Abgabetermin: 04.10 19:00

1.1. Nomenklatur (Lösung direkt auf Moodle eingeben) Welche der folgenden Gleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)? Welche sind linear? Welche sind homogen?

(a) $(x+1)f'(x) = xf(x+1)$,

(b) $y'' + \tan^{-1}(x)y' + y = 0$,

(c) $\cos(y'^2+1)^2 + e^{-y^2} = \log(y^2+1)$,

(d) $y^2 + 7\sin y + xy = 0$,

(e) $y'' + 2y = -e^{x^2}$,

1.2. Existenz und Eindeutigkeit (Lösung direkt auf Moodle eingeben) Wie viele Lösungen lassen die folgenden Anfangswertprobleme zu?

(a) $y' = \begin{cases} -1 & y = 0, \\ 1 & \text{else} \end{cases}, \quad y(0) = 0.$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** mehr als 1

(b) $y' = \sqrt[3]{y^2} \quad y(0) = 0.$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** mehr als 1

(c) $y' = -\sin^2(\log(y^4+1)) + e^{y^3}\tan^{-1}(y^4+6y-7), \quad y(0) = 0.$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** mehr als 1

1.3. ODE mit gegebener Lösung Finden Sie für die folgenden Funktionen f eine ODE, die f als Lösung hat.

(a) $f(x) = (2x+1)^{100}$.

(b) $f(x) = e^{\sin(x)}$.

(c) $f(x) = x\cos(x)$.

1.4. Lineare ODE erster Ordnung Betrachten sie die folgende ODE:

$$y' - 2xy = x.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $z := e^{-x^2}y$ eine Lösung von $z' = e^{-x^2}x$ ist.

(b) Lösen Sie die Gleichung.

1.5. Lösungen überprüfen Betrachten Sie die ODE

$$y'' - 3y' - 4y = 0.$$

(a) Stellen Sie sicher, dass e^{-x} und e^{4x} Lösungen sind.

(b) Stellen Sie sicher, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ auch $ae^{-x} + be^{4x}$ Lösungen sind.

(c) Stellen Sie sicher, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ auch $ae^{-x} + be^{4x}$ Lösungen sind.

(d) Stellen Sie sicher, dass dies die einzigen Lösungen im folgenden Sinne sind: sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ so dass fe^{-x} eine Lösung ist. Dann gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = c_1e^{5x} + c_2$ gilt.
Hinweis: falls $f'' - 5f' = 0$, dann ist $g = e^{-5x}f'$ eine Lösung von $g' = 0$.