

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
(МАИ)

Институт № 8 «Компьютерные науки и прикладная  
математика»

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

### ПО ОСНОВАМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Выполнил: Студент группы М8О-207Б-23  
Клюкин Павел Александрович

Проверил: \_\_\_\_\_

Подпись: \_\_\_\_\_

Москва  
2024

# Введение

Целью данной работы является моделирование движения двух типов маятников с использованием численных методов и анализ полученных результатов.

## Составление математической модели

### Построение математической модели

В работе рассматривается два тела:

- 1) математический маятник, представляющий собой материальную точку (сосредоточенную массу) на невесомой нити;
- 2) плоский маятник, представляющий собой твёрдое тело с равномерно распределённой массой.

Оба маятника представляют собой динамические системы, для которых можно применить второй закон Ньютона и на основе этого найти закон их движения. Однако, как мы увидим, даже для таких простых систем нет точного аналитического решения (за исключением случая малого угла отклонения), поэтому такие задачи обычно решаются численно. Для того чтобы провести численные расчёты, необходимо вывести соответствующие уравнения, по которым программа будет искать решение.

### Математическая модель первого маятника

Запишем второй закон Ньютона в соответствии с первым рисунком:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = R_x, \\ m\ddot{y} = R_y - mg. \end{cases} \quad (1)$$

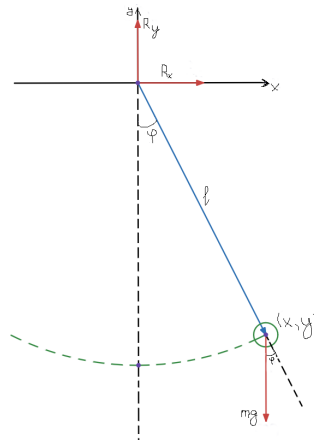


Рис. 1: Математический маятник. Координатная система расположена в месте крепления нити.  $m$  - масса материальной точки,  $l$  - длина нити,  $\varphi$  - угол отклонения нити от вертикали,  $R_x, R_y$  - реакция нити

Так как координаты связаны уравнением  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$ , можно воспользоваться методом множителей Лагранжа и, найдя градиент уравнения связи  $\nabla\varphi = (2x, 2y)$ , записать уравнение в виде

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\lambda \cdot 2x, \\ m\ddot{y} = -\lambda \cdot 2y - mg. \end{cases} \quad (2)$$

Или, учитывая, что множитель Лагранжа однороден, можно переписать уравнения в таком виде:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\lambda x, \\ m\ddot{y} = -\lambda y - mg. \end{cases} \quad (3)$$

После введения новых переменных  $vx = \dot{x}$ ,  $vy = \dot{y}$ , уравнение принимает окончательный вид, который уже можно использовать для нахождения численного решения:

$$\begin{cases} vx = \dot{x}, \\ vy = \dot{y}, \\ m \cdot vx = -\lambda x, \\ m \cdot vy = -\lambda y - mg. \end{cases} \quad (4)$$

В первом примере (D1\_DAE\_PointPendulum.py) система имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = vx, \\ \frac{dy}{dt} = vy, \\ m \frac{dvx}{dt} = -x\lambda, \\ m \frac{dvy}{dt} = -mg - y\lambda, \\ x^2 + y^2 - r^2 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Но уравнения могут принять более простой вид, если ввести обобщённую координату  $\varphi$  - угол отклонения нити от вертикали. Запишем второй закон Ньютона для вращательного движения:

$$M = \alpha \cdot I, \quad (6)$$

где  $M$  - суммарный момент сил ( $M = -l \cdot mg \cdot \sin \varphi$ ),  $\alpha$  - угловое ускорение, то есть  $\ddot{\varphi}$  в нашем случае,  $I$  - момент инерции относительно крепления, для материальной точки он будет равен  $ml^2$ . Таким образом мы получаем следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\begin{cases} vp = \dot{\varphi}, \\ \dot{vp} = -\frac{g}{l} \cdot \sin \varphi. \end{cases} \quad (7)$$

Заметим также, что для малых колебаний можно записать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l}\phi = 0,$$

которое имеет аналитическое решение:

$$\phi(t) = \phi_0 \cos \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right),$$

где  $\phi_0$  - начальный угол отклонения.

### Математическая модель второго маятника

В первом случае уравнения приняли наиболее простой вид, когда мы ввели обобщённую координату  $\varphi$  - угол отклонения от вертикали. Поступим таким же образом и со вторым маятником.

Найдём суммарный момент сил. Так как мы имеем дело с твёрдым телом, масса которого равномерно распределена вдоль него, то для нахождения момента сил вычис-

лим интеграл:

$$\sum M = - \int x \cdot dm \cdot g \cdot \sin \varphi = - \int x \cdot \frac{m}{l} dx \cdot g \cdot \sin \varphi = - \frac{mg}{l} \cdot \sin \varphi \int_0^l x dx = - \frac{1}{2} \cdot mgl \sin \varphi. \quad (8)$$

Далее найдём момент инерции. Его также следует вычислять с помощью интеграла, так как наше тело не является материальной точкой:

$$I = \int_0^l x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{3} ml^2. \quad (9)$$

И наконец запишем второй закон Ньютона для вращательного движения:

$$\sum M = I \cdot \ddot{\varphi} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{g}{l} \sin \varphi. \end{cases} \quad (10)$$

Во втором примере (D2\_DAE\_BodyPendulum.py) система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x, \\ \frac{dy}{dt} = v_y, \\ \frac{d\phi}{dt} = \omega, \\ m \frac{dv_x}{dt} = -\lambda_1, \\ m \frac{dv_y}{dt} = -mg - \lambda_2, \\ J \frac{d\omega}{dt} = l \cos(\phi) \lambda_1 + l \sin(\phi) \lambda_2, \\ x^2 + y^2 - l^2 = 0, \\ \phi - \arcsin\left(\frac{x}{l}\right) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

# Вычисления на основе моделей

## Процесс вычислений

Для численного решения уравнений движения маятников использовался метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Математическая модель первого маятника была основана на уравнениях для угла отклонения и угловой скорости, где использовался второй закон Ньютона для вращательного движения. Математическая модель второго маятника учитывала распределённую массу и включала момент инерции для твёрдого тела. Для каждого маятника была составлена система дифференциальных уравнений, которые были решены с использованием библиотеки `scipy.integrate.solve_ivp`.

Пример кода для первого маятника:

```
def pendulum(t, y):  
    phi, v = y  
    dphi_dt = v  
    dv_dt = -(g / l) * np.sin(phi)  
    return [dphi_dt, dv_dt]
```

Здесь  $\phi$  — угол отклонения, а  $v$  — угловая скорость. Решение получалось на интервале времени от 0 до 10 секунд с помощью метода 'RK45'. Аналогичная процедура была использована для второго маятника с учётом момента инерции.

Данные, полученные в процессе моделирования, были сохранены в CSV файлы.

## Сравнение с математической моделью преподавателя

Произведя вычисления с помощью программ, предоставленных преподавателем, можно сравнить результаты модели, основанной на обобщённой координате, с результатами модели, основанной на методе множителей Лагранжа. Сравнительные графики приведены на рисунках 2 и 3.

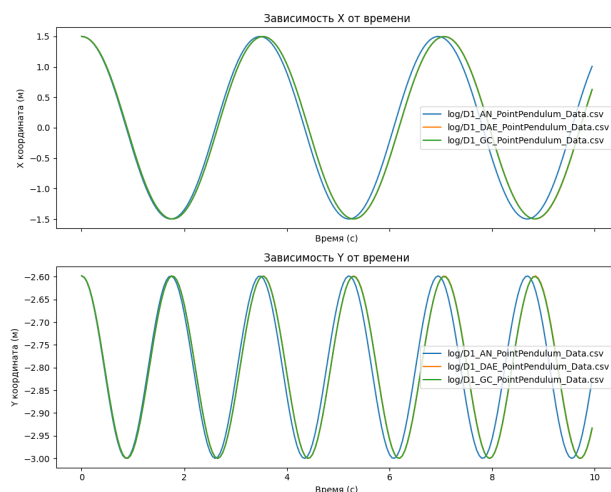


Рис. 2: Сравнение результатов вычисления законов движения для математического маятника. D1\_DAE\_PointPendulum\_Data соответствует программе преподавателя, D1\_GC\_PointPendulum\_Data - моей программе, D1\_AN\_PointPendulum.py соответствует аналитическому решению для малого угла.

Как мы видим, вычисления совпали, не считая аналитического решения, которое имеет небольшое отклонение от результата, а значит модель, основанная на обобщённой координате, эквивалентна модели, основанной на множителях Лагранжа. Успех!

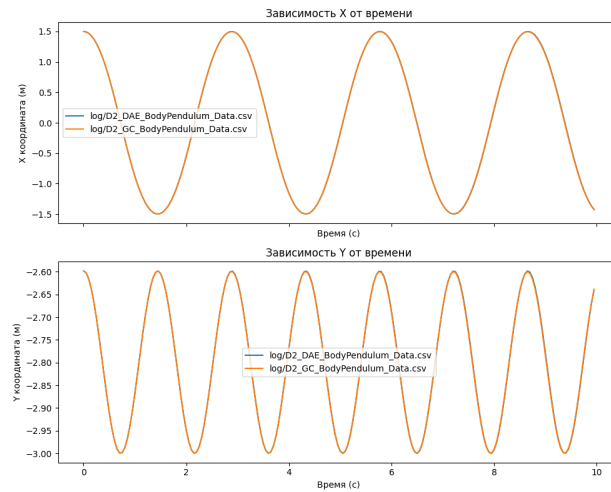


Рис. 3: Сравнение результатов вычисления законов движения для плоского маятника. D2\_DAE\_BodyPendulum\_Data соответствует программе преподавателя, D2\_GC\_BodyPendulum\_Data - моей программе

## Заключение

В процессе работы были смоделированы два типа маятников с применением методов численного интегрирования. Для первого маятника была построена модель, основанная на уравнениях Ньютона для координат, а для второго — модель, учитывающая распределенную массу и момент инерции. Сравнение результатов численного моделирования с методами, предложенными преподавателем, продемонстрировало их согласованность. Полученные результаты подтверждают правильность выбранных методов и точность построенных моделей.