Statistique Inférentielle

N. Jégou

Université Rennes 2

Master 1 Mathématiques Appliquées, Statistiques

Plan du cours

- Introduction
- Modèle Statistique
- Estimateurs - Propriétés
- Construction d'estimateurs
- Estimation par intervalles

Bibliographie

- Pagès J., Statistique générale pour utilisateurs :
  1) Méthodologie, PUR (2010)
- Husson F. et Pagès J., Statistique générale pour utilisateurs :
  2) Exercices et corrigés, PUR (2013)
- Saporta G., Probabilités, analyse des données et statistique
  Editions TECHNIP (2011)
- Monfort A., Cours de statistique mathématique, Economica
  (1982)

Exemple 1

- On souhaite tester l'efficacité d'un médicament
  $n = 100$ patients atteints prennent le médicament
  A l'issue de l'étude, 72 patients sont guéris
  Quelle est la probabilité p de guérison suite au traitement ?

Exemple 1

- On souhaite tester l'efficacité d'un médicament
  $n = 100$ patients atteints prennent le médicament
  A l'issue de l'étude, 72 patients sont guéris
  Quelle est la probabilité p de guérison suite au traitement ?

- On est tenté de considérer $p \approx 0.72$

Exemple 1

- On souhaite tester l'efficacité d'un médicament
  $n = 100$ patients atteints prennent le médicament
  A l'issue de l'étude, 72 patients sont guéris
  Quelle est la probabilité p de guérison suite au traitement ?

- On est tenté de considérer $p \approx 0.72$

- Questions :
  Quel crédit donner à cette proposition ?
  Cette idée est-elle cohérente avec une modélisation mathématique ?
  Le niveau de confiance est faible ? Fort ?

Exemple 2

- Des biologistes étudient le développement de poissons
  Des poissons qui se développent correctement pèsent en moyenne 1 kg
  Ils prélèvent $n = 20$: leur poids moyen est 949.5 gr

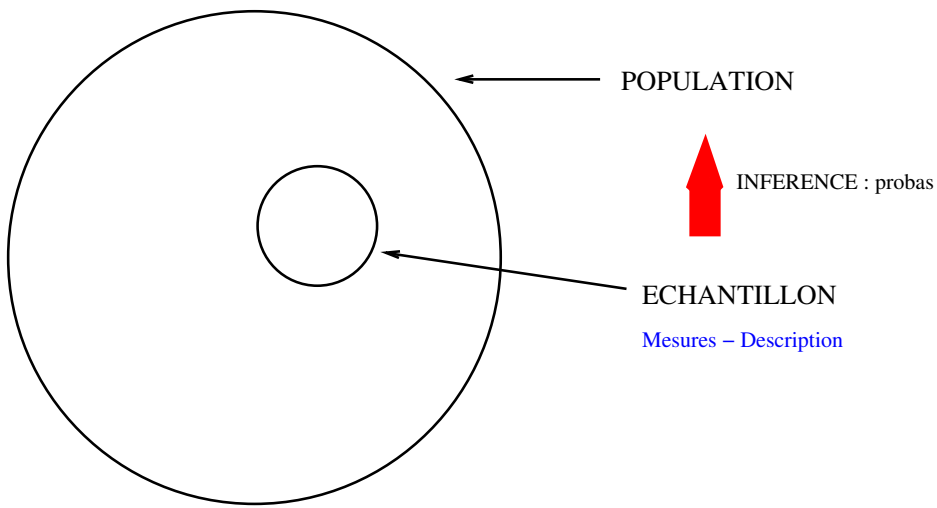
Exemple 2

- Des biologistes étudient le développement de poissons
  Des poissons qui se développent correctement pèsent en moyenne 1 kg
  Ils prélèvent $n = 20$: leur poids moyen est 949.5 gr

- Questions :
  Faut-il en déduire que les poissons ne se développent pas correctement ?
  Cette valeur est-elle conforme à un développement normal ?

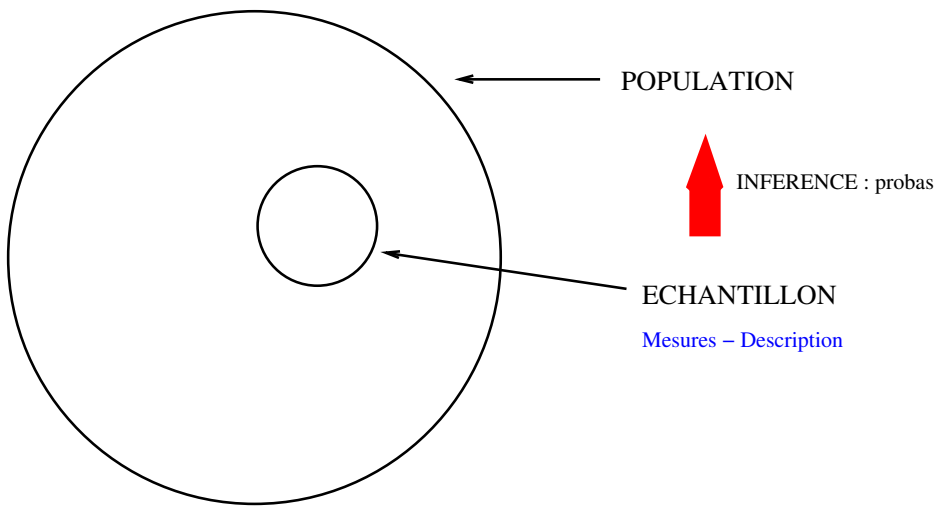
Inférence vs descriptive

- Les données de l'échantillon ne nous intéressent pas en tant que telles
- Les résumer, les représenter est le domaine de la statistique descriptive



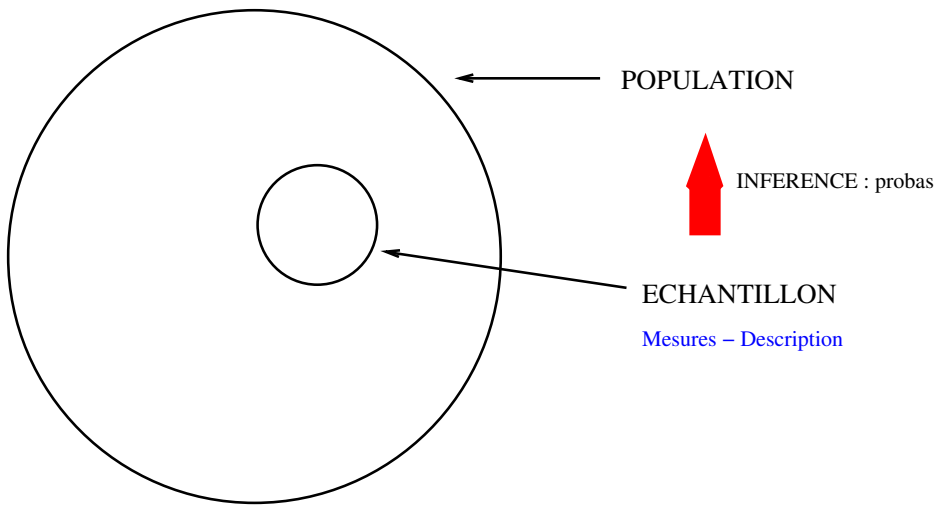
Inférence vs descriptive

- Elles nous intéressent car elles donnent une information sur une ensemble plus vaste dont elles proviennent : la population
- L'opération de "remontée" de l'échantillon à la population est appelée inférence statistique



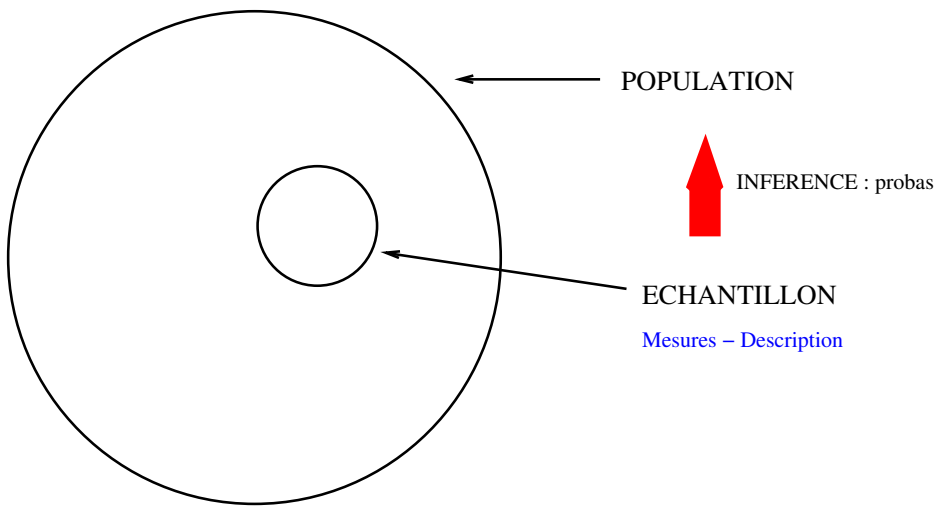
Principe de base de l'inférence

- Si l'on prélève un nouveau jeu de données, les nouvelles observations seront différentes des précédentes
- L'inférence statistique suppose de prendre en compte l'aspect aléatoire des données



Principe de base de l'inférence

- L'idée de base est ainsi de considérer ces observations comme issues d'un phénomène aléatoire
- L'inférence statistique s'appuie donc sur des outils probabilistes



Echantillonnage

- La façon de recueillir ces données a une grande importance dans la pratique
- L'objet n'est pas ici de développer la stratégie selon laquelle l'échantillon a été prélevé (le plan de sondage) :
  ceci relève de la théorie des sondages

Echantillonnage

- Le principe de base que nous retenons est que chaque individu constitutif de la population doit avoir la même chance de figurer dans l'échantillon

- L'échantillon doit ainsi être prélevé au hasard ; nous considèrerons le cas standard où les tirages sont supposés indépendants :
  - la population est de taille infinie
    ou bien
  - le tirage se fait avec remise

Notations

- On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$
- $X_1, \ldots, X_n$ sont des réplications i.i.d. d'une même variable X de loi inconnue
- Les données dont on dispose sont des réalisations de ces variables ; elles sont notées $x_1, \ldots, x_n$

Notations

- On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$
- $X_1, \ldots, X_n$ sont des réplications i.i.d. d'une même variable X de loi inconnue
- Les données dont on dispose sont des réalisations de ces variables ; elles sont notées $x_1, \ldots, x_n$

- Attention !
  - X_i est une variable aléatoire
  - x_i est un nombre

Modèle statistique - Définition

- Un modèle statistique est un objet mathématique associé à l'observation de données aléatoires
- On considère d'abord l'expérience aléatoire qui consiste à recueillir une observation x de la variable X
- X est supposée être à valeurs dans un espace $\mathcal{X}$
- On ne connait pas la loi de probabilité $\mathbb{P}$ de X

Modèle statistique - Définition

Un principe de la modélisation est de supposer que la loi de probabilité $\mathbb{P}$ appartient à une famille $\mathcal{P}$ de lois de probabilités possibles, d'où la définition suivante :

Définition (Modèle statistique)

On appelle modèle statistique tout triplet $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ où

- *$\mathcal{X}$ est l'espace des observations, c'est-à-dire l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience*
- *$\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathcal{X}$*
- *$\mathcal{P}$ est une famille de probabilités sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$*

Exemples

- La définition d'un modèle statistique repose donc sur une hypothèse concernant la famille d'appartenance de la loi de X
- Cet aspect doit être gardé en mémoire : les résultats que l'on obtient ensuite ne valent que sous cette hypothèse

Exemple 1 Hypothèse : $X \sim \mathcal{B}(p)$ d'où le modèle associé à une observation de X

$$\mathcal{X} = \{0,1\} \qquad \mathcal{A} = P(\{0,1\}) \qquad \mathcal{P} = \{\mathcal{B}(p), p \in]0,1[\}$$

Exemple 2 Hypothèse : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'où le modèle associé à une observation de X

$$\mathcal{X} = \mathbb{R} \qquad \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad \mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+\}$$

Modèle discret - Modèle continu

- Le modèle est dit discret lorsque $\mathcal{X}$ est fini ou dénombrable
  Alors $\mathcal{A}$ est la tribu formée par l'ensemble des parties de $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = P(\mathcal{X})$

- Le modèle est dit continu lorsque $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^p$ et que $\forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}$, $\mathbb{P}$ admet une densité dans $\mathbb{R}^p$
  Dans ce cas, $\mathcal{A}$ est la tribu des boréliens de $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$

Dans l'exemple 1, le modèle est discret
Dans l'exemple 2, le modèle est continu

Echantillon

Avant d'étendre la définition du modèle à n observations, on précise la notion d'échantillon.

On considère des variables i.i.d. d'où la définition que l'on prend pour un échantillon :

Définition (Echantillon)

Un échantillon de taille n (ou n-échantillon) est une suite $X_1, \ldots, X_n$ de n variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathbb{P}$

Modèle produit

- Le n-échantillon définit un vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)'$ de loi $\mathbb{P}^{\otimes n}$

- Avec comme modèle pour une observation $\mathcal{M} = (\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, le modèle associé à un n-échantillon est le modèle produit :

$$\mathcal{M}_n = (\mathcal{X}^n, \mathcal{A}_n, \{\mathbb{P}^{\otimes n}\})$$

avec $\mathcal{A}_n$ une tribu sur $\mathcal{X}^n$

Exemples

Ainsi dans nos exemples :

	$\mathcal{X}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{P}$
Exemple 1	$\{0,1\}^n$	$P(\{0,1\}^n)$	$\{\mathcal{B}(p)^{\otimes n}, p \in]0,1[\}$
Exemple 2	$\mathbb{R}^n$	$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	$\{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)^{\otimes n}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+\}$

Modèle paramétrique - Modèle non paramétrique

Il s'agit de préciser l'hypothèse faite sur la famille d'appartenance de la loi de X :

Définition (Modèle paramétrique - Modèle non paramétrique)

- *Si la loi de X appartient à une famille de lois indexables par un nombre fini de paramètres, le modèle est dit paramétrique. On note alors $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ où $\Theta \in \mathbb{R}^d$ est l'espace des paramètres*
- *Si la famille d'appartenance de la loi de X n'est pas indexable par un nombre fini de paramètres, on parle alors de modèle non paramétrique*

Paramétrique vs Non paramétrique

- Exemples 1 et 2 : modèle paramétrique
- Exemple d'hypothèse non paramétrique : la loi de X appartient à la famille des lois continues
- Avantage : on réduit le risque de mauvaise spécification du modèle
- Inconvénient : techniques d'inférence plus difficiles
- Possibilité de tester l'appartenance à une famille paramétrique

Estimateur

- Cadre du cours : Modèle paramétrique
- $\Rightarrow$ inférence sur le(s) paramètre(s) caractéristique(s) de la loi : estimation ponctuelle, estimation par intervalles, tests...

- Pour cela, on introduit la notion d'estimateur :

Définition (Estimateur)

Un estimateur de θ est une fonction mesurable de $(X_1, \ldots, X_n)$, indépendante de θ, à valeurs dans un sur-ensemble de Θ

Estimateur

- Un estimateur est une variable aléatoire fonction des X_i :

$$\hat{\theta} = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

- Par exemple :

$$X_1 \qquad \inf_{i=1\ldots n}\{X_i\} \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Exemple 1 : Le nombre moyen de guérisons est un estimateur "naturel" de la probabilité p :

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Estimateur

- Un estimateur est une variable aléatoire fonction des X_i :

$$\hat{\theta} = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

- Par exemple :

$$X_1 \qquad \inf_{i=1\ldots n}\{X_i\} \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Exemple 2 : Le poids moyen dans l'échantillon est un estimateur "naturel" du poids moyen μ dans le lac :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Big Picture

- On ne dispose que de la valeur de l'estimateur prise en les observations : $\hat{\theta} = f(x_1, \ldots, x_n)$
- Exemple 1 : $\hat{p} = 0.72$ Exemple 2 : $\hat{\mu} = 0.9495$ gr
- On souhaite que cette estimation soit proche du paramètre inconnu

[1] Les vitesses ne sont pas abordées ici

Big Picture

- On ne dispose que de la valeur de l'estimateur prise en les observations : $\hat{\theta} = f(x_1, \ldots, x_n)$
- Exemple 1 : $\hat{p} = 0.72$ Exemple 2 : $\hat{\mu} = 0.9495$ gr
- On souhaite que cette estimation soit proche du paramètre inconnu

- $\Rightarrow$ Quelle confiance avoir en cette estimation ?

[1] Les vitesses ne sont pas abordées ici

Big Picture

- On ne dispose que de la valeur de l'estimateur prise en les observations : $\hat{\theta} = f(x_1, \ldots, x_n)$
- Exemple 1 : $\hat{p} = 0.72$ Exemple 2 : $\hat{\mu} = 0.9495$ gr
- On souhaite que cette estimation soit proche du paramètre inconnu

- $\Rightarrow$ Quelle confiance avoir en cette estimation ?
- Pour le savoir, on étudie les propriétés théoriques de l'estimateur
  - Propriétés asymptotiques ($n \to \infty$) : convergence, vitesse[1]
  - Propriétés à n fixé : biais, variance, risque quadratique

[1] Les vitesses ne sont pas abordées ici

Propriétés de convergence : rappels

Principales formes de convergence pour une suite de variables aléatoires :

- Convergence en loi

  la suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ converge en loi vers la variable aléatoire X si, pour tout réel x où la fonction de répartition F de X est continue, on a

  $$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

  On note alors

  $$X_n \xrightarrow[\mathcal{L}]{} X$$

Propriétés de convergence : rappels

Principales formes de convergence pour une suite de variables aléatoires :

- Convergence en loi
- Convergence en probabilité

  la suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire X si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

  On note alors

$$X_n \xrightarrow[\mathcal{P}]{} X$$

Propriétés de convergence : rappels

Principales formes de convergence pour une suite de variables aléatoires :

- Convergence en loi
- Convergence en probabilité
- Convergence presque sûre

  la suite de variables aléatoires $\{X_n\}$ converge presque sûrement vers la variable aléatoire X si

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} X_n = X) = 1$$

  On note alors

$$X_n \underset{ps}{\longrightarrow} X$$

Propriétés de convergence : rappels

Principales formes de convergence pour une suite de variables aléatoires :

- Convergence en loi
- Convergence en probabilité
- Convergence presque sûre

Conv. presque sûre $\Rightarrow$ Conv. en probabilité $\Rightarrow$ Conv. en loi

Consistance

La consistance d'un estimateur paramétrique spécifie la convergence en probabilité vers le paramètre :

Définition (Consistance)

On dit que $\hat{\theta}$ *est consistant (ou convergent) si* $\hat{\theta} \xrightarrow[\mathcal{P}]{} \theta$ *c'est-à-dire si*

$$\forall \theta \in \Theta, \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(||\hat{\theta} - \theta|| > \varepsilon) = 0$$

avec $||.||$ *une norme sur l'espace des paramètres*
Dans le cas de l'estimation d'un paramètre unidimentionnel, on prendra la valeur absolue

Loi(s) des grands nombres

- La loi des grands nombres justifie l'intérêt, en terme de convergence, de faire des moyennes
- Elle stiplule la convergence d'une moyenne de variable aléatoire vers l'espérance commune

- La loi faible est un résultat de convergence en probabilité
- La loi forte assure, moyennant des hypothèses plus fortes, la convergence presque sûre

Loi(s) des grands nombres

Théorème (Loi des grands nombres)

- *Loi faible :* *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même espérance $\mathbb{E}[X]$, on a convergence en probabilité de $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$ vers $\mathbb{E}[X]$:*

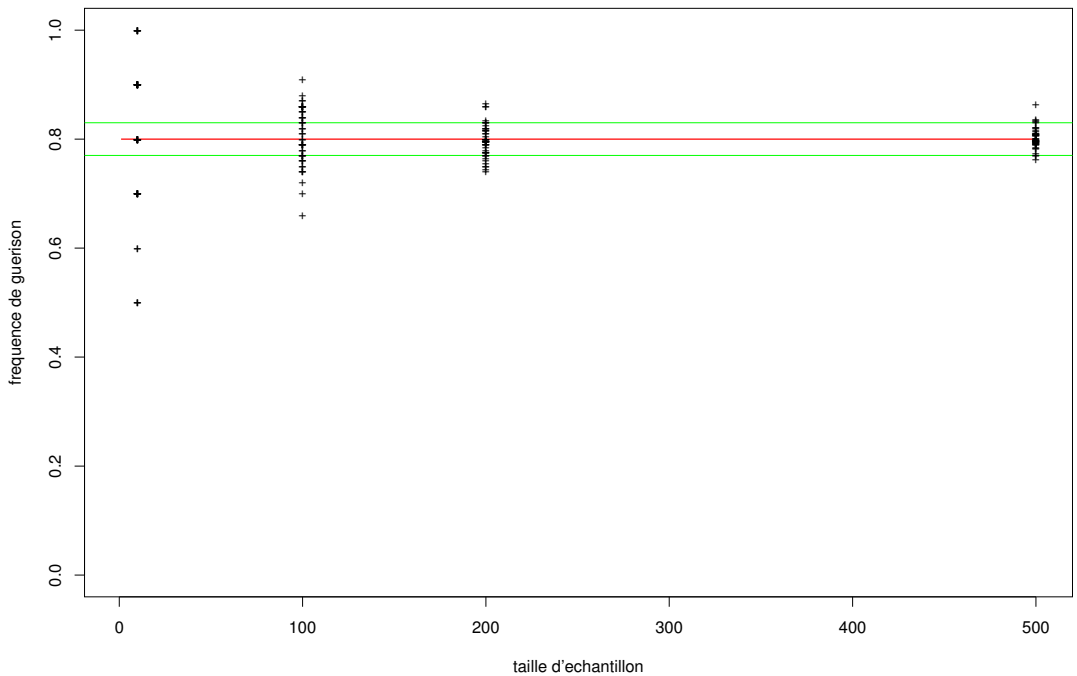
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mathbb{E}[X]\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

- *Loi forte :* *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables et de même loi, on a convergence presque sûre de $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$ vers $\mathbb{E}[X]$:*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \mathbb{E}[X]\right) = 1$$

Loi(s) des grands nombres

- Illustration sur l'Exemple 1 avec $p = 0.8$; $K = 50$ simulations pour $n = 10, 100, 200, 500$
- Quand n augmente la probabilité que $\bar{X}$ sorte du couloir $p \pm \varepsilon$ tend à se réduire



Théorème central limite

Le théorème central limite précise le comportement asymptotique de la moyenne d'échantillon puisqu'il en donne la loi limite :

Théorème (Théorème Central Limite)

Soit (X_n) *une suite de variables aléatoires i.i.d. selon une loi commune* X *d'espérance* $\mathbb{E}[X] = \mu$ *et de variance* $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$. *On a alors :*

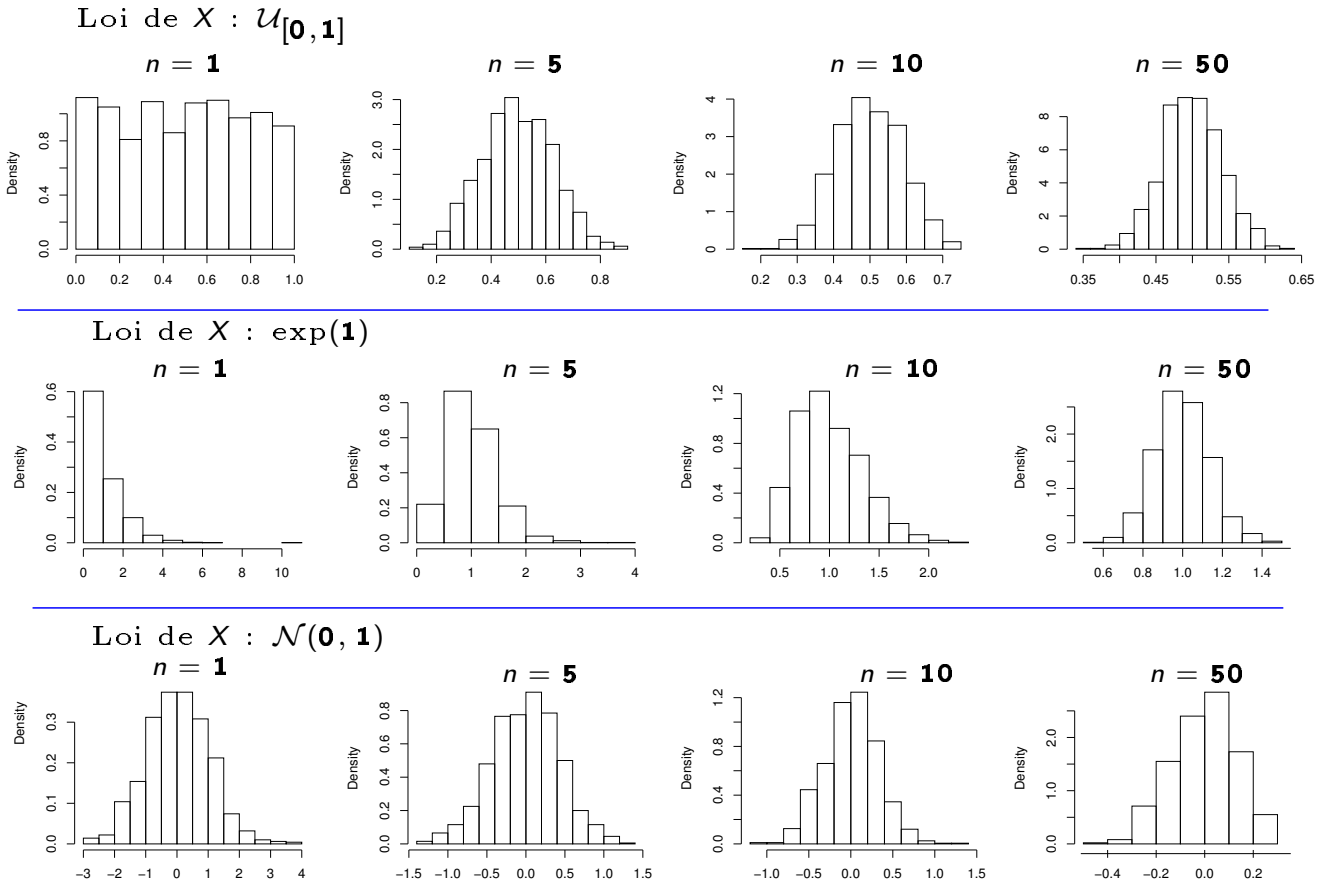
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma} \right) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \mathcal{N}(0,1)$$

Théorème central limite

- Comme $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n-n\mu}{\sigma}\right) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, le sens concret de ce théorème est que $\bar{X}$ suit approximativement (pour n assez grand) une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$
- L'aspect remarquable est que cela est vrai quelque soit la loi de X (pour peu qu'elle admette une variance)

- Pour des $X_i \underset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on a $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$
- Dans ce dernier cas, il n'est plus question d'approximation

Théorème central limite



Retour aux exemples

Exemple 1

- Hypothèse : $X_i \underset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{B}(p)$
- LGN$\Rightarrow$ $\hat{p}$ estimateur consistant de p :

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[\mathcal{P}]{} p$$

- $n\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$
- Si n est jugé assez grand, TCL $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}(\hat{p}) \approx \mathcal{N}(p, p(1-p)/n)$$

Retour aux exemples

Exemple 2

- Hypothèse : $X_i \underset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (\star)$
- LGN$\Rightarrow \bar{X}$ estimateur consistant de μ :

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[\mathcal{P}]{} \mu$$

- Sous $(\star)$ $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$
- Si $(\star)$ n'est pas vérifiée, si n est jugé assez grand, TCL $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}(\bar{X}) \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$$

Propriétés à n fixé

- Proriétés de convergence : $n \to \infty$
- En pratique, n est fixé

  $=>$ Nécéssité d'étudier les propriétés d'un estimateur pour n fixe

- Nous présentons
  - Biais
  - Variance
  - Risque quadratique

Biais

Définition (biais)

Soit $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ *un estimateur. Son espérance sous la loi* $\mathbb{P}_\theta$ *est*

$$\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}] = \int_{\mathcal{X}^n} \hat{\theta}(x)\mathbb{P}_\theta(x)dx$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$

1. *Le biais de* $\hat{\theta}$ *en* θ *est* $\text{Biais}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}] - \theta$
2. $\hat{\theta}$ *est sans biais si pour chaque* $\theta \in \Theta$, $\text{Biais}(\hat{\theta}) = 0$
3. $\hat{\theta}$ *est asymtotiquement sans biais si pour chaque* $\theta \in \Theta$, $\lim_{n\to\infty} \text{Biais}(\hat{\theta}) = 0$

Biais

- Un estimateur est sans biais si, en moyenne (i.e. sur tous les n-échantillons), il tombe sur le paramètre
- ... mais en pratique, on dispose d'un seul échantillon...
- Le fait que l'estimateur soit sans biais est simplement une garantie (théorique) sur le comportement en moyenne de l'estimateur

Biais

- La moyenne d'échantillon estime sans biais l'espérance de la loi commune

$$\mathbb{E}[X_i] = \mu \Rightarrow \mathbb{E}[\bar{X}] = \mu \text{ (Linéarité de l'espérance)}$$

- Exemple 1 : $\mathbb{E}[\hat{p}] = p$
- Exemple 2 : $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mu$

- Mais par exemple, sont aussi sans biais

$$X_1, \qquad \frac{X_1 + X_2}{2}, \qquad X_1 + \frac{X_2 + X_3}{2}, \ldots$$

Variance

La variance d'un estimateur mesure la variabilité de cet estimateur, autour de son espérance :

Définition (Variance)

Soit $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ *un estimateur et* $\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}]$ *son espérance sous la loi* $\mathbb{P}_\theta$. *Sa variance est*

$$\mathrm{V}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta[\|\hat{\theta} - \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}]\|^2] = \int_{\mathcal{X}^n} \|\hat{\theta}(x) - \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}(x)]\|^2 \mathbb{P}_\theta(x) dx$$

où $\|.\|$ *est une norme sur* Θ

Variance

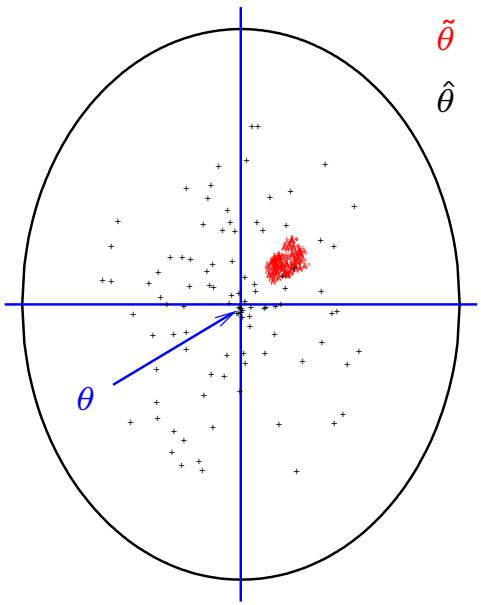
- Si $V(\hat{\theta})$ faible, les valeurs de $\hat{\theta}$ sont proches les unes des autres
- Avec $V(\hat{\theta})$ faible, on est garanti que l'observation de $\hat{\theta}$ dont on dispose (sur l'échantillon) est proche de celle que l'on aurait avec d'autres échantillons

- La variance de la moyenne d'échantillon décroit avec n :

$$V(X_i) = \sigma^2 \Rightarrow V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \text{ (avec des } X_i \text{ décorrélés)}$$

Risque quadratique

- $\hat{\theta}$ estimateur sans biais de θ mais de grande variance
- $\tilde{\theta}$ estimateur biaisé de θ mais de petite variance



- Quel est le meilleur choix ?

Risque quadratique

- On souhaite que les valeurs de l'estimateurs soient aussi proches possible de θ
- On souhaite donc que $\|\hat{\theta} - \theta\|$ soit petit
- $\|\hat{\theta} - \theta\|$ est aléatoire
- On définit le risque quadratique (ou erreur quadratique moyenne) comme l'espérance de cette variable aléatoire :

$$\mathbb{E}_\theta[\|\hat{\theta} - \theta\|^2]$$

Risque quadratique

Définition (Risque quadratique - Décomposition biais-variance)

- *Soit $\hat{\theta}$ un estimateur d'ordre 2, le risque quadratique de $\hat{\theta}$ sous $\mathbb{P}_\theta$ est :*

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta[\|\hat{\theta} - \theta\|^2]$$

- *$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta})$ est la somme d'un terme de biais et d'un terme de variance :*

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \|\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}] - \theta\|^2 + \mathbb{E}_\theta[\|\hat{\theta} - \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta})\|^2]$$

- *Pour $\theta \in \mathbb{R}$, cette décomposition s'écrit*

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \mathsf{Biais}^2(\hat{\theta}) + \mathsf{V}(\hat{\theta})$$

Estimateur préférable - de variance minimum

Définition (Estimateur préférable - de variance minimum)

Soit $\hat{\theta}$ et $\hat{\theta}'$ deux estimateurs d'ordre 2

- *On dit que $\hat{\theta}$ est préférable à $\hat{\theta}'$ si*

$$\forall \theta \in \Theta, \mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) \leq \mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}')$$

- *Si $\hat{\theta}$ est sans biais, on dit qu'il est de variance uniformément minimum parmi les estimateurs sans biais s'il est préférable à tout autre estimateur sans biais d'ordre 2*

Estimateur préférable - de variance minimum

- Exemple 1 : $X_i \underset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{B}(p)$ et $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $\hat{p}$ sans biais donc

$$\mathcal{R}(p, \hat{p}) = \mathrm{V}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

  - $\mathbb{E}[X_1] = p$ donc X_1 est aussi sans biais et

$$\mathcal{R}(p, X_1) = \mathrm{V}(X_1) = p(1-p)$$

  - $\hat{p}$ préférable à X_1
- Exemple 2 : idem
- Pour déterminer les estimateurs sans biais de variance uniformément minimum : exhaustivité, information de Fisher[2]

[2] Notions non abordées ici

Méthode des moments

- LGN : convergence de la moyenne d'échantillon vers l'espérance

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[\mathcal{P}]{} \mathbb{E}[X]$$

$\Rightarrow$ Si n assez grand, on a bon espoir que $\bar{X} \approx \mathbb{E}[X]$

- De même, si X tel que $m_k = \mathbb{E}[X^k]$ existe,

$$\text{LGN} \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow[\mathcal{P}]{} \mathbb{E}[X^k]$$

$\Rightarrow$ Si n assez grand, on a bon espoir que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \approx \mathbb{E}[X^k]$

Méthode des moments

- Idée :
  - Exprimer θ comme fonction des moments m_k
  - Remplacer les m_k par les moments empiriques $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$
- Exemple 1 : $X \sim \mathcal{B}(p) \Rightarrow p = m_1 = \mathbb{E}[X]$

  Estimateur des moments : $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- Exemple 2 : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'où

$$\begin{cases} \mu & = \mathbb{E}[X] & = m_1 \\ \sigma^2 & = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 & = m_2 - m_1^2 \end{cases}$$

- Estimateur des moments :

$$\hat{\mu} = \bar{X} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$$

Méthode des moments

- L'estimateur des moments est défini comme la solution en θ du système à p équations

$$\begin{cases} m_1(\theta) & = \hat{m}_1 \\ . & \\ . & \\ . & \\ m_p(\theta) & = \hat{m}_p \end{cases}$$

- Si l'application

$$M : \theta \mapsto (m_1(\theta), \ldots, m_p(\theta))$$

est une bijection, alors l'estimateur des moments existe et est unique

Maximum de vraisemblance : Exemple 1

- Soit $(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ les observations

- La probabilité d'observer ces données s'écrit

$$\begin{aligned} L(x_1, \ldots, x_n; p) &= \mathbb{P}_p(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_p(X_i = x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \\ &= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}$$

Maximum de vraisemblance : Exemple 1

- Cette probabilité est inconnue car fonction de p inconnue
- Sur les données $\sum_{i=1}^{n} = 72$ donc elle s'écrit

$$L(x_1, \ldots, x_n; p) = p^{72}(1-p)^{28}$$

- Ainsi, si $p = 0.5$, la probabilité d'observer nos données est

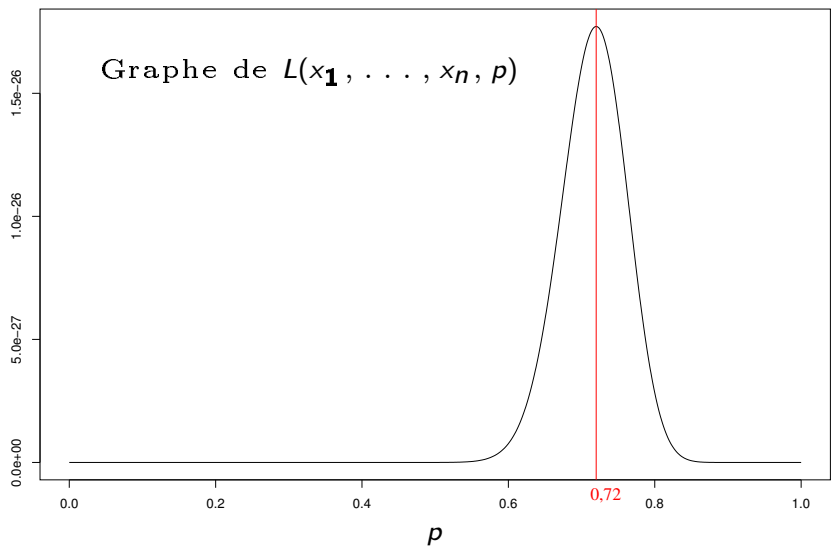
$$L(x_1, \ldots, x_n, p = 0.5) = 0.5^{72} \times 0.5^{28} \approx 8 \times 10^{-31}$$

- et si $p = 0.7$, la probabilité d'observer nos données est

$$L(x_1, \ldots, x_n, p = 0.7) = 0.7^{72} \times 0.3^{28} \approx 1.6 \times 10^{-26}$$

Maximum de vraisemblance : Exemple 1

- Quelle valeur de p maximise la probabilité d'observer les données ?
- Représentons $p \mapsto L(x_1, \ldots, x_n; p) = p^{72}(1-p)^{28}$



- La probabilité d'observer nos données est maximum pour $p = 0.72$

Maximum de vraisemblance : Exemple 1

- $p = 0.72$ est la valeur du paramètre qui rend maximum la probabilité d'observer nos données : $\Rightarrow \hat{p} = 0.72$ estimation naturelle de p
- Plus généralement on montre que

$$p \mapsto L(x_1, \ldots, x_n; p) = p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$$

est maximum pour $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

- L'estimateur du maximum de vraisemblance pour p est ainsi

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Maximum de vraisemblance

Définition (Vraisemblance)

- *Cas discret : La vraisemblance du paramètre θ pour la réalisation $(x_1, \ldots, x_n)$ est l'application $L : \mathcal{X}^n \times \Theta$ définie par*

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \mathbb{P}_\theta^{\otimes n}(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(\{x_i\})$$

- *Cas absolument continu : Soit $f(., \theta)$ la densité associée à $\mathbb{P}_\theta$. La vraisemblance du paramètre θ pour la réalisation $(x_1, \ldots, x_n)$ est l'application $L : \mathcal{X}^n \times \Theta$ définie par*

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

Maximum de vraisemblance

Définition (Estimateur du maximum de vraisemblance)

Un estimateur du maximum de vraisemblance est une statistique g qui maximise la vraisemblance, c'est-à-dire telle que

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}^n : L(x_1, \ldots, x_n; g(x_1, \ldots, x_n)) = \sup_{\theta \in \Theta} L(x_1, \ldots, x_n; \theta)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance s'écrit donc sous la forme $\hat{\theta} = g(X_1, \ldots, X_n)$

Maximum de vraisemblance

Propriétés

- *Invariance*

  Soit $\Psi : \Theta \to \mathbb{R}^k$ et $\hat{\theta}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ, alors $\Psi(\hat{\theta})$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\Psi(\theta)$

- *Consistance*

  On suppose que $\mathbb{P}_\theta$ admet une densité $f(x, \theta)$, que Θ est un ouvert et que $\theta \mapsto f(x, \theta)$ est différentiable, alors l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ est consistant

Confiance ou pas ?

Exemple 2 : $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 949.5$ avec $n = 20$

Faut-il avoir confiance en cette estimation ?

- $\hat{\mu}$ a de bonnes propriétés : convergence, absence de biais
- $V(\hat{\mu}) = \sigma^2/n$: $\hat{\mu}$ a une petite variance si n grand[3]

  Mais
- Il faut quantifier cette confiance en fonction de n
- La confiance est d'autant plus grande que les x_i sont proches les uns des autres : il faut estimer σ^2

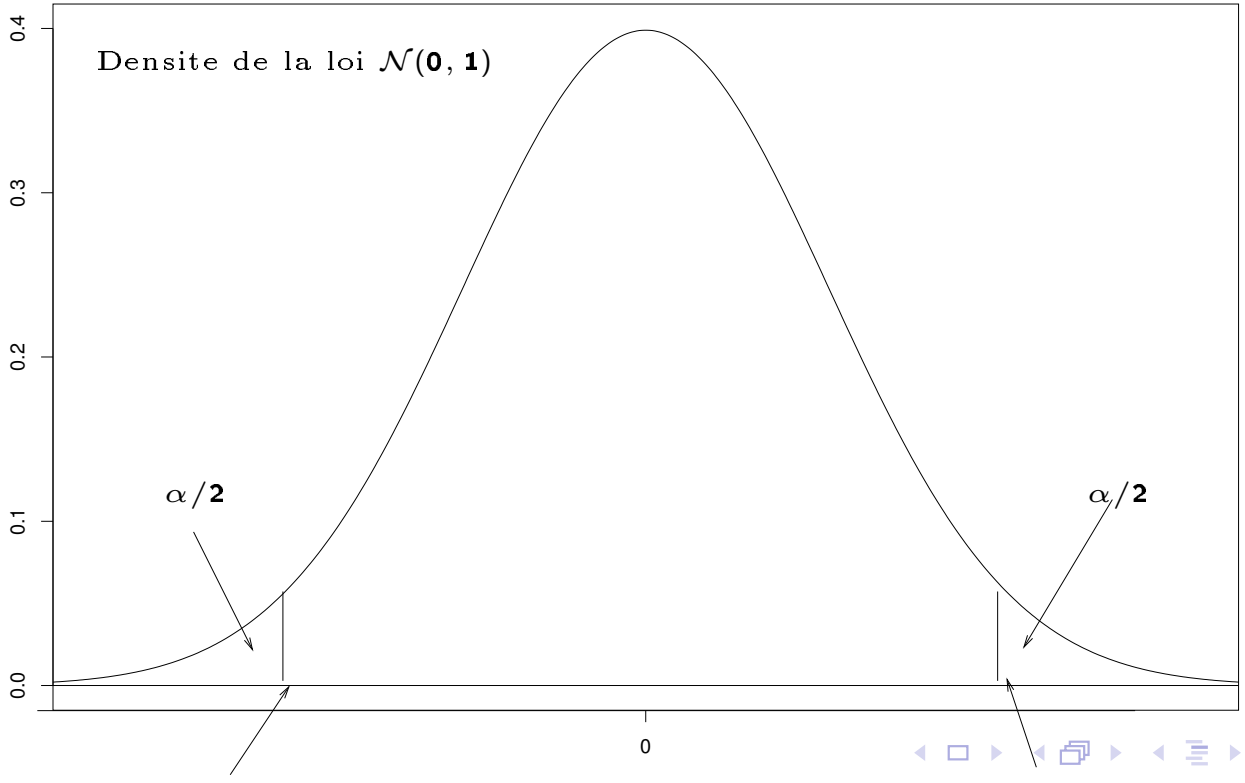
$\Rightarrow$ L'intervalle de confiance répond à ces questions

[3] $\hat{\mu}$ est de variance uniformément minimum parmi les estimateurs sans biais

Le principe dans le cas de base

- Exemple 2 : $X_i \underset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ et

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$



Le principe dans le cas de base

- Avec u_α le quantile d'ordre α de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a

$$\mathbb{P}\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

- Soit

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - u_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + u_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

- Ce qu'on peut noter

$$\mathbb{P}\left(\mu \in \bar{X} \pm u_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Le principe dans le cas de base

- L'intervalle $\left[\bar{X} - u_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + u_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ a la probabilité $1 - \alpha$ de contenir μ
- C'est une intervalle dont les bornes sont aléatoires[4]
- On obtient l'intervalle de confiance en remplaçant dans $\bar{X}$ par son observation $\bar{x}$ sur l'échantillon :

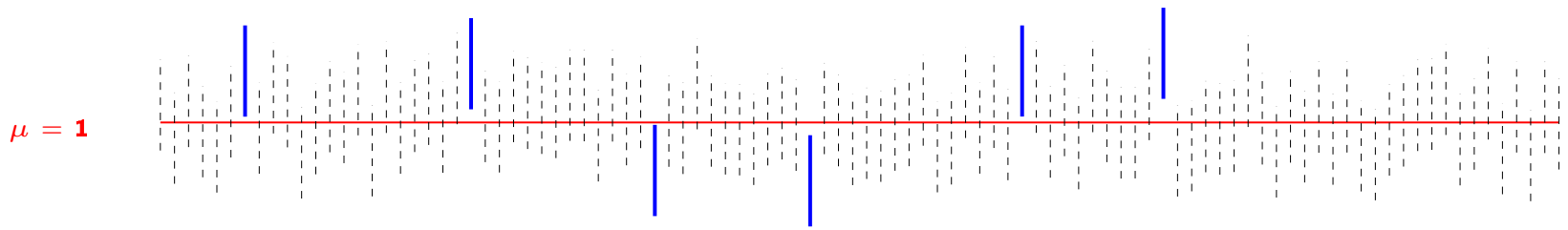
$$\begin{aligned} IC &= \left[\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \bar{x} \pm u_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

[4] Parfois appelé intervalle de probabilité

Interprétation

- On simule $K = 100$ échantillons de taille $n = 20$ selon une loi $\mathcal{N}(\mu = 1, \sigma^2 = 0.01)$

- On prend $\alpha = 0.05 = 5\%$ et on calcule pour chaque échantillon, l'intervalle de confiance : $\text{IC} = \bar{x} \pm u_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$



- Environ $\alpha = 0.05 = 5\%$ des intervalles de confiance ne contiennent pas μ

Interprétation

Que peut-on dire (avec $\alpha = 0.05$) ?

- L'IC a 95% de chance de contenir μ ? NON !

  L'IC n'est pas aléatoire : il contient μ... ou pas

- La procédure garantit 95% de réussite $\Rightarrow$
- On peut avoir un niveau de confiance de 95% en l'intervalle calculé, d'où son nom

Intervalle de probabilité - Intervalle de confiance

Définition (Intervalle de probabilité)

Soit $\alpha \in]0,1[$. *On appelle intervalle de probabilité pour* θ_0 *de niveau* $1-\alpha$ *tout intervalle de la forme* $[A_n, B_n]$, *où* A_n *et* B_n *sont des fonctions mesurables telles que,* $\forall \theta_0 \in \Theta$:

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\theta_0 \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha$$

Définition (Intervalle de confiance)

Soit $\alpha \in]0,1[$. *On appelle intervalle de confiance pour* θ_0 *de niveau* $1-\alpha$ *toute réalisation* $[a_n, b_n]$ *d'un intervalle de probabilité* $[A_n, B_n]$ *de niveau* $1-\alpha$

Retour à l'exemple 2

- En résumé

$$X_i \underset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \text{IC} = \bar{x} \pm u_{1-\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- $\bar{x} = 0.945$ est connu ; si σ^2 est connu, on peut calculer IC
- Problème : en pratique σ^2 est inconnu donc on l'estime
- On utilise la statistique $\hat{\sigma}^2$ consistante et sans biais (cf. TD) :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

- Question : quelle est la loi de $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$?

Vers la loi de Student

- La loi de Student est définie pour traiter ce cas classique
- Elle s'appuie sur la loi du χ^2 qui elle même sert à caractériser les lois des variables comme

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

- Ces deux lois dérivent de la loi normale qui
  - est une famille de lois classiques en estimation
  - qui donne une bonne approximation pour de nombreux résultats via le TCL

Loi du χ^2

Définition (Loi du χ^2)

Soit $U_1, \ldots, U_p$ des variables indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$, on appelle loi du chi-deux à p degrés de liberté, notée χ^2_p, la loi de la variable $\sum_{i=1}^{p} U_i^2$

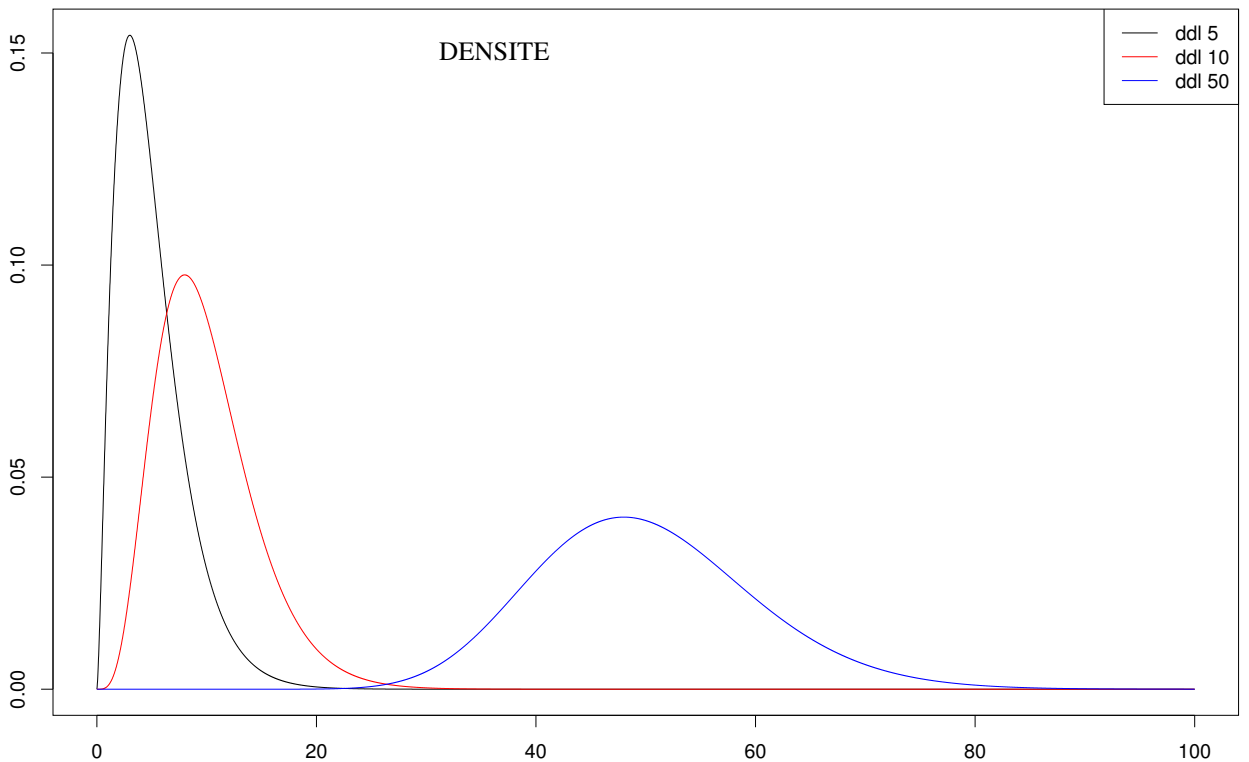
- Par exemple, pour $X_i \underset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on a :

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_n$$

- Surtout, sous les mêmes hypothèses :

$$(n-1)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

Loi du χ^2



Loi de Student

Définition (Loi de Student)

La loi de Student à p degrés de liberté est la loi du rapport indépendant d'une loi normale centrée-réduite et de la racine d'un χ^2 divisé par son degré de liberté p. Pour T suivant une loi de Student à p degrés de liberté, on note $T \sim \mathcal{T}_p$

- Comme on a

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \times \frac{\sigma}{\hat{\sigma}} = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2}}$$

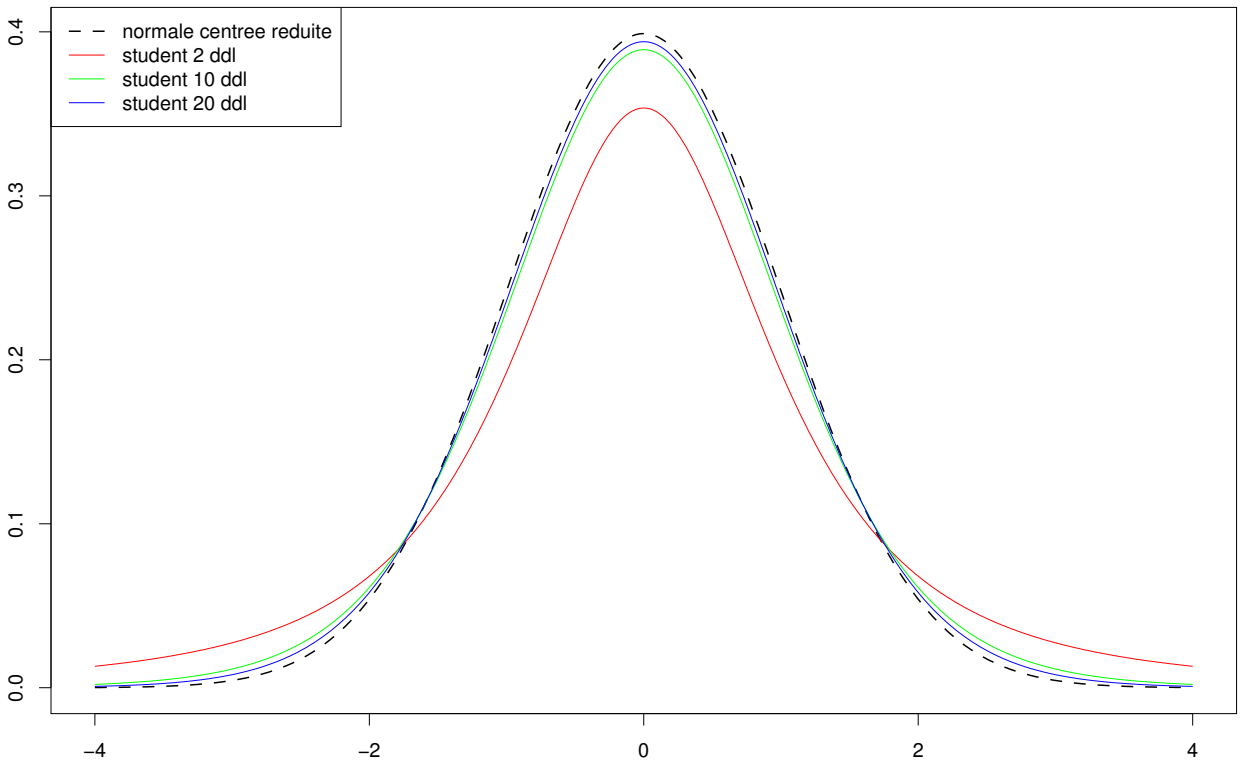
- T est le rapport[5] d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et de la racine d'un χ^2_{n-1} divisé par $n-1$ son ddl : $T \sim \mathcal{T}_{n-1}$

[5] L'indépendance du rapport est admise

Loi de Student

La loi de Student se rapproche de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ quand $n \to \infty$:

$$T \underset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0,1).$$



Loi de Fisher

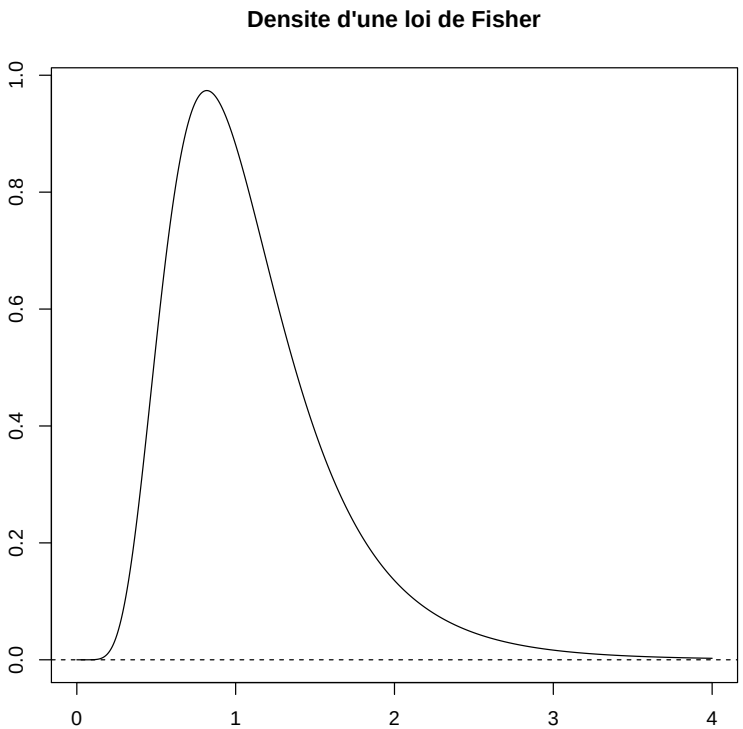
Définition (Loi de Fisher)

La loi de Fisher à p et q degrés de liberté est la loi du rapport indépendant de deux lois du χ^2 divisées par leur degré de liberté :

$$X \sim \chi^2_p, Y \sim \chi^2_q, X \text{ et } Y \text{ indépendantes } \Rightarrow \frac{X/p}{Y/q} \sim \mathcal{F}^p_q$$

Loi de Fisher

- C'est une loi construite pour comparer des variances
- Exemple de densité :



Intervalle de confiance sur μ

- Statistique utilisée : $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$
- Hypothèse de normalité : $X_i \underset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow T \sim \mathcal{T}_{n-1}$
- Intervalle de probabilité sur μ :

$$\mathbb{P}\left(T \in \pm t_{n-1}^{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\mu \in \bar{X} \pm t_{n-1}^{1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

- Intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$:

$$\left[\bar{x} - t_{n-1}^{1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1}^{1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervalle de confiance sur μ

L'intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$,

$$\left[\bar{x} - t_{n-1}^{1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1}^{1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

est d'autant plus grand que :

- la confiance souhaitée $1-\alpha$ est grande,
- la taille n de l'échantillon est faible
- la variabilité $\hat{\sigma}$ dans l'échantillon est grande

Intervalle de confiance sur σ

- L'estimateur : $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
- Hypothèse de normalité : $X_i \underset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$

$$(n-1)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

- Avec $\chi^2_{n-1}(\alpha/2)$ et $\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)$ les quantiles, on déduit

$$\mathbb{P}\left((n-1)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \in \left[\chi^2_{n-1}(\alpha/2), \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)\right]\right) = 1-\alpha$$

- Et l'intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ est :

$$\text{IC} = \left[\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}, \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}\right]$$

Intervalle de confiance sur p

- $X_i \underset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{B}(p) \Rightarrow n\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$
- Problème : la loi $\mathcal{B}(n, p)$ est discrète
- En pratique, on approche la loi binomiale par une loi normale :

$$\frac{n(\bar{X} - p)}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \mathcal{N}(0, 1)$$

- Pour n assez grand : $\mathcal{L}(\bar{X}) \approx \mathcal{N}(p, p(1-p)/n)$

Intervalle de confiance sur p

- On en déduit $\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \in \pm u_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$
- soit $\mathbb{P}\left(p \in \bar{X} \pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1-\alpha$
- Mais p apparaît dans les bornes...
  - Soit on remplace p par $\hat{p}$:

$$\text{IC} = \hat{p} \pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

  - Soit, comme $p(1-p) \leq 1/4$, on prend l'intervalle

$$\text{IC} = \hat{p} \pm u_{1-\alpha/2} \times \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

en lequel la confiance est supérieure à $1-\alpha$