Wspomaganie Decyzji - Miłosz Kadziński

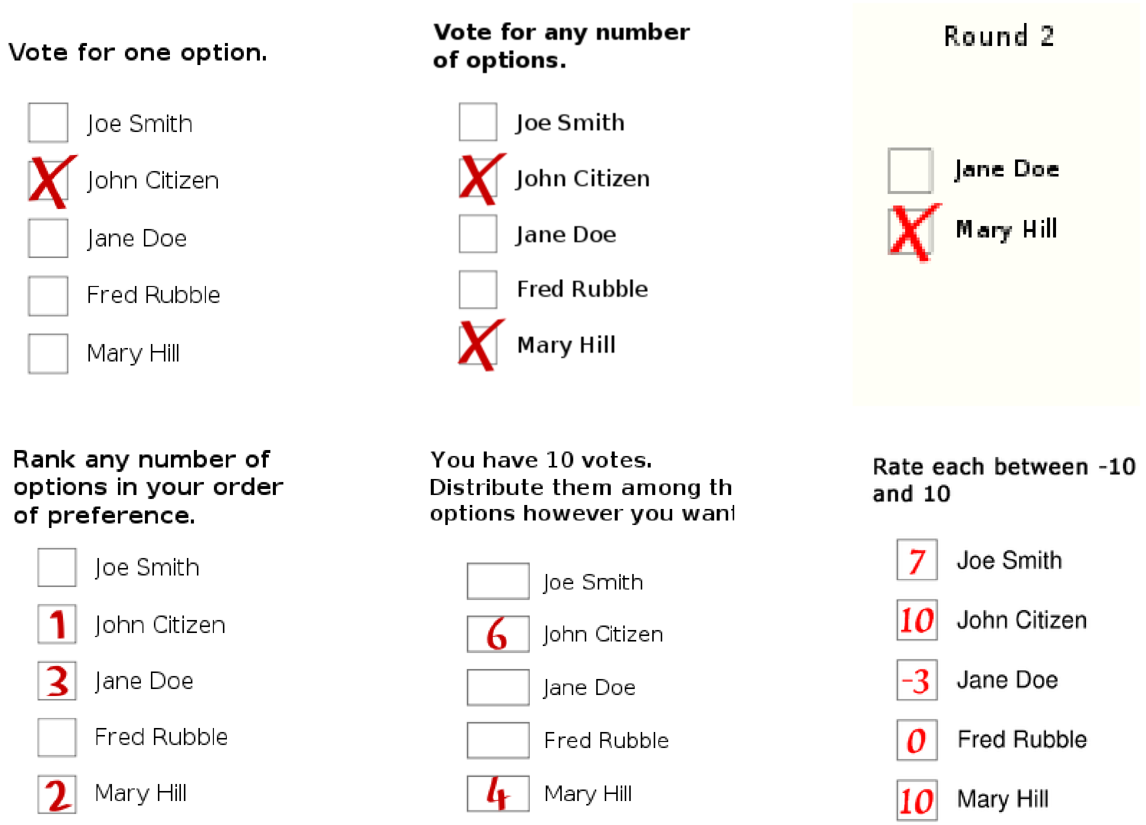
Lab III – Teoria Społecznego Wyboru (Głosowania) + Indeksy Mocy

Cel: Zajęcia będą podzielone na dwie części. W pierwszej skupimy się na podstawach teorii społecznego wyboru. Omówimy kilkanaście metod wyborczych, pozwalających na rozstrzygnięcie wyborów na bazie preferencji głosujących dotyczących kandydatów. Jest to dziedzina inna od wspomagania decyzji, ale blisko z nią związana, bo jeśli przyjąć, że kandydaci to warianty decyzyjne, a wyborcy - kryteria oceny, to bardzo wiele podejść można zastosować zarównao w jednej, jak i drugiej dziedzinie. Głównym celem zajęć jest uświadomienie Wam, że Wasze preferencje dotyczące kandydatów są istotne, ale dużo istotniejsze jest to, w jaki sposób są one agregowane do wyniku wyborczego. Dla tych samych preferencji wyborczych wyniki - w zależności od stosowanej metody - mogą być skrajnie różne. W drugiej części omówimy tematykę indeksów moce (ang. *power indices*). Indeksy te wywodzą się z teorii gier i w prosty sposób pozwalają na ujęcie rzeczywistej mocy partii politycznej lub innego podmiotu w kontekście pewnej reguły głosowania. Pozwalają więc zrozumieć świat polityki dużo lepiej.

1. Wprowadzenie

- Zbiór n kandydatów/wariantów X = {a, b, c, …}
- Zbiór m wyborców/decydentów W

Jak głosujemy? Sposoby są różne: w niektórych wyborach głosujemy na jednego kandydata, w innych dozwolone jest wskazanie kilku akceptowalnych opcji, niekiedy wybory składają się z wielu rund, czasem nie tylko trzeba wskazać najlepszych, ale należy uszeregować kandydatów od najlepszego do najgorsze, rozdzielić między nich pewną pulę punktów (np. 10) albo ocenić każdego z osobna na pewnej predefiniowanej skali (np. od -10 do 10).



Dla potrzeb zajęć zakładamy, że preferencja pojedynczego głosującego jest wyrażana jako **ranking kandydatów** (w szczególnym przypadku może być to jeden lub kilku kandydatów najbardziej preferowanych dla niego kandydatów). W poniższym przykładzie wyborca W1 preferuje a nad b nad c:

W1
a
b
c

Profil preferencji to zebrane preferencje wszystkich wyborców/głosujących:

W1	W2	W3
a	b	c
b	c	b
c	a	a

Reguła społecznego wyboru (głosowania; *social choice rule* - SCR) agreguje profil preferencji w rezultat społeczny (ang. *social outcome*) – na podstawie indywidualnych preferencji należy ustalić łączne preferencje i stworzyć ranking (wybrać najlepszego kandydata; czasem mogą być wystąpić remisy - radzenie sobie z nimi to rozległa działka naukowa, ale niekoniecznie najbardziej interesująca, więc dla przedstawianych reguł nie będziemy omawiać arbitralnych sposobów rozstrzygania remisów - wystarczy, że macie świadomość, że one istnieją i można je łatwo znaleźć)).
Przykłady zastosowania teorii społecznego wyboru: wybory polityczne, wybór pracowników, wybór projektów, rodzina decydująca o miejscu wakacji, itd.

Przykład szczególny 1: wszyscy wyborcy mają takie same preferencje

W1 **W2** **W3**

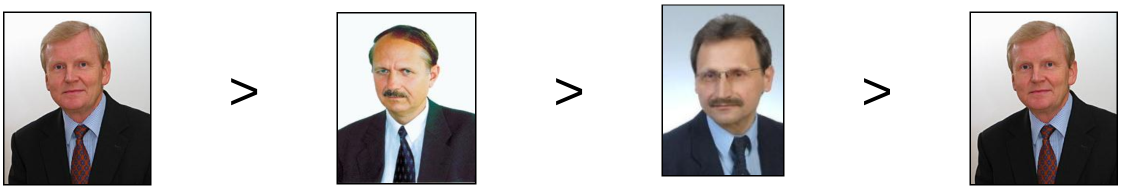
Wynik wydaje się oczywisty, ale czy zawsze taki będzie? Może istnieją reguła, dla których będzie on inny?

 >  > 

Przykład szczególny 2:

W1 **W2** **W3**

Wynik jest trudny do określenia - wychodząc z preferencji W1 widzimy, że po uwzględnienie preferencji W2 i W3 ranking się zapętla. Formalnie taką sytuację nazywamy cyklem Condorceta. Jak sobie nim radzić? Jak go przeciąć, żeby uzyskać wyniki głosowania?



2. Reguły głosowania

Omówimy kilkanaście reguł głosowania opartych na bardzo różnych zasadach, od prostych do bardziej skomplikowanych. Niektóre z nich wciąż są w powszechnym użyciu, a inne współcześnie nie są wykorzystywane, ale są ważne z punktu widzenia historycznego. Wszystkie reguły ilustrowane są ćwiczeniami obliczeniowymi, których omówienie znajduje się na końcu tego pliku.

System większościowy - plurality rule (ang. *simple majority*, większość względna) - wygrywa ten, który jest zwycięzcą dla największej liczby głosujących (dostał najwięcej głosów); w ogólności głosujący nie musi dostarczać pełnego rankingu, a tylko wskazywać najlepszego kandydata; najczęściej stosowana metoda w praktyce; jeśli jest tylko dwóch kandydatów, to jest najlepsza; gdy kandydatów jest więcej, zauważalne są liczne wady - ignorowanie całego rankingu, rozłożenie głosów wśród podobnych kandydatów; często głosujący nie wskazuje swojego najlepszego kandydata, ale tego kto ma szansę wygrać. Aby wygrać trzeba mieć najwięcej głosów, ale nie musi być to więcej niż 50%.

System większościowy jest jedynym systemem spełniającym następujące warunki:

- ***anonimowość*** – każdy głos ma tę samą wagę,
- ***neutralność*** – nierozróżnialność wariantów; zmieniając nazwiska kandydatów otrzymujemy tego samego kandydata tyle, że z odpowiednio podmienionym nazwiskiem,
- ***monotoniczność*** – jeżeli x jest zwycięzcą, a jeden z wyborców podniesie pozycję x w swoim rankingu, to x nadal będzie zwycięzcą po uwzględnieniu tej zmiany.

Przykłady: Wielka Brytania (British House of Commons - najsławniejszy na świecie przykład plurality rule - okręgi jednomandatowe), USA (większość wyborów), Azerbejdżan, Kanada, Indie, Jamajka, Kenia, Iran, Kuwejt, Nepal, Singapur, Południowa Korea, Polska (wybory do senatu w okręgach jednomandatowych), w sumie ponad 40 państw.

☼ **Zrób zadanie 1a z arkusza ćwiczeń (rozwiązania w arkuszu solved, omówienie na końcu pliku prowadzącego).**

Antiplurality rule: każdy z wyjątkiem ostatniego kandydata jest nagradzany - w tym kontekście wygrywa ten, który ma najwięcej nieostatnich miejsc; można ją postrzegać jako wybory, w których głosuje się przeciw jednemu kandydatowi - wtedy wygrywa ten, który ma najmniej takich negatywnych głosów. Faworyzuje kandydatów o umiarkowanych poglądach (ang. *middle-of-the-road candidates*).

A co z przypadkiem szczególnym 1? Mielibyśmy remis między prof. Słowińskim i prof. Nawrockim.

☼ **Zrób zadanie 1b z arkusza ćwiczeń.**

Głosowanie akceptacyjne (**approval voting**) – każdy głosuje na podzbiór kandydatów, którzy są dla nie akceptowalni i spośród których każdy otrzymuje jeden punkt. Ostateczny ranking wynika z sumarycznej liczby punktów - wygrywa ten, który jest akceptowalny dla największej liczby głosujących.

Przykłady: konklawe między 1294 a 1621, wybór Doża Wenecji między XIII i XVIII w.; wybór sekretarza generalnego ONZ - na początku zbiera się opinie, którzy kandydaci są akceptowalnie dla największej liczby państw.

☼ **Zrób zadanie 1c z arkusza ćwiczeń.**

Plurality run-off (run-off election; second ballot, two-round system) – jeśli w pierwszej turze ktoś osiągnie więcej niż 50%, to jest zwycięzcą; w przeciwnym razie, do drugiej rundy przechodzi dwóch kandydatów z największą liczbą głosów (w niektórych systemach dopuszczalna jest większa liczba kandydatów, którzy osiągnęli minimalny procentowy próg głosów).

Przykład: wybory prezydenckie w Polsce, Francji, Argentynie, Bułgarii, Brazylii, Chorwacji, Czechach, Finlandii, Ghanie, Indiach, Iranie, Portugalii, Rosji, Turcji, Ukrainie, itd. - najpopularniejszy system rozstrzygania wyborów prezydenckich na świecie, poza tym np. Senat w Czechach lub Parlament w Iranie.

Wadą systemu jest to, że zmusza do głosowania taktycznego już od pierwszej rundy, głosy dla podobnych kandydatów rozkładają się, a skrajny kandydat może dostać się do drugiej rundy przy stosunkowo niewielkim poparciu (najsłynniejszy przykład - wybory prezydenckie we Francji w 2002 r., gdzie było bardzo wielu kandydatów, między których głosy się rozłożyły i do drugiej tury dostał się Jean-Marie Le Pen z poparciem 16%).

☼ **Zrób zadanie 1d z arkusza ćwiczeń.**

Single transferable vote (STV; instant run-off voting) - analizuje tylko pierwsze miejsca; aby wygrać, trzeba mieć ponad 50% głosów (ang. *quota*); jeśli w danym etapie to nie jest możliwe, usuwa się najsłabszego kandydata z najmniejszą liczbą głosów (pierwszych miejsc), i tak do skutku, przesuwając odpowiednio głosy po usunięciu kandydata/ów; rund może być więcej niż 2 - maksymalnie n-1, gdzie n jest liczbą kandydatów. Dla trzech kandydatów STV = Plurality with run-off.

Jest to bardzo mądry system głosowania, który unika marnowania głosów - jeśli twój kandydat nie ma szans na zwycięstwo, twoje preferencje wciąż są uwzględnione; nie musisz głosować taktycznie. Jest promowany choćby w USA przez organizację FairVote. Wady: bardziej czasochłonny i kosztowny w realizacji.

Wykorzystanie: Australia, Nowa Zelandia, Malta, Pakistan

☼ **Zrób zadanie 1e z arkusza ćwiczeń.**

Modyfikacja STV stosowana jest do wyboru miasta-gospodarza igrzysk olimpijskich. Różnica polega na tym, że tam głosy nie przechodzą z automatu z utworzonego na początku rankingu, ale są oddawane na nowo. W efekcie niektórzy kandydaci dostają mniej głosów niż w rundzie poprzedniej, bo głosujący przekonują się między rundami albo obserwują, kto ma szanse na zwycięstwo.

Wybrane paradoksy głosowania:

- **Winner-turns-loser paradox** – zwycięzca staje się przegranym, jeśli niektórzy wyborcy podniosą jego ranking w swoich profilach preferencyjnych;
- **No-Show paradox** – niewygrywający do tej pory kandydat wygrywa, pomimo że dodano profile, w których jest on na ostatnim miejscu.

☼ **Zrób zadanie 2 z arkusza ćwiczeń.**

Dwie historycznie bardzo istotne metody to głosowanie wg Bordy oraz głosowanie wg Condorceta.

Głosowanie wg. Bordy (Borda rule, reguła Bordy, Jean-Charles de Borda w XVII w.) - każdy wyborca szereguje wszystkich n kandydatów; ten, który jest pierwszy dostaje n-1, drugi n-2 punkty, …, ten najsłabszy 0; wygrywa wariant z największą sumaryczną liczbą punktów; preferuje kandydatów w dostatecznym stopniu akceptowalnych przez większość głosujących wada - wysokie koszty.

Wykorzystanie: Słowenia (reprezentanci mniejszości narodowych włoskich i węgierskich w parlamencie), kandydaci w wyborach prezydenckich w Kiribati, parlament Nauru

☼ **Zrób zadanie 3a z arkusza ćwiczeń.**

Reguła Bordy jest przykładem metody punktowej. Nie jest to pierwsza metoda punktowa, którą poznaliście podczas tych zajęć.

Uogólnienie: **Positional scoring rule**

Ogólne wymaganie - wektor punktów/wyników s = <s1, s2, …, sn>, gdzie s1 >= s2 >= … >=sn.

- Borda rule: <n-1, n-2, …, 0>
- Plurality rule: <1, 0, …, 0> - tylko pierwszy dostaje 1 punkt, pozostali 0.
- Antiplurality rule: <1, …,1, 0> - tylko ostatni dostaje 0 punktów, pozostali 1.

Głosowanie wg. Condorceta - Marquis de Condorcet w XVIII w.; porównuje się wszystkie pary wariantów; wariant, który wygrywa wszystkie porównania parami z innymi wariantami jest zwycięzcą (**Condorcet winner**); zwycięzca Condorceta nie zawsze musi istnieć (patrzy przypadek szczególny nr 2; cykl Condorceta).

w każdej komórce macierzy (x,y) – liczba pojedynków wygranych przez wariant z wiersza (x) / liczba pojedynków wygranych przez wariant z kolumny (y) (może być sama liczba wygranych pojedynków)

Dane:

4 : C > B > A

3 : B > C > A

3 : A > B > C

Macierz porównań:

	A	B	C
A	-	3/7	3/7
B	7/3	-	6/4
C	7/3	4/6	-

Decyzja: B jest zwycięzcą

☼ **Zrób zadanie 3b z arkusza ćwiczeń.**

Jeśli zwycięzca Condorceta nie istnieje, to można zastosować reguły głosowania, które nazywają się rozwinięciami Condorceta. Charakteryzują się one tym, że jeśli zwycięzca Condorceta jest, to będzie zwrócony na pierwszym miejscu, a jeśli go nie ma - to arbitralnie przerywają cykl. Omówimy pięć takich procedur.

Reguła Copelanda (**Copeland rule**) – wygrywa kandydat, dla którego różnica liczby wygranych pojedynków i liczby przegranych pojedynków z innymi kandydatami (porównań parami) jest maksymalna. Ważne jest tylko "duże" zwycięstwo czy porażka; np. nieważne, czy wygrałeś w stosunku 100 do 0 czy 51 do 49, jest to 1 zwycięstwo. Zalety: łatwe obliczenia, łatwe zrozumienie. Wady: często prowadzi do remisów, nie bierze pod uwagę stopnia zwycięstwa.

☼ **Zrób zadanie 3c z arkusza ćwiczeń.**

Reguła Kemenego – wybierz ranking, który jest najbliższy rankingowi wyborców pod względem całkowitej liczby przestawień wymaganych do sprowadzenia preferencji wszystkich wyborców do tego rankingu. Rozważa wszystkie możliwe rankingi i liczy dla każdego z nich sumaryczne wsparcie dla obserwowanych w tym rankingu relacji preferencji dla wszystkich par. Ranking z najwyższym wsparciem jest wynikiem reguły Kemenego.

☼ **Zrób zadanie 3d z arkusza ćwiczeń.**

Reguła maximin (maximin rule) – uszereguj warianty zgodnie z minimalnym wsparciem, jakie otrzymują we wszystkich porównaniach parami; im większe, tym lepsze; kandydat z największym minimalnym wsparciem w zestawieniu z jakimkolwiek innym kandydatem jest najlepszy.

- niech score(X,Y) oznacza liczbę głosujących, którzy w zestawieniu X oraz Y, wyżej cenią X
- zwycięzca W = $\text{argmax}_X(\text{min}_Y \text{score}(X,Y))$

☼ **Zrób zadanie 3e z arkusza ćwiczeń.**

Reguła Coombsa (**Coombs rule**) – podobna do STV (stąd roboczo można ją nazwać "odwrócone STV"), tyle że eliminuje się kandydata, który jest najmniej preferowany przez największą liczbę głosujących (ma największą liczbę ostatnich pozycji); do skutku, dopóki nie zostanie wybrany zwycięzca z liczbą pierwszych miejsc większą niż 50% (wtedy wiadomo już, że patrząc na miejsca ostatnie on na pewno przetrwa do końca i wygra, więc można przerwać).

☼ **Zrób zadanie 3f z arkusza ćwiczeń.**

Reguła Baldwina (Nansona) – w każdym kroku liczy się punkty wg Bordy i eliminowany jest kandydat z najgorszym wynikiem w głosowaniu Bordy; rundy powtarza się aż do wyłonienia zwycięzcy (zwróć uwagę, że wraz z odpadaniem kandydatów, liczba punktów w każdej rundzie spada).

☼ **Zrób zadanie 3g z arkusza ćwiczeń.**

Metody współcześnie stosowne do podziału mandatów w systemach wyborczych opartych na proporcjonalnej reprezentacji z listami partyjnymi. Omówimy dwie tzw. metody ilorazowe.

Metoda d'Hondta (Victor d'Hondt)

- dzielimy liczby uzyskanych głosów przez kolejne liczby naturalne: 1, 2, 3, 4, 5,…
- znajdujemy największe ilorazy liczby uzyskanych głosów
- obsadzamy tyle mandatów, ile jest dostępnych w danym okręgu
- remis – decyduje ogólna liczba głosów, a potem liczba zwycięskich obwodów
- faworyzuje duże ugrupowania (na które oddano dużą liczbę głosów)
- wybory parlamentarne: Polska (wybory do sejmu, rad gmin, rad powiatów i sejmików wojewódzkich), Austria, Finlandia, Izrael (znana pod nazwą Bader-Ofer method), Hiszpania, Holandia
- w rzeczywisty często łączona jest z progiem wyborczym, określającym które partie uczestniczą w podziale mandatów.

☼ **Zrób zadanie 4a z arkusza ćwiczeń.**

Metoda Sainte-Lague (Andre Sainte-Lague)

- podział bardziej proporcjonalny niż u d'Hondta, mówi się, że generuje wyniki lepiej odzwierciedlające poglądy wyborców
- wybory parlamentarne: Norwegia, Szwecja, Dania, Bośnia, Łotwa, Kosowo, Niemcy, Nowa Zelandia, Polska – 2001r.
- dzielimy liczby uzyskanych głosów przez kolejne liczby nieparzyste: 1, 3, 5, 7, …
- czasami 1 zastępuje się 1.4 albo pomija się pierwszy dzielnik (N=1) – wtedy zmodyfikowana metoda Sainte-Lague

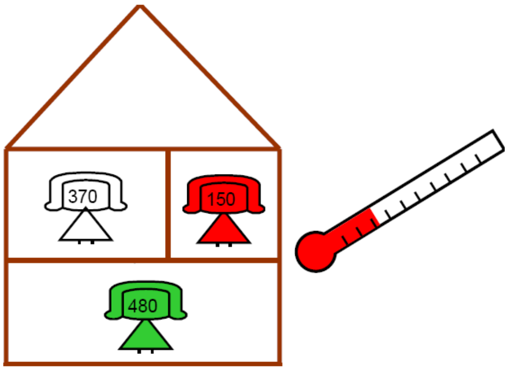
☼ **Zrób zadanie 4b z arkusza ćwiczeń.**

Wnioski:

- Istnieje wiele sensownych reguł głosowania.
- Niemal dla wszystkich metod głosowania można podać przykłady, dla których zastosowanie tych reguł prowadzi do różnych wyników.
- Rezultat głosowania zależy od preferencji wyborców, ale chyba w większym stopniu od tego, jaką regułę zastosuje się do ich agregacji.

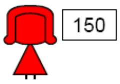
3. Power indices („indeksy mocy”)

Rozważmy budynek z trzema współwłaścicielami:

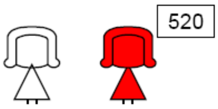


- Każdy współwłaściciel ma wagę proporcjonalną do powierzchni mieszkania (np. przeskalowaną tak, by wagi wszystkich współwłaścicieli sumowały się do 1000)
- Reguła decyzyjna: grupa współwłaścicieli jest wygrywająca jeśli łączna suma wag jej członków wynosi 667 (co najmniej 2/3) – wtedy może przeforsować decyzję dotyczącą budynku (budowa windy, malowanie elewacji na zielona, pokrycie dachu papą, itd.).
- Jak zbadać siłę każdego ze współwłaścicieli?

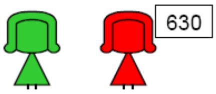
Jakie własności powinien spełniać indeks mocy? Rozważmy przykład z rodzinami i tworzenie przez nie koalicji:



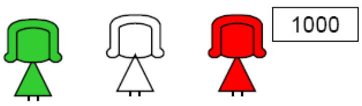
Ta grupa ma mniej głosów niż 667



Ta grupa ma mniej głosów niż 667



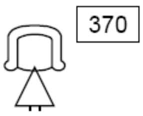
Ta grupa ma mniej głosów niż 667



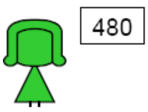
Ta grupa ma **więcej** głosów niż 667

0

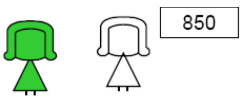
Ta grupa ma mniej głosów niż 667



Ta grupa ma mniej głosów niż 667

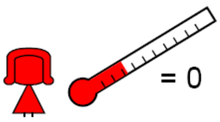


Ta grupa ma mniej głosów niż 667

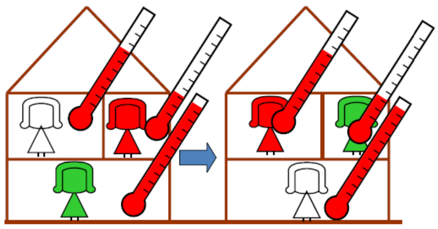


Ta grupa ma **więcej** głosów niż 667

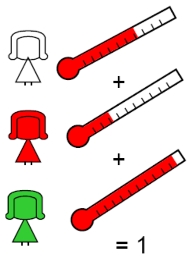
Null player property – moc gracza, który nigdy nie przyczynia się do utworzenia koalicji wygrywającej powinna wynosić 0 - czerwona rodzina nikomu nie jest potrzeba do podjęcia decyzji:



Anonimity property – indeksy mocy nie mogą być uzależnione od nazwisk graczy, ale od ich wejściowej mocy głosy:



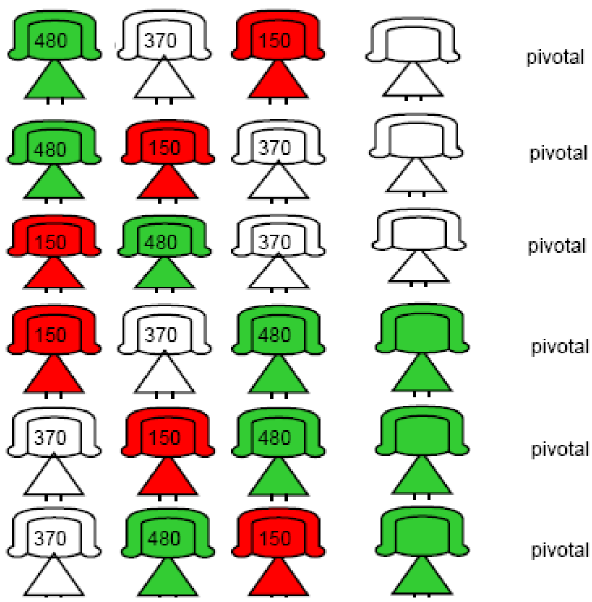
Efficiency property – suma mocy wszystkich graczy powinna wynosić 1 tak, aby po spojrzeniu na wartość indeksu była ono interpretowalna:



Omówimy dwa najbardziej popularne indeksy mocy: indeks Shapley'a-Shubika i indeks Banzhafa.

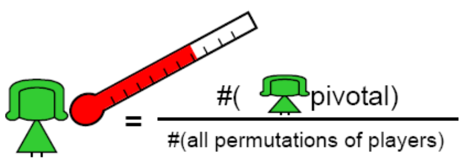
Shapley & Shubik Power index (indeks Shapley'a-Shubika spełnia null player property, anonimity property, efficiency property oraz transfer property (tej ostatniej nie omawiamy))**:**

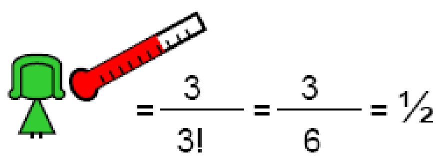
Rozważ wszystkie permutacje graczy (tak jakby rozważane osoby wchodziły do pokoju we wszystkich możliwych kolejnościach):



Policz, ile razy każdy z graczy przekształca grupę z koalicji niewygrywającej w koalicję wygrywającą (pivotal) („pokój, do którego wchodzą pojedynczo gracze i trzeba zauważyć, w którym momencie koalicja wewnątrz pokoju jest wygrywająca"); np. dla pierwszej permutacji z powyższego rysunku - wchodzi zielony - jest 480; wchodzi dodatkowo biały - jest 480 + 370 > 667, biały jest graczem pivotal.

Indeks SS = liczba razy bycia pivotal / liczba permutacji





Wyniki: indeksy SS dla zielonej i białej rodziny są takie same (1/2), pomimo że ich wejściowe moce różniły się; indeks dla rodziny czerwonej jest zerowy, bo nie jest ona nikomu potrzebna do podjęcia decyzji.

Banzhaf Power Index (Indeks Banzhafa)

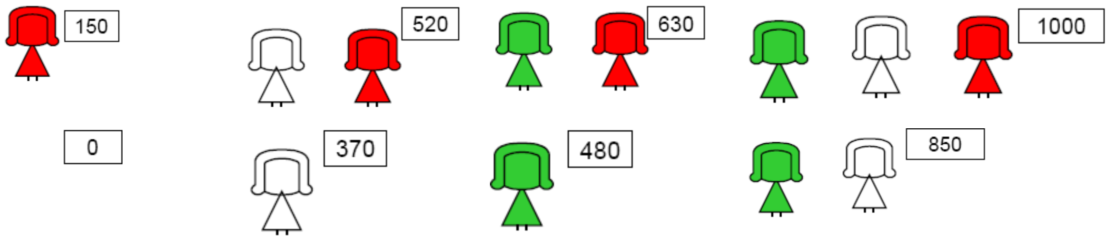
Gracz i jest krytyczny dla danej koalicji, jeśli:

- i należy do koalicji,
- koalicja nie byłaby wygrywająca, gdyby gracz i z niej odszedł.

Banzhaf Power Index (i) = Bz(i) =

= Number of winning coalitions for which i is critical / Total numbr of times all players are critical

Rozważ wszystkie podzbiory zbioru graczy:



Wybierz te, które są wygrywające (tylko w takich koalicjach ktoś może być krytyczny):

Określ liczbę koalicji wygrywających, dla których każdy gracz jest krytyczny:

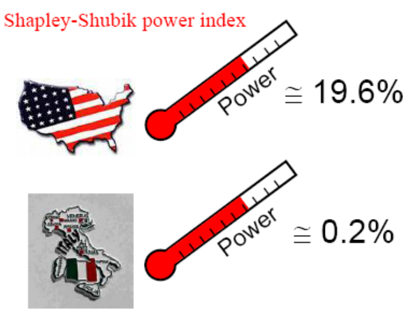
white = 2, green = 2, red = 0.

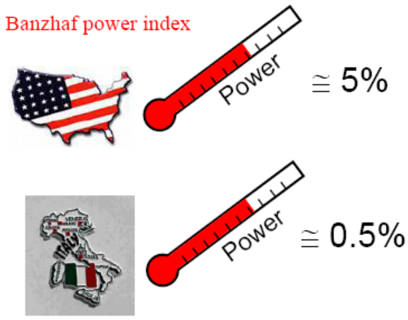
Łączna liczba „bycia krytycznym” wszystkich graczy = 4:

Bz(white) = ½, Bz(green) = ½, Bz(red) = 0

Dla tego przykładu wyniki wyszły takie same, w ogólności mogą wyjść inne:

Rada bezpieczeństwa ONZ - 5 stałych członków (Chiny, Francja, Rosja, Wielka Brytania, USA) i 10 okresowych (2-letnie kadencje); aby podjąć rezolucję potrzeba 9 głosów z 15 członków rady, przy czym wystarczy co najmniej 1 głos negatywny członka stałego, by rezolucję odrzucić:





różnica rzędu prawie 100 vs. różnica rzędu około 10

☼ **Zrób zadania 1-4 z pliku WD-lab3.xls (rozwiązania są w katalogu solved).**

Omówienie ćwiczeń i zadań

I. Proste reguły głosowania

Dane:

4: A > B > C (4 głosujących woli A nad B nad C)

3: B > C > A (3 głosujących woli B nad C nad A)

2: C > B > A (2 głosujących woli C nad B nad A)

a) **Plurality rule**: A ma 4 pierwsze miejsca, B - 3, C - 2; najwięcej pierwszych miejsc ma A (jest on najbardziej preferowany przez największą liczbę głosujących) i wygrywa (nie musi mieć więcej niż 50%)

b) **Anti-plurality rule**: A ma 4 nieostatnie miejsca (4+0+0); B - 9 (4+3+2), C - 5 (3+2); wygrywa B

c) Głosowanie akceptacyjne:

4: A

3: B, C

2: C

A jest akceptowalny dla 4 głosujących, B dla 3, C dla 5 (3+2); wygrywa C

d) **Plurality run-off**: w pierwszej rundzie wyniki jak dla plurality rule: A - 4, B - 3, C - 2 (nikt nie ma co najmniej 5, czyli więcej niż 50%); konieczna jest druga runda, do której przechodzi dwóch najlepszych kandydatów w pierwszej rundzie, czyli A i B; w drugiej rundzie: B przejmuje głosy C i wygrywa z A w stosunku 5 do 4.

e) **Single transferable vote** (STV):

5: A > B > C > D

7: B > D > C > A

7: C > B > A > D

4: D > C > B > A

W pierwszej rundzie wyniki jak dla plurality rule: A - 5, B - 7, C - 7, D - 4 (nikt nie ma co najmniej 12, czyli więcej niż 50%; odpada najgorszy, czyli D); w drugiej rundzie C przejmuje głosy D: A - 5, B - 7, C - 11 (nikt nie ma co najmniej 12, czyli więcej niż 50%; odpada najgorszy, czyli A); w trzeciej rundzie B przejmuje głosy A, więc: B - 12, C - 11 (wygrywa B)

II. Paradoksy głosowania na przykładzie plurality run-off

Rozważmy następujący scenariusz głosowania:

27: A > B > C

42: C > A > B

24: B > C > A

Zgodnie z plurality run-off: w I etapie brak zwycięzcy (A - 27, B - 24, C - 42; odpada B), w drugiej C bije A w stosunku 66:27.

Winner-turns loser

Załóżmy, że 4 wyborców podniosło ranking C z trzeciego miejsca na pierwsze (czyli wcześniej uznawali, że jest beznadziejny, a teraz że najlepszy - w wyjściowym scenariuszy wygrywało C; pytanie jak zmienią się wyniki):

23: A > B > C

46: C > A > B

24: B > C > A

Plurality run-off: w I etapie brak zwycięzcy (A - 23, B - 24, C - 46; odpada A), w drugiej B bije C w stosunku 47:46. **Winner-turns loser:** w wyjściowym scenariusz C wygrywało, a teraz przegrało - paradoks polega na tym, że wygrywający do tej pory kandydat przegrywa pomimo tego, że uzyskał dodatkowe wsparcie (dla plurality rule jest to spowodowane zmianą jego rywala w drugiej rundzie)

No-show paradox

Potraktujmy teraz scenariusz środkowy jako wyjściowy (wygrało B; C przegrało) i załóżmy że od 2 do 46 dodatkowych głosujących ma ranking A > B > C, określając, że C jest absolutnie beznadziejny i znajduje się na ostatnim miejscu w ich rankingu, czyli rozważany scenariusz to:

25-69: A > B > C

46: C > A > B

24: B > C > A

Plurality run-off: w I etapie brak zwycięzcy (A - 25-69, B - 24, C - 46; odpada B), w drugiej C bije B w stosunku 70:25-69. Ostatecznie wygrywa C.

No-show paradox: w wyjściowym rankingu C przegrywało, a teraz wygrywa - paradoks polega na tym, że niewygrywający do tej pory kandydat zwycięża mimo że pojawiło się mnóstwo dodatkowych głosujących, którzy uważają, że jest on najgorszy (w przykładzie dodano rankingi, w których C było na ostatnim miejscu).

III. Bardziej zaawansowane metody głosowania

Dane:

4: A > B > C

3: B > C > A

2: C > B > A

a) Głosowanie wg Bordy: w związku z tym, że jest 3 kandydatów, za 1 miejsce - 2 punkty, za 2 miejsce - 1 punkt, za 3 (ostatnie) miejsce - 0 punktów. Obliczenia:

A: $4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 8$ punktów

B: $3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 12$ punktów

C: $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 7$ punktów

Decyzja: B jest zwycięzcą, bo uzyskał największą liczbę punktów. Borda scory determinują cały ranking kandydatów.

b) Głosowanie wg Condorceta: np. A jest lepszy od B dla 4 głosujących, a B od A dla 5 (3+2) głosujących

	A	B	C
A	-	4	4
B	5	-	7
C	5	2	-

zwycięzca Condorceta istnieje dla tego konkretnego problemu, bo istnieje kandydat, który jest lepszy w bezpośrednim pojedynku od wszystkich pozostałych kandydatów; B wygrywa z A w stosunku 5 do 4 oraz z C w stosunku 7 do 2)

c) Reguła Copelanda:

Dane:

31 : A > E > C > D > B

30 : B > A > E > C > D

29 : C > D > B > A > E

10 : D > A > B > C > E

Macierz porównań:

	A	B	C	D	E
A	-	41/59	71/29	61/39	100/0
B	59/41	-	40/60	30/70	69/31
C	29/71	60/40	-	90/10	39/61
D	39/61	70/30	10/90	-	39/61
E	0/100	31/69	61/39	61/39	-

Dla każdego kandydata obliczamy liczbę wygranych oraz przegranych pojedynków, ale chodzi o "duże" pojedynki, a nie liczby oddanych głosów; przykładowo A przegrywa z B (1 przegrany "duży" pojedynek); A wygrywa z C, D oraz E (3 wygrane "duże" pojedynki);

Copeland score = liczba wygranych dużych pojedynków - liczba przegranych dużych pojedynków

Remisy nie są uwzględniane; nie działają ani na plus ani na minus.

Decyzja: A (wygrał 3, przegrał 1; 3-1 = 2), B (2 vs. 2; 2-2=0), C (2 vs. 2; 2-2=0), D (1 vs. 3; 1-3=-2), E (2 vs. 2; 2-2=0) – zwycięzca A.

d) **Reguła Kemenego**

Dane:

7 : M > W > B

9 : W > B > M

4 : B > M > W

Wygrane:

	M	W	B
M	-	11	7
W	9	-	16
B	13	4	-

Wypisujemy wszystkie możliwe rankingi i obliczamy wsparcie dla porównań parami, z których ten ranking się składa (np. M W B to M > W > B, więc M > W, M > B oraz W > B). Ten ranking, które ma najwyższe wsparcie jest wynikiem działania reguły Kemenego.

Możliwe rankingi (sumujemy zgodność głosów):

M W B - (M vs. W = 11) + (M vs. B = 7) + (W vs. B = 16) = 34

M B W - (M vs. B = 7) + (M vs. W = 11) + (B vs. W = 4) = 22

W M B - (W vs. M = 9) + (W vs. B = 16) + (M vs. B = 7) = 32

W B M - (W vs. B = 16) + (W vs. M = 9) + (B vs. M = 13) = 38

B M W - (B vs. M = 13) + (B vs. W = 4) + (M vs. W = 11) = 28

B W M - (B vs. W = 4) + (B vs. M = 13) + (W vs. M = 9) = 26

Decyzja : W B M, czyli W > B > M

e) **Reguła maximin**

7 : M > W > B

9 : W > B > M

4 : B > M > W

Patrzymy na macierz porównań parami i z danego wiersza wsparć w stosunku do innych kandydatów obliczamy minimum. Ten kandydat, który ma to minimum największe jest zwycięzcą.

Decyzja: M – min{11, 7} = 7, W – min{9,16} = 9, B – min{13, 4} = 4, ranking W > M > B

f) **Reguła Coombsa („odwrócony STV”)**

7 : M > W > B

9 : W > B > M

4 : B > M > W

W każdym etapie patrzymy na liczbę ostatnich miejsc - ten, który ma ich najwięcej jest najsłabszy i odrzucamy go w danej rundzie aż zostanie jeden kandydat.

I etap: B - 7 ost. miejsc, M - 9 ost. miejsc, W - 4 ost. miejsca; odrzucamy M

II etap: B - 16 ost. miejsc, W - 4 ost. miejsca; odrzucamy B, wygrywa W

g) **Reguła Baldwina (Nansona)**

7 : M > W > B

9 : W > B > M

4 : B > M > W

W każdym etapie patrzymy obliczamy Borda scory - ten, który ma go najniższego jest najsłabszy i odrzucamy go w danej rundzie aż zostanie jeden kandydat; zwróć uwagę, że liczba kandydatów zmniejsza się w każdej rundzie, więc trzeba to uwzględnić przy rozdzielaniu punktów metodą Bordy.

I etap: BSc(M) = 7*2 + 9*0 + 4*1 = 18; BSc(W) = 7*1 + 9*2 + 4*0 = 25; BSc(B) = 7*0 + 9*1 + 4*2 = 17; odpada B

II etap: BSc(M) = 11*1 + 9*0 = 11; BSc(W) = 9*1 + 11*0 = 9; odpada W; wygrywa M

4. Podział mandatów metodami ilorazowymi

Do obsadzenia jest 8 mandatów, 3 partie: A (240 głosów), B (360 głosów) i C (150 głosów).

a) **metoda d'Hondta** - liczbę głosów uzyskanych przez poszczególne partie dzielimy przez kolejne liczby naturalne N = 1, 2, 3, ... Aby mieć pewność, że będziemy posiadać wyniki niezbędne do rozdziału mandatów, teoretycznie trzeba by to robić do N = liczba mandatów do obsadzie; w praktyce kończy się dużo wcześniej (w tabeli niżej rozpisano do N = 5). Dysponując ilorazami, zaczynamy rozdzielać mandatów: 1. mandat dostaje B za 360 (notacja 360B), 2, mandat dostaje A za 240 (240A), ..., aż do wyczerpania liczby mandatów. W przypadku remisu (np. przy 5 mandacie mamy 120A i 120B) mandat dostaje ta partia, która uzyskała więcej głosów (B - 360 > A - 240). Mandaty sumujemy i dostajemy ostateczny podział.

<table>
<tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td rowspan="6">Wyniki:
360B, 240A, 180B, 150C, 120B, 120A, 90B, 80A
B - 4 mandaty, A - 3 mandaty, C – 1 mandat</td></tr>
<tr><td>N=1</td><td>240</td><td>360</td><td>150</td></tr>
<tr><td>N=2</td><td>120</td><td>180</td><td>75</td></tr>
<tr><td>N=3</td><td>80</td><td>120</td><td>50</td></tr>
<tr><td>N=4</td><td>60</td><td>90</td><td>37.5</td></tr>
<tr><td>N=5</td><td>48</td><td>72</td><td>30</td></tr>
</table>

Czy podział ten jest sprawiedliwy? Na pewno jest daleki od proporcjonalnego. Bardzo premiuje duże partie, tj. te które uzyskały dużo głosów. Ma im to ułatwić samodzielne rządzenie lub tworzenie koalicji. Przykładowo B dostał 2.4 razy więcej głosów niż C, a mandatów aż 4 razy więcej.

b) **metoda Sainte-Lague** - liczbę głosów uzyskane przez poszczególne partie dzielimy przez kolejne liczby naturalne nieparzyste N = 1, 3, 5, ... Reszta analogicznie jak dla d'Hondta. Preferencja dla dużych partii jest znacznie miejsca. Dlaczego? Jeśli dzielimy tylko przez liczby nieparzyste, to naturalne jest, że wśród tej ograniczonej liczby mandatów do obsadzenia mniej ilorazów takiej dużej partii się załapie, bo jej kolejne ilorazy (np. przez N=5 lub 7) muszą rywalizować z ilorazami przez N =1 lub 3 dla tych mniejszych partii.

<table>
<tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td rowspan="5">Wyniki:
360B, 240A, 150C, 120B, 80A, 72B, 51,43B, 50C
B - 4 mandaty, A – 2 mandaty, C – 2 mandaty</td></tr>
<tr><td>N=1</td><td>240</td><td>360</td><td>150</td></tr>
<tr><td>N=3</td><td>80</td><td>120</td><td>50</td></tr>
<tr><td>N=5</td><td>48</td><td>72</td><td>30</td></tr>
<tr><td>N=7</td><td>34,28</td><td>51,43</td><td>21,43</td></tr>
</table>