1. 写出下列复数的实部, 虚部, 模和辐角.

(1) $1+\imath\sqrt{3}$,

(2) $\frac{1-\imath}{1+\imath}$,

(3) e^{z},

(4) $e^{1+\imath}$,

(5) $e^{\imath\varphi(x)}$, $\varphi(x)$ 是实数 x 的实函数.

2. 证明以下规律:

(1) 复数的加法和乘法满足结合律, 即

- $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$
- $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$

(2) 复数乘积的共轭等于复数共轭的乘积, 即 $(z_1\cdot z_2)^*=z_1^*z_2^*$.

3. 找出复平面上满足方程

$$|z-\imath a|=\lambda|z+\imath a|,\lambda>0,$$

的所有点 $z=x+\imath y$. 请分 λ 的三种情况 (1) $\lambda<1$, (2) $\lambda>1$,(3) $\lambda=1$ 分别绘制图形.

4. 若 $|z|=1$, a,b 为任意复数, 试证明

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1.$$

5. 试利用 de Moivre 定理来化简

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\cdots\sin n\varphi.$$

6. 求下列方程的根, 并在复平面上画出它们的位置.

(1) $z^4+1=0$,

(2) $z^2+2z\cos\lambda+1=0,\quad 0<\lambda<\pi$.

7. 验证

$$\tan^{-1}(z)=\frac{\imath}{2}[\ln(1-\imath z)-\ln(1+\imath z)].$$

8. 试证明极坐标下的柯西-黎曼方程

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi},\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\frac{\partial v}{\partial\rho}.\end{cases}$$