



1. 写出下列复数的实部, 虚部, 模和辐角.

(1) $1 + i\sqrt{3}$,

(2) $\frac{1-i}{1+i}$,

(3) e^z ,

(4) e^{1+i} ,

(5) $e^{i\varphi(x)}$, $\varphi(x)$ 是实数 x 的实函数.

2. 证明以下规律:

(1) 复数的加法和乘法满足结合律, 即

- $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

- $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

(2) 复数乘积的共轭等于复数共轭的乘积, 即 $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* z_2^*$.

3. 找出复平面上满足方程

$$|z - ia| = \lambda |z + ia|, \lambda > 0,$$

的所有点 $z = x + iy$. 请分 λ 的三种情况 (1) $\lambda < 1$, (2) $\lambda > 1$, (3) $\lambda = 1$ 分别绘制图形.

4. 若 $|z| = 1$, a, b 为任意复数, 试证明

$$\left| \frac{az + b}{bz + a} \right| = 1.$$

5. 试利用 de Moivre 定理来化简

$$\sin \varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \cdots + \sin n\varphi.$$

6. 求下列方程的根, 并在复平面上画出它们的位置.

(1) $z^4 + 1 = 0$,

(2) $z^2 + 2z \cos \lambda + 1 = 0$, $0 < \lambda < \pi$.

7. 验证

$$\tan^{-1}(z) = \frac{i}{2} [\ln(1 - iz) - \ln(1 + iz)].$$

8. 试证明极坐标下的柯西-黎曼方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}. \end{cases}$$