第 1 章 复数和复变函数

复变函数论是物理学和工程学广泛使用的强大分析工具, 学习掌握这个理论十分必要.

1.1 复数

1.1.1 复数的定义

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0,b,c\in\mathbb{R})$ 的求解大家一定都不陌生. 当 $\Delta\equiv b^2-4ac\geq 0$ 时, 方程有解, 求根公式可得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{1.1}$$

当 $\Delta<0$ 时, 方程无解. 这里的无解其实是指没有实数解. 当我们引入以下这一核心定义后,

$$\imath^2=-1 \quad \text{或} \quad \imath=\sqrt{-1}. \tag{1.2}$$

$\imath$ 为**虚数**, 将定义域扩展到复数, 二次方程就有确定的两个解, 当 $\Delta<0$ 时, 方程有两个复数解:

$$x=\frac{-b\pm\imath\sqrt{-\Delta}}{2a}. \tag{1.3}$$

复数 z 定义为

$$z=x+\imath y, \tag{1.4}$$

$x,y\in\mathbb{R}.x,y$ 分别为复数 z 的**实部** (real part) 和**虚部** (imaginary part), 分别记作 $\Re z$ 和 $\Im z$. 上式(1.4)成为复数的代数式. 复数域常用 $\mathbb{C}$ 来表示. 若将 z 看成是由 x,y 组成的有序对 (x,y), 记为

$$z\equiv(x,y), \tag{1.5}$$

则有 $1=(1,0),\imath=(0,1)$. 如果将 x,y 当做平面上点的坐标, 复数 z 就和平面上的点一一对应起来. 形成的平面叫做**复数平面**, 坐标轴成为**实轴**和**虚轴**. 自然我们可以改用极坐标来表示,

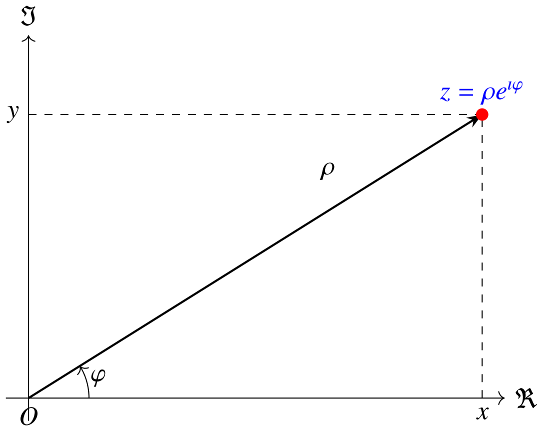


图 1.1: 复数的平面表示.

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.6}$$

$$\varphi=\arctan y/x \tag{1.7}$$

或

$$x=\rho\cos\varphi \tag{1.8}$$

$$y=\rho\sin\varphi \tag{1.9}$$

则我们得到复数 z 的三角式

$$z = \rho(\cos\varphi + \imath\ \sin\varphi), \tag{1.10}$$

或指数式

$$z = \rho e^{\imath\varphi}. \tag{1.11}$$

$\rho = |z|$ 为复数的**模** (modulus), φ 为复数的**辐角** (argument), 记作 $\operatorname{Arg} z$. 对于任意一个 $z = \rho e^{\imath\varphi}$, 由于恒等式 $e^{\imath 2\pi n} = 1$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \in \mathbb{Z}$, 可以知道辐角 $\operatorname{Arg} z$ 不能唯一确定, 它们之间相差 2π 的整数倍, 其中满足

$$0 \le \operatorname{Arg} z < 2\pi, \tag{1.12}$$

的辐角为 z 的主辐角, 记为 $\arg z$.$\arg z$ 为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值.

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2n\pi \quad (n = 0, \pm1, \pm2\ldots). \tag{1.13}$$

例题 1.1 求 $\sqrt[3]{-\imath}$.

解 首先, 我们有恒等式 $e^{\imath 2\pi n} = 1$, 且

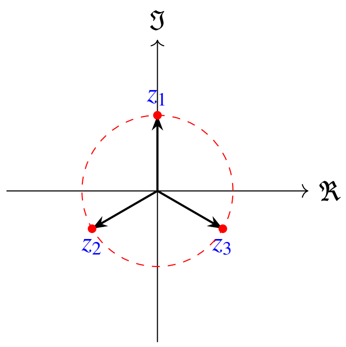
$$\begin{aligned} e^{\imath\frac{\pi}{2}} = i \quad e^{\imath\pi} = -1 \\ e^{\imath\frac{3\pi}{2}} = -i \quad e^{\imath 2\pi} = 1. \end{aligned}$$

题目就是要求方程 $z^3 = -\imath$ 的根. 可以得到

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{3}(\imath 2\pi n + \imath\frac{3\pi}{2})} = (-i)^{\frac{1}{3}} \\ e^{(\imath\frac{2}{3}\pi n + \imath\frac{\pi}{2})} = (-i)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

得到的解分三种情况

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{\imath\frac{\pi}{2}} = \imath, n = 3k \\ z_2 &= e^{\imath\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\imath}{2}, n = 3k+1 \\ z_3 &= e^{\imath\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\imath}{2}, n = 3k+2 \end{aligned}$$



它们在复平面上的分布如下图所示, 它们之间的夹角为 120°, 模为单位长度 1.

1.1.2 复数的运算

我们可以利用有序实数对的方式对复数进行基本运算: 加减乘除运算. **加法**运算可以定义为

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \tag{1.14}$$

乘法运算定义为

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \tag{1.15}$$

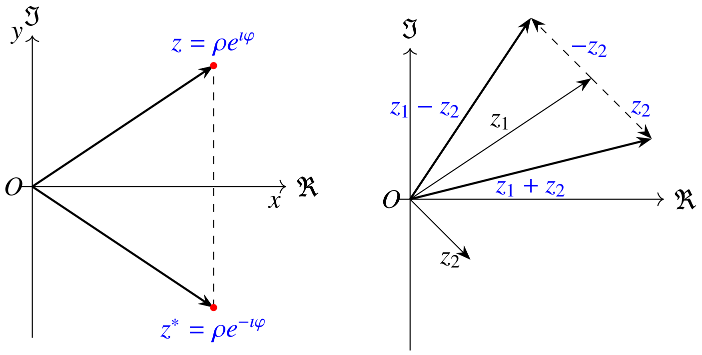


图 1.2: 左图: 共轭 z^* 与 z 的关系; 右图:z_1, z_2 的加减关系.

显然加法和乘法满足**交换律**和**结合律**, 以后乘法运算符号 $\cdot$ 均省略. 同实数一样, 根据以上定义我们可以得到复数域中的一些特殊元素. 对于任意复数 z, 复数域中存在元素 e 满足以下性质

$$e + z = z + e = z, \tag{1.16}$$

$$e \cdot z = z \cdot e = z, \tag{1.17}$$

可以得到对应的分别为

$$(0, 0) = 0 \tag{1.18}$$

$$(1, 0) = 1, \tag{1.19}$$

通过元素 $(0, 0)$, 我们可以定义 $-z$ 使得 $-z + z = 0$. 于是有,$-z = (-x, -y)$. 于是我们定义**减法**运算为

$$z_1 - z_2 \equiv z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2), \tag{1.20}$$

通过元素 $(1, 0)$, 我们定义 z^{-1} 使得 $z^{-1} \cdot z = 1$, 于是有 $z^{-1} = e^{-\imath\varphi}/\rho$. 或 $z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$. **除法**运算定义为

$$z_1/z_2 \equiv z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \imath \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.21}$$

注意往往乘除写成极坐标表达更简洁:

$$z_1z_2 = \rho_1 e^{\imath\varphi_1}\rho_2 e^{\imath\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{\imath(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{1.22}$$

此外, 复数还有一种运算较为特殊, 称为**共轭** (complex conjugation) 运算. 共轭运算表示为

$$z^* \equiv (x, -y) = x - \imath y. \tag{1.23}$$

为了得到 z 的模, 我们可以利用共轭运算,$|z| = \sqrt{zz^*}$. 注意区分 $|z|^2$ 和 z^2 的不同.

部分复数运算可以映射到复平面上. 如共轭运算可以理解为对 z 以实轴为对称轴的镜面对称. 对任意的 z_1, z_2, 它们的加减同向量的加减完全等价, 由三角形的三边关系可得

$$\big||z| - |z'|\big| \le |z \pm z'| \le |z| + |z'|. \tag{1.24}$$

很显然,$z + z^* = 2\Re z$, $z - z^* = 2\imath\Im z$.

例题 1.2 讨论 $\Re\frac{1}{z} = 2$ 在复平面上的意义.

解

$$\begin{aligned} \Re\frac{1}{z} &= 2 \\ \Re\frac{1}{x + \imath y} &= 2 \\ \frac{x}{x^2 + y^2} &= 2. \end{aligned}$$

因此, 我们得到方程

$$(x - \frac{1}{4})^2 + y^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

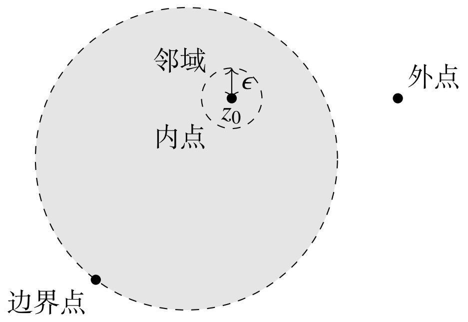


图 1.3: 邻域、内点、外点、边界点和区域示意图.

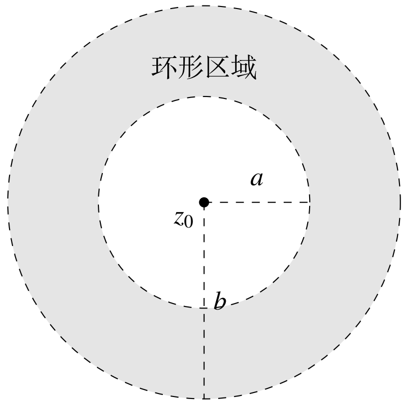


图 1.4: 圆形区域 $|z-z_0|<r$ 和环形区域 $a<|z-z_0|<b$ 示意图.

它表示以 $(\frac{1}{4},0)$ 为圆心,$\frac{1}{4}$ 为半径的圆上各点集合.

1.2 复变函数

1.2.1 区域的概念

在解析函数论中, 函数的定义域或者值域不是一般的点集, 而是满足一定条件的点集, 称为**区域**, 用 B 表示. 为了说明区域的概念, 首先介绍邻域、内点、外点以及边界点的概念.

- **邻域** 以复数 z_0 为圆心, 以任意小正实数 ε 为半径作一圆, 则圆内所有点的集合称为 z_0 的邻域.
- **内点** 若 z_0 及其邻域均属于点集 Z, 则称 z_0 为该点集的内点.
- **外点** 若 z_0 及其邻域均不属于点集 Z, 则称 z_0 为该点集的外点.
- **边界点** 若在 z_0 的每个邻域内, 既有属于 Z 的点, 也有不属于 Z 的点, 则称 z_0 为该点集的边界点, 它既不是 Z 的内点, 也不是 Z 的外点. 边界点的全体称为边界线.

现在介绍区域的概念.

区域 直观地说, 区域就是宗量 z 在复数平面上的取值范围, 用 B 表示. 确切地说, 区域是指满足下列两个条件的点集:

1. 全由内点组成;
2. 具有连通性, 即点集中的任意两点都可以用一条折线连接起来, 且折线上的点全都属于该点集.

闭区域 区域 B 及其边界线所组成的点集称为闭区域, 以 $\bar{B}$ 表示. 区域可以是各种各样的, 例如圆形域及环形域 (如图1.4所示). 圆形域可以用不等式 $|z-z_0|<r$ 来表示, 式中 z_0 为圆心, r 为半径; 环形域可以用 $a<|z-z_0|<b$ 来表示, z_0 为环心, 式中 a 为内半径, b 为外半径. 若将其中的 "$<$" 换成 $\leqslant$, 则这两个式子分别表示闭圆域和闭环域.

1.2.2 复变函数定义

存在复数平面的点集 Z, 每一点 $z \in Z$ 有一个或多个复数值 w 与之对应, 则称 w 为 z 的函数–复变函数.z 称为 w 的宗量, 定义域为 Z, 记作

$$w = f(z), z \in Z. \tag{1.25}$$

任意一个复变函数 $f(z)$,$z = x + \imath y$, 我们可以写称实部和虚部的组合,

$$f(z) = u(x, y) + \imath\, v(x, y), \tag{1.26}$$

其中 $u(x, y), v(x, y)$ 为纯实函数. 它们可以类似的写成

$$\Re f(z) = u(x, y), \quad \Im f(z) = v(x, y), \tag{1.27}$$

$f(z)$ 的复共轭为 $u(x, y) - \imath\, v(x, y)$. 取决于 $f(z)$, 二者可能相等也可能不等.

这里我们列举一些常见复变函数.

- 多项式:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \tag{1.28}$$

- 有理分式:

$$\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}^+, \tag{1.29}$$

- 根式:

$$(z - a)^{m/n}, \quad n, m \in \mathbb{Z}^+, \tag{1.30}$$

- 对数、指数

$$\ln z = \ln |z| + \imath \mathrm{Arg}\, z, \quad z^s = e^{s \ln z}, \tag{1.31}$$

- 正余弦, 正余切函数

$$\sin z, \cos z, \tan z, \cot z, \tag{1.32}$$

- 双曲正余弦, 双曲正余切函数

$$\sinh z, \cosh z, \tanh z, \coth z. \tag{1.33}$$

以上所有出现的常数均为复数.

例题 1.3 验证

$$|\sin z| = \frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y} + e^{-2y}) + 2\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)}.$$

解 由正弦函数定义得

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{e^{\imath z} - e^{-\imath z}}{2\imath} \\
&= \frac{e^{\imath x - y} - e^{-\imath x + y}}{2\imath} \\
&= \frac{1}{2\imath}\left(e^{-y}(\cos x + \imath \sin x) - e^{y}(\cos x - \imath \sin x)\right) \\
&= \frac{1}{2\imath}\left(\cos x(e^{-y} - e^{y}) + \imath \sin x(e^{-y} + e^{y})\right)
\end{aligned}$$

取模后可得,

$$\begin{aligned}
|\sin z| &= \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2 x(e^{2y} + e^{-2y} - 2) + \sin^2 x(e^{2y} + e^{-2y} + 2)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y} + e^{-2y}) + 2\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)}
\end{aligned}$$

可见, 与实函数不同的是,$|\sin z|$ 的取值完全可以大于 1.

1.2.3 三角函数和双曲函数

双曲函数 (hyperbolic functions) 为三角函数 (trigonometric functions) 的复数类比. 许多同三角函数一样的等式和积分上都可以类似的应用在双曲函数上. 通过复数的引入, 我们很容易定义三角函数, 如正余弦函数 (sine/cosine function) 可以表示为互为共轭的指数函数的和差

$$\cos\theta = \frac{e^{\imath\theta}+e^{-\imath\theta}}{2} \tag{1.34}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{\imath\theta}-e^{-\imath\theta}}{2\imath} \tag{1.35}$$

正余函数 (hyperbolic sine/cosine function) 表达为

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} \tag{1.36}$$

$$\sinh\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}. \tag{1.37}$$

比较两组方程可以得到

$$\cosh iz = \cos z \tag{1.38}$$

$$\sinh iz = i\sin z. \tag{1.39}$$

不难验证下面两个等式成立

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y,\\ \cos(x+iy) &= \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y.\end{aligned} \tag{1.40}$$

对于三角函数, 有一很重要的 de Moivre's 定理. 我们可以用两种方式表示 $\exp(\imath n\theta)$, 于是有

$$\cos n\theta + \imath\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n. \tag{1.41}$$

于是可以验证

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta. \tag{1.42}$$

利用 $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$(取正), 可以得到

$$e^{\imath\theta} = \sqrt{1-\sin^2\theta} + \imath\sin\theta. \tag{1.43}$$

令 $\sin\theta = z, \theta = \sin^{-1}(z)$, 对两边同时求对数得到

$$\sin^{-1}(z) = -\imath\ln\left[\imath z + \sqrt{1-z^2}\right] \tag{1.44}$$

这样我们便通过对数函数表示出三角函数的反函数. 类似的,

$$\begin{aligned}\sin^{-1}(z) = -i\ln\left[iz+\sqrt{1-z^2}\right], &\quad \tan^{-1}(z) = \tfrac{i}{2}[\ln(1-iz)-\ln(1+iz)],\\ \sinh^{-1}(z) = \ln\left[z+\sqrt{1+z^2}\right], &\quad \tanh^{-1}(z) = \tfrac{1}{2}[\ln(1+z)-\ln(1-z)].\end{aligned} \tag{1.45}$$

例题 1.4 证明

$$\tanh\frac{z}{2} = \frac{\sinh x + i\sin y}{\cosh x + \cos y}.$$

解 根据双曲正切函数的定义

$$\begin{aligned}\tanh\frac{z}{2} &= \frac{\sinh\frac{z}{2}}{\cosh\frac{z}{2}}\\ &= \frac{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}}\\ &= \frac{e^{z}-1}{e^{z}+1}\\ &= \frac{e^{x+\imath y}-1}{e^{x+\imath y}+1}\\ &= \frac{e^{\imath y}-e^{-x}}{e^{\imath y}+e^{-x}}\end{aligned}$$

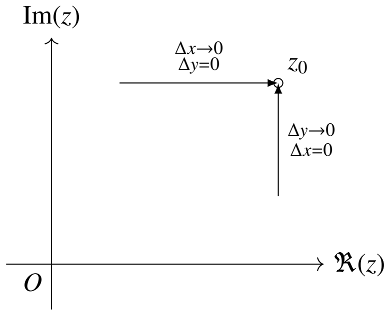


图 1.5: 逼近 z_0 的两种特殊方式.

分子分母同乘以分母的复共轭可得

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{\imath y}-e^{-x}}{e^{\imath y}+e^{-x}}\frac{e^{-\imath y}+e^{-x}}{e^{-\imath y}+e^{-x}} \\
&= \frac{1-e^{-2x}+2\imath\sin y e^{-x}}{1+e^{-2x}+2\cos y e^{-x}} \\
&= \frac{\sinh x+\imath\sin y}{\cosh x+\cos y}.
\end{aligned}
$$

证毕.

此外, 类似于三角函数, 我们有以下双曲函数

$$
\begin{aligned}
\tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}, \\
\operatorname{sech} z &= \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z+e^{-z}}, \\
\operatorname{cosech} z &= \frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^z-e^{-z}}, \\
\coth z &= \frac{1}{\tanh z} = \frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}.
\end{aligned} \tag{1.46}
$$

1.2.4 导数

首先, 我们来讨论一下函数的极限和连续性问题.

定义 1.1 设 $w=f(z)$ 在 z_0 的邻域有定义, 对于任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $|z-z_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(z)-w_0|<\delta, \tag{1.47}$$

称 $z\to z_0$ 时 w_0 为 $f(z)$ 的**极限**, 记为

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0. \tag{1.48}$$

当 z 以任意方式趋近 z_0 时都有 $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$, 称 $f(z)$ 在 z_0 点**连续**. 如果 $f(z)$ 在 $z_0=x_0+\imath y_0$ 点连续, 可以等价为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (u(x,y),v(x,y)) = (u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)). \tag{1.49}$$

复变函数的导数定义同实函数一样, 定义为

$$f'(z)=\frac{df}{dz}\equiv\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{(z+\Delta z)-z} \tag{1.50}$$

这里的前提条件是该极限与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关. 该极限为函数 $f(z)$ 在 z 点的导数. 通过该定义, 实函数的求导公式对于复变函数同样试用, 如 $(f+g)'=f'+g', (fg)'=f'g+fg'$ 等. 与实变函数求导不同的是, 复变函数导数存在条件是 Δz 以任意方式趋于 0, 因而可导条件的要求比较严格.

按照图(1.5)) 两种方式逼近 z_0, 可以得到

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.51}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(-i\frac{\Delta u}{\Delta y}+\frac{\Delta v}{\Delta y}\right)=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.52}$$

于是, 令实部虚部分别相等, 即

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.\end{cases} \tag{1.53}$$

这就是著名的**柯西-黎曼条件** (Cauchy-Riemann conditions) 或**柯西-黎曼方程**, 是复变函数可导的必要条件, 但不是充分条件. 下面我们证明: 若 $u(x,y),v(x,y)$ 偏微分存在且连续, 并满足柯西-黎曼条件, 则 $f(z)$ 可导.

证明 由于 u,v 偏微分连续, 可得

$$\Delta f=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\imath\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\imath\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y$$

利用柯西-黎曼方程, 将上式转换为

$$\begin{aligned}\Delta f&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\imath\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(-\frac{\partial v}{\partial x}+\imath\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\imath\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+\imath\Delta y)\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\imath\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z\end{aligned}$$

可以看到右式与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关, 因此根据可导的定义判断 $f(z)$ 可导.

对于极坐标系, 我们也可以得到相应的柯西-黎曼方程,

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\frac{\partial v}{\partial\rho}\end{cases} \tag{1.54}$$

其中两种推导作为习题.

1.2.5 解析函数

定义 1.2 若函数 $f(z)$ 在点 z_0 及其邻域上处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 点解析.
又若 $f(z)$ 在区域 B 上每一点都解析, 则称 $f(z)$ 是区域 B 上的解析函数.

可见, 函数若在某一点解析, 则必在该点可导. 反之却不一定成立. 若在全复数域上解析, 我们称其为**完全函数** (entire function). 若 $f(z)$ 在某点 z_0 不可导,z_0 称为 $f(z)$ 的一个**奇点** (singular point).

例题 1.5 说明 $f(z)=z^2$ 是完全函数, 而 $f(z)=|z|^2$ 的奇点数有无数个.

解 首先,$f(z)=z^2=(x^2+y^2)+\imath 2xy$, 实部和虚部分别为 $u(x,y)=x^2+y^2,v(x,y)=2xy$, 连续条件和柯西-黎曼条件在全实数域均满足, 可知 $f(z)$ 在全复平面每点均可导. 因此,$f(z)=z^2$ 是完全函数. 类似的, 我们可以知道 $f(z)=z^n,n\in N$ 的也是完全函数.
接着, 我们来看 $f(z)=|z|^2=(x^2+y^2)$, 可以知道只有在 $(0,0)$ 处满足可导条件, 其他点均不解析. 因此,$f(z)=|z|^2$ 的奇点数有无数个.

解析函数实际上有着深刻的内涵. 其中要义之一就是其实部和虚部 (统一用 ψ 来表示) 都必须满足二维的拉普拉斯方程即

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \tag{1.55}$$

上式可以利用柯西-黎曼条件进行验证, 作为作业.u,v 被成为调和函数或谐函数 (harmonic functions)(注意不要同球谐函数 spherical harmonics 混淆).

第二要义就是, 满足 $u(x,y)=C_1$ 和 $v(x,y)=C_2$ 的曲线为正交曲线族. 再次利用柯西-黎曼条件, 可以验证梯

度 ∇u 和 ∇v 正交,

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1.56}$$

由于 $\nabla u, \nabla v$ 代表两曲线的法向矢量, 因此两曲线是正交的.

第三要义就是, 当解析函数的实部 (或虚部) 给定, 可以根据柯西-黎曼条件求解相应的虚部 (或实部), 进而确定该解析函数. 如已知实部，可以发现

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy \tag{1.57}$$

可以验证

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

可知, dv 是一全微分, $v = \int dv$.

例题 1.6 解析函数实部为 $u(x, y) = x^2 - y^2$, 求解该解析函数.

解 首先, 可以验证 u 为调和函数. 然后, 利用柯西-黎曼条件可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \tag{1.58}$$

因此

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = 2ydx + 2xdy. \tag{1.59}$$

该积分与路径无关, 可以用几种方法得到. 容易得到 $v(x, y) = 2xy + C$, C 为积分常数. 解析函数为 $f(z) = x^2 - y^2 + \imath(2xy + C) = z^2 + \imath C$.

1.2.6 多值函数

在定义解析函数的时候, 其中一个条件就是要求函数为单值的. 然而除了单值函数外, 还有许多多值函数, 例如对数函数和根式函数等. 碰巧的是, 解析函数的许多性质仍然可以应用到多值函数上, 但前提是要到多值函数的支点 (branch points).

一般来说, 多值函数 $f(z)$, 若 z 绕某点一周,$f(z)$ 不会返回原值, 我们称该点为多值函数的**支点**. 若 z 绕该支点 n 周,$f(z)$ 复原, 则称该点为多值函数 $f(z)$ 的 n 阶支点. 以 $f(z) = z^{1/2}$ 为例, 我们来介绍多值函数的性质.

易知,

$$f(z) = \sqrt{r}e^{\imath\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\, z} = \sqrt{r}e^{\imath\left(\frac{1}{2}\arg z + n\pi\right)},$$

于是, 对于 $n = 2k$ 和 $n = 2k + 1$,$f(z)$ 有两个值.

$$\begin{cases} f_1(z) = \sqrt{r}e^{\imath(\arg z)/2} \\ f_2(z) = -\sqrt{r}e^{\imath(\arg z)/2} \end{cases} \tag{1.60}$$

这两个函数成为 $f(z) = z^{1/2}$ 的两个**单值分支**. 可以发现, 取任意包含 $z = 0$ 的闭合路径 (或围道)C, 沿着该路径绕行一圈, 辐角增加 2π, 可以发现 $f(z)$ 从其一单值分支 $f_1(z)$ 进入到另一单值分支 $f_2(z)$. 若绕行两周, 则回归原分支 $f_1(z)$. 根据定义, 可知 $z = 0$ 为该函数的支点, 且为 2 阶支点.

此外, 利用变换 $z = 1/t$, 可以发现 $z = \infty$ 也是 2 阶支点.

为了能够像对待单值函数一样对待多值函数, 我们需要定义复平面 Argand diagram 中的**割线** (branch cut). 割线可以被认为是复平面里一个人为设定的不可穿过的壁垒. 割线的存在, 使得我们能够避免形成一个包含支点的路径, 这样一来, 在割线之间多值函数仍然是单值的.

对于 $f(z) = z^{1/2}$, 可以取任意一条过 $z = 0$ 的指向 $|z| = \infty$ 的割线, 使得无法形成包含 $z = 0$ 支点的闭合路径. 按照约定, 我们通常沿着实轴或者虚轴取这样的割线. 由于割线的存在, 辐角被限制在 $(0, 2\pi)$, 因而 $f(z)$ 保持单值. 割线的取法多种多样, 正确连接各支点, 同时规定辐角的值即可.

例题 1.7 找出函数 $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ 的支点, 并取合适的割线.

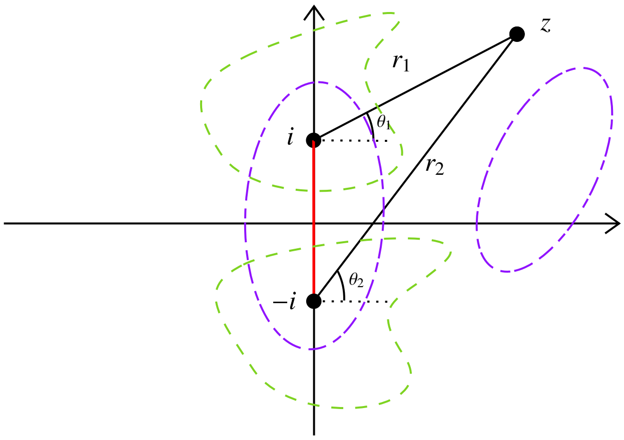


图 1.6: 对函数 $f(z) = \sqrt{z^2+1}$ 的路径选取和割线示意图.

解 不难看出,

$$f(z) = \sqrt{z+\imath}\sqrt{z-\imath}.$$

前面我们了解了 $f(z) = \sqrt{z}$ 的支点为 $z=0$, 不难看出来,$z=\pm\imath$ 也会成为该函数的两个支点. 如图1.6所示, 令

$$z-i = r_1 e^{\imath\theta_1} \quad z+i = r_2 e^{\imath\theta 2}$$

我们有

$$f(z) = \sqrt{r_1 r_2} e^{\imath\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)}.$$

如果我们做以下几种情况的闭合路径 C, 我们会得到不同的情况. 若 C

(i) 不包含两个支点, 那么 $\theta_1 \to \theta_1, \theta_2 \to \theta_2$, 于是 $f(z) \to f(z)$;

(ii) 包含 $\imath$ 但不含 $-\imath$, 那么 $\theta_1 \to \theta_1 + 2\pi, \theta_2 \to \theta_2$, 于是 $f(z) \to -f(z)$;

(iii) 包含 $-\imath$ 但不含 $\imath$, 那么 $\theta_1 \to \theta_1, \theta_2 \to \theta_2 + 2\pi$, 于是 $f(z) \to -f(z)$;

(iv) 包含 $\pm\imath$ 两个支点, 那么 $\theta_1 \to \theta_1 + 2\pi, \theta_2 \to \theta_2 + 2\pi$, 于是 $f(z) \to f(z)$.

因此, 为了阻止闭合路径绕支点完成完整的回路, 我们必须选择合适的割线. 图中连接 $\pm\imath$ 的标红线段是一种选择.

1.3 复变函数积分

1.3.1 复变函数的积分

有了复变函数微分的基础, 我们现在来讨论积分. 复变函数的积分的定义可以同实变函数积分的类比得到. 在复平面上取一个路径 ℓ, 起终点为 $A(z_0), B(z_n)$, 沿着该路径定义了一连续函数 $f(z)$, 用 $n-1$ 个点 $z_1, z_2, \cdot, z_{n-1}$ 将该路径 ℓ 分成 n 个线段 (见图1.7). 函数 $f(z)$ 在线段 $z_{k-1} \to z_k$ 上任意一点 ξ_k 的值乘上线段的长度 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ 并求和, 即

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}). \tag{1.61}$$

当 $n \to \infty$, 求和则转化为积分. 当这个和的极限存在且与 ξ_k 的选取无关时, 这个极限称为函数 $f(z)$ 沿着路径 ℓ 的**路径积分** (Contour integral), 记作 $\int_\ell f(z)dz$, 即

$$\int_\ell f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}). \tag{1.62}$$