek konieczny istnienia takiego cyklu. W tym celu dublujemy krawędzie wchodzące w skład najkrótszej ścieżki łączącej wierzchołki o nieparzystych stopniach i otrzymujemy w ten sposób multigraf. Przebiegnięcie przez zdublowaną krawędź jest równoważne dwóm krokom. Zatem suma wag całego cyklu jest równa wagom wszystkich pojedynczych krawędzi powiększonych o krawędzie zdublowane.

Jak się okazuje znalezienie takiej ścieżki wcale nie jest proste. Spróbujmy w tym celu rozpatrzeć problem kombinatorycznie. Oczywiste jest, że istnieje tylko jedna możliwość bezpośredniego połączenia dwóch wierzchółków A i B poprzez krawędź [A–B]. Cztery wierzchołki mogą już być połączone poprzez 2 krawędzie na 3 różne sposoby [A–B,C–D], [A–C,B–D] i [A–D,B–C]. Przypadek 5 wierzchołków jest niemożliwy, gdyż liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest zawsze parzysta. Dla 6 wierzchołków A,B,C,D,E,F problem zaczyna się już powoli komplikować. Wierzchołek A może być połączony z jednym z pozostałych pięciu: B,C,D,E,F. Czyli jest 5 sposobów na otrzymanie pierwszej pary: [A–B], [A–C], [A–D], [A–E] lub [A–F]. Spośród pozostałych czterech wierzchołków ponownie wybieramy jeden, tym razem juz tylko na cztery sposoby i łączymy w pary z innym wierzchołkiem na 3 sposoby. Po tym połączeniu pozostanie nam już tylko jednoznaczna możliwość dla pozostałych dwóch wierzchołków. Zatem istnieje $5 \cdot 3 = 15$ sposobów na skojarzenie ze sobą 6 wierzchołków w rozłączne pary. Analogiczne dla 8 wierzchółków mamy 7 sposobów na utworzenie I pary, 5 dla II i 3 dla III, czyli ostatecznie $7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$ możliwości. W ten sposób wyprowadziliśmy wzór ogólny na liczbę możliwych połączeń dla k wierzchołków, gdzie k jest liczbą parzystą:

$$S = (k-1) \cdot (k-3) \cdot (k-5) \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{k/2} (2i-1) =$$

$$= \text{iloczyn kolejnych liczb nieparzystych mniejszych od } k$$

Iloczyn S bardzo szybko rośnie i przykładowo dla $k = 20$ otrzymujemy $S \approx$ 655 milionów, co bardzo spowalnia czas obliczeń dla dużych grafów. Zatem podejście kombinatoryczne jest opłacalne jedynie dla małych wartości k, przykładowo $k < 20$, natomiast dla większych k można zastosować algorytm Edmonsa. Wymaga on niestety dobrej znajomości programowania liniowego i teorii grafów. Jego klasa złożoności to $O(n^3)$.

Poniżej przedstawiony został schematyczny algorytm dla problemu chińskiego listonosza:

1. Sprawdzamy spójność grafu. W przypadku, gdy graf jest niespójny kończymy algorytm.

2. Znajdujemy wszystkie wierzchołki o nieparzystych stopniach.

3. Jeśli liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest równa 0, to przechodzimy do kroku 7, w przeciwnym przypadku do kroku 4 - ad. poniżej.

4. Wykorzystujemy algorytm Dijkstry'ego do znalezienia najkrótszych ścieżek łączących ze sobą wszystkie wierzchołki z kroku 2.

5. Znajdujemy połączenie tych wierzchołków w pary o najmniejszej sumie wag krawędzi.

6. Dublujemy krawędzie z kroku 5 w grafie początkowym.

7. Wyznaczamy w otrzymanym grafie cykl Eulera.

8. Wyprowadzamy wynik i kończymy algorytm.

Ad. do punktu 4:
Algorytm Dijkstry'ego (**G**=graf, **w(i, j)**=waga krawędzi **(i, j)**, **z**=wierzchołek źródłowy)
Oznaczenia: **K** - kolejka priorytetowa wszystkich wierzchołków grafu, **d** - tablica odległości od źródła dla wszystkich wierzchołków grafu

dla każdego wierzchołka **a** w zbiorze wierzchołków **A**[**G**] wykonaj
d[**a**] := nieskończoność
poprzednik[**a**] := niezdefiniowane
d[**z**] := 0
K := **A**
dopóki **K** niepuste wykonaj
b := ZdejmijMin(**K**)
dla każdego wierzchołka **a**, który jest sąsiadem **b** wykonaj
jeżeli **d**[**a**] > **d**[**b**] + **w(b, a)** to
d[**a**] := **d**[**b**] + **w(b, a)**
poprzednik[**a**] := **b**
Dodaj(**K**, **A**)
Wyświetl("Droga wynosi: " + **d**[**a**])

Nastepnie ze wszystkich znalezionych ścieżek wybieramy ścieżkę o najmniejszej wadze (punkt 5).
W trakcie implementacji problemu chińskiego listonosza pojawiają się problemy typu: jak dublować krawędzie, jak zapamiętać wierzchołki o nieparzystych stopniach, jak wskazać i zapamiętać wszystkie połączenia między wierzchołkami o nieparzystych stopniach, jak znaleźć połączenie o minimalnej sumie wag i wiele innych.

Przykład zastosowania z implementacją w Sage

Problem chińskiego listonosza ma wiele zastosowań praktycznych: np. przy szukaniu optymalnego uszeregowania operacji procesu technologicznego w sposób zapewniający minimalny czas transportu między operacjami. Podobnie optymalizacja drogi manipulatora spawalniczego, który musi wykonać określoną liczbę szwów spawanych w nadwoziu samochodu, a po ich wykonaniu wrócić do punktu wyjścia sprowadza się do rozpatrywanego zadania.