Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia de Produção

EPD072 - PESQUISA OPERACIONAL I

NOTAS DE AULA

material em preparação

Este material não é suficiente para o curso
Consultar a bibliografia indicada

Prof. Carlos Roberto Venâncio de Carvalho
Agosto de 2017

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Bibliografia Recomendada

Sugere-se algumas das principais bibliografias básica para o curso:

1. Nacionais
   (a) Pesquisa Operacional, Arenales, Armentano, Morábito e Yanasse, 2015 [1];
   (b) Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos, Goldbarg e Luna, 2005 [6];
   (c) Introdução a Pesquisa Operacional, Hillier e Lieberman [8];
   (d) Otimização Linear, Maculan e Fampa, 2006 [11];
   (e) Pesquisa Operacional, Wagner, 1986 [14]. Sugere-se olhar a versão original em inglês;
2. Estrangeiros
   (a) Linear Programming and Network Flows, Bazaraa e Jarvis [3];
   (b) Theory of Linear and Ingeger Programming, Schrijver, 1998, [13]
   (c) Linear Programming, Hadley [7];
   (d) Optimization Theory for Large Systems, Lasdon [10];
   (e) Programtion Mathématique: théorie et algorithmes, Minoux [12]. Aconcelha-se olhar a versão em inglês.

Capítulo 1

Modelagem de problemas

1.1 Análise de atividades (escolha de produção)

1.1.1 Planejamento de produção I

Uma determinada empresa está interessada em maximizar o lucro mensal proveniente de quatro de seus produtos, designados por I, II, III e IV. Para fabricar esses quatro produtos, ela utiliza dois tipos de máquinas (M1 e M2) e dois tipos de mão-de-obra (MO1 e MO2) que têm as disponibilidades conforme os dados das tabelas (6.2).

Máqs.	tempo disponível (horas-máquinas/mês)
M1	80
M2	20

Mão-de-obra	tempo disponível (homens-hora/mês)
MO1	120
MO2	160

Tabela 1.1: Disponibilidade de recursos

O setor técnico da empresa fornece os dados de produtividade, conforme as tabelas (6.3), para produzir uma unidade de cada produto.

Máq	Produtos			
	I	II	III	IV
M1	5	4	8	9
M2	2	6	-	8

Mão-de-obra	Produtos			
	I	II	III	IV
MO1	2	4	2	8
MO2	7	3	-	7

Tabela 1.2: Utilização de recursos

O setor comercial da empresa fornece as informações referentes ao pontencial de vendas de ao lucro unitário de cada produto, mostrado pela tabela (6.4).

Produtos	Potencial de Vendas (unidades/mês)	Lucro Unitário (R$/unidades)
I	70	10,00
II	60	8,00
III	40	9,00
IV	20	7,00

Tabela 1.3: Informações comerciais

Deseja-se saber a produção mensal dos produtos I, II, III e IV para que o lucro mensal da empresa, proveniente desses quatro produtos, seja máximo. Formule um modelo de programação linear que expresse o objetivo e as restrições desta empresa.

1.1.2 Planejamento de Produção II

O gerente James Thoreau, da Companhia Petropaulo, deseja encontrar a combinação ótima de dois possíveis processos de mistura. Para o processo 1, uma entrada unitária de um barril de Óleo cru A e três barris de Óleo cru B produz uma saída de 50 galões de Gasolina X e 20 galões de Gasolina Y. Para o Processo 2, uma entrada unitária de quatro barris de Óleo cru A e dois barris de Óleo cru B produz uma saída de 30 galões de Gasolina X e 80 galões de Gasolina Y. A quantidade máxima de Óleo cru A disponível é 120 barris, e de Óleo cru B, 180 barris. Compromissos de vendas exigem que pelo menos 2.800 galões de Gasolina X e 2.200 galões de Gasolina Y sejam produzidos. Os lucros unitários de Processo 1 e Processo 2 são p_1 e p_2, respectivamente.

Formule esse problema de mistura como um modelo de programação linear.

1.1.3 Planejamento de Produção III

O gerente industrial de uma companhia siderúrgica deve decidir quantos quilos de aço puro e quantos quilos de sucata de metal usar para fabricar uma peça fundida de liga para um de seus clientes. Suponha que o custo por quilo de aço puro seja 3 u.m. e o custo por quilo de sucata de metal seja 6 u.m. (que é maior porque as impurezas devem ser retiradas). O pedido do cliente é expresso como uma necessidade de pelo menos cinco quilos, mas o cliente está disposto a comprar uma quantidade maior se o gerente exigir um lote de produção maior.

Suponha que o fornecimento de aço puro seja limitado a quatro quilos e o de metal a sete quilos. A relação de sucata para aço puro não pode exceder $7/8$. As instalações industriais têm disponíveis somente 18 horas de tempo de processamento industrial (fundição e moldagem); um quilo de aço puro requer 3 horas de processamento industrial, enquanto que um quilo de sucata requer duas horas.

Construa um modelo matemático para representar a situação acima.

1.1.4 Planejamento de Produção IV

Uma empresa local de produtos manufaturados fabrica quatro tipos diferente de artigos metálicos, cada um dos quais deve ser usinado, polido e montado. As necessidades específicas de tempo de trabalho (em horas) de cada um dos produtos são dadas na tabela abaixo:

	usinagem	polimento	montagem
produto I	3	1	2
produto II	2	1	1
produto III	2	2	2
produto IV	4	3	1

Tabela 1.4: Informações comerciais

A empresa dispõe semanalmente de 480 horas de tempo de usinagem, 400 horas de tempo de polimento e 400 horas de tempo de montagem. Os lucros unitários sobre os produtos são 6, 4, 6 e 8 Reais, respectivamente. A empresa firmou um contrato com um distribuidor para fornecer-lhe semanalmente 50 unidades do produto I e 100 unidades de qualquer combinação dos produtos II e III. Por intermédio de outros clientes a empresa pode vender semanalmente tantas unidades quanto produza dos produtos I, II e III, mas apenas um máximo de 25 unidades do artigo IV. Quantas unidades de cada artigo a empresa deve manufaturar semanalmente a fim de atender as obrigações contratuais e maximizar seu lucro total? Admita que peças inacabadas em uma semana possam ser completadas na semana seguinte. Construa um modelo que represente a situação acima.

1.1.5 Fabricação de materiais compostos I

(Goldbarg e Luna)

Um setor de uma companhia siderúrgica produz, entre outros produtos secundários, dois tipos de ligas metálicas: Liga I (baixa resistência) e Liga II (alta resistência). A composição química de cada tipo de liga (em porcentagem), as quantidades de matérias prima disponíveis (em toneladas) e o preço de mercado de cada tipo de liga (Reais por toneladas) são mostrados na tabela abaixo.

	Liga I (%)	Liga II (%)	Matéria prima disponível (ton)
Cobre	0,5	0,2	16
Zinco	0,25	0,3	11
Chumbo	0,25	0,5	15
Preço de venda (R$ por ton)	3.000	5.000	

Como engenheiro responsável pelo setor e conhecendo estes dados, que tipo de decisão você tomaria?

1.1.6 Planejamento de propagandas

(Wagner)

A Rede Mundo de Televisão quer estabelecer preços competitivos mas lucrativos para o tempo de comerciais. A seguinte versão é uma versão simplificada de seu problema de preços. Suponha que haja três classificações para o tempo de propaganda da rede: horário nobre noturno, horário da tarde em dia de semana e em sábado/domingo (antes das 18 horas). Sejam p_1, p_2 e p_3 o preço por minuto para cada uma destas faixas de horário, respectivamente.

A rede vende grandes espaços de tempo a K grandes anunciantes que têm um efeito significativo na determinação dos preços. A rede sabe que o Anunciante k quer comprar um pacote consistindo em a_{1k}, a_{2k} e a_{3k} minutos nas três faixas de horário e deseja pagar até A_k Reais por este pacote. A rede também vende tempo a muitos anunciantes menores e calcula que, no total, ela pode vender M_1, M_2 e M_3 minutos de horário nobre, de dia de semana e de fim de semana, respectivamente, desde que seus preços não violem os limites de gstos A_k dos K grandes anunciantes.

1. Formule o problema de preços coo um modelo de programação linear.
2. Suponha que a Rede Mundo deseje saber se ela deve considerar satisfazer a todos menos um dos limites de gastos de seus maiores anunciantes. Como você analisaria esta possibilidade?

1.1.7 Planejamento agrícola

Uma cooperativa agrícola opera 3 fazendas. A produção total por fazenda depende fundamentalmente da área disponível para o plantio e da água de irrigação. A cooperativa procura diversificar sua produção de modo que vai plantar este ano três tipos de cultura: milho, arroz e feijão. Cada tipo de cultura demanda por uma certa quantidade de água. Para reduzir o conflito no uso das colheitadeiras, que são alugadas pela cooperativa, estabelecem-se limites de área de plantio de cada tipo de cultura. Para evitar a concorrência entre os cooperados, acordou-se que a proporção de área cultivada seja a mesma para cada uma das fazendas. As tabelas 1.5 e 1.6 resumem os dados tecnológicos. Pede-se a elaboração de um programa de produção que defina a área de cada cultura que será plantada em cada fazenda, de modo a maximizar o lucro total da produção da cooperativa.

Fazenda	área disponível (ares)	água disponível (litros)
1	400	1800
2	650	2200
3	350	950

Tabela 1.5: Área e água disponíveis por fazenda

Cultura	área máxima (ares)	consumo de água (litros/are)	lucro (R$/are)
milho	660	5,5	5000
arroz	880	4	4000
feijão	400	3,5	1800

Tabela 1.6: Consumo de água, área de cultivo e lucro por cultura

1.2 Alocação de recursos

1.2.1 Alocação de Recursos de Produção I

Uma certa corporação tem três fábricas filiais com capacidade de produção excedente. As três fábricas têm capacidade para produzir um certo produto, e a gerência decidiu usar parte da capacidade de produção excedente para produzir um certo produto. Esse produto pode ser feito em três tamanhos - grande, médio e pequeno - os quais produzem um lucro unitário líquido de R$ 140, R$ 120 e R$ 100, respectivamente. As fábricas 1, 2 e 3 têm capacidade excedente de mão de obra e equipamento para produzir 750, 900 e 450 unidades destes produtos por dia, respectivamente. Entretanto, a quantidade de espaço disponível para estoque de produtos em processo também impõe um limite às taxas de produção. As fábricas 1, 2 e 3 têm 1.170, 1080 e 450 metros quadrados de espaço disponível para estoque de produtos em processo para a produção de um dia deste produto. Cada unidade dos tamanhos grande, médio e pequeno produzida por dia requer 1,8, 1,35 e 1,08 metros quadrados, respectivamente.

As previsões de vendas indicam que podem ser vendidas por dia 900, 1.200 e 750 unidades dos tamanhos grande, médio e pequeno, respectivamente.

Para manter uma carga de tamanho uniforme entre as fábricas, e para reter alguma flexibilidade, a gerência decidiu que a produção adicional designada a cada fábrica tem que usar a mesma porcentagem da capacidade excedente de mão de obra e equipamento.

A gerência deseja saber quanto de cada tamanho deveria ser produzido em cada uma das fábricas para maximizar o lucro.

Formule o modelo de programação linear para este problema.

1.2.2 Alocação de Recursos de Produção II

A Companhia Algon produz quatro artigos numerados de 1 a 4. As exigências de matéria prima, espaço para a estocagem, taxa de produção, assim como os lucros por artigo estão na tabela abaixo.

A quantia total de matéria prima disponível por dia para todos os quatro artigos é de 180 kg, o espaço disponível é de 230 m^3 e emprega-se 7:30 h por dia para a produção.

Escreva um programa linear para maximizar o lucro.

artigos $\longmapsto$ condições $\downarrow$	1	2	3	4
matéria prima $(kg/artigo)$	2	2	1,5	4
espaço$(m^3/artigo)$	2	2,5	2	1,5
taxa de produção $(artigos/h)$	15	30	10	15
lucro $(R/artigos)$	5	6,5	5	5,5

Tabela 1.7: Dados de produção

1.2.3 Alocação de Recursos de Produção III

Uma firma fabrica uma máquina constituída de três peças A e quatro peças B. As duas peças (A e B) são fabricadas a partir de três matérias-primas das quais 100 unidades, 200 unidades e 300 unidades são disponíveis respectivamente. A tabela seguinte fornece os requisitos de matéria-prima e o número de peças fabricadas por turno de produção, em cada um dos departamentos da firma.

	ENTRADA (UNIDADES) MATÉRIA-PRIMA			SAÍDA (UNIDADES) PEÇAS	
DEPARTAMENTOS	1	2	3	A	B
1	8	6	5	7	5
2	5	9	10	6	9
3	3	8	7	8	4

Tabela 1.8: Dados de produção

Formule um programa linear para determinar o número de turnos de produção para cada departamento de modo que maximize o número de máquinas fabricadas.

1.3 Análise de alternativas

1.3.1 Análise de Investimentos

Um determinado investidor tem três alternativas de investimentos, denominadas A, B e C, disponíveis no próximo ano. Essas três alternativas não são mutuamente exclusivas. Qualquer dinheiro recebido de qualquer altenativa poderá ser reinvestido, imediatamente, em qualquer uma das três alternativas.

A alternativa A está disponível no princípio de cada um dos quatro trimestres seguintes. Cada Real investido em A no princípio de um trimestre lhe devolve R$ 1,10 no final daquele trimestre.

A alternativa B está disponível no princípio de cada um dos dois semestres seguintes. Cada Real investido em B no princípio de um semestre lhe devolve R$ 1,20 no final daquele semestre.

A alternativa C só está disponível no princípio do primeiro ano. Cada Real investido em C lhe devolve R$ 1,40 um ano mais tarde.

O capital inicial do investidor é de R$ 5.000,00. Deseja-se formular um modelo de programação linear para fornecer o plano de investimento que maximize a quantidade de dinheiro que o investidor pode acumular no final do próximo ano.

1.3.2 Alternativas antipoluição

A Companhia Strick e Nina foi intimada pelo governo de seu estado a instalar e empregar dispositivos antipoluição. A empresa faz dois produtos. Para cada um destes produtos, o processo de fabricação produz quantidades excessivas de gases irritantes e partículas (sólidos em suspensão). A tabela abaixo mostra a emissão diária, em quilos de cada poluente para cada 1.000 litros de produto fabricado. A companhia está proibida de emitir mais que $G1$, $G2$ e $P1$ quilos de Gás CM, Gás SD e Partículas, respectivamente. O lucro para cada milhar de litros de Produto 1 e 2 fabricado por dia é p_1 e p_2, respectivamente.

tipos de poluentes	quilos de poluentes emitidos por 1.000 litros	
	de produto 1	de produto 2
Gás CM	24	36
Gás SD	8	12
Partículas	100	50

Tabela 1.9: Dados de produção

O gerente de produção aprovou a instalação de dois dispositivos antipoluição. O primeiro dispositivo remove 0,75 de Gás CM, 0,5 de Gás SD e 0,9 de partículas, independentemente do produto fabricado. O segundo dispositivo remove 0,33 de Gás CM, nada de Gás SD e 0,8 de Partículas para o produto 1 e 0,25 de Gás CM, nada de Gás SD e 0,6 de Partículas para o Produto 2. O primeiro dispositivo reduz o lucro por milhar de litros fabricados diariamente de c_1, independentemente do produto; do mesmo modo, o segundo dispositivo reduz o lucro de c_2 por milhar de litros fabricados diariamente, independentemente do produto. Compromissos de vendas obrigam que pelo menos R_1 milhres de litros do Produto 1 sejam produzidos por dia e R_2 milhares de litros de Produto 2. Formule um modelo matemático apropriado.

1.4 Problema da Dieta

Uma determinada pessoa é forçada pelo médico a fazer uma dieta alimentar que forneça, diariamente, pelo menos as seguintes quantidades de vitaminas A, B, C e D:

Vitaminas	Quantidade Mínima Diária (mg)
A	80
B	70
C	100
D	60

Tabela 1.10: Consumo de vitaminas

A dieta deverá incluir leite, arroz, feijão e carne, que contêm as seguintes miligramas de vitaminas em cada uma de suas unidades de medidas:

Vitaminas	Alimentos			
	Leite (L)	Arroz (kg)	Feijão (kg)	Carne (kg)
A	10	5	9	10
B	8	7	6	6
C	15	3	4	7
D	20	2	3	9

Tabela 1.11: Composição dos alimentos

Leite (l)	Arroz (kg)	Feijão (kg)	Carne (kg)
R$ 1,00	R$ 0,80	R$ 1,20	R$ 3,50

Tabela 1.12: Custo dos alimentos

Os custos unitários desses alimentos são os seguintes:

Deseja-se saber o consumo dìário de cada um desses alimentos de tal maneira que a dieta satisfaça as prescrições médicas e seja a de menor custo possível.

1.5 O Problema do Transporte

1.5.1 Custos de transporte

(Puccini)

Uma firma fabrica um determinado produto em quatro cidades A, B, C e D; o produto destina-se a três centros de consumo I, II e III. Sabe-se que :

1. As cidades A, B, C e D dispõem respectivamente de 30, 20, 50 e 10 unidades do produto
2. Os centros de consumo I, II, e III necessitam respectivamente de 20, 40 e 50 unidades
3. Os custos de transporte entre as cidades e os centros de consumo são dados, em Reais, na tabela abaixo:

	I	II	III
A	1	2	3
B	10	$\nexists$	8
C	3	4	2
D	5	2	1

Tabela 1.13: Custo de transporte

Formular o modelo de transporte para se determinar o programa que torna mínimo o custo total de transporte entre as quatro cidades e os centros consumidores.

1.5.2 Maximização de lucros

Uma firma que produz um único produto tem três fábricas (I, II, III) e quatro clientes (A, B, C, D). As fábricas produzirão 40, 20 e 30 unidades, respectivamente, durante o próximo período de tempo. A firma tem um compromisso de vender 20 unidades ao cliente 1, 30 unidades ao cliente 2 e pelo menos 10 unidades ao cliente 3. Os clientes 3 e 4 querem, também, comprar tanto quanto possível das unidades restantes. O lucro líquido associado à remessa de uma unidade da fábrica i para venda ao cliente j é dado pela seguinte tabela:

A gerência deseja saber quantas unidades deve vender aos clientes 3 e 4, e quantas unidades deve remeter de cada uma das fábricas para cada um dos clientes de modo a maximizar o lucro. Construa um modelo matemático para o problema.

	A	B	C	D
I	7	5	4	6
II	9	8	6	3
III	6	3	2	4

Tabela 1.14: Custo de transporte

1.5.3 Distribuição de produtos

Uma grande firma de laticínios, a Companhia de Leite A. Z. Dume, tem m usinas distribuídas através de um estado. A produção diária de leite na Usina i pode fornecer no máximo S_i galões, para $i = 1, 2, \ldots, m$. Pelo amanhecer, a firma deve abastecer seus n depósitos de distribuição com pelo menos D_j galões frescos, para $j = 1, 2, \ldots, n$, para atender à demanda. O problema econômico que se coloca à gerente de distribuição, Aurora Clara Luz, é designar quais usinas devem abastecer quais depósitos de modo que os custos de transporte sejam um mínimo. Seja c_{ij} o custo associado de embarque por galão da Usina i para o Depósito j. Modele um modelo de programação linear adequado.

1.6 O Problema da Designação

1.6.1 Seleção de Homens-Tarefas

(Puccini)

Designar quatro operários (I, II, III e IV) para quatro tarefas (A, B, C e D), de maneira que o número total de homens-hora seja mínimo. Cada homem desempenha cada tarefa em um determinado número de horas, conforme indica a matriz abaixo:

	I	II	III	IV
A	5	24	13	7
B	10	25	3	23
C	28	9	8	5
D	10	17	15	3

Tabela 1.15: Homens - tarefas

1.6.2 Seleção de Homens-Locais

(Puccini)

O presidente de uma empresa está estudando a transferência de quatro diretores (A, B, C e D) para quatro locais de trabalho diferentes (1, 2, 3 e 4). Foram feitas estimativas dos custos envolvidos na transferência de cada homem para cada novo local de trabalho. Esses custos (em milhares de Reais) são dados abaixo:

	1	2	3	4
A	2	1	4	2
B	3	4	1	6
C	1	2	6	5
D	1	3	3	7

Tabela 1.16: Homens - locais

Determinar as designações de cada diretor para cada local de trabalho de modo a minimizar o custo total das transferências. Assume-se que os diretores são igualmente qualificados para os diversos serviços.

Capítulo 2

Programação Linear

2.1 Introdução

Alguns conceitos são importantes que se tenham em mente antes de iniciar o estudo de Programação Matemática. São eles:

1. *Problemas*: entende-se como problema uma situação real descrita onde se busca algum tipo resposta. Esta descrição pode ser utilizando simplesmente de uma lingua falada ou escrita ou mesmo de um conjunto de representações matemáticas previamente conhecidas. Um problema para existir não necessita de uma representação matemática;

2. *Parâmetros*: os parâmetros de um problema são as informações conhecidas (dados) do problema e são constantes, não se alteram durante a resolução do prolema;

3. *Variáveis*: as variáveis de um problemas são os valores desconhecidos que devem ser encontrados durante a resolução de um problema. A solução de um problema é um conjunto de valores para as suas variáveis de maneira que correspondem às respostas procuradas para o problema;

4. *Modelos*: entende-se como modelo a representação de uma situação real através de relações matemáticas utilizandas de um conjunto de determinados conceitos pré estabelecidos, onde os parâmetros e variariáveis do problema se interagem através de relações definidas pelos conceitos pré estabelecidos. A Programação Matemática, em sua teoria, estabelece um conjunto de definições que permite representar problemas reais através de equações matemáticas de uma forma definida onde os parâmetros e variáveis de um problema são escritos em relações matemáticas. Um modelo de Programação Matemática é a representação de um problema real através do conjunto de definições da Programação Matemática. Assim todo Modelo de Programação Matemática representa um problema e nem todo problema é representado por um Modelo de Programação Matemática;

5. *Indices do modelo*: os índices utilizados em um modelo não são elementos estruturais do modelo, eles existem simplismente para se referenciar, na grande maioria das vezes, à elementos específicos de conjuntos; eles não existem no modelo, existem somente na expressão onde são colocados, são simplesmente referências. Utiliza-se indeces basicamente em parâmetros, variáveis e restrições;

6. *Instâncias*: uma instância de um problema ou modelo consiste na definição numérica do conjunto de parâmetros do problema; são os dados um problema ou modelo de Programação Matemática; uma instância de um problema ou modelo é o problema gerado a partir da substituição do conjunto de parâmetros do modelo pelo conjunto dos dados.

2.2 Definições iniciais

Inicialmente apresenta-se alguns conceitos gerais. Um *problema* pode existir independente de sua forma de representação. A notação matemática pode ser utilizada para representar um problema. Ao serem utilizadas relações matematicas específicas de uma determinada área da matemática para representar um problema, diz-se que se constrói um *modelo matemático*. Assim, um modelo matemático específico é apenas uma maneira de representar um problema, sendo que, o mesmo problema, pode ser representado também através de outros modelos matemáticos.

2.2.1 Programa linear

Definição 2.1 : *Programa Linear*

Um problema $(\mathcal{P})$ que pode ser representado por um *modelo de programação linear* é denominado *programa linear*. Um programa linear é todo problema que pode ser escrito sob a forma:

$$
(\mathcal{P}) \quad
\begin{array}{rrcll}
\max & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n & & & (0) \\
\text{sujeito às} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 & (1.1) \\
\text{restrições:} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 & (1.2) \\
 & & & \ldots & \\
 & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n & \leq & b_i & (1.i) \\
 & & & \ldots & \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n & \leq & b_m & (1.m) \\
 & x_j \geq 0 \ \text{ para } \ j = 1, 2, \ldots, n & & & (2)
\end{array}
$$

onde x_j, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, são as variáveis de $(\mathcal{P})$, e $c_j \in I\!R$, $a_{ij} \in I\!R$ e $b_i \geq 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$, são os *parâmetros* ou *coeficientes* de $(\mathcal{P})$.

Ao decorrer da apresentação da teoria da Programação Linear será mostrado que o problema pode ser também de minimização e as restrições podem ser também de iqualdade $(=)$ ou do tipo maior ou iqual $(\geq)$.

Em um programa linear $(\mathcal{P})$, a expressão (0) é denominada de *função objetivo*, as expressões do tipo (1) são denominadas de *restrições do problema* ou *linhas* do programa linear, e as expressões do tipo (2) são as *restrições de não negatividade* ou *domínio* das variáveis. As variáveis do programa linear $(\mathcal{P})$ são também denominados de *colunas* de $(\mathcal{P})$.

Um programa linear $(\mathcal{P})$ pode ser escrito utilizando da notação por somatórios:

$$
(\mathcal{P}) \quad
\begin{array}{rrll}
\max & z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j & & (0) \\
\text{s. a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i & \forall i = 1, \ldots, m & (1.i) \\
 & x_j \geq 0 & \forall j = 1, \ldots, n & (2)
\end{array}
$$

observa-se que se utiliza o índice j para indexar as n variáveis e utiliza-se o índice i para indexar as m restrições.

Uma outra notação para o programa linear $(\mathcal{P})$ é dada utilizando matrizes:

$$
(\mathcal{P}) \quad
\begin{array}{rrl}
\max & z = cx & (0) \\
\text{s. a} & Ax \leq b & (1) \\
 & x \geq 0 & (2)
\end{array}
$$

onde x é um vetor coluna de dimensão n, A uma matriz de de dimensão $m \times n$, b um vetor coluna de dimensão m e c um vetor linha de dimensão n, ou seja:

$$x_{n\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b_{m\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$c_{1\times n} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.1 : *Programa linear*

$$\begin{array}{lrcrrcrl} \max & z & = & 5\ x_1 & +7\ x_2 & & & (0) \\ \text{sujeito às} & & & 2\ x_1 & & \leq & 12 & (1.1) \\ \text{restrições} & & & & x_2 & \leq & 8 & (1.2) \\ & & & 4\ x_1 & +3\ x_2 & \leq & 36 & (1.3) \\ & x_1 & \geq & 0\ (2.1) & \text{e } x_2 & \geq & 0 & (2.2) \end{array}$$

Neste programa linear $n = 2$, ou seja, possue duas variáveis, $m = 3$, ou seja, possui três restrições. As matrizes deste problema são:

$$x_{2\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad b_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix} \quad \text{e } c_{1\times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

O problema fica então:

$$\begin{array}{ll} \min & z = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \text{s. a.} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A solução do exemplo 2.1 é $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$, que fornece o valor máximo para a função objetivo, com $z = 71$. As seções seguintes apresentam maneiras de determinar esta solução.

2.2.2 Solução, solução viável e solução ótima

Definição 2.2 : *Solução*

Dado um programa linear $(\mathcal{P})$, se for atribuido um conjunto de valores, um para cada variável, tem-se uma *solução* de $(\mathcal{P})$.

Definição 2.3 : *Solução viável e solução não viável*

Uma solução de $(\mathcal{P})$ que satisfaz todas as suas restrições, inclusive as restrições de não negatividade, é denominada *solução viável* de $(\mathcal{P})$. Se ao menos uma restrição não for satisfeita, tem-se uma *solução não viável* de $(\mathcal{P})$.

Definição 2.4 : *Solução ótima*

Uma solução viável do programa linear $(\mathcal{P})$ é dita *solução ótima*, se todas as restrições de $(\mathcal{P})$ são satisfeitas, inclusive as restrições de não negatividade, e a função objetivo é máxima, ou seja, o valor de z é máximo.

As definições de solução, solução viável e solução ótima é conveniente aqui na Programação Matemática. Ao rigor matemático, uma solução de um programa linear $(\mathcal{P})$ seria somente uma solução ótima.

Existem dois tipos de programas lineares que não possuem nenhuma solução ótima, são eles:

1. quando não existe valores qua as variáveis possam assumir de maneira que todas as restrições sejam satisfeitas, inclusive as restrições de não negatividade; e

2. quando existe valores que as variáveis possam assumir de maneira que todas as restrições sejam satisfeitas, mas o valor da função objetivo pode crescer indefinidamente.

Um programa linear $(\mathcal{P})$ pode ainda ter *infinitas soluções ótimas*.

2.2.3 Variáveis de folga e variáveis de excesso

Como definido, as restrições de um programa linear são do tipo menor ou iqual ($\leq$), ou seja, uma restrição qualquer i é escrita:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

Definição 2.5 *Variável de folga*

À cada uma das restrições, $i = 1, 2, \ldots, m$, introduz-se ao problema uma nova variável, $x_{n+i} \geq 0$, denominada *variável de folga* da restrição i, transformando a restrição de menor ou iqual em uma restrição de iqualdade. Em uma solução viável qualquer do problema, esta variável adicionada ao lado direito da restrição elimina a folga que o lado direito pode ter em relação ao lado esquerdo da restrição. Assim a restrião fica reescrita:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n + 1x_{n+i} = b_i$$

O problema $(\mathcal{P})$ será tratado com estas restrições de iqualdade.

É possível tratar restrições do tipo maior ou iqual ($\geq$) do tipo:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

Definição 2.6 *Variável de excesso*

Neste caso, de maneira semelhante à restrião do tipo menor ou iqual, introduz-se ao problema uma nova variável, $x_{n+1} \geq 0$, denominada *variável de excesso* da restrição, transformando a uma restrição de maior ou iqual em uma restrição de iqualdade. Em uma solução viável qualquer do problema, esta variável subtraida do lado direito da restrição elimina o excesso que o lado direito pode ter em relação ao lado esquerdo da restrição. A restrição então é reescrita:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n - 1x_{n+i} = b_i$$

O problema $(\mathcal{P})$ será tratado com estas restrições de iqualdade.

Observe que tanto as variáveis de folga como as variáveis de excesso são não negativas. Observe também que a variável de folga é somada ao lado direito da restrição e a variável de excesso é subtraida do lado direito da restrião.

Como será mostrado, é importante que cada restrição contenha ou uma variável de folga ou uma variável de excesso. Caso o problema possua um restrição de iqualdade ($=$), ela deverá ser reescrita como duas restrições, uma de menor ou iqual, que terá uma variável de folga, e outra de maior ou iqual, que terá uma variável de excesso:

Assim, a restrição:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

será escrita como duas restrições:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

e

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

ou

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n + 1x_{n+i} = b_i$$

e

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n - 1x_{n+i+1} = b_i$$

Por se tratar de problemas de decisão que serão resolvidos por procedimentos numéricos, não faz sentido aparecer restrições do tipo extritamente menor ($<$) ou do tipo extritamente maior ($>$), não existe o zero absoluto para o computador, sempre se trabalha com a precisão do computador.

As próximas seções mostram como resolver um programa linear e ilustra todos os tipos de soluções que um programa linear pode ter.

2.2.4 Variáveis que podem assumir valores negativos

Na definição de alguns problemas reais, ao modelar, o problema exige que algumas de suas variáveis podem assumir valores negativos, senão todas. Existem três casos à estudar:

1. variável que só pode assumir um valor negativo;
2. variável que pode assumir até um valor mínimo negativo limite; e
3. variável que pode assumir qualquer valor real, positivo, negativo ou nulo.

Cada uma dessas situação será tratada de uma forma diferente.

2.2.4.1 Variáveis que só podem assumir valores negativos

Seja uma variável x_j do problema que, por definição do problema, só pode assumir um valor negativo, isto é:

$$x_j \leq 0,$$

Neste caso, cria-se a variável $x'_j \geq 0$ tal que

$$x'_j = -x_j,$$

e substitua em todo o problema x_j por $-x'_j$, resolva o proplema em x'_j, obtenha o valor ótimo para x'_j, e, depois do problema resolvido, calcula-se o valor de $x_j = -x'_j$.

2.2.4.2 Variáveis que podem assuir até um valor limite negativo

Seja uma variável x_j do problema que, por definição do problema, pode assumir até um valor limite negativo, isto é:

$$x_j \geq L_j, \text{ com } L_j \leq 0$$

Neste caso, faça

$$x_j - L_j \geq 0$$

e crie a variável

$$x'_j = x_j - L_j,$$

assim

$$x'_j \geq 0 \text{ e } x_j = x'_j + L_j.$$

Substitua em todo o problema x_j por $x'_j + L_j$, resolva o proplema em x'_j, obtenha o valor ótimo para x'_j, e, depois do problema resolvido, calcula-se o valor de $x_j = x'_j + L_j$.

2.2.4.3 Variáveis que podem assumir qualquer valor real

Seja uma variável x_j do problema que, por definição do problema, pode assumir qualquer valor do conjunto dos números reais, positivo, negativo ou nulo, isto é:

$$x_j \in I\!R$$

Neste caso, crie as variáveis $x'_j \geq 0$ e $x"_j \geq 0$ tais que:

$$x_j = x'_j - x"_j.$$

Substitua em todo o problema x_j por $x'_j - x"_j$, resolva o proplema em x'_j e $x"_j$, obtenha os valores ótimos para x'_j e $x"_j$, e, depois do problema resolvido, calcula-se o valor de $x_j = x'_j - x"_j$.

2.2.5 Função Objetivo de $minimizar$

A Função Objetivo pode ser de minimização. Caso o método de resolução for definido para um problemas com a função objetivo de maximização, para utilizar o método em um problemas com a Função Objetivo de minimização, basta multiplicar a Função Objetivo por -1 que o problema passa a ser de maximização.

2.3 Resolução gráfica, região de viabilidade

Um problema de programação linear só pode ser resolvido graficamente se possui somente $duas$ variáveis.

$$\begin{array}{rllr}
\max & z = c_1x_1 + c_2x_2 & & (0) \\
\text{sujeito às} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & \leq b_1 & (1.1) \\
\text{restrições:} & \dots & & \\
 & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 & \leq b_i & (1.i) \\
 & \dots & & \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & \leq b_m & (1.m) \\
 & x_1 \geq 0 \quad x_2 & \geq 0 & (2)
\end{array}$$

A resolução gráfica de um programa linear consiste em traçar um plano cartesiano, ou gráfico cartesiano, onde os valores de x_1 são representados nas abscissas e os valores de x_2 são representados nas ordenadas. Os pontos deste gráfico representam as soluções do problema.

Por definição, as variáveis do problema são não negativas, portanto é necessário representar somente o primeiro quadrante do plano. Em um limite, a igualdade em cada restrição pode ser obtido. Em qualquer restrição, quando a igualdade é obtido, a restrição passa a ser a equação de uma reta. Desta maneira, cada restrição do problema pode ser representado por uma reta que divede o plano em dois semiplanos, um lado da reta está o semiplano onde se situam todos os pontos que satisfazem a restrição (a inequação) e o outro lado da reta está o semiplano onde se situam os pontos que não satisfazem a restrição (a inequação). Uma maneira imediata de determinar em qual dos dois semiplanos estão os pontos que satifação a restrição é testar a origem do sistema cartesiano, o ponto $(0, 0)$, ou seja, testar o ponto onde $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, se este ponto satisfaz a restrição então todos os pontos do semiplano que $(0, 0)$ está também satisfaz a restrição.

Assim, as restrições do programa linear (as inequações do tipo (1)) representam semiplanos limitados pela equações onde a igualdade de cada restrição é obtida.

Definição 2.7 *Região de viabilidade*

A interseção dos semi-planos definidos pelas restrições do programa define a *região de viabilidade* do problema, ou seja, todos pontos pertencentes à esta interseção de semi-planos satisfazem todas as restrições do problema.

A função objetivo é representada por um feixe de retas paralelas obtido fazendo o valor de z variar. Para obter uma solução ótima do problema basta então traçar uma reta pertencente ao feixe de retas paralelas, de maior valor de z de maneira que toque em ao menos um ponto a região de viabilidade. Este ponto é a solução ótima do problema. Note que o vetor $\overrightarrow{(0,0)(c_1,c_2)}$ possui direção perpendicular ao feixe de retas paralelas definido pela função objetivo e sentido o qual o valor de z cresce, portanto, uma outra maneira de se obter uma solução ótima para o problema consiste em traçar o vetor $\overrightarrow{(0,0)(c_1,c_2)}$ e obter uma reta perpendicular a direção deste vetor, de maneira que seja o mais distante possível da origem e que toque em ao menos um ponto a região de viabilidade.

Proposição 2.1 : *Dada a equação $z = c_1x_1 + c_2x_2$ onde c_1 e c_2 são constantes dadas e z, x_1 e x_2 são variáveis. Variando o valor de z, obten-se um feixo de retas paralelas. Assim, z define um feixo de retas paralelas.*

Demonstração: □

Proposição 2.2 : *Seja o feixo de retas paralelas definido por $z = c_1x_1 + c_2x_2$. A direção do vetor $\overrightarrow{(0,0)(c_1,c_2)}$ é perpendicular ou feixo de retas paralelas definido por z e o sentido deste vetor é o sentido que o valor de z cresce no feixo de retas paralelas.*

Demonstração: □

Restrições de maior ou iqual $(\geq)$ ou de iqualdade são iqualmente tratados na resolução gráfica. Lembrado-se que uma restrição de iqualdade é representada por uma reta e somente os pontos desta reta vazem parte da região de viabilidade do problema.

Exemplo 2.2 : *Resolução gráfica de um programa linear com uma única solução ótima*

Considere o problema do exemplo 2.1:

$$
\begin{array}{lccccccr}
\max & z & = & 5\ x_1 & +7\ x_2 & & & (0) \\
\text{sujeito às} & & & 2\ x_1 & & \leq & 12 & (1.1) \\
\text{restrições} & & & & x_2 & \leq & 8 & (1.2) \\
 & & & 4\ x_1 & +3\ x_2 & \leq & 36 & (1.3) \\
 & x_1 & \geq & 0\ (2.1) & \text{e } x_2 & \geq & 0 & (2.2)
\end{array}
$$

Resolver graficamente este problema consiste em construir o gráfico cartesiano:

Na figura, a *região de viabilidade* é o conjunto de pontos no plano que satisfaz todas as restrições do problema. A região de viabilidade corresponde ao conjunto de soluções viáveis do problema. Qualquer outro ponto, fora da região de viabilidade, representa uma solução não viável do problema. A direção do vetor $\overrightarrow{(0,0)(5,7)}$ mostra a direção perpendicular ao feixe de retas paralelas expressa pela função objetivo $z = 5x_1 + 7x_2$; o sentido do vetor mostra o sentido no qual z cresce. O vetor $\overrightarrow{(0,0)(5,7)}$ é o *gradiente* da função objetivo. Observe que as extremidades do vetor $\overrightarrow{(0,0)(5,7)}$ são os pontos $(0,0)$ e $(5,7)$, onde $(0,0)$ é a origem do gráfico e o ponto $(3,5)$ possui coordenadas correspondentes aos respectivos coeficientes de x_1 e de x_2 na função objetivo. A *solução ótima* do problema são os valores das variáveis que maximizam a função objetivo. No caso do exemplo, a solução ótima é o ponto $(2,5)$ com $z = 71$ com $x_1 = 7$ e $x_2 = 8$.

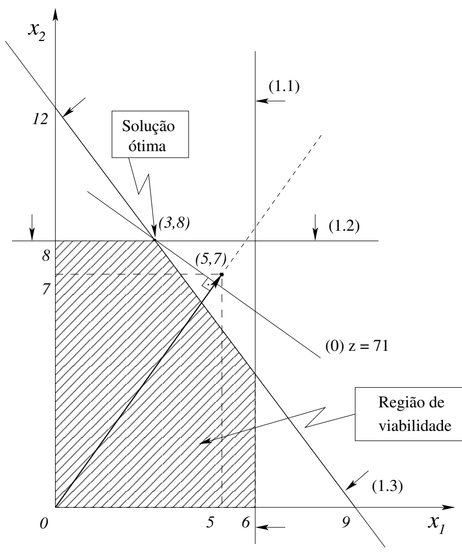
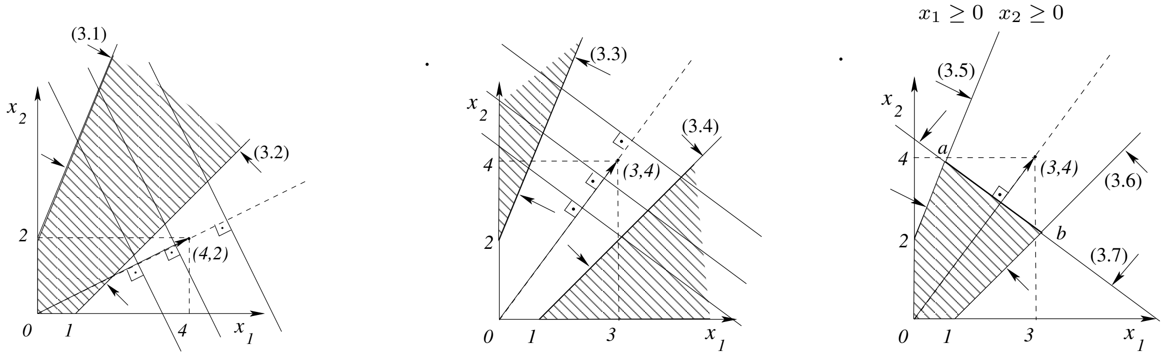


Figura 2.1: Solução Gráfica do exemplo 2.1

$$\begin{array}{llrcll} \max & z = 4x_1 + 2x_2 & & & & \\ \text{s. a} & & -5x_1 + 2x_2 & \leq & 4 & (2.1) \\ & & x_1 - x_2 & \leq & 1 & (2.2) \\ & x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llrcll} \max & z = 3x_1 + 4x_2 & & & & \\ \text{s. a} & & -5x_1 + 2x_2 & \geq & 4 & (2.3) \\ & & x_1 - x_2 & \geq & 1 & (2.4) \\ & x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llrcll} \max & z = 3x_1 + 4x_2 & & & & \\ \text{s. a} & & -5x_1 + 2x_2 & \leq & 4 & (2.5) \\ & & x_1 - x_2 & \leq & 1 & (2.6) \\ & & 3x_1 + 4x_2 & \leq & 18 & (2.7) \\ & x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$



(a) z cresce indefinidamente

(b) não possui solução viável

(c) possui infinitas soluções ótimas

Figura 2.2: Diferentes tipos de soluções 2.1

O exemplo acima foi convenientemente escolhido para ilustrar um programa linear com solução ótima única. Quando um programa não possui solução ótima ou possui soluções ótimas múltiplas são ilustrados na sequência.

A região de viabilidade do problema (a) da Figura 2.2 é a parte achurada, assim, pode-se observar que o valor da função objetivo pode crescer indefinidamente, para qualquer valor de $z \geq 0$ sempre existe ao menos um ponto dentro da região de viabilidade. A região de viabilidade do problema (b) da Figura 2.2 é vazia, dado a existência do par de restrições (3.3) e (3.4), assim, este problema não possui solução viável e, consequentemente, não possui solução ótima. A região de viabilidade do problema (c) da Figura 2.2 é a parte achurada. Observa-se que a restrição (3.7) possui coeficiente angular igual ao coeficiente da função objetivo, assim, consequentemente, esta restrição pertence ao feixe de retas paralelas definido por z. Todos os pontos do intervalo $[a, b]$ mostrado na figura são soluções ótimas do problema.

2.4 Método Simplex

As primeiras subseções apresentam alguns conceitos que fundamentam o método simplex para uma forma específica de programa linear (forma padrão), seguida da apresentação do método para esta forma. Na seqüência, a subseção 2.4.5, apresenta a resolução de um problema onde o método simplex é aplicado de maneira que os conceitos apresentados são introduzidos independentemente do método simplex. Uma maneira mais prática de compreender o método simplex é começar a leitura pela subseção 2.4.5 e depois ler as subseções iniciais desta seção.

2.4.1 Antes do Método Simplex: sistemas de equações lineares

A Teoria de Sistema de Equações Lineares é tratado em uma seção específica. A compreensão total desta seção exige um conhecimento mínimo sobre esse tema. Caso algum conceito utilizado aqui não esteja, sugere-se que se leia previamente a seção de Teoria de Sistemas de Equações Lineares.

Considere somente um sistema de equações lineares $(\mathcal{S})$ com m equações (linhas) linearmente independentes e n variáveis (colunas) $x_j \in I\!R$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, escrito por suas equações:

$$
(\mathcal{S}) \quad \begin{array}{rll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 & (1) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 & (2) \\
\ldots & & \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n & = b_i & (i) \\
\ldots & & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m & (m)
\end{array}
$$

Da Teoria de Sistemas Lineares, este sistema pode possuir três tipos de soluções referentes aos valores de m e n, são elas:

1. $m = n$: neste caso, o sistema de equações lineares possui uma única solução, isto é, existe somente um valor para cada variável que satisfaça todas as equações;
2. $m > n$: neste caso, o sistema de equações lineares não possui solução, ou seja, não existe nenhum valor que cada variável possa asumir que satisfaça todas as equações;
3. $m < n$: neste caso, o sistema é indeterminado, possuindo infinitas soluções, onde m variáveis são calculadas em função das demais $n - m$ variáveis.

Em um sistema de equações lineares, uma equação é linearmente dependente se, e somente se, ela pode ser obtida através da soma de multiplos de outras equações do sistema. A solução obtida na resolução do sistema linear onde todas as equações linearmente dependentes foram elimidadas é iqual à solução obtida na resolução do sistema linear com todas as equações linearmente dependentes incluidas. Assim, as equações linearmente dependentes não acrescenta nenhuma informação ao sistema, podendo ser elimidadas. Considera-se aqui somente sistemas com equações linearmente independentes.

Os sistemas com $m = n$ e com $m > n$ não são de interesse este estudo por não existir opções de valores para as variáveis. Agora os sistemas com $m < n$ sim é de interesse. Em problemas práticos de decisão, é importante que se tenha várias alternativas para que se decida qual delas é melhor sob um determinado contexto. São nos problemas práticos que geram sistemas com $m < n$ que se introduz uma função objetivo que define uma direção e sentido que uma decisão deve ser tomada.

A Programação Linear estuda sistemas de equações lineares com o número de variáveis maior que o número de equações, indeterminados e com infinitas soluções. Introduz-se à este sistema uma função objetivo, também linear, que deve ser maximizada ou minimizada. O objetivo então é determinar uma solução do sistema de equações que maximiza ou minimiza a função objetivo.

Como nosso iteresse é em sistemas de equações lineares onde o número de variáveis é maior que o número de equações, denominaremos a partir de agora m para o número de equações e $m + n$ para o número de variáveis.

Uma solução de um sistema de equações lineares $(\mathcal{S})$ com m equações e $m+n$ variáveis pode ser obtida calculando m variáveis em função das n demais variáveis previamente fixadas. Em forma de equações, uma solução de $(\mathcal{S})$, por exemplo, seria calcular as m primeiras variáveis em função das demais n, ou seja, resolvendo o sistema:

$$
(\mathcal{S}) \quad
\begin{array}{rll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m & = b_1 - a_{1m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_{m+n} & (1) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m & = b_2 - a_{2m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{2n}x_{m+n} & (2) \\
 & \ldots & \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m & = b_3 - a_{im+1}x_{m+1} - \ldots - a_{in}x_{m+n} & (i) \\
 & \ldots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m & = b_4 - a_{mm+1}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}x_{m+n} & (m)
\end{array}
$$

Na forma matricial, um sistema de equações lineares $(\mathcal{S})$ com m equações e $m+n$ variáveis é escrito:

$$A_{m\times n+n} \times x_{m+n\times 1} = b_{m\times 1} \text{ ou, simplesmente, } A \times x = b$$

Calcular as m primeiras variáveis de $(\mathcal{S})$ em função das demais n, na forma matricial é então reescrever $(\mathcal{S})$ na forma:

$$Bx_B + Nx_N = b \Longrightarrow Bx_B = b - Nx_N$$

onde B é uma matriz quadrada $m \times m$ formada pelas m primeiras colunas de A; N é um outra matriz com as demais n colunas de A; x_B é uma matriz de uma única coluna com as respectivas m primeiras variáveis que serão calculadas em função das n demais variáveis que estão em x_N.

Na forma matricial fica:

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ & & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} a_{1m+1} & a_{1m+2} & \ldots & a_{1m+n} \\ a_{2m+1} & a_{2m+2} & \ldots & a_{2m+n} \\ & & & \ldots \\ a_{mm+1} & a_{mm+2} & \ldots & a_{mm+n} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \ldots \\ x_{m+n} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

ou

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ & & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} a_{1m+1} & a_{1m+2} & \ldots & a_{1m+n} \\ a_{2m+1} & a_{2m+2} & \ldots & a_{2m+n} \\ & & & \ldots \\ a_{mm+1} & a_{mm+2} & \ldots & a_{mm+n} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \ldots \\ x_{m+n} \end{bmatrix}
$$

Da propriedade da operação algébrica da adição, a ordem das parcelas não altera a soma. Assim, a matriz B pode conter quaisquer das m colunas de A desde que as variáveis que aparecem em x_B tenha exatamente a mesma ordem que as colunas de B foram escritas. O mesmo deve acontecer com N e x_N.

Assim, generalizando, uma solução qualquer de $(\mathcal{S})$ é então obtida:

$$Bx_B + Nx_N = b \tag{2.8}$$

ou

$$Bx_B = b - Nx_N \tag{2.9}$$

Ao multiplicar ambos os lados da equação (2.9) à esquerda pela matriz B^{-1}, inversa de B, obtem-se:

$$B^{-1}Bx_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

ou

$$Ix_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \tag{2.10}$$

onde I é a matriz identidade de dimensão m. Fixando então valores para as $n-m$ variáveis em x_N, calcula-se os valores das m variáveis de x_B. Uma maneira indireta para se obter a matriz B^{-1} é escalonar a matriz B utilizando o método de Eliminação de Gauss. Assim obtem-se o valor das m variáveis em x_B:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \tag{2.11}$$

A equação (2.11) permite então calcular o valor de quaisquer m variáveis em função das demais n variáveis em qualquer sistema de equações lineares indeterminado onde o número de equações é menor que o número de variáveis. Lembre-se que estamos trabalhando com sistemas de equações lineares onde as equações são linearmente independentes. Caso uma equação não seja linermente independete, a matriz B não possui inversa.

Basicamente, o Método Simplex utiliza deste conceito para obter uma solução ótima de um programa linear.

2.4.2 Solução básica e Solução ótima

De uma maneira geral, seja um programa linear $(\mathcal{P})$ definido por:

$$\begin{array}{ll} \text{max} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1} + \ldots + c_{n+m}x_{n+m} \\ \text{s. a} & \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n + a_{1n+1}x_{n+1} + \ldots + a_{1n+m}x_{n+m} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n + a_{2n+1}x_{n+1} + \ldots + a_{2n+m}x_{n+m} &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n + a_{in+1}x_{n+1} + \ldots + a_{2n+m}x_{n+m} &= b_i \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n + a_{mn+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn+m}x_{n+m} &= b_m \\ x_j \geq 0 \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots m+n & \end{aligned} \end{array}$$

Na forma matricial, este programa é escrito:

$$\begin{array}{ll} \text{max} & z = c_{1\times n+m}x_{n+m\times 1} \\ \text{s. a} & A_{m\times n+m}x_{n+m\times 1} = b_{m\times 1} \\ & x_{n+m\times 1} \geq 0 \end{array}$$

Pode-se escrever o programa linear $(\mathcal{P})$ simplesmente da maneira:

$$\text{max} \quad z - cx = 0 \tag{2.12}$$
$$\text{s. a} \quad Ax = b \tag{2.13}$$
$$x \geq 0 \tag{2.14}$$

Da Teoria de Sistemas de Equações Lineares, tem-se em um programa linear um sistema de equações lineares indeterminado definido pelas expressões (2.13) e (2.14) que possui infinitas soluções que se procura uma solução do sistema que maximize a função objetivo (2.12).

O sistema linear definido pela equação (2.13) possui m equações e $m+n$ variáveis. Como visto na seção anterior, pode-se determinar o valor de m variáveis em função das demais n variáveis. Utilizando da forma mostrada em (2.8), o programa linear $(\mathcal{P})$ pode ser reescrito:

$$\text{max} \quad z - c_Bx_B - c_Nx_N = 0 \tag{2.15}$$
$$\text{s. a} \quad Bx_B + Nx_N = b \tag{2.16}$$
$$x_B \geq 0 \text{ e } x_N \geq 0 \tag{2.17}$$

onde as m variáveis em x_B são calculadas em função das n variáveis em x_N, como calculado na equação (2.11):

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Substituindo este valor na função objetivo, tem-se:

$$\max \quad z - c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) - c_Nx_N = 0$$

ou

$$\max \quad z - c_BB^{-1}b + c_BB^{-1}Nx_N - c_Nx_N = 0$$

ou ainda

$$\max \quad z - c_BB^{-1}b + (c_BB^{-1}N - c_N)x_N = 0$$

Assim, associando à Teoria de Sistema de Equações Lineares, o programa linear $(\mathcal{P})$ fica escrito:

$$\begin{array}{ll} \text{max} & z - c_BB^{-1}b + (c_BB^{-1}N - c_N)x_N = 0 \\ \text{s. a} & x_B \ = \ B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ & x_B \ \geq \ 0 \text{ e } x_N \geq 0 \end{array}$$

O programa linear $(\mathcal{P})$ escrito desta forma tem-se a função objetivo escrita em função dos parâmetros do problema e das variáveis que estão em x_N. O termo $-c_BB^{-1}b$ é calculado em função de somente parâmetros do problema, independe de variáveis. Os coeficientes das variáveis x_N, $(c_BB^{-1}N - c_N)$, ficaram escrito também somente em função dos parâmetros do problema. Assim, dada uma solução $\bar{x} = [\bar{x}_B \ \bar{x}_N]$ qualquer viável de $(\mathcal{P})$, isto é, uma solução $\bar{x} = [\bar{x}_B \ \bar{x}_N]$ tal que $\bar{x}_B \geq 0$ e $\bar{x}_N \geq 0$, o valor da função objetivo $\bar{z}$ para esta solução pode ser calculado por:

$$\bar{z} = c_BB^{-1}b - (c_BB^{-1}N - c_N)\bar{x}_N \tag{2.18}$$

Teorema 2.1 *Seja um programa linear $(\mathcal{P})$. Uma solução $x^* = [x_B^* \ x_N^*]$ de $(\mathcal{P})$ tal que $x_B^* \geq 0$, $x_N^* = 0$ e $(c_BB^{-1}N - c_N) \geq 0$ é uma solução ótima.*

Demonstração: Por suposição, considera-se somente soluções viáveis $x^* = [x_B^* \ x_N^*]$ de $(\mathcal{P})$ tais que $(c_BB^{-1}N - c_N) \geq 0$. Para demostrar este teorema basta verificar então que x^* é viável e que para qualquer outra solução viável $\bar{x}$ de $(\mathcal{P})$, com o valor da função objetivo $\bar{z}$, que não esteja na forma de x^*, existe uma outra solução viável $x^* = [x_B^* \ x_N^*]$ de $(\mathcal{P})$ com $x_B^* \geq 0$ e $x_N^* = 0$ e com $z^* \geq \bar{z}$, ou seja, para qualquer solução viável $\bar{x}$ sempre existe uma outra solução viável na forma de x^* com a função objetivo maior que a função objetivo com $\bar{x}$. Por definição, uma solução é viável se, e somente se, $x_B \geq 0$ e $x_N \geq 0$, só é necessário verificar este caso.

1. a solução x^* é viável, pois $x_B^* \geq 0$ e $x_N^* = 0$, o que implica em $x_N^* \geq 0$; e
2. seja $\bar{x} = [\bar{x}_B \ \bar{x}_N]$ uma solução viável qualquer de $(\mathcal{P})$. Se $\bar{x}$ é viável, então $\bar{x}_B \geq 0$ e $\bar{x}_N \geq 0$. Se $\bar{x}_N = 0$, $\bar{x}$ tem a mesma forma de x^*, não é necessário investigar. Resta investigar as soluções viáveis $\bar{x} = [\bar{x}_B \ \bar{x}_N]$ com $\bar{x}_B \geq 0$ e $\bar{x}_N > 0$. Seja então a solução viável $\bar{x} = [\bar{x}_B \ \bar{x}_N]$ com $\bar{x}_B \geq 0$ e $\bar{x}_N > 0$, seja também uma outra solução viável $\bar{x}^* = [\bar{x}_B^* \ \bar{x}_N^*]$ com $\bar{x}^* = \bar{x}_B$ e $\bar{x}_N = 0$. Assim, como $(c_BB^{-1}N - c_N) \geq 0$, então $\bar{z}^* \geq \bar{z}$, pois, da equação (2.18), o sinal da parcela $(c_BB^{-1}N - c_N)$ é negativo. $\square$

Este teorema então garante que uma solução $x^* = [x_B^* \ x_N^*]$ de um programa linear $(\mathcal{P})$ tal que $x_N^* = 0$ e os coeficientes de x_N^* na função objetivo forem todos não negativos, ou seja, $(c_BB^{-1}N - c_N) \geq 0$, então x^* úma solução ótima de $(\mathcal{P})$. Por enquanto não se garente que não exista soluções ótimas de $(\mathcal{P})$ que não esteja na forma da solução definida pelo teorema.

Definição 2.8 *Solução básica*

Toda solução de um programa linear $(\mathcal{P})$ na forma $x^* = [x_B^* \; x_N^*]$ com $x_N^* = 0$ é denominada *solução básica* de $(\mathcal{P})$. As variáveis em x_B^* são denominadas *variáveis basicas* e as variáveis em x_N^*, todas nulas, são denominadas *variáveis não básicas*.

Definição 2.9 *Solução básica viável*

Toda solução de um programa linear $(\mathcal{P})$ na forma $x^* = [x_B^* \; x_N^*]$ com $x_B \geq 0$ e $x_N^* = 0$ é denominada *solução básica viável* de $(\mathcal{P})$.

Como consequência imedita do Teorema 2.1 tem-se que *toda solução ótima é uma solução básica viável*.

Desta forma, resolver um programa linear consistem em responder pergunta: Quais serão as m variáveis básicas que, se a função objetivo for escrita em função das variáveis não básicas, todos seus coneficientes são não negativos?

Resolver o programa linear consiste então de somente determinar quais são as m variáveos básicas x_B de maneira que o valor da função objetivo seja máximo. Conhecendo quais são as m variáveis básicas em x_B, basta então calcular os valores:

$$
\begin{array}{ll}
 & z = c_B B^{-1} b \\
\text{s. a} & x_B \; = \; B^{-1} b \\
 & x_N \; = \; 0
\end{array}
$$

O método simplex é um método iterativo (*algoritmo*) para resolver problemas de programação linear constituido dos seguintes passos:

1. *inicialização*: determinar uma solução básoca viável inicial. Uma solução básica viável tem a forma de $x^* = [x_B^* \; x_N^*]$ com $x_B^* \geq 0$, $x_N^* = 0$;
2. *regra de parada*: enquanto todos os coeficientes $(c_B B^{-1} N - c_N)$ não forem maiores ou iquais a *zero*, faça:
3. *passo iterativo*: buscar uma outra solução na forma de $x^* = [x_B^* \; x_N^*]$ com $x_B^* \geq 0$, $x_N^* = 0$ com o valor da função objetivo melhor.

Primeiramente apresenta-se o método simplex para resolver problemas que tenham uma forma específica, chamada de *forma padrão*. A forma padrão pode-se ser definida de diferentes maneiras, o importante é que o desenvolvimento da teoria do simplex seja coerente com a forma padrão definida.

2.4.3 Forma padrão

Denine-se aqui um programa linear está na *forma padrão* se ele é escrito sob a forma:

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = cx \\
\text{s. a} & Ax \; \leq \; b \\
 & x \; \geq \; 0
\end{array}
$$

ou seja, escrito de forma que tenha as seguintes características:

1. função objetivo de maximizar;
2. todas as restrições são do tipo menor ou igual;
3. todas as variáveis são positivas ou nulas; e

4. todos os coeficientes do lado direito das restrições são positivos ou nulos.

Alguns autores definem a função objetivo da forma padrão com sendo de minimizar e desenvolvem toda a teoria do método simplex para esta forma padrão. Sugere-se comparar as duas maneiras de definir a forma padrão e suas consequências no decorrer da apresentação da teoria da programação linear, principalmente quando o quadro simplex é definido.

Observe que os problemas $(\mathcal{P})$ da seção 2.2 e do exemplo 2.1 estão na forma padrão. O problema $(\mathcal{P})$ é um problema geral na forma padrão.

Exemplo 2.3 : *O programa linear do Exemplo 2.1 está na forma padrão.*

$$
\begin{array}{lcccccc}
\max & z & = & 5\ x_1 & +7\ x_2 & & \\
\text{sujeito às} & & & 2\ x_1 & & \leq & 12 \\
\text{restrições} & & & & x_2 & \leq & 8 \\
 & & & 4\ x_1 & +3\ x_2 & \leq & 36 \\
 & x_1 & \geq & 0 & \text{e } x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Definir uma forma padrão tal como foi definida é importante, pois através desta forma pode-se obter diretamente o programa em sua forma canônica, assunto da próxima seção.

2.4.4 Forma canônica e solução básica inicial

Considerando que um problema está na forma padrão, pode-se simplificar a notação retirando o max da função objetivo e eliminando as restrições de não negatividade das variáveis. Ainda, como todas as restrições são do tipo menor ou igual, uma nova variável pode ser introduzida em cada restrição, $x_{n+i} \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$, transformado-as em restrições de igualdade. Essas novas variáveis introduzidas são denominadas $variáveis\ de\ folga$ e as outras variáveis são denominadas $variáveis\ originais$ do problema. Desta maneira o problema $\mathcal{P}$ pode ser reescrito:

$$
\begin{array}{lrl}
\max & z - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_jx_j - \ldots - c_nx_n & = 0 \\
\text{s. a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} & = b_2 \\
 & & \ldots \\
 & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} & = b_i \\
 & & \ldots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} & = b_m \\
 & x_j \geq 0 \quad \forall\ j = 1, 2, \ldots, n+m &
\end{array}
$$

Exemplo 2.4 : *Introduzindo as variáveis de folga no programa linear do Exemplo 2.1 chega-se na forma canônica:*

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{max} & z - 5x_1 - 7x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 = 0 & & \\
\text{s. a} & 2x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 & = & 12 \\
 & 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 & = & 8 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 & = & 36 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Assim, neste novo problema, a matriz linha c de coeficientes da função objetio possui a dimensão $1 \times n + m$, a matriz coluna x de variáveis possui a dimensão $1 \times n + m$, a matriz A possui a dimensão $m \times n + m$ e a matriz coluna b continua com a dimensão $m \times 1$. Observe ainda que a função objetivo está escrita em função das variáveis originais do problema, ou seja, os coeficientes das variáveis de folga na função objetivo são nulos. A matriz A deste problema possui uma submatriz que é a matriz identidade, portanto quadrada, de ordem m. As novas matrizes que compõem o programa linear são então escritas:

$$x_{n+m\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \qquad A_{m\times n+m} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} & & & & & & \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{m}} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \qquad c_{1\times n+m} = [\ c_1$$

e $$b_{m\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.5 *: As matrizes do programa linear do Exemplo 2.1 na forma canônica são então:*

$$x_{2+3\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},\ A_{3\times 2+3} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],\ b_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$c_{1\times 2+3} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

O Problema $(\mathcal{P})$ fica então escrito em forma matricial:

$$\begin{array}{lll} \max & z - \left[\begin{array}{cccc|cccc} c_1 & c_2 & \dots & c_n & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^{m}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} & = 0 \\ \text{s. a} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} & & & & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{m}} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} & \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemplo 2.6 *: A forma matricial do Exemplo 2.1 na forma canônica são então:*

$$
\begin{array}{lcccc}
\max & z - \left[\begin{array}{ccccc} 5 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right] & = & 0 \\
\text{s. a} & \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right] & = & \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}\right] \\
 & & \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right] & \geq & \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]
\end{array}
$$

O importânte do problema estar na forma padrão e de se obter a forma canônica diretamente consistem em já obter de imediato uma solução básica viável inicial do problema, onde as m variáveis de folga são escritas em função das n variáveis originais do problema. Assim, obtem-se o problema na forma matricial:

$$
\begin{array}{rll}
\max \quad z - cx_N - 0x_B & = 0 & (0) \\
Ax_N + Ix_B & = b & (1) \\
x_N \geq 0, \quad x_B & \geq 0 & (2)
\end{array}
$$

onde $[c_N]_{1\times n} = \left[\begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{array}\right]$ é a matriz linha de coeficientes na função objetivo das variáveis originais do problema, $[x_N]_{n\times 1} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right]$ é a matriz coluna das variáveis originais do problema, $[c_B]_{1\times m} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right]$ é a matriz linha de coeficientes todos nulos das variáveis de folga, $[x_B]_{m\times 1} = \left[\begin{array}{c} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{array}\right]$ é a matriz coluna das variáveis de folga introduzidas ao problema, $A_{m\times n} = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right]$ é a matriz de coeficientes originais das restrições, de dimensão $m \times n$, $I_m = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right]$ é a matriz identidade de dimensão m, e $b_{m\times 1} = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right]$ é a mesma matriz coluna original de coeficientes do lado direito as restrições.

Exemplo 2.7 : *As matrizes do programa linear do Exemplo 2.1 na forma canônica são então:*

$[c_N]_{1\times 2} = \left[\begin{array}{cc} 5 & 7 \end{array}\right]$ é a matriz coluna dos coeficientes na função objetivo das variáveis originais do problema, $[x_N]_{2\times 1} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right]$ é a matriz coluna das variáveis originais do problema, $[c_B]_{1\times 3} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ é a matriz linha dos coeficientes nulos das variáveis de folga, $[x_B]_{3\times 1} = \left[\begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right]$ é a matriz coluna das variáveis de folga, $A_{3\times 2} = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{array}\right]$ é a matriz de dimensão $m \times n$ dos coeficientes originais das variáveis das restrições do problema, $I_3 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ é a matriz identidade de dimensão 3 e $b_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix}$ é a mesma matriz original de coeficientes do lado direito as restrições.

Separando as matrizes, o problema $(\mathcal{P})$ pode ser escrito:

$$\max \quad z - \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{s. a} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.8 *: O programa linear do Exemplo 2.1 na forma canônica são em matrizes então:*

$$\max \quad z - \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{s. a} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Em resumo, um programa linear está escrito na $\textit{forma canônica}$ se ele possui as características do problema acima, ou seja:

1. a função objetivo é de maximizar;
2. todas as restrições são do tipo igualdade;
3. todos os coeficientes do lado direito das restrições são não negativos;
4. todas as variáveis são não negativas;
5. a matriz de coeficientes A de ordem $m \times n$ possui uma sub-matriz identidade de ordem m;
6. as variáveis relativas às colunas da sub-matriz identidade da matriz de coeficientes A, possuem coeficiente nulo na função objetivo.

A forma padrão é de interesse pois, ao introduzir as variáveis de folga, o problema fica automaticamente sob a forma canônica. As próximas seções mostram o interesse da forma canônica.

Uma primeira solução básica viável do problema é fazer as variáveis originais assumirem o valor nulo, as variáveis de folga serão iquais aos respectivos lados direito e o valor a função objetivo é nulo, $z = 0$.

Observe a solução gráfica do exemplo 2.1. Note que o sistema define a região contínua do plano onde todos os pontos (infinitos) satisfazem todas equações, isto é, definie a região de viabilidade. Somente um dos pontos da região de viabilidade maximiza o valor da função objetivo. A solução básica inicial corresponde á solução trivial do problema, a origem do gráfico cartesiano onde as variáveis originais do problema são nulas.

Em resumo: uma solução do sistema de equações com m equações e $n + m$ variáveis apresenta então m variáveis escritas em função das n variáveis restantes. Uma solução do sistema de equações é definida como $solução\ básica$ se n variáveis assumem o valor $zero$ e as demais são calculadas em função destas n variáveis. As n variáveis que assumem o valor $zero$ são denominadas de $variáveis\ não\ básicas$ as demais são denominadas de $variáveis\ básicas$. Uma $primeira\ solução\ básica\ viável$ do problema ou $solução\ básica\ inicial$ pode ser obtida fazendo as variáveis originais do problema assumirem o valor $zero$, portanto serem as variáveis não básicas, e as variáveis de folga assumirem o respectivo valor do lado direito da equação, portanto serem as variáveis básicas. Esta solução corresponde à solução trivial do problema. A obtenção direta desta primeira solução básica viável só foi possível porque o programa linear esta escrito sob a forma canônica, o que implica na existência de uma submatriz identidade na matriz de coeficientes do sistema.

Assim, a solução básica inicial de um programa linear $(\mathcal{P})$ na forma canônica é:

$$z = 0, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.9 *: A solução básica inicial programa linear do Exemplo 2.1 é:*

$$z = 0, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix}$$

A próxima seção apresenta o método simplex para um programa linear na forma padrão.

2.4.5 Método Simplex: resolução de um programa linear

Considera-se inicialmente que o programa linear está na forma padrão e que possui uma solução ótima. As seções posteriores mostrarão como resolver programas lineares que não estão na forma padrão e mostrarão como parar o método simplex quando o problema não possui uma solução ótima.

Em poucas palavras, como a solução ótima é uma solução básica, o método simplex consiste em determinar uma solução básica inicial, testar se esta solução básica é ótima, se esta solução básica não é ótima, entrar em um processo iterativo onde, em cada iteração, uma nova solução básica, melhor que a atual, é encontrada e testada se é ótima ou não. Quando o método determinar uma solução ótima, o processo iterativo é interrompido.

O método simplex é apresentado em paralelo à resolução do exemplo numérico já resolvido graficamente.

Seja o exemplo 2.1:

$$\begin{array}{lccccccr}
\max & z & = & 5\,x_1 & +7\,x_2 & & & (0) \\
\text{sujeito às} & & & 2\,x_1 & & \leq & 12 & (1.1) \\
\text{restrições} & & & & x_2 & \leq & 8 & (1.2) \\
 & & & 4\,x_1 & +3\,x_2 & \leq & 36 & (1.3) \\
 & x_1 & \geq & 0\ (2.1) & \text{e}\ x_2 & \geq & 0 & (2.2)
\end{array}$$

Cuja solução gráfica foi apresentado pela seção 2.3. A figura 2.6 reproduz a solução gráfica para o programa linear. Esta figura é utilizada para acompanhar a resolução do problema.

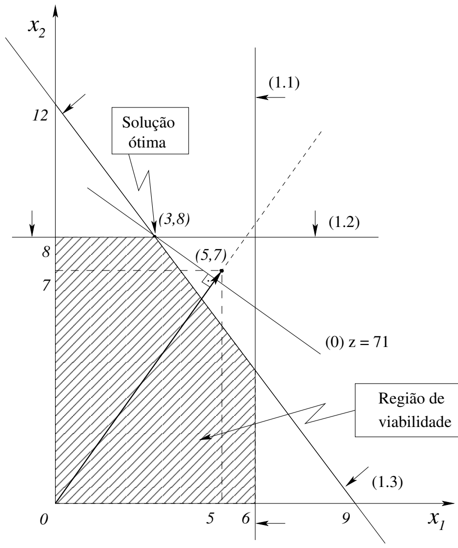


Figura 2.3: Solução Gráfica do exemplo 2.1

Fica subentendido que a função objetivo é de maximização e todas as variáveis são não negativas. Como todas as restrição são do tipo menor ou igual, introduz-se uma nova variável, também não negativa, em cada restrição para torná-la do tipo iqualdade. Reescrevendo então o programa linear com essas considerações, obtém-se o sistema:

$$
\begin{aligned}
z - 5x_1 - 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 0 \\
2x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 12 \\
0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 &= 8 \\
4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 36
\end{aligned}
$$

com $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ e $x_5 \geq 0$, ou seja, todas as variáveis do problema são do tipo maior ou igual. Estas novas variáveis representam a folga do lado esquerdo das inequações originais com relação ao seus lados direitos, por isso são denominadas *variáveis de folga*.

O sistema escrito desta maneira, apresenta uma primeira solução básica viável, com as variáveis não básicas $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, e as variáveis básicas $x_3 = 4$, $x_4 = 12$ e $x_5 = 18$, ou seja, as variáveis originais do problema são não básicas (iguais a *zero*) e as variáveis de folga iguais aos respectivos lados direitos, sendo elas as variáveis básicas. Nesta solução o valor da função objetivo é igual a *zero* ($z = 0$).

Note que o sistema apresenta uma estrutura tal que pode ser melhor visualizada através de um quadro (quadro simplex) onde as colunas representam os coeficientes de todas as variáveis do problema na função objetivo e em todas as restrições, a primeira linha é a função objetivo e as demais linhas são as restrições:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
	1	- 5	- 7	0	0	0	0
x_3	0	2	0	1	0	0	12
x_4	0	0	1	0	1	0	8
x_5	0	4	3	0	0	1	36

A solução básica apresentada neste quadro é: $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, como variáveis não básicas, e $x_3 = 12$, $x_4 = 8$, $x_5 = 36$ como variáveis básicas. O valor da fução objetivo é $z = 0$. Note na resolução gráfica que esta solução representa o ponto $(0, 0)$ no gráfico.

Observa-se que as variáveis não básicas $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ possuem coeficientes negativos na função objetivo, isto implica que, se elas assumirem um valor positivo, maior que *zero*, o valor da função objetivo aumenta. Ainda, como a variável x_2 possui o coeficiente mais negativo na função objetivo, se o seu valor aumentar (sair de *zero* para um valor positivo), a função objetivo deve aumentar mais rápido, em relação à variável x_1. Com isto, pode-se pensar que existe uma outra solução básica melhor que a atual solução mostrada no quadro acima. Deve-se então procurar uma outra solução básica melhor que esta.

No método simplex, a busca de uma nova solução básica consiste em identificar exatamente uma variável não básica para entrar na base e uma variável básica para sair da base.

A operacionalização da busca de uma nova solução básica consiste em criar um novo quadro com as mesmas características do quadro acima, ou seja:

1. deve existir uma sub-matriz identidade na matriz A composta pelas colunas das novas variáveis básicas para que se possa identificar diretamente no quadro uma solução do sistema;
2. a função objetivo deverá ser escrita em função das novas variáveis não básicas, ou seja, das variáveis que não compõem as colunas da matriz identidade; e
3. mostrar um sistema de equações equivalente ao apresentado no quadro anterior, isto é, que possua o mesmo conjunto de soluções.

Para se construir um novo quadro com as características acima, basta identificar a variável não básica, portanto nula na atual solução básica que, ao se tornar positiva entrando na base, contribuirá para que a função objetivo mais cresça. Esta variável é aquela que possui o coeficiente mais negativo na função objetivo do atual quadro, no caso é x_2. Prudentemente, somente o valor de x_2 deverá aumentar, deixando-se, por instante, o valor de x_1 inalterado, ou seja, x_1 continua sendo nula. Numa próxima etapa, se necessário, estuda-se um novo valor de x_1.

Desta maneira, a variável não básica x_j que entra na base em uma iteração do método simplex é determinada por:

$$x_j : c_j = \min_{c_k \in c_N} \{-c_k\},$$

o índice j é guardado para a variável que está entrando na base.

Deve-se determinar agora qual é o maior valor que x_2 pode assumir de maneira que a nova solução básica ainda seja viável. Este valor é determinado pelas equações do problema. Mesmo que x_2 assuma um valor positivo, as restrições do problema devem ser satisfeitas. Se uma variável muda de valor, para que o quadro continue apresentando uma solução viável do programa linear, o valor para uma ou mais das outras variáveis poderão também mudar de valor. Estuda-se então cada uma as equações do sistema e deve-se aumentar o valor de x_2 num limite no qual a solução mostrada no quadro continue sendo viável.

Observa-se agora o que acontece com as equações do sistema quando o valor da variável x_2 aumenta e x_1 continua nula.

1. *equação 1*:
$$2x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 12,$$
como o coeficiente de x_2 é nulo nesta equação, o valor de x_2 pode aumentar para o infinito que a equação continua sendo satisfeita. Então, por essa equação, não existe um limite superior para o valor de x_2;
2. *equação 2*:
$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 8;$$
nesta iteração do método, o valor de x_1 não deve mudar, isto é, x_1 deve continuar sendo nula como variável não básica. Se o valor de x_2 aumentar e como os coeficientes de x_3 e x_5 são nulos, o valor de x_4 deve diminuir para que a equação continue sendo válida. Um valor limite para x_2 nesta equação é determinado então em função do valor de x_4: o menor valor que x_4 pode assumir é *zero*, tem-se então o maior valor para x_2 é $8/1 = 8$. Assim:
$$0x_1 + 1x_2(\uparrow^8) + 0x_3 + 1x_4(\downarrow_0) + 0x_5 = 8,$$

com o valor limite $x_2 = 8$ e, consequentimente, o valor de $x_4 = 0$. Estes seriam os novos valores destas variáveis, os valores de x_1, x_3 e x_5 continuariam inalterados e a equação continuaria válida.

3. *equação 3*:

$$4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 36,$$

o valor de x_1 deve continuar nulo, o valor de x_2 deve aumentar, como os coeficientes de x_3 e x_4 são nulos nesta equação, então o valor de x_5 deve diminuir. O menor valor que x_5 pode assumir para que o sistema de equações continue viável é *zero*, logo, o maior valor que x_2 pode assumir nesta equação é $36/3 = 12$, assim:

$$4x_1 + 3x_2(\uparrow^{12}) + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5(\downarrow_0) = 36.$$

Por essa equação, $x_2 = 12$ e $x_5 = 0$ são os novos valores, os valores de x_1, x_3 e x_4 continuam inalterados e a equação continua válida.

Com o estudo acima, conclui-se que o para o sistema de equações continuar sendo satisfeito quando o valor de x_1 continuar nulo, o maior valor que x_2 pode assumir é 8, determinado pela segunda equação. Assim, x_2 entra na base e x_4 sai da base.

De uma maneira geral, sendo x_j quem entra na base em uma iteração do simplex, a variável básica x_k que sai da base é determinada por:

$$x_k : b'_k = \min_{x_i \in x_B} \{b_i/a_{ij} : a_{ij} > 0\}$$

note que a_{ij} deve ser extritamente maior que zero, como é observado pela *equação 1*, se $a_{ij} = 0$ a variável não básica que entra na base pode crescer indefinidamente que a restrição pode ser satisfeira. O mesmo acontece se $a_{ij} < 0$.

É importante destacar que no sistema construído de maneira que exista uma submatriz identidade na matriz A e a função objetivo escrita em função das outras variáveis que não são as colunas da matriz identidade, cada equação apresenta somente uma variável que deva diminuir de seu valor para determinar o valor máximo da variável que está entrando na base vai assumir.

A operacionalização da construção de um novo quadro pode ser simplificada se utilizarmos uma notação apropriada no quadro acima. Ao considerar:

1. nomeação de cada linha do quadro:
   (a) função objetivo: L_0,
   (b) qualquer equação i: L_i;
2. o destaque da variável que entra na base, sua coluna é denominada de *coluna pivô*; e
3. o cálculo da variável que sai da base, sua linha é denominada de *linha pivô*: dado pela divisão do lado direito pelo respectivo coeficiente da coluna pivô;
4. o coeficiente que está na interseção da coluna pivô com a linha pivô é denominado de *número pivô*.

Pode-se reescrever o quadro anterior como:

base	z	x_1	x_2 (coluna pivô ↓)	x_3	x_4	x_5	LD			
	1	- 5	- 7	0	0	0	0	L_0		
x_3	0	2	0	1	0	0	12	L_1		
x_4	0	0	1	0	1	0	8	L_2	$8/1 = 8$	← linha pivô
x_5	0	4	3	0	0	1	36	L_3	$36/3 = 12$	

Para construir então um novo quadro que apresente uma nova solução do problema basta fazer operações de linhas na matriz de maneira que a função objetivo seja escrita em função das novas variáveis não básicas e que a matriz A continue com uma submatriz identidade de tal maneira que se possa obter diretamente no quadro, a nova solução básica encontrada para o problema.

Para manter uma matriz identidade no quadro simplex, basta garantir pelas operações de linhas que as colunas das outras variáveis básicas, não aquela que está saindo da base, continuem contendo os mesmos coeficientes do quadro anterior e a coluna da variável que está entrando na base deverá compor a matriz identidade.

Entende-se como operações de linha as seguintes operações com as linhas das matrizes:

1. obter o multiplo de uma linha da matriz multiplicando ou dividindo a linha da matriz por um valor real;
2. substituir uma linha da matriz pela soma ou subtração dela mesma com o multiplo de uma outra linha da matriz.

No exemplo, a variável que está entrando na base é x_2, assim, seu coeficiente na linha que ela assume o valor do lado direito deve ser iqual à 1. Para isto, basta dividir toda a equação (2) por 1: $L_2' = L_2/1$, ou seja, $L_2' = L_2$, continua como está.

Generalizando, sempre a nova linha pivô L_i' é calculada por:

$$L_i' = L_i/a_{ij}$$

Para manter a informação que cada outra equação possui, basta escrever as novas linhas da matriz em função dela mesma (para manter a própria informação no sistema) e da linha referente a variável que está saindo da base (linha pivô).

No exemplo, as colunas da matriz referente às variáveis x_3 e x_5, que também fazem parte da nova matriz identidade, não devem se alterar; a coluna referente a x_2 passa a compor a matriz identidade, com o coeficiente de x_2 igual a 1 e os demais coeficientes nulos. Para obter os demais coeficientes da coluna de x_2 nulos e não alterar os coeficientes de x_3 e x_5, que continuam na base, basta somar ou subtrair de cada linha um múltiplo da linha referente a x_4, que é a variável que está saindo da base.

Este novo quadro é mostrado abaixo, onde as operações de linhas para obtê-la são indicadas à direita do quadro (por exemplo $L_0' = L_0 + 7L_2'$). Este quadro também adianta as indicações para melhorar ainda mais a função objetivo.

base	z	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	LD			
	1	- 5	0	0	7	0	56	$L_0' = L_0 + 7L_2'$		
x_3	0	2	0	1	0	0	12	$L_1' = L_1$	$12/2 = 6$	
x_2	0	0	1	0	1	0	8	$L_2' = L_2$		
x_5	0	4	0	0	-3	1	12	$L_3' = L_3 - 3L_2$	$12/4 = 3$	←

A solução apresentada neste quadro é: $x_1 = 0$ e $x_4 = 0$, variáveis não básicas, e $x_3 = 12$, $x_2 = 8$ e $x_5 = 12$, variáveis básicas, e o valor da função objetivo, $z = 56$. Esta solução coresponde ao ponto $(0, 8)$ da resolução gráfica.

Esta solução não é uma solução ótima do problema, pois se o valor de x_3 aumentar, a função objetivo também aumenta. Utilizando a mesma sequência de raciocínio, pode-se construir um novo quadro com x_1 entrando na base e x_5 saindo da base.

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD	
	1	0	0	0	13/4	5/4	71	$L_0'' = L_0' + 5L_3''$
x_3	0	0	0	1	3/2	-1/2	6	$L_1'' = L_1' - 2L_3''$
x_2	0	0	1	0	1	0	8	$L_2'' = L_2'$
x_1	0	1	0	0	-3/4	1/4	3	$L_3'' = L_3'/4$

A solução apresentada neste quadro é: $x_4 = 0$ e $x_5 = 0$, variáveis não básicas, e $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $x_1 = 6$, variáveis básicas, e a função objetivo com o valor $z = 36$. Esta solução é uma solução ótima do problema.

2.4.6 O Método Simplex para a forma padrão

Considera-se inicialmente que o programa linear está na forma padrão e que possui uma solução ótima. As seções posteriores mostrarão como resolver programas lineares que não estão na forma padrão e mostrarão como parar o método simplex quando o problema não possui uma solução ótima.

Em poucas palavras, como a solução óbima é uma solução básica, o método simplex consiste em determinar uma solução básica inicial, testar se esta solução básica é ótima, se esta solução básica não é ótima, entrar em um processo iterativo onde, em cada iteração, uma nova solução básica, melhor que a atual, é encontrada e testada se é ótima ou não. Quando o método determinar uma solução ótima, o processo iterativo é interrompido.

- *Inicialização*: Identificação de uma solução básica inicial. Faça:
  1. Introduza as variáveis de folga, uma para cada equação
  2. Construa o quadro inicial do simplex
  3. Identifique a solução básica inicial: faça as variáveis originais do problema iguais a zero e as variáveis de folga iguais ao lado direito de sua respectiva equação
- *Regra de Parada*: Verificar se a atual solução básica é ótima $\Longrightarrow$ todos os coeficientes da função objetivo no quadro simplex são positivos?
  - SIM: PARE, a atual solução é ÓTIMA
  - NÃO, vá para o Passo Iterativo
- *Passo Iterativo*: Determinar uma solução básica adjacente melhor que a atual solução:
  1. Identifique a variável não básica para entrar na base $\Longrightarrow$ é aquela que possui o coeficiente mais negativo na função objetivo
  2. Identifique a coluna da variável que esta entrando na base como a *coluna pivô*
  3. Identifique a variável básica para sair da base $\Longrightarrow$
     (a) identifique na coluna pivô todos os coeficientes estritamente positivos
     (b) divida o lado direito de cada linha pelo respectivo coeficiente da coluna pivô
     (c) a variaável que sai da base é aquela correspondente à menor razão
     (d) identifique a linha da variável que está saindo da base como a *linha pivô*
     (e) o coeficiente que pertence à linha pivô e à coluna pivô é o *número pivô*
  4. Faça, conforme as equações abaixo, operações de linha para obter um novo quadro simplex
     - para a linha pivô:
     $$\text{nova linha pivô} = \frac{\text{antiga linha pivô}}{\text{número pivô}}$$
     - para uma linha qualquer, diferente da linha pivô:
     $$\text{nova linha} = \text{antiga linha} - \text{coef. da coluna pivô} \times \text{nova linha pivô}$$

     Observe que, feitas estas operações de linha, obtém-se um novo quadro simplex que mostra um problema em sua forma canônica. Assim uma nova solução básica pode ser imediatamente obtida no quadro.
  5. Identifique a nova solução básica
  6. Volte para a *regra de parada*

A subseção seguinte apresenta um exemplo de resolução de um programa linear pelo método simplex apresentado.

2.4.7 Dificuldades na execução do método simplex

Considerando ainda que o programa está sob a forma padrão, o método simplex apresentado na seção anterior pode encontrar algumas dificuldades em sua execução. Estas dificuldades são listadas:

1. Empate para a variável que entra na base
2. Empate para a variável que sai da base
3. Inexistência da variável que sai da base
4. Soluções ótimas múltiplas

Estas dificuldades são contornadas pelo método simplex e a maneira com que o método trata cada uma destas dificuldades gera consequências no desempenho de sua execução. As seções seguintes mostram como essas dificuldades podem ser tratadas e as consequências geradas pelo tratamento dessas dificuldades.

2.4.7.1 Empate para a variável que entra na base

O método só entra no passo iterativo se existe coeficiente estritamente negativo na função objetivo. A dificuldade aqui consiste na existência de mais de um coeficiente de mesmo valor mais negativo.

A escolha é arbitrária. Pode acontecer maior ou menor número de iterações do método.

2.4.7.2 Empate para a variável que sai da base - Degeneração

Escolha arbitrária. As consequências são:

1. maior ou menor número de iterações
2. o método simplex pode entrar em ciclos e não parar. Caso entre em ciclos, para evitar os ciclos basta mudar a escolha da variável que sai da base em uma escolha arbitrária.

Exemplo 2.10 :

$$
\begin{array}{lrlrrl}
\max & z & = & 5\,x_1 & +2\,x_2 & \\
\text{sujeito às} & & & x_1 & & \leq 3 \\
\text{restrições} & & & & x_2 & \leq 4 \\
 & & & 4\,x_1 & +3\,x_2 & \leq 12 \\
 & & x_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Exemplo 2.11 : *Beale [4]*

$$
\begin{array}{lrrrrl}
\max & z = 3/4\,x_1 & -\,20\,x_2 & +\,1/2\,x_3 & -\,6\,x_4 & \\
\text{s. a} & 1/4\,x_1 & -\,8\,x_2 & -\,x_3 & +\,9\,x_4 & \leq 0 \\
 & 1/2\,x_1 & -\,12\,x_2 & -\,1/2\,x_3 & +\,3\,x_4 & \leq 0 \\
 & & & x_3 & & \leq 1 \\
 & x_1 \geq 0; & x_2 \geq 0; & x_3 \geq 0; & x_4 \geq 0; &
\end{array}
$$

Ao resolver este problema, o método simplex entra em ciclo em 6 iterações.

2.4.7.3 Inexistência da variável que sai da base

Todos os coeficientes da coluna pivô são negativos ou nulos. Neste caso a função objetivo é ilimitada. Se a função objetivo for de maximização, z pode crescer indefinidamente; se for de minimização, z pode diminuir indefinidamente.

Exemplo 2.12 :

$$
\begin{array}{lrcrrl}
\max & z & = & 3\,x_1 & +5\,x_2 & \\
\text{sujeito às} & & & x_1 & & \leq 4 \\
\text{restrições} & & x_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

2.4.7.4 Soluções ótimas múltiplas

O programa linear possui soluções ótimas múltiplas quando existe coeficientes de variáveis não básicas na função objetivo do último quadro simplex (se esse quadro apresenta uma solução ótima) iguais à *zero*.

Exemplo 2.13 :

$$
\begin{array}{lrcrrl}
\max & z & = & 3\,x_1 & +2\,x_2 & \\
\text{sujeito às} & & & x_1 & & \leq 4 \\
\text{restrições} & & & & x_2 & \leq 12 \\
 & & & 3\,x_1 & +2\,x_2 & \leq 18 \\
 & & x_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

2.4.8 Adaptação para outras formas de modelo

Esta seção apresenta maneiras de se obter um programa linear na forma padrão equivalente à um programa linear original que não está na forma padrão.

2.4.8.1 Função objetivo de minimização

Minimizar uma função é o mesmo que maximizar a mesma função multiplicada por (-1).

Exemplo 2.14 :

$$\min z = 3x_1 + 5x_2$$

é o mesmo que

$$\max(-z) = -3x_1 - 5x_2$$

Neste caso, é a variável $(-z)$ que entra no quadro simplex.

2.4.8.2 Restrição do tipo igualdade

Quando existe uma restrição de igualdade no programa linear, esta restrição não possui variável de folga. Com isto, não é possível identificar uma solução básica inicial para o método simplex iniciar.

Um artifício para contornar esta dificuldade consiste em introduzir uma nova variável, não existente no problema inicial. Esta variável é denominada *variável artificial*. Esta variável é criada para ser a variável básica inicial para o método simplex.

Ao introduzir uma variável artificial ao programa linear, cria-se um novo programa linear, diferente do original, portanto, antes de começar a resolver o problema pelo método simplex é necessário fazer iterações iniciais do método para eliminar essas variáveis artificiais. As seções seguintes apresentam como eliminar as variáveis artificiais.

Exemplo 2.15 *:*

Considere um programa linear que contenha uma restrição do tipo:

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

Neste caso, introduza uma variável artificial $\bar{x}_3 \geq 0$:

$$3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_3 = 18$$

com $\bar{x}_3$ a variável básica inicial para o método simplex.

Note que $\bar{x}_3$ não existe no problema original. Com a introdução de uma variável artificial, utiliza-se o método simplex de duas fases apresentado pelas seções posteriores.

2.4.8.3 Restrição do tipo maior ou igual

Se o lado direito da restrição for negativo, basta então multiplicar a restrição por (-1) e obter uma restrição do tipo menor ou igual, que é uma restrição na forma padrão. Se o lado direito for positivo, o lado esquerdo da inequação possui excesso em relação ao lado direito. Neste caso, subtrai-se uma variável positiva no lado direito. Esta variável é denominada *variável de excesso*. Obtém-se assim uma restrição de igualdade. Observe que não é possível obter uma solução básica inicial para o método simplex iniciar. Faz-se então necessária a introdução de uma outra variável não negativa, uma variável artificial, como na seção anterior.

Exemplo 2.16 *:*

Seja uma restrição do tipo maior ou igual com o lado direito não negativo:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 12$$

introduz-se uma variável $x_3 \geq 0$ de excesso e uma variável $\bar{x}_4 \geq 0$ artificial:

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + \bar{x}_4 = 12$$

$\bar{x}_4$ é a variável básica inicial para o método simplex. Utiliza-se o simplex de duas fases para resolver o problema.

2.4.8.4 Lado direito negativo

Basta multiplicar por (-1). Se esta restrição não ficar na forma padrão, ou seja, do tipo menor ou igual, cai-se num dos casos anteriores: restrição de igualdade ou restrição do tipo maior ou igual.

Exemplo 2.17 *:*

$$3x_1 - 2x_2 \leq -8 \quad \times \ (-1)$$

$$-3x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 + \bar{x}_4 = 8$$

com $x_3 \geq 0$ como variável de excesso e $x\bar{x}_4 \geq 0$ variável artificial. Tem-se $\bar{x}_4$ na base para a solução básica inicial do método simplex.

2.4.8.5 Variáveis com limite inferior negativo

O método simplex não trata variáveis que não são do tipo maior ou igual a *zero*. Quando existe uma variável com um limite inferior negativo ($x_i \geq L_i$, onde $L_i \leq 0$), é necessário substituí-la por uma outra variável positiva. A transformação desta variável é feita:

$$x_i \geq L_i \Rightarrow x_i - L_i \geq 0$$

cria-se então

$$x'_i = x_i - L_i \Rightarrow x'_i \geq 0 \text{ e } x_i = x'_i + L_i$$

substitui-se então x_i por $x'_i + L_i$ em todo o programa. Aplica-se o método simplex para calcular o valor de x'_i na solução ótima e calcula-se o valor de $x_i = x'_i - L_i$. Observe que L_i é negativo.

Exemplo 2.18 *:*

$$x_i \geq -8 \Rightarrow x_i + 8 \geq 0$$

cria-se

$$x'_i = x_i + 8 \Rightarrow x'_i \geq 0 \text{ e } x_i = x'_i - 8$$

e substitui-se em todo o modelo x_i por $x'_i - 8$.

2.4.8.6 Variáveis no conjunto dos reais

Em condições semelhantes à anterior, na qual o método simplex não sabe tratar variáveis negativas, também não trata com variáveis reais. A transformação aqui consiste em criar duas novas variáveis. Se $x_i \in I\!R$ cria-se $x'_i \geq 0$ e $x''_i \geq 0$ tais que

$$x_i = x'_i - x''_i$$

e substitui-se x_i por $x'_i - x''_i$. Aplica-se o método simplex para resolver o programa linear com x'_i e x''_i, obtém-se a solução ótima e calcula-se o valor de x_i.

2.4.9 Eliminação das variáveis artificiais - Método Simplex de Duas Fases

O método simplex de duas fases é aplicado quando é necessária a introdução de variáveis artificiais para se obter uma solução básica inicial, isto é, quando o programa linear possui restrições de igualdade ou do tipo maior ou igual. A primeira fase do método consiste em eliminar as variáveis artificiais. Uma vez eliminadas as variáveis artificiais, o quadro simplex passa a representar o problema original e, então, inicia-se a segunda fase. A segunda fase consiste assim na otimização do problema original.

Uma operacionalização da eliminação das variáveis artificiais consiste na criação de uma *função objetivo artificial* igual a soma de todas as variáveis artificiais, ou seja, cria-se

$$w = \sum \bar{x}_i$$

O objetivo inicial da primeira fase do método passa-se então a ser *minimizar* w.

Ao aplicar o método simplex para resolver o programa linear em $\min w$, pode se obter dois tipos de soluções ótimas em $\min w$:

1. $w = 0$: neste caso, a soma de todas as variáveis artificiais é igual a *zero*. Como, por definição, todas as variáveis artificiais são maiores ou iguais a *zero*, implica então que todas as variáveis artificiais na solução básica obtida são iguais a *zero*, ou seja, todas as variáveis artificiais foram eliminadas. O quadro simplex mostra então uma primeira solução básica viável para o programa original. Apaga-se do quadro a função objetivo artificial e todas as variáveis artificiais para iniciar a segunda fase do método simplex: obtenção da solução ótima para a função objetivo original do programa.

2. $w > 0$: neste caso, alguma(s) variável(is) artificial(is) é(são) diferente(s) de *zero* na solução ótima do problema, isso implica que ela(s) não pode(m) ser eliminada(s). Isto acontece quando o problema original não possui solução viável, ou seja, *o problema original não possui solução.*

Em resumo, o método simplex de duas fases consiste então:

- **Primeira Fase**: Eliminação das variáveis artificiais pela criação da função objetivo artificial

$$\min w = \sum \bar{x}$$

  No ótimo da função objetivo artificial, duas situações podem ocorrer:

  1. $w = 0$: neste caso, o quadro simplex mostra uma solução básica viável para o problema original. Passa-se então para a segunda fase do método simplex
  2. $w \geq 0$: neste caso, alguma variável artificial assume um valor positivo, assim não se chegou à região de viabilidade do problema original, isso porque esta região é vazia. Ou seja, o problema original não possui solução viável.

- **Segunda Fase**: Otimização da função objetivo original do problema. Elimina-se do quadro simplex as variáveis artificiais e a função objetivo artificial (apaga simplesmente do quadro) e continue as iterações do simplex normalmente.

2.4.10 Resumo dos tipos de soluções de um Programa Linear

1. **Solução ótima única**: quando o último quadro simplex mostrar uma solução ótima e todos os coeficientes das variáveis não básicas na função objetivo mostrada no quadro forem diferentes de zero
2. **Soluções ótimas múltiplas**: quando o último quadro simplex mostrar uma solução ótima e ao menos um coeficitente de variável não básica na função objetivo do quadro for igual a zero. Para obter uma outra solução básica ótima basta forçar uma variável não básica de coeficiente zero na f. o. a entrar na base. Observa-se que uma combinação linear de duas ou mais soluções ótimas, também é ótima. Assim, quando um programa linear possui soluções ótimas múltiplas ele possui infinitas soluções ótimas
3. **Função objetivo ilimitada**: quando não existe variável básica para sair da base, ou seja, todos os coeficientes da coluna pivô são ou zeros ou negativos
4. **Inexistencia de solução**: quando não é possível eliminar todas as variáveis artificiais.

2.5 Um exemplo resolvido pelo Simplex

2.5.1 Problema

$$\begin{array}{lcccccr}
\text{max} & z & = & 5\,x_1 & +2\,x_2 & & (0) \\
\text{sujeito às} & & & x_1 & & \leq 3 & (1) \\
\text{retrições} & & & & x_2 & \leq 4 & (2) \\
& & & x_1 & +2\,x_2 & \geq 9 & (3) \\
& x_1 \in I\!R & (4) & & x_2 & \geq -3 & (5)
\end{array}$$

Tabela 2.1: Programa linear

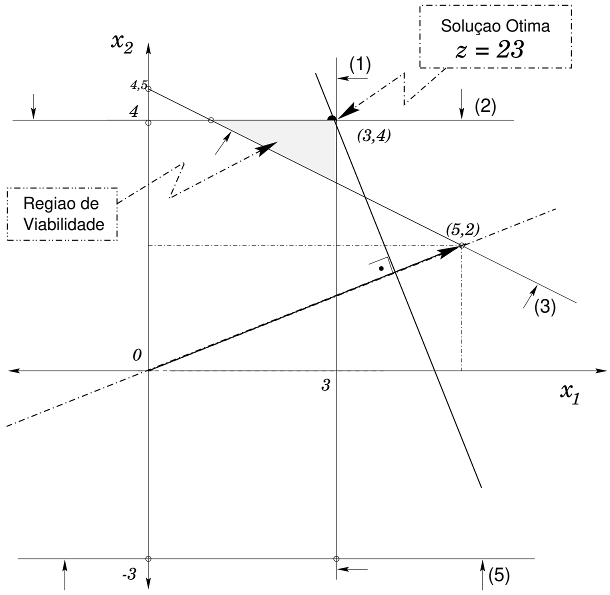


Figura 2.4: Solução Gráfica

2.5.2 Resolução gráfica

2.5.3 Solução pelo Simplex

1. **Estudo das equações**

   (a) **função objetivo**

   $$\max z = 5x_1 + 2x_2 \quad \Longrightarrow \quad z - 5x_1 - 2x_2 = 0$$

   (b) **Estudo da restrição (1)**

   $$x_1 \leq 3$$

   introduzir a variável de folga $x_3 \geq 0$:

   $$x_1 + x_3 = 3$$

   (c) **Estudo da restrição (2)**

   $$x_2 \leq 4$$

   introduzir a variável de folga $x_4 \geq 0$:

   $$x_2 + x_4 = 4$$

   (d) **Estudo da restrição (3)**

   $$x_1 + 2x_2 \geq 9$$

   introduzir a variável de excesso $x_5 \geq 0$:

   $$x_1 + 2x_2 - x_5 = 9$$

   introduzir a variável artificial $\bar{x}_6 \geq 0$:

   $$x_1 + 2x_2 - x_5 + \bar{x}_6 = 9$$

   (e) **Estudo da restrição (4)**

   $$x_1 \in I\!R$$

   criar as variáveis $x_1' \geq 0$ e $x_1'' \geq 0$ e substituir em todo o modelo:

   $$x_1 = x_1' - x_1''$$

(f) **Estudo da restrição (5)**

$$x_2 \geq -3$$

criar a variável $x_2' \geq 0$ tal que $x_2' = x_2 + 3$ e substituir em todo o modelo:

$$x_2 = x_2' - 3$$

2. **Criação da função objetivo artificial** Cria-se a função objetivo artificial:

$$\min w = \bar{x}_6; \implies w - \bar{x}_6 = 0 \quad (0')$$

função do tipo $\min \implies$ multiplicar por (-1) para transformá-la para tipo $\max$:

$$\max(-w) = -\bar{x}_6; \implies (-w) + \bar{x}_6 = 0 \quad (0')$$

3. **Reescritura do problema**

$$\begin{array}{lllllllllll}
(-w) & & & & & & & + \bar{x}_6 & = & 0 & L_{0'} \\
z & - 5\,x_1' & + 5\,x_1'' & - 2\,x_2' & & & & & = & -6 & L_0 \\
 & x_1' & - x_1'' & & + x_3 & & & & = & 3 & L_1 \\
 & & & x_2' & & + x_4 & & & = & 7 & L_2 \\
 & x_1' & - x_1'' & + 2\,x_2' & & & - x_5 & + \bar{x}_6 & = & 15 & L_3
\end{array}$$

$$x_i \geq 0 \;\forall\; i \;=\; 1, \;\ldots, \;6$$

Tabela 2.2: Reescritura do problema

4. **Eliminação da variável básica $\bar{x}_6$ da função objetivo artificial** Fazer

$$L_{0'} := L_{0'} - L_3;$$

e construir o *Quadro* 0 do Simplex.

5. *Quadro* 0 **do Simplex** Solução básica inicial :

base	$(-w)$	z	x_1'	x_1''	x_2'	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	L. D.	
	1	0	- 1	1	- 2	0	0	1	0	- 15	$L_{0'}$
	0	1	- 5	5	- 2	0	0	0	0	- 6	L_0
x_3	0	0	1	- 1	0	1	0	0	0	3	L_1
x_4	0	0	0	0	1	0	1	0	0	7	L_2
$\bar{x}_6$	0	0	1	- 1	2	0	0	- 1	1	15	L_3

Tabela 2.3: Quadro inicial do simplex

variáveis básicas	variáveis não-básicas	
$x_3 = 3$	$x_1' = 0$	$w = 15$
$x_4 = 7$	$x_1'' = 0$	$z = -6$
$\bar{x}_6 = 15$	$x_2' = 0$	
	$x_5 = 0$	

6. **Primeira iteração do Simplex**

- variável não-básica que entra na base: $x_2' \implies$ é a "mais negativa" em $L_{0'} \implies$ coluna pivô

- variável básica que sai da base: é aquela obtida pelo menor quociente da divisão do lado direito pelo respectivo coeficiente (se estritamente positivo) da coluna pivô:

$$\min\{(7/1),(15/2)\} \quad \Longrightarrow \quad x_4$$

- operações de linha:

$$\begin{aligned} L'_{0'} &= L_{0'} + 2L_2 \\ L'_0 &= L_0 + 2L_2 \\ L'_1 &= L_1 \\ L'_2 &= L_2 \\ L'_3 &= L_3 - 2L_2 \end{aligned}$$

- *quadro* 1 do simplex:

base	$(-w)$	z	x'_1	x''_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	L. D.	
	1	0	- 1	1	0	0	2	1	0	- 1	$L'_{0'}$
	0	1	- 5	5	0	0	2	0	0	8	L'_0
x_3	0	0	1	- 1	0	1	0	0	0	3	L'_1
x'_2	0	0	0	0	1	0	1	0	0	7	L'_2
$\bar{x}_6$	0	0	1	- 1	0	0	- 2	- 1	1	1	L'_3

- Solução básica :

variáveis básicas	variáveis não-básicas	
$x_3 = 3$	$x'_1 = 0$	$w = 1$
$x'_2 = 7$	$x''_1 = 0$	$z = 8$
$\bar{x}_6 = 1$	$x_4 = 0$	
	$x_5 = 0$	

7. **Segunda iteração**

- variável não-básica que entra na base : x'_1
- variável básica que sai da base: $\min\{(3/1),(1/1)\} \quad \Longrightarrow \quad \bar{x}_6$
- operações de linha:

$$\begin{aligned} L''_{0'} &= L'_{0'} + L'_3 \\ L''_0 &= L'_0 + 5L'_3 \\ L''_1 &= L'_1 - L'_3 \\ L''_2 &= L'_2 \\ L''_3 &= L'_3 \end{aligned}$$

- *quadro* 2 do simplex :

base	$(-w)$	z	x'_1	x''_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	L. D.	
	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$L''_{0'}$
	0	1	0	0	0	0	- 8	- 5	5	13	L''_0
x_3	0	0	0	0	0	1	2	1	- 1	2	L''_1
x'_2	0	0	0	0	1	0	1	0	0	7	L''_2
x'_1	0	0	1	- 1	0	0	- 2	- 1	1	1	L''_3

- Solução básica :

variáveis básicas	variáveis não-básicas	
$x_3 = 2$	$x''_1 = 0$	$w = 0$
$x'_2 = 7$	$x_4 = 0$	$z = 16$
$x'_1 = 1$	$x_5 = 0$	
	$\bar{x}_6 = 0$	

Observa-se nesta solução básica que a função objetivo artificial é igual à zero, e a variável artificial também vale zero. Logo, este quadro mostra a primeira solução básica para o problema original. Tanto a função objetivo artificial quanto a variável artificial podem ser eliminadas do quadro simplex. As próximas iterações serão feitas sobre a função objetivo original do problema.

8. **Terceira iteração**

- variável não-básica que entra na base : x_4
- variável básica que sai da base: $\min\{(2/2),(7/1)\} \implies x_3$
- operações de linha:

$$\begin{aligned}L_0''' &= L_0'' + 4L_1''\\ L_1''' &= 1/2L_1''\\ L_2''' &= L_2'' - 1/2L_1''\\ L_3''' &= L_3'' + L_1''\end{aligned}$$

- *quadro* 3 do simplex :

base	z	x_1'	x_1''	x_2'	x_3	x_4	x_5	L. D.	
	1	0	0	0	4	0	- 1	21	L_0'''
x_4	0	0	0	0	1/2	1	1/2	1	L_1'''
x_2'	0	0	0	1	-1/2	0	-1/2	6	L_2'''
x_1'	0	1	- 1	0	1	0	0	3	L_3'''

- Solução básica :

variáveis básicas	variáveis não-básicas	
$x_4 = 1$	$x_1'' = 0$	$z = 21$
$x_2' = 6$	$x_3 = 0$	
$x_1' = 3$	$x_5 = 0$	

9. **Quarta iteração**

- variável não-básica que entra na base : x_5
- variável básica que sai da base: $\min\{(1/(1/2))\} \implies x_4$
- operações de linha:

$$\begin{aligned}L_0'''' &= L_0''' + 2L_1'''\\ L_1'''' &= 2L_1'''\\ L_2'''' &= L_2''' + L_1'''\\ L_3'''' &= L_3'''\end{aligned}$$

- *quadro* 3 do simplex :

base	z	x_1'	x_1''	x_2'	x_3	x_4	x_5	L. D.	
	1	0	0	0	5	2	0	23	L_0''''
x_5	0	0	0	0	1	2	1	2	L_1''''
x_2'	0	0	0	1	0	1	0	7	L_2''''
x_1'	0	1	- 1	0	1	0	0	3	L_3''''

- Solução básica :

variáveis básicas	variáveis não-básicas	
$x_5 = 2$	$x_1'' = 0$	$z = 23$
$x_2' = 7$	$x_3 = 0$	
$x_1' = 3$	$x_4 = 0$	

$\Longrightarrow$ **Solução ótima**

Logo

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 4 \quad z = 23$$

2.6 Exercícios

2.6.1 Exercício resolvido

$$\begin{array}{lccccrl}
\max & z & = & 3\,x_1 & +5\,x_2 & & (0) \\
\text{sujeito às} & & & x_1 & & \leq 4 & (1.1) \\
\text{restrições} & & & & 2\,x_2 & \leq 12 & (1.2) \\
 & & & 3\,x_1 & +2\,x_2 & \leq 18 & (1.3) \\
 & x_1 \geq 0 & (2.1) & & & x_2 \geq 0 & (2.2)
\end{array}$$

A solução ótima do exemplo 2.1 é o vetor $x^T = [2, 6]$, ou seja, $x_1 = 2$ e $x_2 = 6$, que fornece o valor máximo para a função objetivo, com $z = 36$. As seções seguintes apresentam maneiras de determinar esta solução.

a resolução gráfica deste problema é mostrada pela figura 4.13.

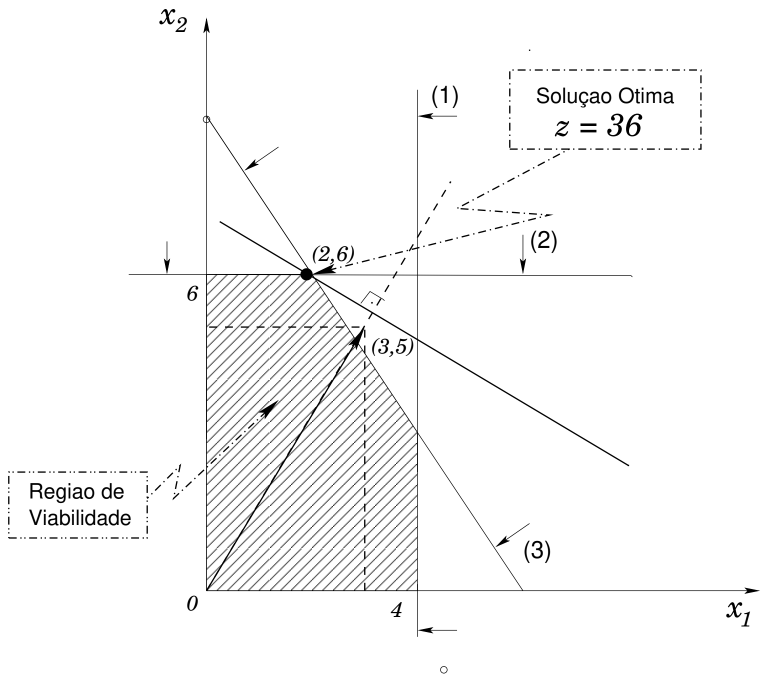


Figura 2.5: Solução Gráfica do exemplo 2.1

Seja o exemplo 2.1:

$$\begin{array}{lccccrl}
\max & z & = & 3\,x_1 & +5\,x_2 & & (0) \\
\text{sujeito às} & & & x_1 & & \leq 4 & (1.1) \\
\text{restrições} & & & & 2\,x_2 & \leq 12 & (1.2) \\
 & & & 3\,x_1 & +2\,x_2 & \leq 18 & (1.3) \\
 & x_1 \geq 0 & (2.1) & & & x_2 \geq 0 & (2.2)
\end{array}$$

Cuja solução gráfica foi apresentado pela seção 2.3. A figura 2.6 reproduz a solução gráfica para o programa linear. Esta figura é utilizada para acompanhar a resolução do problema.

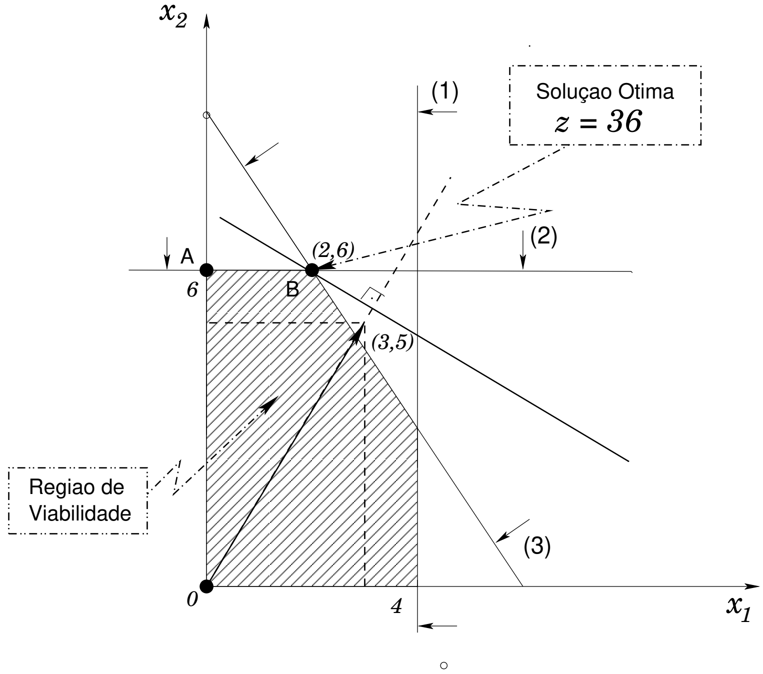


Figura 2.6: Solução Gráfica × Método Simplex

Fica subentendido que a função objetivo é de maximização e todas as variáveis são não negativas. Como todas as restrição são do tipo menor ou igual, introduz-se uma nova variável, também não negativa, em cada restrição para torná-la do tipo iqualdade. Reescrevendo então o programa linear com essas considerações, obtém-se o sistema:

$$\begin{aligned} z - 3x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 0 \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 4 \\ 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 18 \end{aligned}$$

com $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ e $x_5 \geq 0$, ou seja, todas as variáveis do problema são do tipo maior ou igual. Estas novas variáveis representam a folga do lado esquerdo das inequações originais com relação ao seus lados direitos, por isso são denominadas *variáveis de folga*.

O sistema escrito desta maneira, apresenta uma primeira solução básica viável, com as variáveis não básicas $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, e as variáveis básicas $x_3 = 4$, $x_4 = 12$ e $x_5 = 18$, ou seja, as variáveis originais do problema são não básicas (iguais a *zero*) e as variáveis de folga iguais aos respectivos lados direitos, sendo elas as variáveis básicas. Nesta solução a função objetivo é igual a *zero* ($z = 0$).

Note que o sistema apresenta uma estrutura tal que pode ser melhor visualizada através de um quadro (quadro simplex) onde as colunas representam os coeficientes das variáveis que estão no topo da coluna:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
	1	- 3	- 5	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	2	0	1	0	12
x_5	0	3	2	0	0	1	18

A solução apresentada neste quadro é: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 12$, $x_5 = 18$ e $z = 0$. Note na resolução gráfica que esta solução representa o ponto $(0,0)$ no gráfico.

Observa-se que as variáveis não básicas $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ possuem coeficientes negativos na função objetivo, isto implica que, se elas assumirem um valor positivo, maior que *zero*, o valor da função objetivo aumenta. Ainda, como a variável x_2 possui o coeficiente mais negativo na função objetivo, se o seu valor aumentar (sair de *zero* para um valor positivo), a função objetivo deve aumentar mais rápido, em relação à variável x_1. Com isto, pode-se pensar que existi uma outra solução básica melhor que a atual solução mostrada no quadro acima. Deve-se então procurar uma outra solução básica melhor que esta.

A operacionalização da busca de uma nova solução consiste em criar um novo quadro com as mesmas características do quadro acima, ou seja:

1. deve existir uma sub-matriz identidade na matriz A para que se possa identificar diretamente no quadro uma solução
2. a função objetivo deverá ser escrita em função das variáveis que compõem a matriz identidade
3. mostrar um sistema de equações equivalente ao apresentado no quadro anterior, isto é, que possua o mesmo conjunto de soluções.

Para se construir um quadro com as características acima, basta identificar a variável nula da solução anterior que, ao se tornar positiva, contribuirá para que a função objetivo mais cresça. Esta variável é aquela que possui o coeficiente mais negativo na função objetivo do atual quadro, que, no caso, é x_2. Prudentemente, somente o valor de x_2 deverá aumentar, deixa-se, por instante o valor de x_1 inalterado, ou seja, x_1 continua sendo nula. Numa próxima etapa estuda-se o valor de x_1.

Deve-se determinar agora qual é o maior valor que x_2 pode assumir. Este valor é determinado pelas equações do problema. Mesmo que x_2 assuma um valor positivo, as restrições do problema devem ser satisfeitas. Se uma variável muda de valor, para que o quadro continue apresentando uma solução do programa linear, o valor para as outras variáveis poderá também mudar de valor. Estuda-se então as equações do sistema e deve-se aumentar o valor de x_2 num limite no qual a solução mostrada no quadro continue sendo viável.

Observa-se agora o que acontece com as equações do sistema quando o valor da variável x_2 aumenta e x_1 continua nula.

1. *equação 1*:
$$1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 4,$$
como o coeficiente de x_2 é nulo nesta equação, o valor de x_2 pode aumentar para o infinito que a equação continua sendo satisfeita. Então, por essa equação, não existe um limite superior para o valor de x_2;
2. *equação 2*:
$$0x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 12;$$
como dito acima, por instante o valor de x_1 não deve mudar, isto é, x_1 deve continuar sendo nula. Se o valor de x_2 aumentar e como os coeficientes de x_3 e x_5 são nulos, o valor de x_4 deve diminuir para que a equação continue sendo válida. Um valor limite para x_2 nesta equação é determinado então em função do valor de x_4: o menor valor que x_4 pode assumir é *zero*, tem-se então o maior valor para x_2 é $12/2 = 6$. Assim:
$$0x_1 + 2x_2(\uparrow^6) + 0x_3 + 1x_4(\downarrow_0) + 0x_5 = 12,$$
com o valor limite $x_2 = 6$ e, consequentimente, o valor de $x_4 = 0$. Estes seriam os novos valores destas variáveis, os valores de x_1, x_3 e x_5 continuariam inalterados e a equação continuaria válida.
3. *equação 3*:
$$3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 18,$$
o valor de x_1 deve continuar nulo, o valor de x_2 deve aumentar, como os coeficientes de x_3 e x_4 são nulos nesta equação, então o valor de x_5 deve diminuir. O menor valor que x_5 pode assumir para que o sistema de equações continue viável é *zero*, logo, o maior valor que x_2 pode assumir nesta equação é $18/2 = 9$, assim:
$$3x_1 + 2x_2(\uparrow^9) + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5(\downarrow_0) = 18.$$

Por essa equação, $x_2 = 9$ e $x_5 = 0$ são os novos valores, os valores de x_1, x_3 e x_4 continuam inalterados e a equação continua válida.

Com o estudo acima, conclui-se que o para o sistema de equações continuar sendo satisfeito quando o valor de x_1 continuar nulo, o maior valor que x_2 pode assumir é 6, determinado pela segunda equação.

É importante destacar que no sistema construído de maneira que exista uma submatriz identidade na matriz A e a função objetivo escrita em função das outras variáveis que não são as colunas da matriz identidade, cada equação apresenta somente uma variável que deve-se diminuir para determinar o valor máximo que uma variável nula da atual solução deve assumir.

A operacionalização da construção de um novo quadro pode ser simplificada se utilizarmos uma notação apropriada no quadro acima. Ao considerar:

1. nomeação de cada linha do quadro:
   (a) função objetivo: L_0,
   (b) qualquer equação i: L_i,
2. o destaque da variável que deixar de ser nula,
3. o cálculo da variável que assume o valor nulo: dado pela divisão do lado direito pelo respectivo coeficiente da coluna da variável que deixa de ser nula,

pode-se reescrever o quadro anterior como:

base	z	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	LD			
	1	- 3	- 5	0	0	0	0	L_0		
x_3	0	1	0	1	0	0	4	L_1		
x_4	0	0	2	0	1	0	12	L_2	$12/2 = 6$	$\leftarrow$
x_5	0	3	2	0	0	1	18	L_3	$18/2 = 9$	

Para construir então um novo quadro que apresente uma nova solução do problema basta fazer operações de linhas na matriz de maneira que a função objetivo continue sendo escrita em função das variáveis nulas e que a matriz A continue com uma submatriz identidade de tal maneira que se possa obter diretamente no quadro, a nova solução encontrada para o problema.

Para manter a matriz identidade, basta garantir as operações de linhas de maneira que as colunas das outras variáveis, não aquela que se anula, continuem sendo as mesmas e a coluna da variável que está agora assumindo um valor não nulo, deverá compor a matriz identidade. Isto é feito escrevendo as novas linhas da matriz em função dela mesma (para manter a própria informação no sistema) e da linha referente a variável que está se anulando. No exemplo, as colunas da matriz referente às variáveis x_3 e x_5 não se alteram; a coluna referente a x_2 passa a compor a matriz identidade; para isso basta escrever as linhas da nova matriz em função da linha referente a x_4.

Este novo quadro é mostrado abaixo, onde as operações de linhas para obtê-la são indicadas à direita do quadro (por exemplo $L_0' = L_0 + 5L_2'$). Este quadro também adianta as indicações para melhorar ainda mais a função objetivo.

base	z	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	LD			
	1	- 3	0	0	5/2	0	30	$L_0' = L_0 + 5L_2'$		
x_3	0	1	0	1	0	0	4	$L_1' = L_1$	$4/1 = 4$	
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6	$L_2' = L_2/2$		
x_5	0	3	0	0	-1	1	6	$L_3' = L_3 - L_2$	$6/3 = 2$	$\leftarrow$

A solução apresentada neste quadro é: $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$, $x_5 = 6$ e $z = 30$. Esta solução coresponde ao ponto A da resolução gráfica.

Esta solução não é uma solução ótima do problema, pois se o valor de x_3 aumentar, a função objetivo também aumenta. Utilizando a mesma seqüência de raciocínio, pode-se construir um novo quadro.

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD	
	1	0	0	0	3/2	1	36	$L''_0 = L'_0 + L'_3$
x_3	0	0	0	1	1/3	-1/3	2	$L''_1 = L'_1 - L''_3$
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6	$L''_2 = L'_2$
x_1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2	$L''_3 = L'_3/3$

A solução apresentada neste quadro é: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ e $z = 36$. Esta solução é uma solução ótima do problema.

2.6.2 Resolução gráfica I

Resolva os programas lineares abaixo pela resolução gráfica.

1. programa linear 1

$$\begin{array}{lcclll}
\max & z & = & 2\,x_1 & +3\,x_2 & & (0) \\
\text{sujeito às} & & & x_1 & +2\,x_2 & \leq 10 & (1) \\
\text{restrições} & & & 3\,x_1 & +\,x_2 & \leq 15 & (2) \\
& & & & x_2 & \leq 4 & (3) \\
& & x_1 \geq 0 & & & x_2 \geq 0 &
\end{array}$$

2. programa linear 2

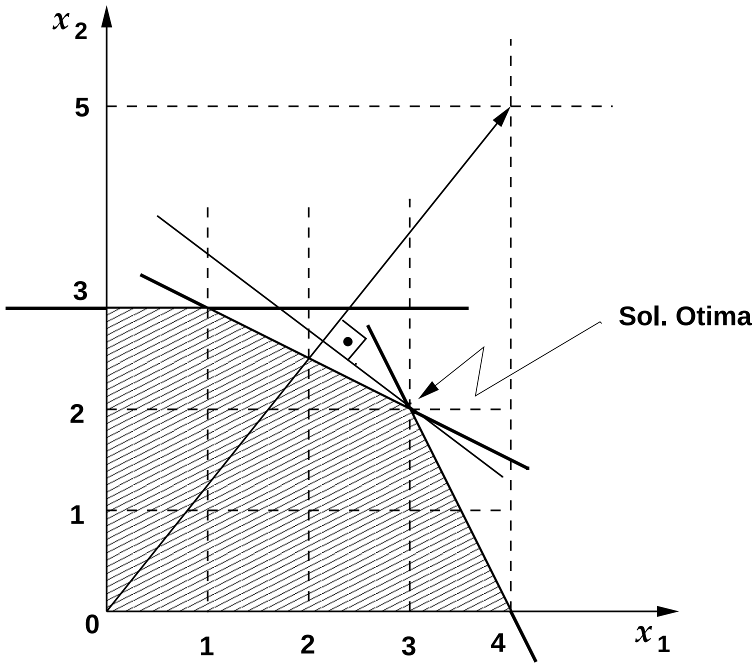
$$\begin{array}{lcclll}
\max & z & = & 10\,x_1 & +20\,x_2 & & (0) \\
\text{sujeito às} & & & -x_1 & +2\,x_2 & \leq 10 & (1) \\
\text{restrições} & & & x_1 & +\,x_2 & \leq 8 & (2) \\
& & & 5x_1 & +3x_2 & \leq 30 & (3) \\
& & x_1 \geq 0 & & & x_2 \geq 0 &
\end{array}$$

3. programa linear 3

$$\begin{array}{lcclll}
\max & z & = & x_1 & -2\,x_2 & & (0) \\
\text{sujeito às} & & & x_1 & +\,x_2 & \geq 2 & (1) \\
\text{restrições} & & & -x_1 & +\,x_2 & \geq 1 & (2) \\
& & & & 2x_2 & \leq 3 & (3) \\
& & x_1 \geq -3 & & & x_2 \in I\!R &
\end{array}$$

item programa linear 4

$$\begin{array}{lcclll}
\max & z & = & 5\,x_1 & +2\,x_2 & & (0) \\
\text{sujeito às} & & & x_1 & & \leq 3 & (1.1) \\
\text{retrições} & & & & 2\,x_2 & \leq 8 & (1.2) \\
& & & x_1 & +2\,x_2 & \leq 9 & (1.3) \\
& & x_1 \geq 0 & (2.1) & & x_2 \geq 0 & (2.2)
\end{array}$$



2.6.3 Solução gráfica II

Seja a solução gráfica de um problema de programação linear : Escreva a função objetivo e as restrições do problema que geraram essa solução gráfica.

2.6.4 Solução gráfica III

(Arenales *et al.*)

Considere o seguinte problema:

$$
\begin{array}{lcrrrl}
\min & z = & -x_1 & -x_2 & & (0) \\
\text{sujeito às} & & -x_1 & +x_2 & \leq 2 & (1.1) \\
\text{retrições} & & 2\,x_1 & -x_2 & \leq 6 & (1.2) \\
& x_1 \geq 0 & (2.1) & & x_2 \geq 0 & (2.2)
\end{array}
$$

1. Resolva o problema graficamente
2. A solução $x_1 = x_2 = 0$ é um vértice da região de viabilidade? Identifique todos os vértices da região de viabilidade
3. Desenhe as soluções $x = (1,\ 1)$ e $x = (5,\ 1)$. Essas soluções são viáveis? Responda verificando que: (i) pertence à região de viabilidade no gráfico; e (ii) satifazem as restrições;
4. Qual é a solução ótima se a função objetivo for $\max\ z\ =\ x_1\ +\ x_2$?
5. Considere agora a função objetivo: $\min\ z\ =\ x_1\ -\ x_2$. Verifique se a solução ótima obtida no item $(1.)$ acima também é ótima com esta nova função objetivo. Existem soluções ótimas múltiplas? Identifique no gráfica;
6. Suponha que a função objetivo seja $\min\ z\ =\ (-1+\delta)x_1\ -\ x_2$. Desenhe num gráfico os coeficientes da função objetivo para diferentes valores de δ. Para que valores de δ a solução ótima encontrada no item $(1.)$ permanece ótima?
7. Construa o quadro inicial do simplex para esse problema.

2.6.5 Sistema de equações lineares

Sejam os dois sistemas de equações lineares abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & +\,x_3 & & & = & 4 \\ & 2\,x_2 & & +x_4 & & = & 12 \\ 3\,x_1 & +2\,x_2 & & & +x_5 & = & 18 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{ccccccc} 2\,x_1 & & +\,x_3 & & & = & 12 \\ & x_2 & & +x_4 & & = & 8 \\ 4\,x_1 & +3\,x_2 & & & +x_5 & = & 36 \end{array}$$

Utilizando da expressão $Ix_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$, para cada um desses sistemas, faça:

1. calcule os valores das variáveis x_3, x_4 x_5 em função das variáveis x_1 e x_2;
2. calcule os valores das variáveis x_1, x_2 x_3 em função das variáveis x_4 e x_5.

2.6.6 Iteração Simplex - Forma padrão

Seja o quadro simplex de uma iteração qualquer de um problema de programação linear:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	L. D.	
	1	- 3	0	0	5/2	0	30	L_0
x_3	0	1	0	1	0	0	4	L_1
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6	L_2
x_5	0	3	0	0	- 1	1	6	L_3

1. Qual é a solução básica mostrada nesse quadro ?
2. Esta solução é ótima? Por que?
3. Se ela não é ótima, faça uma iteração do simplex.

2.6.7 Iteração Simplex - Forma qualquer

Construa o quadro inicial do simplex do problema:

$$\begin{array}{lcccccl} \max & z & = & 2\,x_1 & +3\,x_2 & & (0) \\ \text{sujeito às} & & & x_1 & +2\,x_2 & \leq 10 & (1) \\ \text{retrições} & & & 3\,x_1 & +\,x_2 & \leq 15 & (2) \\ & & & & x_2 & \geq 4 & (3) \\ & x_1 \in I\!R & & & x_2 \geq -2 & & \end{array}$$

2.6.8 Modelo na forma padrão

- Construa o quadro inicial do simplex do problema do exercício anterior.
- Mostre a solução básica inicial mostrada no quadro.

2.6.9 Simplex de duas fases

Seja o problema de programação linear:

$$
\begin{array}{lllll}
\max & z = & c_1\, x_1 & +c_2\, x_2 & & (0) \\
\text{sujeito às} & & a_{11}\, x_1 & +a_{12}\, x_2 & \leq b_1 & (1.1) \\
\text{retrições} & & a_{21}\, x_1 & +a_{22}\, x_2 & = b_2 & (1.2) \\
 & & a_{31}\, x_1 & +a_{32}\, x_2 & \geq b_3 & (1.3) \\
 & x_1 \geq -d & (2.1) & & x_2 \in R & (2.2)
\end{array}
$$

com $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$, $b_3 \geq 0$ e $d \geq 0$. Construa o quadro inicial do simplex para esse problema.

2.6.10 Resolução pelo método simplex

Utilizando o método simples, resolva os programas lineares do exercício ??.

2.6.11 Identificação de tipos de soluções

(Goldbarg e Luna)

Seja o quadro simplex:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	1	b	d	1	0	f	0	40
x_2	0	c	1	0	e	2	g	4
x_4	0	5	0	- 1	1	- 1	0	1
x_6	0	2	0	0	0	3	1	a

Determine valores para os parâmetros livres (a, b, c, d, e, f e g) no quadro de modo que:

1. O quadro apresente uma solução ótima única;
2. a solução no quadro seja ótima, mas existe pelo menos uma outra solução ótima;
3. A solução seja inviável;
4. A solução seja viável mas ilimitada;
5. O quadro apresente uma solução viável que pode ser melhorada pela entrada de x_1 na base e a saída de x_6.

2.6.12 Conceitos

2.6.12.1 Tipos de soluções

Descreva como identificar no quadro final do simplex os tipos de soluções de um problema.

1. Solução ótima única.
2. Soluções ótimas múltiplas.
3. Problema ilimitado
4. Problema sem solução

2.6.12.2 Iteração do simplex

Seja o quadro a baixo que poderia ser de uma iteração qualquer de um problema de programação linear:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
	1	c_1	0	0	c_4	0	b_0
x_3	0	a_{11}	0	1	0	0	b_1
x_2	0	0	1	0	a_{24}	0	b_2
x_5	0	a_{31}	0	0	a_{34}	1	b_3

Considere os dados: $c_1 < 0$, $c_4 > 0$, $a_{11} > 0$, $a_{31} > 0$, $a_{24} > 0$, $a_{34} > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ $b_3 > 0$ e ainda, $a_{31} > a_{11}$ e $b_1 > b_3$.

- Este quadro é um quadro simplex? Por que?
- Se for um quadro simplex, qual é a solução básica mostrada? Esta solução é ótima? Por que?
- Se o quadro acima for um quadro simplex e a solução básica mostrada não for ótima, faça uma iteração do simplex.

Capítulo 3

O problema do transporte

3.1 Introdução

Considere uma empresa que possui m fábricas e produz um único produto. A capacidade de produção de cada fábrica i é conhecida e é dada por a_i. A empresa deve abastecer n armazéns. Cada armazém j possui uma demanda b_j conhecida. O custo unitário de transporte (custo por unidade de produto) da fábrica i ao armazém j é conhecido e dado por c_{ij}. O problema do transporte consiste em determinar a quantidade de produto que cada fábrica deve enviar para cada armazém de maneira que o custo total de transporte seja mínimo.

Embora esta situação seja talvez um tanto simplificada se comparada a uma situação real de transporte de uma empresa, estuda-se aqui este problema por três motivos:

1. este problema representa uma situação básica de transporte e seu modelo de programação linear pode servir como base para a modelagem de outras situação de transporte;
2. este problema pode ser modelado pela programação linear, portanto, ele pode ser resolvido pelo método simplex. Entretanto, a matriz de coeficientes A do problema do transporte, possui características um tanto especiais: ela é esparsa, isto é, muitos de seus elementos são nulos; os coeficientes não nulos de A são iguais à unidade. Assim, utilizando-se destas características especiais, pode-se reescrever o algoritmo simplex especialmente para o problema do transporte, mais rápido e mais econômico computacionalmente (menos memória do computador) que o simplex normal;
3. mostrar ao leitor que se pode construir um método específico de resolução de um problema, inspirado em um outro método já existente. Espera-se com isto, inspirar o leitor à construção de métodos exatos na resolução de problemas.

A figura 3.1 esquematiza o problema do transporte.

3.2 Definição do problema

3.2.1 Dados

- m: origens i
- n: destinos j
- a_i: oferta da origem i
- b_j: demanda do destino j

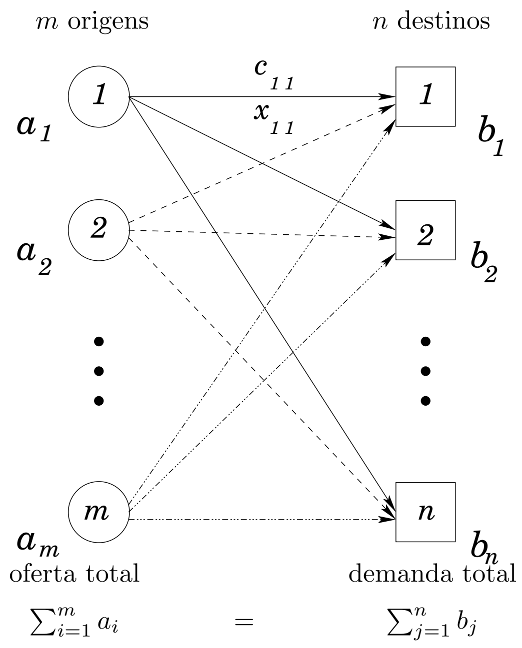


Figura 3.1: O problema do transporte

- c_{ij}: custo para transportar uma unidade do produto da origem i ao destino j
- Condição necessária para utilizar o algoritmo do transporte: oferta total = demanda total, isto é,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

em seções posteriores serão estudados como se proceder quando o problema não satisfizer esta condição necessária.

3.2.2 Variáveis de decisão

As variáveis de decisão são definidas:

- x_{ij}: quantidade de produto que a origem i deve enviar ao destino j.

3.2.3 O modelo do transporte

O modelo de programação linear para o problema do transporte é dado abaixo.

$$
\begin{array}{lllr}
\min & z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & & \\
\text{s. a} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & \forall\ i = 1, 2, \ldots, m & (I) \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i & \forall\ j = 1, 2, \ldots, n & (II) \\
& x_{ij} \geq 0 & \forall\ i = 1, 2, \ldots, m;\ \forall\ j = 1, 2, \ldots, n & (III)
\end{array}
$$

3.3 Problemas de transporte não equilibrados

3.3.1 Oferta maior que a demanda

Se a oferta total $\sum_{i=1}^{m} a_i$ é maior que a demanda total $\sum_{j=1}^{n} b_j$, implica que sobrará produtos $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ nas origens. Para equilibrar o problema basta criar um destino fictício $n' = n+1$ com a demanda $b_{n'} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. O custo de transporte $c_{in'}$ pode ser interpretado como o custo unitário de estocagem de produtos na origem i ou o custo unitário de não fabricar na origem i. A quantidade de produtos $x_{in'}$ é a quantidade de produtos estocadas, ou não produzidos, na origem i.

3.3.2 Oferta menor que a demanda

Da mesma maneira, se a oferta total $\sum_{i=1}^{m} a_i$ é menor que a demanda total $\sum_{j=1}^{n} b_j$, implica que $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ da demanda não será satisfeita. Para equilibrar o problema, basta criar uma origem fictícia $m' = m+1$ com oferta igual à $a_{m'} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. O custo de transporte $c_{m'j}$ pode ser interpretado como o custo unitário de não atendimento da demanda da origem j. A quantidade de produtos que o destino j deixará de receber é dado por $x_{m'j}$

3.3.3 Reescritura do problema equilibrado

Uma vez equilibrado o problema, ou pela criação de uma origem fictícia ou pela criação de um destino fictício, procede-se normalmente como se o problema fosse equilibrado.

3.4 Quadro do problema do transporte

O problema do transporte pode ser representado por um quadro especial, denominado quadro do transporte. No quadro do transporte, as origens são representadas nas linhas e os destinos nas colunas. A demanda de cada destino é representado na última linha e a oferta de cada origem é representado na útima coluna. O quadro do transporte é mostrado pela tabela 3.1.

destinos$\rightarrow$ origens$\downarrow$	1	2	$\dots$	n	ofertas
1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}	a_n
demandas	b_1	b_2	$\dots$	b_n	$\sum_{j=1}^{n} b_j$ $\sum_{1=1}^{m} a_i$

Tabela 3.1: Quadro do transporte

Este quadro é utilizado para a aplicação do algoritmo do transporte. Durante a resolução do problema, cada célula do quadro do transporte possuirá a representação como a mostrada na tabela 3.2 abaixo.

Na tabela 3.2, $\bar{c}_{ij}$ e θ são definidos nas próximas seções.

c_{ij}	$\bar{c}_{ij}$
θ	x_{ij}

Tabela 3.2: Célula do quadro do transporte

Exemplo 3.1 *Problema de transporte*

Um empresa possui três fábricas com capacidades de oferta de um mesmo produto como mostrado no quadro de transporte. Por compromissos de venda já assumidos, a empresa deverá abastecer quatro armazéns. A demanda de cada armazém, assim como o custo unitário de transporte são dados na figura. Deseja-se determinar quanto cada fábrica deve enviar para cada armazém de maneira que o custo total de transporte seja mínimo.

destinos→ / origens↓	1	2	3	4	ofertas
1	10	7	6	5	9
2	2	8	9	1	10
3	11	12	8	4	8
demandas	7	6	10	4	27

Este exemplo servirá de ilustração para a apresentação do algoritmo do transporte.

3.5 O algoritmo do transporte

O problema do transporte é modelado pela programação linear, portanto o método simplex pode ser utilizado para resolvê-lo. Entretanto, devido a estrutura especial da matriz de coeficientes A do problema, desenvolve-se um algoritmo especial para resolvê-lo. Este algoritmo é uma versão do algoritmo simplex.

O algoritmo simplex pode ser resumido nos passos:

- *Inicialização*: Identificação de uma solução básica inicial;
- *Regra de Parada*: Verificar se a atual solução básica é ótima. É ótima?
  - SIM: PARE;
  - NÃO, vá para o Passo Iterativo
- *Passo Iterativo*: Determinar uma solução básica adjacente melhor que a atual solução:
  1. Identifique a variável não básica para entrar na base
  2. Identifique a variável básica para sair da base
  3. Identifique a nova solução básica
  4. Volte para a *regra de parada*

O algoritmo do transporte possui exatamente esta mesma estrutura. As seções posteriores analisam cada um dos passos do algoritmo simplex, adapdando-o para o problema do transporte.

3.5.1 Obtenção de uma primeira solução básica

Antes de apresentar um método para determinar uma solução básica inicial para o problema do transporte é necessário identificar as características de uma solução básica do problema. Estas características são:

1. *a solução deve ser viável*: ou seja, as demandas devem ser satisfeitas pelas ofertas na origem. Como o problema é equilibrado, toda a oferta é utilizada para satisfazer toda a demanda;

2. *conter no máximo* $(m+n-1)$ *variáveis diferentes de zero*. Em uma solução básica de um programa linear qualquer, inclusive o problema do transporte, o número de variáveis básicas é igual ao número de linhas linearmente independentes da matriz A. Lembra-se aqui que somente variáveis básicas assumem valores não nulos em uma solução básica. Uma solução básica pode ser degenerada, isto é, alguma variável básica ser nula. Resta então determinar o número de linhas linearmente independentes da matriz de coeficientes A do problema do transporte. Ao observar o modelo do transporte, nota-se que existem m equações do tipo (I) e n equações do tipo (II), portanto o modelo possui $(m+n)$ equações. Mas qualquer equação do modelo pode ser obtida em função das demais. Seja por exemplo uma equação k do tipo (I):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = a_k \qquad (a)$$

é possível obter esta equação partindo das demais equações do problema, basta efetuar a seqüência de operações:

   - somar as $(m-1)$ equações do tipo (I) restantes no modelo:

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} a_i$$

   note que o índice i dos somatórios vai de 1 à n, mas não passa por k, isto é $i \neq k$; a expressão acima é o mesmo que:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_i - a_k \qquad (b)$$

   - somar as (n) equações do tipo (II) do modelo:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (c)$$

   - subtrair (b) de (c):

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj}\right) = \sum_{j=1}^{n} b_j - \left(\sum_{i=1}^{m} a_i - a_k\right) \qquad (d)$$

   como: (i) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, e (ii) o problema é quilibrado, isto é $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$; a equação (a) é obtida diretamente de (d):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = a_k. \qquad (a)$$

   De modo semelhante, uma equação qualquer do tipo (II) pode ser obtida a partir das demais equações.

   Portanto, no problema do transporte existem somente $(m+n-1)$ restrições linearmente independentes, assim em uma solução básica qualquer, existem exatemente $(m+n-1)$ *variáveis básicas*. Como alguma variável básica pode ser degenerada, ou seja, igual a *zero*, uma solução básica do problema do transporte pode conter no máximo $(m+n-1)$ variáveis positivas não nulas;

3. *não formar circuito no quadro do transporte*: uma solução que possui um circuito no quadro do transporte significa que ela pode ser obtida por combinação linear de duas soluções básicas.

Resta então apresentar um método para se obter uma solução para o problema do transporte com as características acima. Apresenta-se aqui o *Método da Esquina Noroeste*:

1. inicializa-se pela célula superior esquerda do quadro do transporte;
2. enquanto estiver localizado em uma célula, repita o procedimento:
   (a) conforme a disponibilidade de produtos na origem e a demanda no destino correspondente, aloque nesta célula a maior quantidade possível de produto;
   (b) atualize a nova oferta e a nova demanda correspondente desta célula;
   (c) se existe oferta restante na origem correspondente desta célula, vá para a célula à direita; se não existe oferta restante, mas existe demanda restante no destino correspondente desta célula, vá para a célula abaixo; se não existe nem oferta, nem demanda restante vá para a célula na diagonal inferior; se não existir célula na diagonal inferior: PARE, uma solução básica já foi obtida.

Exemplo 3.2 *Obtenção de uma solução básica inicial pelo método da esquina noroeste*

Seja o problema do transporte do exemplo 3.1, a solução básica inicial obtida através do método da esquina noroeste é mostrado na figura

destinos→ origens↓	1	2	3	4	ofertas
1	$\boxed{10}$ 7	$\boxed{7}$ 2	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	$\cancel{9}$ $\cancel{2}$ 0
2	$\boxed{2}$	$\boxed{8}$ 4	$\boxed{9}$ 6	$\boxed{1}$	$\cancel{10}$ $\cancel{6}$ 0
3	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$	$\boxed{8}$ 4	$\boxed{4}$ 4	$\cancel{8}$ $\cancel{4}$ 0
demandas	$\cancel{7}$ 0	$\cancel{6}$ $\cancel{4}$ 0	$\cancel{10}$ $\cancel{4}$ 0	$\cancel{4}$ 0	27

A solução básica obtida aplicando o método da esquina noroeste mostrada no quadro acima é:

- variáveis básicas: $x_{11} = 7$, $x_{12} = 2$, $x_{22} = 4$, $x_{23} = 6$, $x_{33} = 4$ e $x_{34} = 4$; são portanto $(m+n-1) = 3+4-1 = 6$ variáveis básicas;
- variáveis não básicas: $x_{13} = 0$, $x_{14} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{24} = 0$, $x_{31} = 0$ e $x_{32} = 0$;
- o valor da função objetivo pode ser obtido diretamente substituindo os valores das variáveis: $z = 10 \times 7 + 7 \times 2 + 6 \times 0 + 5 \times 0 + 2 \times 0 + 8 \times 4 + 9 \times 6 + 1 \times 0 + 11 \times 0 + 12 \times 0 + 8 \times 4 + 4 \times 4 = 218$.

3.5.2 Verificação da otimalidade da atual solução básica

A verificação da otimalidade de uma solução básica do problema do transporte consiste em determinar os coeficientes da função objetivo no quadro simplex que mostraria a atual solução básica. Como no método simplex, se estes coeficientes forem todos positivos, a atual solução básica é ótima.

Para determinar os coeficientes da função objetivo do quadro simplex correspondente à uma solução básica do transporte, determina-se inicialmente a forma geral da função objetivo em um quadro qualquer do simplex. Seja então a função objetivo do problema do transporte:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

como a função objetivo é de minimizar deve-se multiplicar por (-1), para deixá-la na forma padrão. Isola-se o termo independente de variáveis no lado direito da equação:

$$(-z) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 0. \quad (a)$$

Uma iteração do simplex consiste em multiplicar uma restrição do problema por uma constante determinada e subtraí-la[1] na função objetivo. Sejam as constantes:

- $u_i, \ \forall\ i = 1, 2, \ldots, m$: o valor que multiplica a restrição i do tipo (I);
- $v_j, \ \forall\ j = 1, 2, \ldots, n$: o valor que multiplica a restrição j do tipo (II).

Se para obter a atual solução básica, uma restrição qualquer não foi multiplicada por nenhum valor e também não foi adicionada à função objetivo, basta anular o valor de u_i (ou v_j) correspondente aquela restrição. Assim, pode-se considerar que todas as restrições do modelo foram multiplicadas por um valor e adicionadas à função objetivo para se obter a atual solução básica do problema.

Seja então a restrição i do tipo (I) multiplicada por u_i:

$$u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = u_i a_i,$$

considere agora a soma de todas as restrições do tipo (I) já multiplicada pelo seu respectivo valor u_i:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} u_i a_i, \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} u_i a_i. \quad (b)$$

Seja agora a restrição j do tipo (II) multiplicada por v_j:

$$v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = v_j b_j,$$

somando todas as restrições do tipo (II) já multiplicada pelo seu respectivo v_j, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum j = 1^n v_j b_j, \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} v_j b_j. \quad (c)$$

Subtraindo então (b) e (c) membro a membro de (a), obtém-se:

$$(-z) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij} = -\sum_{i=1}^{m} u_i a_i - \sum_{j=1}^{n} v_j b_j. \quad (d)$$

Note que nos três duplos somatórios do primeiro membro da expressão (d) a variável x_{ij} é multiplicada por uma constante, portanto ela pode ser colocada em evidência:

$$(-z) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij} - u_i - v_j)x_{ij} = -\sum_{i=1}^{m} u_i a_i - \sum_{j=1}^{n} v_j b_j. \quad (e)$$

A expressão (e) obtida é a expressão geral da função objetivo em um quadro qualquer do simplex, inclusive para a solução ótima.

Por outro lado as variáveis básicas na função objetivo de um quadro qualquer do simplex possuem coeficientes nulos, isto é, da expressão (e), para as variáveis básicas:

$$c_{ij} - u_i - v_j = 0. \quad (f)$$

[1] multiplicar por uma constante negativa e somá-la à função objetivo é o mesmo que multiplicar por uma constante positiva e subtraí-la da função objetivo

Através de um método apropriado, como o exposto acima, obtém-se uma solução básica inicial para o problema do transporte. Conhecendo uma solução básica, se conhece as $(m + n - 1)$ variáveis que estão na base nesta solução, se conhece portanto $(m+n-1)$ relações do tipo (f). Por outro lado, existem m constantes u_i e n constantes v_j, ou seja, existem $(m + n)$ constantes u_i e v_j desconhecidos. Como um u_i ou um v_j esta associado à uma restrição redundante, pode-se atribuir um valor qualquer à um deles (atribui-se $zero$). Logo, conhecendo uma solução básica para o problema do transporte, é possível determinar todos os u_i e v_j associados à esta solução.

Uma vez determinados todos os u_i e v_j associados à atual solução básica, é possível determinar os coeficientes das variáveis não básicas $\bar{c}_{ij}$ na função objetivo do quadro simplex que mostraria a atual solução básica. Utiliza-se os coeficientes determinados pela expressão (f). Ou seja, os coeficientes das variáveis não básicas na função objetivo do quadro simplex que mostraria a atual solução básica são determinados pela expressão:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \qquad (g)$$

Após determinar todos os coeficientes $\bar{c}_{ij}$, verifica se todos eles são positivos ou nulos; se sim, pare, a atual solução é ótima; se não, determine uma solução básica adjacente melhor que a atual. Este é o assunto da próxima seção.

Exemplo 3.3 *Determinação dos coeficientes da função objetivo no quadro simplex relativo à solução básica mostrada no quadro do exemplo 3.2.*

Conhecendo as variáveis que estão na base, utiliza-se a expressão (f) para determinar todos os u_i e v_j associados à esta solução básica; após determina-se os coeficientes $\bar{c}_{ij}$ das variáveis não básicas:

1. para as variáveis básicas: $c_{ij} - u_i - v_j = 0$
   - fazendo $u_1 = 0$
   - para x_{11} : $c_{11} - u_1 - v_1 = 0 \implies 10 - 0 - v_1 = 0 \implies v_1 = 10$;
   - para x_{12} : $c_{12} - u_1 - v_2 = 0 \implies 7 - 0 - v_2 = 0 \implies v_2 = 7$;
   - para x_{22} : $c_{22} - u_2 - v_2 = 0 \implies 8 - u_2 - 7 = 0 \implies u_2 = 1$;
   - para x_{23} : $c_{23} - u_2 - v_3 = 0 \implies 9 - 1 - v_3 = 0 \implies v_3 = 8$;
   - para x_{33} : $c_{33} - u_3 - v_3 = 0 \implies 8 - u_3 - 8 = 0 \implies u_3 = 0$;
   - para x_{34} : $c_{34} - u_3 - v_4 = 0 \implies 4 - 0 - v_4 = 0 \implies v_4 = 4$;
2. para as variáveis não básicas: $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$:
   - x_{13} : $\bar{c}_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 6 - 0 - 8 \implies \bar{c}_{13} = -2$
   - x_{14} : $\bar{c}_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 5 - 0 - 4 \implies \bar{c}_{14} = 1$
   - x_{13} : $\bar{c}_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 2 - 1 - 10 \implies \bar{c}_{21} = -9$
   - x_{13} : $\bar{c}_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 1 - 1 - 4 \implies \bar{c}_{24} = -4$
   - x_{13} : $\bar{c}_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 11 - 0 - 10 \implies \bar{c}_{31} = 1$
   - x_{32} : $\bar{c}_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 12 - 0 - 7 \implies \bar{c}_{32} = 5$

Existem coeficientes negativos para variáveis não básicas, isso implica que a atual solução básica não é ótima. A variável a entrar na base é aquela que possui coeficiente mais negativo, portanto é x_{13}.

3.5.3 Obtenção de uma outra solução básica

Como no método simplex, a mudança de base consiste em determinar uma variável não básica para entrar na base e uma variável básica para sair da base. A variável que entra na base é aquela de coeficiente mais negativo na função objetivo do quadro simplex correspondente à atual variável básica. Para determinar a variável que sai da base, basta utilizar o procedimento abaixo:

1. fazer a variável que entra na base assumir o valor $\theta \geq 0$;
2. somar e subtrair o valor θ de certas variáveis básicas de tal modo a fechar um ciclo que garanta a viabilidade da nova solução básica;
3. determinar o maior valor de θ, isto é, o maior valor de θ de maneira que uma variável básica se anule, esta variável é a variável básica que está saindo da base.

3.5.4 Situações especiais no algoritmo do transporte

1. *empate para a variável que entra na base*: escolha arbitrária;
2. *empate para a variável que sai da base*: escolha arbitrária;
3. *soluções ótimas múltiplas*: quando uma variável não básica possui coeficiente nulo na função objetivo do quadro simplex que mostraria a atual solução ótima.

3.6 O problema de Designação

Uma instância do problema de transporte consiste em considerar que a oferta em cada origem é unitária ($a_i = 1,\ \forall i$) e a demanda de cada destino também é unitária ($b_j = 1,\ \forall j$). O número de origens é igual ao número de destinos ($m = n$). Este problema é denominado *problema da designação* e pode ser utilizado para modelar situações como a designação de recursos humanos às atividades. Utilizando dos conceitos do problema de transporte, o modelo de programação linear para o problema de designação é dado então:

$$
\begin{array}{lllr}
\min & z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & & \\
\text{s. a} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & \forall\ i = 1, 2, \ldots, n & (I) \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & \forall\ j = 1, 2, \ldots, n & (II) \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall\ i = 1, 2, \ldots, n;\ \forall\ j = 1, 2, \ldots, n & (III)
\end{array}
$$

3.6.1 Representação do problema da designação

Semelhantemente ao problema do transporte, o problema da designação possui uma representação própria, conhecida como matriz de eficiência.

Exemplo 3.4

Designar quatro operários (I, II, III e IV) para quatro tarefas (A, B, C e D), de maneira que o número total de homens-hora seja mínimo. Cada homem desempenha cada tarefa em um determinado número de horas, conforme indica a matriz abaixo:

	I	II	III	IV
A	5	24	13	7
B	10	25	3	23
C	28	9	8	5
D	10	17	15	3

Tabela 3.3: Homens - tarefas

3.6.2 Fundamentos teóricos

O teorema abaixo permite a construção de um método exato, de tempo polinomial, para resolver o problema de designação.

Teorema 3.1 *Ao adicionar uma constante a cada elemento de uma linha, ou de uma coluna, qualquer da matriz de eficiência de um problema de designação, a designação da solução ótima do novo problema criado também é designação de uma solução ótima do problema original. Ainda, o valor associado à uma solução ótima do novo problema criado é igual ao valor associado à uma solução ótima do problema original somado à constante adicionada.*

Monstração Seja $\min \ z$ a função objetivo de um problema de designação:

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_{1j} + \sum_{j=1}^{n} c_{2j}x_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} c_{nj}x_{nj}$$

Seja agora k_i uma constante adicionada à cada elemento da linha i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ da matriz de eficiência. Tem-se então a função objetivo do novo problema criado:

$$z' = \sum_{j=1}^{n}(c_{1j} + k_1)x_{1j} + \sum_{j=1}^{n}(c_{2j} + k_2)x_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n}(c_{nj} + k_n)x_{nj}$$

$$z' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + k_1\sum_{j=1}^{n} x_{1j} + k_2\sum_{j=1}^{n} x_{2j} + \ldots + k_n\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$$

como $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$, tem-se então:

$$z' == \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} k_i = z + \sum_{i=1}^{n} k_i$$

Com este teorema, é possível então construir um método onde constantes são adicionadas ou subtraídas das linhas e colunas da matriz de eficiência, de maneira que se possa localizar uma designação de custo nulo. Esta designação é a designação ótima do problema original. A operacionalização deste método é mostrado pelo algoritmo da designação.

3.6.3 Algoritmo da Designação

- *Inicialização*: Faça:
  - Para cada linha, subtrair de todos os coeficientes o menor coeficiente da linha
  - Fazer o mesmo para cada coluna
- *Passo de Parada*: Existe uma designação ótima composta somente de coeficientes iguais a zero?
  - SIM: Pare, esta designação é ótima
  - NÃO: Continue
- *Iteração*: Traçar um número mínimo de retas horizontais e verticais para cobrir todos os zeros $(n' < n)$.

  Este número mínimo de retas pode ser obtido através do seguinte procedimento:
  - marcar todas as linhas que não possuam designação
  - marcar todas as colunas que possuam coeficientes nulos em linhas marcadas
  - marcar todas as linhas que tenham designação em colunas marcadas
  - repetir os dois passos anteriores até não ser possível marcar linhas ou colunas
  - traçar uma reta sobre cada linha não marcada e sobre cada coluna marcada

- Escolher o menor coeficiente não coberto por uma reta e subtraí-lo de todos os coeficientes não cobertos por uma reta. Somar esse coeficiente a cada coeficiente situado na interseção de duas retas

- Voltar para o *Passo de Parada*

Exemplo 3.5

Tem-se o problema de designar quatro operários (I, II, III e IV) a quatro tarefas (A, B, C e D). Cada operário deve executar exatamente uma tarefa. Cada tarefa é executada por exatamente um operário. O tempo que cada operário gasta executando cada tarefa é dado pela matriz de eficiência abaixo:

	I	II	III	IV
A	3	17	9	7
B	10	20	5	19
C	25	8	7	5
D	19	18	6	17

Deseja-se determinar qual operário deve executar qual tarefa de maneira que o tempo total de execução seja mínimo.

3.7 Exercícios

3.7.1 O proplema do transporte

Resolva o problema do transporte abaixo. Note que, se a solução inicial for obtida pelo método da esquina noroeste, esta solução básica será degenerada. Sugere-se então que releia sobre degeneração do método simplex.

destinos / origens	1	2	3	oferta
1	5	3	10	20
2	12	7	9	20
demanda	20	10	10	40 / 40

3.7.2 O proplema da designação

3.7.2.1 Iterações

Quatro tarefas (T_i) devem ser designadas a cinco máquinas (M_j). O tempo (em horas) para que cada máquina execute a tarefa está indicado na tabela abaixo. Todas as tarefas devem ser feitas simultaneamente.

Tarefas $\longmapsto$ Máquinas $\downarrow$	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	8	3	9	10
M_2	4	6	4	8
M_3	3	0,5	2	5
M_4	11	2	7	4
M_5	7	2	5	3

Determine a designação de tarefas a máquinas de tal forma que se minimize as máquinas-hora gastas.

3.7.2.2 Conceitual

Mostre que, ao adicionar uma constante k_j a cada coluna da matriz de eficiência de um problema de designação, o valor da função objetivo do novo problema é igual ao valor da função objetivo do problema original somado às constantes adicionadas.

3.7.2.3 Transporte

Uma firma fabrica um determinado produto em quatro cidades A, B, C e D; o produto destina-se a três centros de consumo I, II e III. Sabe-se que :

1. As cidades A, B, C e D dispõem respectivamente de 30, 20, 50 e 10 unidades do produto
2. Os centros de consumo I, II, e III necessitam respectivamente de 20, 40 e 50 unidades
3. Os custos de transporte entre as cidades e os centros de consumo são dados, em Reais, na tabela abaixo:

	I	II	III
A	1	2	3
B	10	$\nexists$	8
C	3	4	2
D	5	2	1

Tabela 3.4: Custo de transporte

(a) Construa o quadro inicial do transporte
(b) Determine uma solução básica inicial
(c) Faça uma iteração do algoritmo do transporte

3.7.3 Seleção de Homens-Locais

O presidente de uma empresa está esdudando a transferência de cinco diretores (A, B, C, D e E) para cinco locais de trabalho diferentes (1, 2, 3, 4 e 5). Foram feitas estimativas dos custos envolvidos na transferência de cada homem para cada novo local de trabalho. Esses custos (em milhares de Reais) são dados abaixo:

O diretor A não pode ser designado para o local 5. Determinar as designações de cada diretor para cada local de trabalho de modo a minimizar o custo total das tranferências. Assume-se que os diretores são igualmente qualificados para os diversos serviços.

	1	2	3	4	5
A	2	1	4	2	x
B	3	4	1	6	9
C	1	2	6	5	2
D	1	3	3	7	4
E	3	1	2	5	4

Tabela 3.5: Homens - locais

3.7.4 Problema da designação

São dois problemas com o mesmo enunciado. Quatro tarefas (T_i) devem ser designadas a quatro máquinas (M_j). O tempo (em horas) para que cada máquina execute a tarefa está indicado na tabela abaixo. Todas as tarefas devem ser feitas simultaneamente.

Tarefas $\longmapsto$ Máquinas $\downarrow$	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	9	6	5	6
M_2	6	8	9	5
M_3	8	7	6	8
M_4	7	7	8	5

Tarefas $\longmapsto$ Máquinas $\downarrow$	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	7	10	6	3
M_2	8	7	8	1
M_3	4	9	3	5
M_4	5	4	6	9

Em cada um dos problemas acima, determine a designação de tarefas a máquinas de tal forma que se minimize as máquinas-hora gastas.

Capítulo 4

Fundamentos da álgebra linear

4.1 Introdução

Nesta seção apresenta-se algumas definições e alguns conceitos fundamentais da álgebra linear para a fundamentação da Programação Matemática. Propositalmente, esta seção evita a exemplificação numérica para que o leitor se habtue a abstrair na notação algébrica da matemática. No final deste capítulo alguns exemplos numéricos são propostos, assim como alguns exercícios.

Não é pretenção apresentar aqui todos os conseitos e conseituações fundamentais e importante da álgebra, resume-se aqui somente os conceitos necessários para o estudo da Análise Convexa.

4.2 Matriz

Uma matriz é um arranjo retangular de números, denominados elementos da matriz. O interesse aqui são as matrizes de duas dimensões. Identifica-se em uma matriz de duas dimensões as suas m linhas e n colunas. O termo matriz aqui neste texto refere-se à matriz de duas dimensões.

A notação usual para uma matriz é uma letra maiúscula ou atravéz de seus elementos arranjados retangularmente e entre couchetes.

Um exemplo é a matriz $A_{m\times n}$ de m linhas e n colunas. Esta matriz pode ser representada por:

1. seus elementos:

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

2. suas colunas

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{\cdot 1} & a_{\cdot 2} & \dots & a_{\cdot j} & \dots & a_{\cdot n} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

onde, para qualquer $j = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{a}_{\cdot j}$ é dado por

$$a_{\cdot j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{ij} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

3. suas linhas

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{1\cdot} \\ a_{2\cdot} \\ \cdots \\ a_{i\cdot} \\ \cdots \\ a_{m\cdot} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

onde, para qualquer $i = 1, 2, \ldots, m$, $A_{i\cdot}$ é dado por:

$$a_{i\cdot} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

4. por um elemento genérico, seja a matriz $A_{m \times n}$, um elemento genérico de A é dado por:

$$a_{ij} \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, m \text{ e } j = 1, 2, \ldots, n$$

4.2.1 Algumas matrizes especiais

Para a utilização da definição de matriz na representação de problemas a identificação de algumas matrizes especiais. Esta seção introduz destes conceito complementares que são utilizados posteriormente.

4.2.1.1 Vetor

É uma matriz de m linhas e uma única coluna. Adota-se aqui, para notação de um vetor um letra minúscula e em negrito. Observa-se que uma matriz pode ser definida por um arranjo de n vetores colunas, como é o caso da definição de uma matriz pelas suas colunas. O conceito de vetores será associado à geometria analítica em uma seção posterior.

4.2.1.2 Matriz Nula

Quando todos os elementos de uma matriz m por n são nulos esta matriz é denominada matriz nula. Utiliza-se a notação 0 para qualquer matriz nula, independente de sua ordem.

4.2.1.3 Matriz Quadrada

É uma matriz na qual o número de linhas é igual ao número de colunas. A ordem de uma matriz quadrada é igual ao número de linhas (ou número de colunas). Geralmente a ordem de uma matriz é dada por n, isto é, A_n é uma matriz quadrada de ordem n.

Numa matriz quadrada, identifica-se os elementos situados na diagonal do canto superior esquerdo ao canto inferior direito como diagonal principal da matriz. A diagonal secundária são os elementos da outra diagonal da matriz (os que estão situados na diagonal do canto superior direito ao inferior esquedo).

4.2.1.4 Matriz Identidade

É uma matriz quadrada I (não importa sua ordem) onde os elementos da diagonal principal são iguais à unidade e os demais elementos são nulos.

4.2.1.5 Matriz Diagonal

É uma matriz quadrada com os elementos da diagonal principal não nulos e os demais elementos nulos.

4.2.1.6 Matriz Triangular

Uma matriz quadrada é denominada Triangular superior, ou simplesmente Triangular, se todos os seus elementos abaixo da diagonal principal são nulos e os demais, incluindo os elementos da diagonal principal assumem qualquer valor no conjunto dos números reais. Similarmente, uma matriz quadra é denominada Triangular inferior se todos os seus elementos acima da diagonal principal forem nulos.

4.2.2 Operações simples com matrizes

4.2.2.1 Adição de matrizes

Duas matrizes A e B podem ser somadas se, e somente se, possuirem a mesma dimensão. Defini-se a soma de duas matrizes como:

$$C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}$$

onde

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ \forall 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

As propriedades a adição de matrizes são:

1. comutativa: $A + B = B + A$
2. associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. elemento neutro da adição é a matriz nula: $A + 0 = 0 + A = A$

4.2.2.2 Produto por escalar

Um valor real λ pode multiplicar uma matriz, esta multiplicação é denominada produto por escalar. O produto por escalar é definido:

$$\lambda \times B_{m\times n} = \lambda B$$

onde um elemento de λB é dado por:

$$\lambda b_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

As propriedades do produto por escalar são:

1. distributiva em relação a adição: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
2. o elemento neutro é a unidade: $1A = A$

4.2.2.3 Produto entre matrizes

O produto entre matrizes só é definido quando o número de coluna da matriz à esquerda for iqual ao número de linhas da matriz à direita na multiplicação. A matriz resultante possui o mesmo número de linhas da matriz à direita e o mesmo número de colunas da matriz à esquerda, isto é:

$$A_{m\times n} \times B_{n\times k} = C_{m\times k}$$

ou, simplesmente

$$AB = C$$

onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad \forall\ 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq k.$$

ou, pela notação das linhas de A e pela colunas de B,

$$c_{ij} = \mathbf{a}_{i\cdot} \times \mathbf{b}_{\cdot j}$$

As propriedades da multiplicação de matrizes quadradas são:

1. elemento neutro é a matriz identidade: $I \times A = A \times I = A$.

Algumas observações importantes

- se existe AB, não necessariamente existe BA;
- se existe AB e existe BA, elas não são necessariamente iguais.

4.2.3 Operações elementares de linhas e de colunas de matrizes

Seja uma matriz $A_{m\times n}$, denine-se três tipos de operações elementares de linhas em $A_{m\times n}$:

1. trocar de posição uma linha i e uma linha j, isto é, a linha i é escrita no lugar da linha j e a linha j é escrita no lugar da linha i;
2. multiplicar uma linha i por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$; e
3. uma linha i for substituida pela soma dela mesma com a multiplicação de uma outra linha j por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

Da mesma maneira, define-se estas três operações elementares para as colunas de $A_{m\times n}$.

Estas operações elementares serão úteis na resolução de sistemas lineares.

4.2.4 Operações elaboradas com matrizes

4.2.4.1 Submatriz

Ao retirar um conjunto de linhas e/ou colunas de uma matriz $A_{m\times n}$, obtém-se uma outra matriz $B_{k\times l}$, onde $1 \leq k \leq m$ e $1 \leq l \leq n$. $B_{k\times l}$ é denominada submatriz de $A_{m\times n}$.

4.2.4.2 Transposição de matrizes

Dado uma matriz $A_{m\times n}$, a matriz $A^t_{n\times m}$ é definida como matriz transposta de A se as colunas de $A^t_{n\times m}$ são as linhas de $A_{m\times n}$, e, consequentemente, as linhas de $A^t_{n\times m}$ são as colunas de $A_{m\times n}$. Isto significa que o elemento a_{ij} de A é o elemento a_{ji} de A^t.

As propriedades da transposição de matrizes são:

1. $(A^t)^t = A$
2. se A e B têm a mesma dimensão, então $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. se existe AB, então, $(AB)^t = B^t A^t$

4.2.4.3 Matriz simétrica

Uma matriz quadrada é simétrica se ela for iqual a sua transposta.

4.2.4.4 Particionamento de matrizes

Uma matriz $A_{m\times n}$ pode ser particionada em submatrizes. Os particionamentos mais utilizados são do tipo:

$$A_{4\times 5} = \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right]$$

neste caso, a matriz A foi particionada em quatro outras submatrizes, que podem ser definidas por:

- $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
- $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$
- $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$
- $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$

A matriz A pode ser escrita por estas suas partes, com a seguinte notação:

$$A_{4\times 5} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

4.2.4.5 Determinante de uma matriz

O determinante de uma matriz é um número real definido somente para matrizes quadradas. Seja A_n uma matriz quadrada definida pelos seus elementos a_{ij}, com $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, n$. O determinante de A, denotado det A é o número real que pode ser calculado de duas maneiras:

1. det $A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{A}_{ij}\ \forall\ j = 1, 2, \ldots, n$
2. det $A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{A}_{ij}\ \forall\ i = 1, 2, \ldots, n$

onde $\mathbf{A}_{ij}$ é denominado *cofator* de a_{ij}, e é dado com $(-1)^{i+j}$ vezes o determinante da submatriz obtida de A por eliminando a lina i e a coluna j.

Algumas das propriedades associadas ao cálculo de determinante são:

1. det $A =$ det A^t
2. se duas linhas (ou colunas) da matriz A são trocadas de posição entre si para a obtenção da matriz B, então det $A = -$det B
3. se uma linha (ou coluna) da matriz A for multiplicada por um escalar e adicionada a uma outra linha (ou coluna) de A para se obter a matriz B, então, det $B = k$ det A
4. det $A = 0$ se, e somente se, existir alguma linha (ou coluna) que pode ser obtida através de operações elementares de outras linhas (ou conunas) de A
5. se existir linhas (ou colunas) na matriz A que pode ser obtida com operações elementares de outras linhas (ou colunas) de A, então det $A = 0$
6. o determinante de uma matriz diagonal é igual ao produto de seus elementos na diagonal principal

4.2.4.6 Matriz Quadrada Regular

Matriz Regular é aquela que possui determinante diferente de zero, e consequentemente, nenhuma linha (ou coluna) pode ser obtida com operações elementares de outras linhas (ou colunas).

4.2.4.7 Matriz Inversa

A matriz inversa da matriz A é a matriz A^{-1} tal que

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

Uma matriz possui inversa se, e somente se, ela for quadrada regular.

A matriz inversa pode ser obtida por um número finito de operações de linhas. Seja A uma matriz quadrada e I a matriz identidade de mesma ordem de A. A matriz inversa A^{-1} pode ser obtida através de operações de linhas que transformam $[A|I]$ em $[I|A^{-1}]$, ou seja, coloca-se a matriz identidade ao lado direito da matriz A e se executa operações de linhas até obter a matriz identidade à esquerda. À direita, onde estava a matriz identidade, ficará a matriz A^{-1}.

Note que a inversa da matriz identidade é a própria matriz identidade, ou seja, $I^{-1} = I$.

4.2.4.8 Posto de uma matriz

O posto de uma matriz é a ordem da sua maior submatriz quadrada regular.

4.2.4.9 Base de uma matriz

Uma base da matriz $A_{m\times n}$ (com posto$(A) = m$) é toda submatriz B_m de A quadrada regular.

Note que a definição de base não está associada diretamente à matriz identidade. Mas, como a matriz identidade é quadrada regular, e portanto possui inversa, ela pode ser uma base. Da geometria analítica, a matriz identidade de ordem m é uma base canônica para o espaço de dimensão m.

4.3 Vetores

Definição 4.1 *Vetores são os elementos de $\mathbb{R}^n$. Um vetor é também denominado ponto do $\mathbb{R}^n$. O vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é representado por $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde x_i para $i = 1, 2, \ldots, n$ são os elementos ou coordenadas de x.*

A dimensão do vetor é o valor de n. Geometricamente, todo vetor de duas ou três dimensões podem ser representados por um ponto em um sistema cartesiano onde cada elemento do vetor esta associado à um eixo do sistema cartesiano. Um vetor pode ser também representado por uma seta que inicia na origem do sistema cartesiano e termina no ponto cujas coordenadas são os elementos dos vetores. A figura 4.1 mostra um um vetor (ou um ponto) representado num sistema cartesiano do $\mathbb{R}^2$.

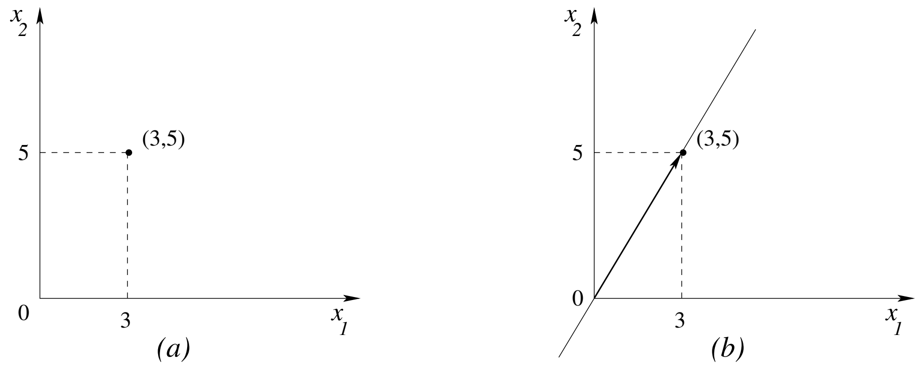


Figura 4.1: Representações geométricas de um ponto ou vetor

Na figura 4.1 - *(a)* o vetor $(3, 5)$ é representado somente por um ponto no $\mathbb{R}^2$. Na figura 4.1 - *(b)* o vetor $(3, 5)$ é presentado por uma seta que parte da origem do sistema cartesiano e chega ao ponto $(3, 5)$. A reta definida pelo vetor em *(b)* (ou seja a reta que passa por $(0, 0)$ e $(3, 5)$) é denominada *reta suporte* do vetor é a *direção* do vetor $(3, 5)$.

Observa-se aqui a questão de notação para p vetores do $\mathbb{R}^n$. Pode-se utilizar:

- $x_1 = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n)$, $x_2 = (x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n)$, …, $x_p = (x_p^1, x_p^2, \ldots, x_p^n)$, ou
- $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$, …, $x^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p)$, ou ainda
- $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$, $x_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$, …, $x_p = (x_{p1}, x_{p2}, \ldots, x_{pn})$.

4.3.1 Vetor $i^{\text{ésima}}$ coordenada

É o vetor todo composto de zeros, exceto sua $i^{\text{ésima}}$ componente que é igual a 1.

4.3.2 Operações com vetores, produto interno

Em se tratando simplesmente de vetores (não os considerando matrizes) defini-se as operações :

4.3.2.1 Adição (soma)

Definição 4.2 *(Adição (ou soma) de vetores)*

Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, então:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

A figura 4.2 mostra a soma de dois vetores em .$\mathbb{R}^2$.

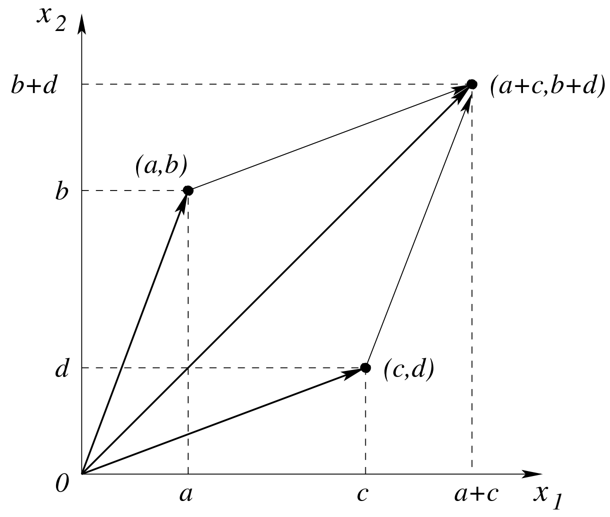


Figura 4.2: Soma de dois vetores

Na figura 4.2 mostra a soma dos vetores (a, b) e (c, d) resultando no vetor $(a+c, b+d)$. Note a regra do paralelograma ao adicionar um vetor a outro.

4.3.2.2 Multiplicação (produto) por um escalar

Definição 4.3 *(Multiplicação por um escalar)*

Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *então:*

$$\alpha \times x = (\alpha \times x_1, \alpha \times x_2, \ldots, \alpha \times x_n)$$

As notações $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \ldots, \alpha \cdot x_n)$ e $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$ também são utilizadas.

A figura 4.3 ilustra a multiplicação do vetor (a, b) pelo escalar k, resultando no vetor (ka, kb).

4.3.2.3 Produto Interno de $\mathbb{R}^n$ (ou Produto Interno Euclidiano de $\mathbb{R}^n$)

Definição 4.4 *(Produto interno)*

Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *então o produto interno de* x *e* y *é definido por:*

$$x \times y = x \cdot y = xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Note que o produto interno de dois vetores é um escalar. Pela definição de produto interno, as propriedades são satisfeitas:

1. $xy = yx$
2. $(\alpha x)y = \alpha(xy)$
3. $(x + y)z = xz + yz$
4. $xx > 0$ se $x \neq 0$

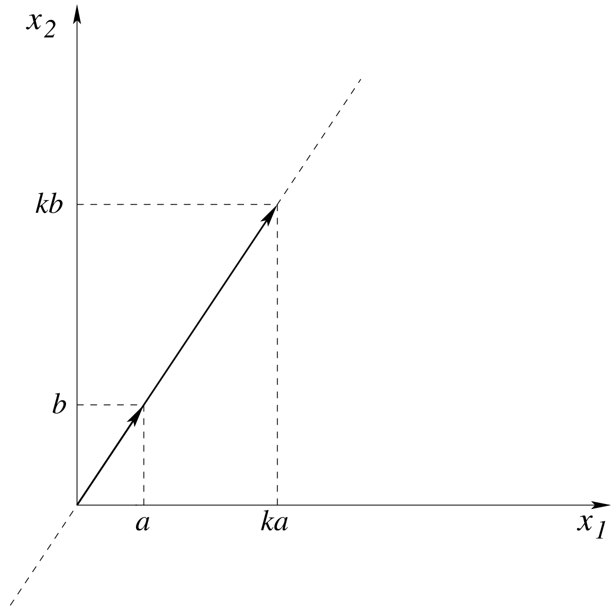


Figura 4.3: Multiplicação de um vetor por um escalar

Observe aqui que, se estamos trabalhando somente com vetores, o produto interno é exatamente como definido acima. Entretanto se estamos trabalhando com matrizes, devemos tomar o devido cuidado na multiplicação de dois vetores. Com o conceito de matrizes, um vetor será sempre um vetor coluna, ou seja, uma matriz de dimensão $m \times 1$, m linhas e 1 coluna. Assim multiplicar o vetor a pelo vetor b significa multiplicar a^t por b, ou seja, multiplicar o transposto de a por b, resultando numa matriz de um único elemento, e este elemento será o produto interno dos dois vetores.

4.3.3 Vetores e Matrizes

Fazendo um paralelo com a definição de matrizes, um vetor pode ser definido como uma matriz de uma única coluna e de n linhas (ou como uma matriz de uma única linha e de n colunas). Neste caso, ao efetuar produtos de vetores com matrizes é importante observar se a multiplicação é com um vetor linha ou com um vetor coluna. Normalmente a literatura considera um vetor coluna, e quando necessário, multiplica-se com seu transposto.

Exemplo 4.1 *(Representações de produto interno)*

Sejam a e b dois vetores de dimensão n. O produto interno é então calculado:

1. *trabalhando somente com vetores: $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$*

$$a \cdot b = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

2. *trabalhando com matrizes: $(a \cdot b)$* **não é** *definido, somente $(a^t \cdot b)$ é definido:*

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_j \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_j \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

assim

$$(a^t \cdot b) = [a_1 a_2 \dots a_j \dots a_n]_{1\times n} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_j \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \left[\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right]_{1\times 1} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

Observe que todas as definições de matrizes são aplicadas a vetores, assim extende-se as definições das operações entre matrizes para vetores. Como exercício, aplicar todos os conceitos de matrizes em vetores e fazer uma análise geométrica de seus resultados.

4.3.4 Vetores ortogonais

Definição 4.5 *(Vetores ortogonais)*

Dois vetores são $ortogonais$ entre si se o **produto interno** *desses vetores for igual a zero.*

O ângulo formado entre as retas suporte de dois vetores ortogonais é igual a 90^o. A figura 4.4 mostra dois vetores ortogonais entre si.

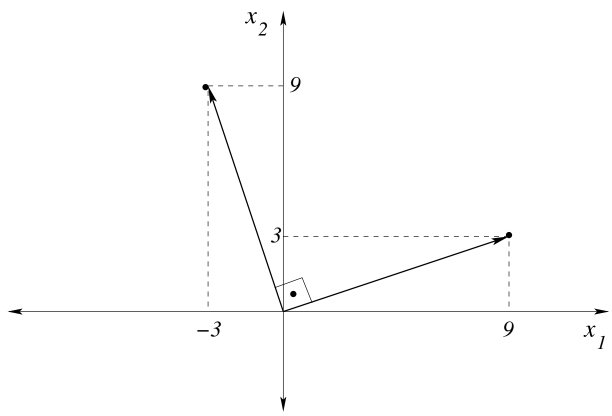


Figura 4.4: Dois vetores ortogonais entre si

A figura 4.4 mostra os vetores $(9,3)$ e $(-3,9)$ e o angulo de 90^o entre eles. Note que $(9,3)\cdot(-3,9) = 9\times(-3)+3\times 9 = 0$.

4.3.5 Suporte de um vetor

Definição 4.6 *(Suporte de um vetor)*

O suporte de um vetor x, representado por supt(x), é o conjunto de índices de suas coordenadas não nulas.

4.3.6 Norma Euclidiana de um vetor

Uma norma de um vetor é uma medida relacionada a dimensão do vetor. A norma mais conhecida é a **norma euclidiana** dada pela raiz quadrada do produto interno do vetor com ele mesmo, isto é:

Definição 4.7 *(Norma euclidiana)*

A norma euclidiana do vetor $a \in \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$||a|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}$$

4.3.7 Distância entre dois vetores

Definição 4.8 *(Distância entre dois vetores)*

A norma euclidiana permite definir a distância $d(x, y)$ entre dois elementos x e y de $I\!R^n$ como

$$d(x, y) = ||x - y||$$

A figura 4.5 ilustra a distância entre dois vetores.

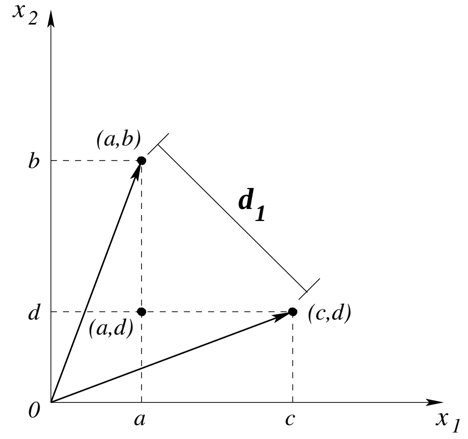


Figura 4.5: Distância entre dois vetores

Pelo teorema de Pitâgoras, num triângulo retângulo $a^2 = b^2 + c^2$, onde a é a hipotenusa e b e c os catetos. Assim, o valor de d_1 na figura 4.5 calculada pelo triângulo retângulo (a, b), (c, d) e (a, d) é $d_1^2 = (c - a)^2 + (b - d)^2$. Por outro lado, a distância definida pela norma euclidiana entre (a, b) e (c, d) é calculada por $d^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2$, logo $d_1 = d$.

Note que, para dois vetores a e b de mesma dimensão, tem-se

$$||a + b||^2 = ||a||^2 + ||b||^2 + 2ab.$$

Proposição 4.1 *Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se*

1. $||x \times y|| \leq ||x|| \times ||y||$ *(Desigualdade de Cauchy)*
2. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(Desigualdade Triangular)*

4.3.8 Desigualdade de Schwartz

Dados dois vetores a e b de mesma dimensão, a desigualdade de Schwartz é dada por

$$|ab| \leq ||a|| \; ||b||$$

De uma outra maneira, a desigualdade de Schwartz define uma distância entre o produto interno ab e o produto das normas euclidiana desses vetores. Esta medida de distância é o ângulo entre esses dois vetores. Em particular

$$\cos\theta = \frac{ab}{||a||\ ||b||}$$

A figura 4.6 mostra o ângulo θ entre dois vetores.

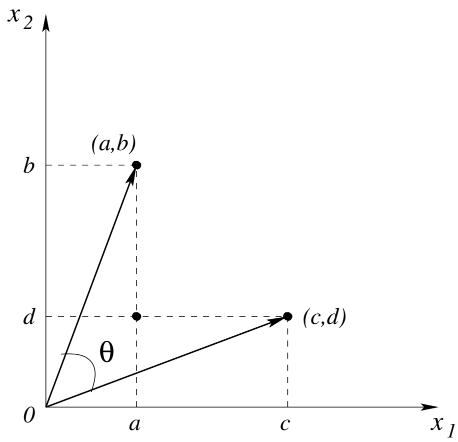


Figura 4.6: Ângulo entre dois vetores

Observe que, se $ab = 0$, ou seja, se a é ortogonal a b então, o $\cos\theta = 0$, logo, $theta = 0$. Um exemplo de dois vetores ortogonais entre si são os vetores $a = (-1, 3)$ e $b = (6, 2)$.

4.3.9 Combinação Linear

Dados p pontos de $I\!R^n$, $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p)$, o ponto $x \subset I\!R^n$ é uma combinação linear desses p pontos se, e somente se, existem os coeficientes $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_p\ \ (\mu_i \in I\!R:\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p)$ tais que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i$$

4.3.9.1 Independencia linear

Os vetores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são linearmente independêntes se

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j = 0$$

implica em

$$\lambda_j = 0\ \forall\ j = 1, 2, \ldots, k$$

Exemplo 4.2 *(Independência linear)*

Os vetores $a_1 = (1, 2)$ e $a_2 = (-1, 1)$ são linearmente independentes, pois $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0$ se, e somente se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$.

4.3.9.2 Dependencia linear

Um vetor linearmente dependente de outros vetores se ele pode ser obtido através de uma combinação linear desses vetores.

Exemplo 4.3 *(Dependencia linear)*

Os vetores $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (-1, 1, -1)$ *e* $a_3 = (0, 3, 2)$ *são linearmente dependentes, pois* $a_3 = a_1 + a_2$.

4.3.10 Combinação Afim

Dados p vetores (pontos) de $\mathbb{R}^n$, $a_1 = (a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n)$, $a_2 = (a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^n)$, $\ldots$, e $a_p = (a_p^1, a_p^2, \ldots, a_p^n)$, o vetor (ponto) $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação afim desses p vetores (pontos) se existem os coeficientes $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_p$ $(\mu_i \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p)$ tais que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1 \quad \text{e} \quad x^j = \sum_{i=1}^{p} \mu_i a_i^j$$

4.3.11 Combinação Convexa

Dados p vetores (pontos) de $\mathbb{R}^n$, $a_1 = (a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n)$, $a_2 = (a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^n)$, $\ldots$, e $a_p = (a_p^1, a_p^2, \ldots, a_p^n)$, o vetor (ponto) $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação convexa desses p vetores (pontos) se existem os coeficientes positivos $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_p$ $(\mu_i \geq 0,\ \forall\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p)$ tais que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1 \quad \text{e} \quad x^j = \sum_{i=1}^{p} \mu_i a_i^j$$

4.4 Espaços Vetoriais - Hiperespaços

Definição 4.9 *(Espaços Vetoriais)*

Um espaço vetorial de dimensão n*, denominado* n*-espaço, é um conjunto, finito ou infinito, de vetores de dimensão* n*. Defini-se o conjunto de todos os vetores em* $I\!R^n$ *como um espaço vetorial metrizado.*

Uma definição mais didática:

Definição 4.10 *(Espaços Vetoriais)*

Um conjunto não vazio $V \subset I\!R^n$ *é um espaço vetorial sobre* $I\!R$ *se seus elementos, denominados vetores estiverem definidas, as seguintes duas operações:*

1. **soma**: *a cada par* u *e* v *de vetores de* V *corresponde um vetor* $u + v \in V$*, de modo que, para quaisquer* $u \in V$*,* $v \in V$ *e* $w \in V$*, as propriedades sejam válidas:*
   (a) *comutativa:* $u + v = v + u$*;*
   (b) *associativa:* $(u + v) + w = u + (v + w))$
   (c) *vetor nulo* $(0 \in V)$*:* $0 + v = v$
   (d) *elemento simétrico ou oposto* $(-v)$*:* $v + (-v) = 0$
2. **produto por escalar**: *para quaisquer* $\alpha \in I\!R$ *e* $v \in V$*, corresponde um vetor* $\alpha.V$*, de modo que as propriedades sejam válidas:*

(a) associativa: qualquer $\beta \in I\!R$, $(\alpha\beta).v = \alpha(\beta.v)$

(b) elemento identidade $(1 \in I\!R)$*:* $1.v = v$

E ainda que as propriedades, relacinando a soma e o produto interno, sejam válidas:

1. $\alpha.(u + v) = \alpha u + \alpha v$
2. $(\alpha + \beta).v = \alpha v + \beta v$

4.4.1 Espaço Euclidiano

Definição 4.11 *(Espaço Euclidiano)*

Um n*-espaço eclidiano, denotado por* $E^n \in \mathbb{R}^n$*, é um conjunto de vetores de dimensão* n*, tais que, a todo vetor* $a \in E^n$ *a norma euclidiana* $||a||$ *é definida, e a todos os pares de vetores* $a \in E^n$ *e* $b \in E^n$ *o produto interno* $a \times b$ *também é definido. O espaço euclidiano é um caso particular de espaços vetoriais metrizados.*

Aqui estudaremos somente os espaços vetoriais (hiperespaços) euclidianos, portanto de agora para frente, ao referirmos a espaços vetoriais fica subentendido que se trata de espaços vetoriais euclidianos.

Podemos mostrar que:

1. uma reta é um espaço vetorial
2. um plano é um espaço vetorial
3. $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial

4.4.2 Conjunto gerador de um espaço euclidiano

Definição 4.12 *(Conjunto gerador de um espaço euclidiano)*

Um conjunto de vetores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *é um denominado gerador do espaço euclidiano* E^n *se qualquer vetor de* E^n *pode ser representado como uma combinacao linear de* $a_1, a_2, \ldots, a_k$*.*

4.4.3 Base de um espaço euclidiano

Definição 4.13 *(base de um espaço euclidiano)*

Um conjunto de vetores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *é um denominado uma base do espaço euclidiano* E^n *se as duas condições são satisfeitas:*

1. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *gera* E^n*; e*
2. *se qualquer um desses vetores for retirados, os vetores restantes não geram* E^n*.*

Demonstra-se que:

1. $k = n$; e
2. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são linearmente independentes

Note que, dois pontos quaisquer do $\mathbb{R}^2$, se são linearmente independentes, geram o $\mathbb{R}^2$.

4.4.4 Base ortogonal de um espaço euclidiano

Uma base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é denominada *ortogonal* (ou *ortonormal*) , se

$$v_i v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j, \ \forall i,j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

O símbolo δ_{ij} de *delta* de Kronecker.

4.4.5 Base canônica de um espaço euclidiano

Os vetores canônicos ou unitários de $\mathbb{R}^n$ são $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \ldots, n)$ formam uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$. Esta base é denominada *base canônica* de $\mathbb{R}^n$. Nota-se que para cada $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

4.5 Geometria de $\mathbb{R}^n$

4.5.1 Reta e segmento de reta

Definição 4.14 *(Reta) Seja $x_1,\ x_2 \ \in \ \mathbb{R}^n$ com $x_1 \neq x_2$. A reta que passa por x_1 e x_2 é dada por:*

$$\mathfrak{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = tx_1 + (1-t)x_2, t \in \mathbb{R}\}$$

Note que, por definição , uma reta é uma combinação afim de dois pontos do $\mathbb{R}^n$.

Considerando o vetor $z = x_1 - x_2$, e substituindo $x_1 = z + x_2$, então a reta $\mathfrak{L}$ pode ser dada por

$$\mathfrak{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x_2 + tz, t \in \mathbb{R}\}$$

No plano $\mathbb{R}^2$ a equação vetorial $x = x_2 + tz$, com $z = x_1 - x_2$ e $t \in \mathbb{R}$, define as *equações paramétricas* da reta que passa por x_1 e x_2. Assim, dados $x_1 = (a, b)$ e $x_2 = (c, d)$, as equações paramétricas da reta que passa por x_1 e x_2 define as coordenadas de um ponto $x_3 = (x, y)$ da reta. Estas equações são dadas por:

$$x = c + t(a - c)$$

$$y = d + t(b - d)$$

O *segmento de reta* ligando x_1 a x_2 é dado por:

$$\overline{x_1 x_2} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = tx_1 + (1-t)x_2, t \in [0,1]\}$$

Note que, por definição , um segmento de reta é uma combinação convexa de dois pontos do $\mathbb{R}^n$.

A figura 4.7 mostra a reta definida pelos pontos (a, b) e (c, d) e o seguimento de reta $\overline{(a, b)(c, d)}$.

4.5.2 Hiperplanos e suas propriedades

Dados $x_1,\ x_2 \ \in \ \mathbb{R}^n$ com $x_1 \neq x_2$. O conjunto

$$\mathfrak{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x_1 - x_2)(x - x_2) = 0\}$$

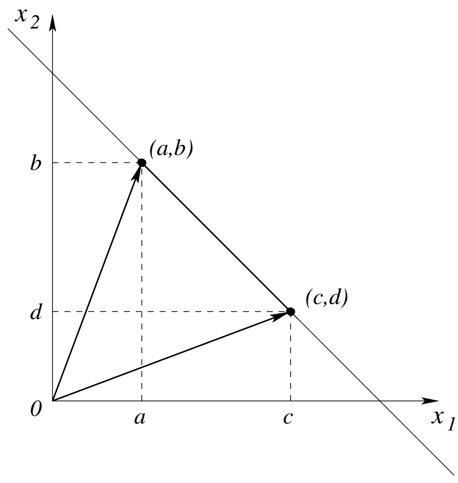


Figura 4.7: Reta e seguimento de reta

é chamado de *hiperplano* passando por x_2. Note que, pela definição , x_1 não necessariamente pertence ao hiperplano. Uma das razões pelas quais o nome deste conjunto está relacionada ao plano é justamente por ele ser definido por três informações, assim como o plano, ou seja, por x_1, por x_2 e pela ortogonalidade entre as diferenças entre os vetores.

Considerando o vetor $z = x_1 - x_2$, tem-se

$$(x_1 - x_2)(x - x_2) = z(x - x_2) = 0.$$

Note que, pela própria definição, o vetor z é ortogonal ao vetor $(x - x_2)$. Assim um hiperplano é definido pela direção do vetor z, perpendicular ao hiperplano, e por um ponto x_2 pertencente ao hiperplano. O vetor z é denominado de *vetor normal* ou *gradiente* do hiperplano.

Em outras palavras, considerando o escalar $\alpha = zx_2$, então:

$$(x_1 - x_2)(x - x_2) = z(x - x_2) = zx - zx_2 = zx - \alpha.$$

A figura 4.8 ilustra um hiperplano no $\mathbb{R}^2$.

Na figura 4.8 são dados $x_1 = (a, b)$, $x_2 = (-c, d)$. Calcula-se $z = x_1 - x_2 = (a+c, b-d)$. Como definido, o hiperplano H, passa por x_2 e é perpendicular a reta suporte de z. Note que para qualquer ponto $x \in H$, tem-se que o vetor $(x - x_2)$ é perpendicular a reta suporte de z.

Assim, o um hiperplano pode ser definido simplificadamentente por:

Definição 4.15 - *Hiperplano*

Um hiperplano H de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto na forma:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : zx = \alpha\}$$

onde $z \in \mathbb{R}^n, z \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ são dados. Em outras palavras, um hiperplano pode ser definido como o conjunto de pontos que satisfazem uma equação na forma:

$$\sum_{j=1}^{n} z_j x_j = \alpha$$

Algumas propriedades dos hiperplanos, de interesse da programação matemática, podem ser definidadas:

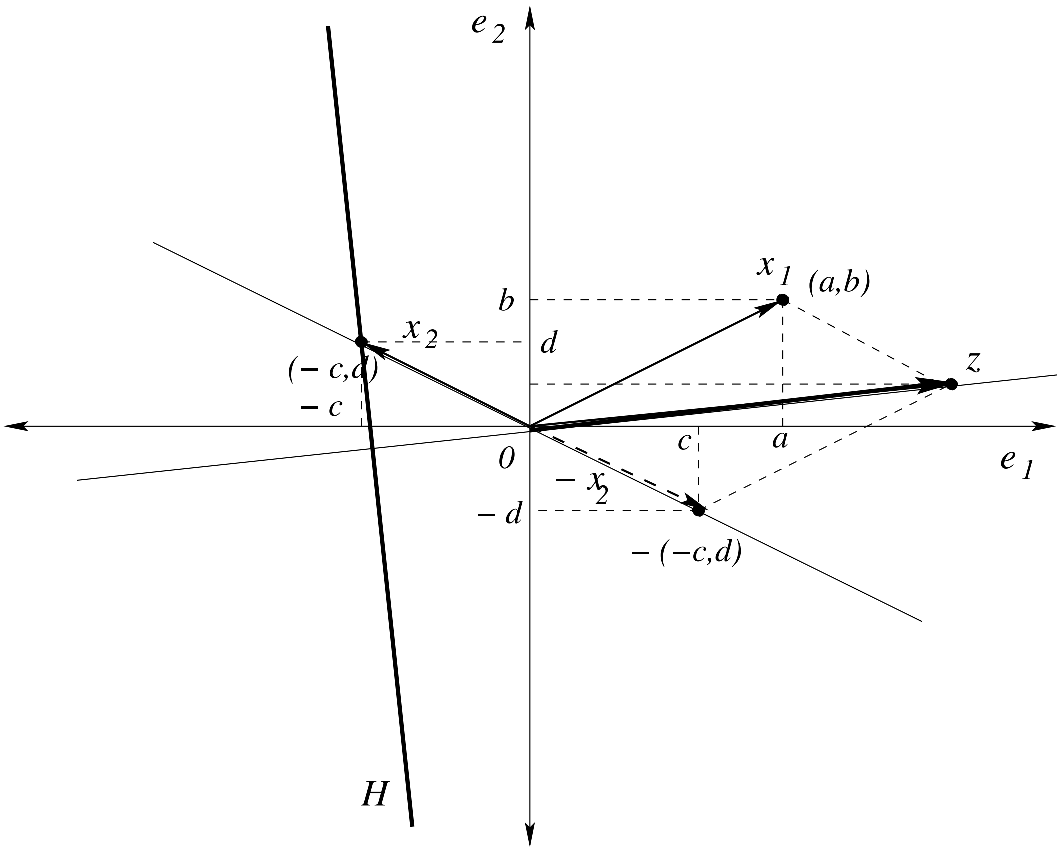


Figura 4.8: Hiperplano no $\mathbb{R}^2$

1. Um hiperplano em $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial de dimensão $n-1$, ou seja:
   (a) se $n = 1$, então os hiperplanos são pontos
   (b) se $n = 2$, então os hiperplanos são retas
   (c) se $n = 3$, então os hiperplanos são planos
2. Um hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : zx = \alpha\}$ é *paralelo* ao hiperplano $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : zx = \alpha_1\}$, para $\alpha \neq \alpha_1$.
3. Se $\alpha = 0$, então $H = \{x \in \mathbb{R}^n : zx = 0\}$ contém a origem do sistema de coordenadas.

Exemplos:

1. Encontrar o hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que contenha os quatros pontos: $e_1, e_1 + 2e_2, e_2 + 3e_3$ e $e_3 + 4e_4$. Lembre-se que para todo x do hiperplano, a equação $zx = \alpha$ deve ser satisfeita, assim, a solução deste problema é determinar z_1, z_2, z_3 e z_4 de maneira que o hiperplano contenha os quatro vetores dados. Assim

$$x = e_1 = (1,0,0,0) \Rightarrow \alpha = ze_1 = (z_1, z_2, z_3, z_4).(1,0,0,0) = z_1$$

$$x = e_1 + 2e_2 = (1,2,0,0) \Rightarrow \alpha = (z_1, z_2, z_3, z_4).(1,2,0,0) = z_1 + 2z_2$$

$$x = e_2 + 3e_3 = (0,1,3,0) \Rightarrow \alpha = (z_1, z_2, z_3, z_4).(0,1,3,0) = z_2 + 3z_3$$

$$x = e_3 + 4e_4 = (0,0,1,4) \Rightarrow \alpha = (z_1, z_2, z_3, z_4).(0,0,1,4) = z_3 + 4z_4$$

Assim determina-se as componentes de z que satisfazem a definição de hiperplano: $z_1 = \alpha$, $z_2 = 0$, $z_3 = \alpha/3$ e $z_4 = \alpha/6$. O hiperplano procurado é então dado por:

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : \alpha x_1 + \alpha/3x_3 + \alpha/6x_4 = \alpha\}$$

Por conveniência, fazendo $\alpha = 6$, o hiperplano procurado é dado por:

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : 6x_1 + 2x_3 + x_4 = 6\}$$

4.5.3 Semi-espaços

Um hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : zx = \alpha\}$, com $z \in \mathbb{R}^n, z \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, divide o espaço $\mathbb{R}^n$ em dois *semi-espaços*:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : zx \geq \alpha\}$$

e

$$\{x \in \mathbb{R}^n : zx \leq \alpha\}$$

A figura 4.9 ilustra os dois semi-espaços definidos pela reta $zx = a$.

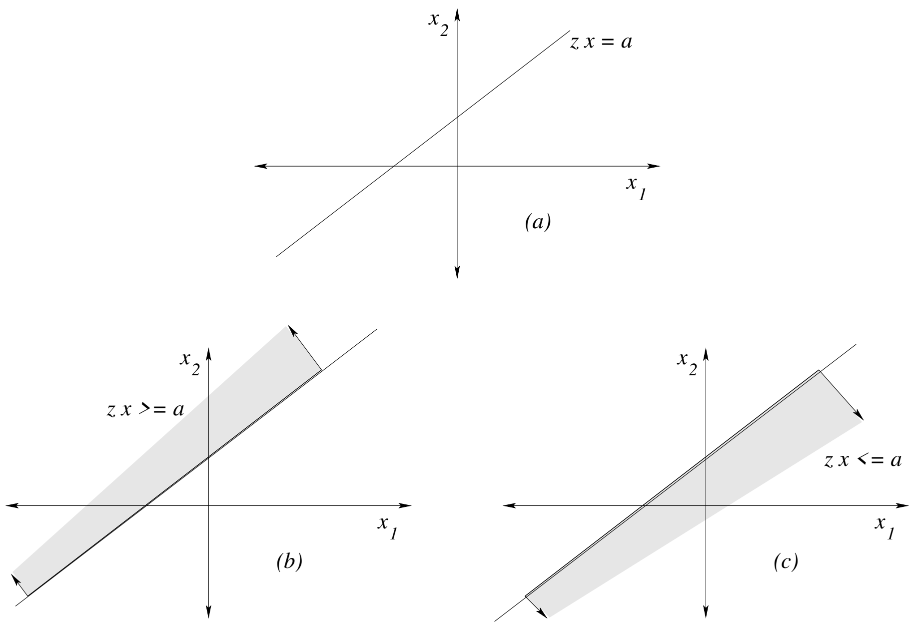


Figura 4.9: Semi-espaços

A figura 4.9-*(a)* mostra a reta $zx = a$; a figura 4.9-*(b)* mostra o semi-espaço $zx \geq a$; e a figura 4.9-*(c)* mostra o semi-espaço $zx \leq a$.

Proposição 4.2 - *Relação entre hiperplanos e semi-espaços*

Um semi-espaço em $\mathbb{R}^n$ é um hiperplano no $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 4.16 - *Semi-espaços fechados*

O conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : zx \geq \alpha\}$ é dito conjunto fechado ou semi-espaço fechado.

Definição 4.17 - *Semi-espaços abertos*

O conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : zx > \alpha\}$ é dito conjunto aberto ou semi-espaço aberto e não é um hiperplano.

4.5.4 Cones

Definição 4.18 - *Cones*

Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é denominado um $cone$ *se, para qualquer vetor $x \in C$, então $\theta x \in C$ para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$. Note que $0 \in C$, pois, por definição, se $\theta = 0$, $\theta x \in C$. Um caso de maior interesse aqui é $\theta \geq 0$.*

Observe que a definição de cones é um tanto genérica, vários conjuntos específicos são cones. Mais a diante estudaremos os cones poliedrais convexos que, por possuirem propriedades específicas, são de grande interesse ao estudo de Programação Matemática. A figura 4.10 mostra um cone no $\mathbb{R}^2$ com $\theta \geq 0$.

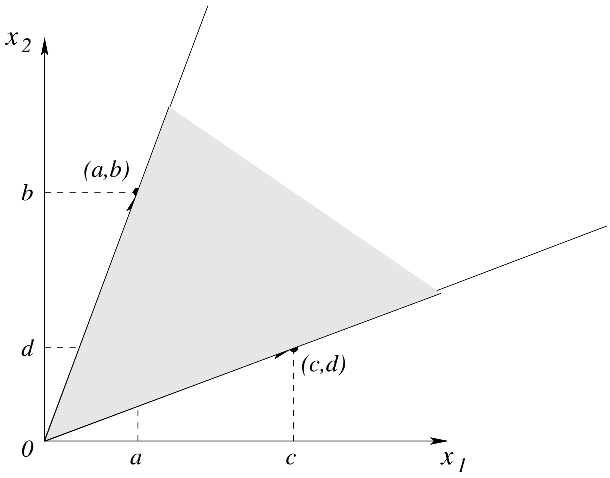


Figura 4.10: Um cone no $\mathbb{R}^2$

Note na figura 4.10 que, para qualquer ponto $x \in C$ (parte achurada do gráfico), tem-se $\alpha x \in C$, para qualquer $\alpha \geq 0$.

4.5.5 Esferas e bolas

Definição 4.19 *(Esferas e bolas)*

Dado um vetor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e um escalar $\rho > 0$. O conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| = \rho\}$ é denominado $(n-1)$-esfera com centro em x_0 e raio ρ. O conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| \leq \rho\}$ denominados bolas.

4.5.6 Direções e Raios

Definição 4.20 *: - Direção*

Dado um ponto $x \in \mathbb{R}^n$. A reta que passa na origem 0 do sistema e no ponto x define uma direção em $\mathbb{R}^n$.

Em outras palavras, uma direção é a reta suporte de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, uma direção em $\mathbb{R}^n$ é definida por um vetor em $\mathbb{R}^n$.

Definição 4.21 *: - Raio*

Dado um vetor $x_0 \in \mathbb{R}^n$, uma direção $d \in \mathbb{R}^n$ e um escalar $\lambda \geq 0$. O conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x_0 + \lambda d, \lambda \geq 0\}$ é denominado raio de x_0 na direção de d.

A figura 4.11 ilustra as definições de direção e raio.

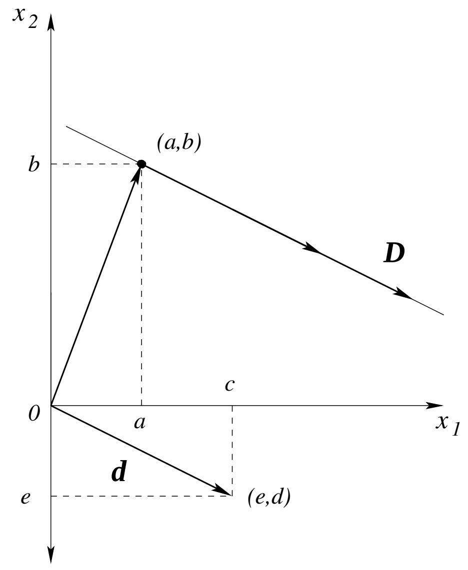


Figura 4.11: Direção e raio no $\mathbb{R}^2$

A figura 4.11 mostra o raio $D = x_0 + \lambda \mathbf{d}$ onde $x_0 = (a, b)$ e $\mathbf{d} = (c, e)$.

4.6 Noções de Topologia em $\mathbb{R}^n$

4.6.1 Vizinhança

Definição 4.22 *: - Vizinhança*

Uma vizinhança de um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é uma n-bola $V = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| < \rho\}$, onde $\rho > 0$ é chamado de raio de V. Utiliza-se também a notação V_ρ.

4.6.2 Fronteiras de um conjunto

Definição 4.23 *: - Ponto interior*

Seja A um conjunto qualquer de $\mathbb{R}^n$. O vetor x é um ponto interior de A, se existe alguma vizinhança V de x tal que $V \subset A$.

Exemplo 4.4 *$B = \{x : ||x|| < 1\}$ são os pontos interiores do conjunto $A = \{x : ||x|| \leq 1\}$*

Definição 4.24 *: - Ponto exterior*

Seja A um conjunto qualquer de $\mathbb{R}^n$. O vetor x é um ponto exterior de A, se alguma vizinhança de x está contida no complementar $A^c = \mathbb{R}^n - A$.

Definição 4.25 *: - Ponto fronteira*

O vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é fronteira de um conjunto A qualquer de $\mathbb{R}^n$ se qualquer vizinhança de x contém pelo menos um ponto de A e pelo menos um ponto de $A^c = \mathbb{R}^n - A$.

Definição 4.26 *: - Conjunto aberto*

Um conjunto A é $aberto$, se todo ponto de A é interior a A.

Definição 4.27 *: - Conjunto fechado*

Um conjunto A é $fechado$, se seu complementar for aberto.

4.6.3 Convergencia a um limite

Uma sequência ordenada $x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ de vetores do $I\!R^n$, notada por $\{x^k\}_{k \in I\!N}$, ou simplesmente $\{x^k\}$, converge para o limite x si a norma $||x^k - x||$ tende a zero quando k tende a infinito, ou seja

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : k \geq N \Rightarrow ||x^k - x|| < \varepsilon.$$

Se x é o limite da sequência $\{x^k\}$, utiliza-se a notação $x^k \to x$.

4.7 Análise Convexa

A partir desta seção, considera-se um vetor de dimensão n como uma matriz de n linhas e uma coluna, entretanto mantem-se a notação de letra minúscula para vetor e letra maúscula para matrizes.

4.7.1 Conjuntos Convexos

Definição 4.28 - *Conjuntos Convexos*

Um conjunto $S \subset I\!R^n$ é $convexo$ se e somente se:

$$\left.\begin{array}{rcl} \forall\, x & \in & S \\ \forall\, y & \in & S \\ \forall\, \lambda\ (0 \leq \lambda \leq 1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in S$$

Em outras palavras, um conjunto S é convexo, se e somente se, dados dois pontos quaisquer de S, todas as combinações convexas destes dois pontos também pertencem à S.

Proposição 4.3 *: Hiperplanos são conjuntos convexos.*

Demonstração: Seja o hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : z^T x = \alpha\}$. Deseja-se demonstar que $x_1 \in H$ e $x_2 \in H$, então $\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in H$, com $\lambda \in [0,1]$.

- se $x_1 \in H$ e $x_2 \in H$, então $z^T x_1 = \alpha$ e $z^T x_2 = \alpha$;
- seja o escalar $\lambda \in [0,1]$, então $\lambda z^T x_1 = \lambda\alpha$ e $(1-\lambda) z^T x_2 = (1-\lambda)\alpha$;
- assim, $z^T(\lambda x_1) + z^T[(1-\lambda)x_2] = \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha$;
- logo, $z^T[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] = \alpha$;
- ou seja, a combinação convexa de dois pontos de H também pertence à H. $\square$

Outros exemplos (demostrar cada um deles):

1. $\mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo.
2. O conjunto vazio e conjuntos de um único ponto são conjuntos convexos.
3. Bolas são conjuntos convexos.

4.7.2 Conjunto Poliedral Convexo - Poliédro convexo

Definição 4.29 - *Conjunto Poliedral Convexo*

Um conjunto poliedral convexo é um conjunto formado pela interseção de um número finito de semi-espaços fechados. Um conjunto poliedral convexo é também chamado de poliédro convexo.

Por essa definição, podemos demonstrar que, conforme o intersse, vários conjuntos são conjuntos poliedrais convexos. Definiremos um aqui que temos um especial interesse nele:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

onde A é uma matriz $m \times n$ e b um vetor de dimensão m. Este conjunto é um conjunto poliedral convexo. Considere que todas as linhas da matriz A sejam linearmente independentes.

A figura 4.12 mostra um conjunto poliedral convexo.

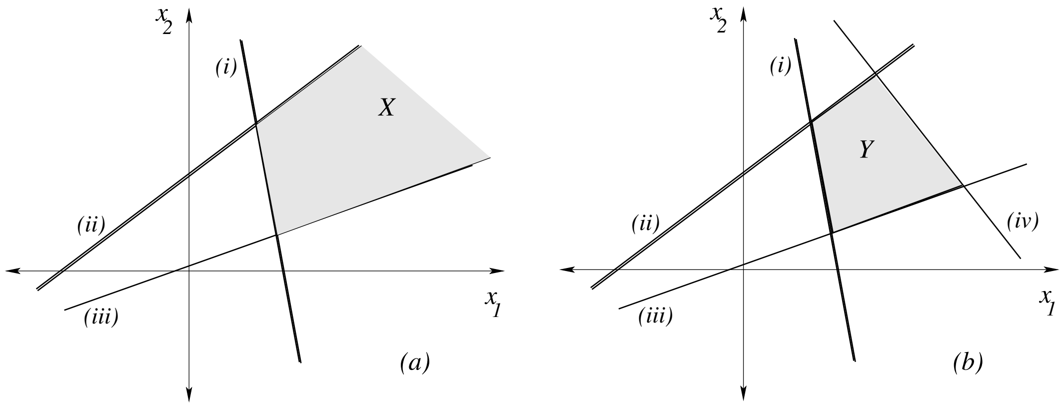


Figura 4.12: Conjunto poliedral convexo

O conjunto poliedral convexo X mostrado pela figura 4.12-*(a)* é formado pela interseção dos semi-espaços fechados *(i)*, *(ii)* e *(iii)*. Note que X é fechado e ilimitado. Já o conjunto Y mostrado pela figura 4.12-*(b)* é formado pela interseção dos mesmos semi-espaços fechados *(i)*, *(ii)* e *(iii)*, e anda a interseção do semi-espaço *(iii)*. No caso 4.12-*(b)*, Y é fechado e limitado.

Definição 4.30 - *Politopo*

Um conjunto poliedral convexo S é chamado de politopo se S for fechado e limitado.

Proposição 4.4 *Um conjunto poliedral convexo é um conjunto convexo.*

Demonstração:

4.7.3 Ponto Extremo de um poliedro convexo

Definição 4.31 - *Ponto Extremo ou Vértice*

Um ponto extremo de um poliedro convexo $X = \{x : Ax = b,\ x \geq 0\}$ é todo ponto $x \in X$ que não pode ser escrito como combinação convexa de dois outros pontos $x_1 \in X$ e $x_2 \in X$, com $x_1 \neq x_2 \neq x$. Os pontos extremos de um poliédro convexos são também denominados de vértices do poliédro.

Note que, se o poliédro convexo $X = \{x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ é um politopo, então X possui um número finito q de vértices $v^1, v^2, \ldots, v^q$, pois seus vértices são interseção de seus semiplanos e, ainda, X pode ser escrito em função de todos os seus vértices, isto é, se $v^1, v^2, \ldots, v^q$ são os vértices de $X = \{x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$, então $x \in X$ se e somente se, $x = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j$, tal que $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j = 1$ e $\lambda_j \geq 0$, para $j = 1, 2, \ldots, q$.

Teorema 4.1 *Se x é um ponto extremo do poliedro convexo $X = \{x : Ax = b,\ x \geq 0\}$, então supt($x$) é minimal, isto é, x possui um número mínimo de coordenadas não nulas de maneira que não existe $y \in X$ tal que supt(y) $\subsetneq$ supt(x), ou seja, supt(y) $\subset$ supt(x) e supt(y) $\neq$ supt(x).*

Demonstração:

Se supt(x) não é mínimo, então existe uma solução realizável $y \in X$ tal que supt(y) $\subsetneq$ supt(x), ou seja, supt(y) $\subset$ supt(x) e supt(y) $\neq$ supt(x), e supt(y) é minimal. Seja $j \in$ supt(y) tal que

$$\frac{x_j}{y_j} = \text{ Min}\{\frac{x_j}{y_j}\} = \lambda > 0.$$

Calculando-se λ desta meneira e, como definido, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, tem-se então $x - \lambda y \geq 0$. Por outro lado, x e y são realizáveis, logo, $Ax = b$ e $Ay = b$, o que implica que $\lambda Ay = \lambda b$, ou ainda $Ax - \lambda Ay = b - \lambda b$, ou seja, $A(x - \lambda y) = (1 - \lambda)b$.

Considerando agora duas possibilidades para o valor de $\lambda \geq 0$:

1. Se $\lambda \geq 1$

   Como $Ax = b$ e $Ay = b$, pois são duas soluções realizáveis, o vetor $(x - y)$ satisfaz

   $$A(x - y) = 0$$

   Por hipótese $x \neq y$ e $\lambda \geq 0$, então $x - y = t > 0$ e $At = 0$. Por outro lado,

   $$x = y + t = \frac{1}{2}(y + \frac{2}{3}t) + \frac{1}{2}(y + \frac{4}{3}t) = \frac{y^1 + y^2}{2},$$

   onde $y^1 = y + \frac{2}{3}t$ e $y^2 = y + \frac{4}{3}t$, logo $y^1 \neq y^2$. Com substituição direta destes valores, obtem-se $Ay^1 = Ay^2 = b$. Como $y^1 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$, x é então uma combinação convexa de outros pontos, o que é uma contradição. Logo $\lambda \not\geq 1$.

2. Se $\lambda < 1$

   Seja o vetor $z = (x - \lambda y)/(1 - \lambda)$. Substituindo diretamente os valores, observa-se que $z \geq 0$ e $Az = b$. Por outro lado, $z \neq x$, pois supt(z) $\subsetneq$ supt(x), e $z \neq y$, pois $y_j \neq 0$ quando $z_j = 0$. Através da expressão de z, conclui-se que

   $$x = \lambda y + (1 - \lambda)z,$$

   ou seja, x é uma combinação convexa de duas outras soluções, o que é uma contradição.

Logo, supt(x) é mimimal. ■

4.7.4 Cone Convexo e Cone Poliedral Convexo

Definição 4.32 - *Cone Convexo*

Um conjunto C é um cone convexo se a combinação convexa de quaisquer dois pontos de C também pertence a C.

Em outras palavras, se C é um cone convexo, então, se $\forall x_1 \in C$, $\forall x_2 \in C$, $\alpha_1 \geq 0$ e $\alpha_2 \geq 0$ tais que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, implica em $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in C$.

Definição 4.33 - *Cone Poliedral Convexo*

Seja A uma matrix $n \times m$, então conjunto $C = \{x \in I\!R^n : Ax \leq 0\}$, é denominado um Cone Poliedral Convexo.

Note que um cone poliedral convexo é um poliédro convexo, fechado e ilimitado, formado pela interseção de vários semiespaços passando pela origem.

4.7.5 Raios Extremos

Definição 4.34 - *Raios Extremos*

Seja $X = \{x \in I\!R^n : Ax \leq b\}$ um poliédro convexo, fechado e ilimitado. O vetor $r \in X$ é um raio extremo de X, se $r \in X$ é um raio, isto é, para qualquer $\lambda \geq 0$, $\lambda r \in X$, e r não pode ser obtido como combinação convexa de dois outros raios, $r^1 \in X$ e $r^2 \in X$.

Note que um cone poliedral convexo pode ser escrito em função de seus q raios extremos $r^1, r^2, \ldots, r^q$, isto é, se $C = \{x \in I\!R^n : Ax \leq 0\}$, então, qualquer $x \in C$, $x = \sum_{i=1}^{q} \mu_i r^i$, com $\mu_i \geq 0$, para $i = 1, 2, \ldots, q$.

4.7.6 Representação de um conjunto poliédrico convexo

Considera-se o poliédro convexo $X = \{x \in I\!R^n : Ax = b, x \geq 0\}$, com A uma matriz $m \times n$ de posto m. Sejam $v^1, v^2, \ldots, v^p$ os vértices de X e $r^1, r^2, \ldots, r^q$ os raios extremos de X.

Teorema 4.2 *Um vetor x pertence a X se e somente se existem $\lambda_j \geq 0$, com $j = 1, 2, \ldots, p$, tais que $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$, e $\mu_i \geq 0$, para $i = 1, 2, \ldots, q$, para os quais*

$$x = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j v^j + \sum_{i=1}^{q} \mu_i r^i$$

Este teorema garante que qualquer poliédro convexo pode ser escrito em função de seus pontos extremos e seus raios extremos.

4.8 Resolução de Sistemas Lineares

4.8.1 Eliminação de Fourier-Motzkin

Seja o sistema de inequações lineares:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_1 \quad \forall i = 1, \ldots, k \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_2 \quad \forall i = k+1, \ldots, n \tag{4.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n \tag{4.3}$$

4.8.2 Eliminação de Gauss

1. Localize a primeira coluna de A que contém um elemento não-nulo.

2. Se o primeiro elemento (de cima) nesta coluna não for zero, permute a primeira linha de A com uma linha na qual o elemento correspondente seja diferente de zero.
3. Agora o primeiro elemento em nossa coluna é não-nulo. Substitua por zero os elementos abaixo dele, na mesma coluna, através da adição de múltiplos apropriados da primeira linha às linhas subjacentes.
4. Repita este ciclo até obter uma matriz escalonada.

4.9 Exemplos

4.9.1 Combinação Linear

1. Sejam os dois pontos ($p = 2$) do $I\!R^3$ linearmente independentes: $x_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ e $x_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3)$. Um ponto $x = (x^1, x^2, x^3) \in I\!R^3$ é uma combinação linear de x_1 e x_2 se, e somente se, suas componentes x^j $(j = 1, 2, 3)$ podem ser escritas:
$$x^1 = \mu_1 x_1^1 + \mu_2 x_2^1$$
$$x^2 = \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2$$
$$x^3 = \mu_1 x_1^3 + \mu_2 x_2^3$$
onde $\mu_1 \in I\!R$ e $\mu_2 \in I\!R$.

4.9.2 Combinação convexa

Sejam os três pontos ($p = 3$) do $I\!R^5$ linearmente independentes : $x_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4, x_1^5)$, $x_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4, x_2^5)$ e $x_3 = (x_3^1, x_3^2, x_3^3, x_3^4, x_3^5)$. Um ponto $x = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \in I\!R^5$ é uma combinação convexa de x_1, x_2 e x_3 se, e somente se, suas componentes x^j $(j = 1, \ldots, 5)$ podem ser escritas:
$$x^1 = \mu_1 x_1^1 + \mu_2 x_2^1 + \mu_3 x_3^1$$
$$x^2 = \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \mu_3 x_3^2$$
$$x^3 = \mu_1 x_1^3 + \mu_2 x_2^3 + \mu_3 x_3^3$$
$$x^4 = \mu_1 x_1^4 + \mu_2 x_2^4 + \mu_3 x_3^4$$
$$x^5 = \mu_1 x_1^5 + \mu_2 x_2^5 + \mu_3 x_3^5$$
onde:
$$\mu_1 \geq 0,\ \mu_2 \geq 0\ \mu_3 \geq 0 \text{ e } \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$$

4.9.3 Politopo convexo

Seja o politopo convexo do problema de Programação Linear:

Considere o problema do exemplo 2.1:

$$\begin{array}{lccccrrr}
\max & z & = & 3\ x_1 & +5\ x_2 & & & (0) \\
\text{sujeito às} & & & x_1 & & \leq 4 & & (1.1) \\
\text{restrições} & & & & 2\ x_2 & \leq 12 & & (1.2) \\
 & & & 3\ x_1 & +2\ x_2 & \leq 18 & & (1.3) \\
 & x_1 \geq 0 & (2.1) & & x_2 \geq 0 & (2.2) & &
\end{array}$$

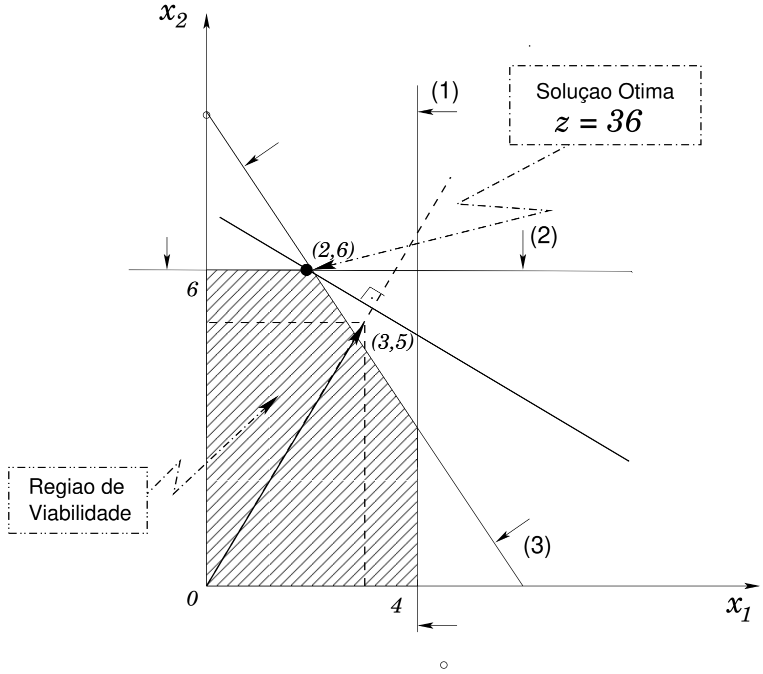


Figura 4.13: Solução Gráfica do exemplo 2.1

cuja resolução gráfica deste problema é mostrada pela figura 4.13.

Pela figura, observa-se que os pontos extremos do politopo convexo são: $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,6)$, $(2,6)$ e $(4,3)$. Assim, escrevendo o politopo em função dos pontos extremos, tem-se:

$$
\begin{array}{rcllllll}
\max & z & = & 3\ x_1 & +5\ x_2 & & & \\
\text{sujeito às} & x_1 & = & 0\ \mu_1 & +\ 4\ \mu_2 & +\ 0\ \mu_3 & +\ 2\ \mu_4 & +\ 4\ \mu_5 \\
\text{restrições} & x_2 & = & 0\ \mu_1 & +\ 4\ \mu_2 & +\ 6\ \mu_3 & +\ 6\ \mu_4 & +\ 3\ \mu_5 \\
 & & & 1\ \mu_1 & +\ 1\ \mu_2 & +\ 1\ \mu_3 & +\ 1\ \mu_4 & +\ 1\ \mu_5 \quad = \quad 1 \\
 & \mu_i & \geq & 0 & \forall i & = 1, 2, & \ldots, & 5
\end{array}
$$

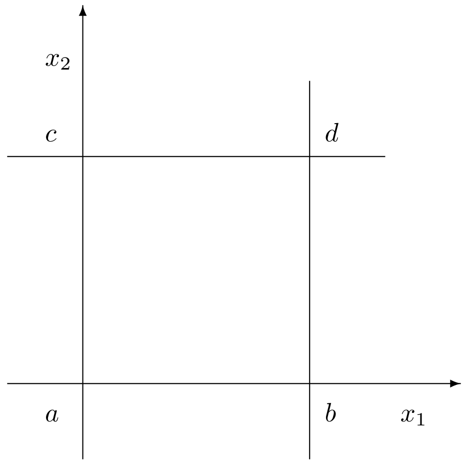
4.10 Execícios

Dada a matriz:

$$
A_{5\times 6} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 7 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}_{5\times 6}
$$

4.10.1 Ponto extremo

Seja o poliédro $X = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_3 = 1, x_2 + x_4 = 1 \text{ e } x \geq 0\}$. Representando geometricamente x_1 nos eixos das absissas e x_2 no eixo das ordenadas, com x_3 e x_4 como variáveis de folga abaixo.



Os pontos extremos deste poliédro são: $a = (0,0,0,0)$, $b = (1,0,0,1)$, $c = (0,1,1,0)$ e $d = (1,1,0,0)$. Verifique o teorema 4.1 para os vérticies deste poliédro.

Capítulo 5

Álgebra da Programação Linear

Definição 5.1 *Programa Linear*

Um Programa Linear (PL) é todo problema (P) que pode ser escrito sob a forma padrão:

$$\begin{array}{ll} \max & z = cx \\ \text{s. à} & Ax = b \qquad\qquad (P) \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Seja um PL sob a forma padrão[1]. Permutando as colunas da matriz A pode-se obter $A = [B, N]$ onde B é uma base. Assim, pode-se escrever também $c = [c_B, c_N]$ e $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$. Toda solução de (P) verifica $Bx_B + Nx_N = b$.

Definição 5.2 *Solução Básica*

A Solução Básica associada à base B é uma solução particular de (P) obtida fazendo $x_N = 0$. O valor de x_B pode ser então obtido resolvendo o sistema (resolução de Cramer):

$$Bx_B = b \qquad : \qquad x_B = B^{-1}b$$

Definição 5.3 *Solução Básica Realizável*

Uma solução básica é realizável se $x \geq 0$ (ou $B^{-1}b \geq 0$)

Teorema 5.1 *O conjunto de pontos extremos de um politopo $X = \{x \in I\!R^n : Ax = b; x \geq 0\}$ corresponde ao conjunto de soluções básicas realisáveis.*

Demonstração:

A demonstração é feita em duas etapas:

1. se x é uma solução básica realizável, então x é um ponto extremo.

   Se x é uma solução básica realizável, x pode ser escrito como $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0)$. Supondo que x possa ser escrito como combinação linear de dois outros pontos realizáveis, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) \in X$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_n) \in X$, então

$$x = \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta$$

[1] Sugere-se ler a próxima seção (seção 5.1) para maiores detalhes.

com $0 < \lambda < 1$ e $x \neq \alpha \neq \beta$.

Dado que $0 < \lambda < 1$, e α e β são realizáveis ($\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$), então

$$\lambda \alpha_j + (1-\lambda)\beta_j = 0, \ \forall \ j = m+1, \ldots, n,$$

o que implica em

$$\alpha_j = \beta_j = 0, \ \forall \ j = m+1, \ldots, n.$$

Como as m primeiras componentes de x são únicas e obtidas através da resolução do sistemas de equações $Bx_B = b$, então, $x = \alpha = \beta$, o que implica que x só pode ser obtido dele mesmo, e não de uma combinação linear de outros pontos realizáveis.

2. se x é um ponto extremo, então x é uma solução básica realizável.

   Se x é um ponto extremo, pelo teorema 4.1, supt(x) é minimal. Portanto resta mostrar que, para um ponto extremo ser uma solução básica, $|$supt$(x)| \leq m$.

   Supondo que $|$supt$(x)| > m$, então as colunas da matriz A correspondentes às componentes não nulas de x são linearmente dependentes. Assim, existe y tal que supt(y) $\subset$ supt(x), $Ay = 0$ e $y \neq x$. Seja λ calculado:

$$\lambda = -\min_{i:y_i<0}\{-\frac{x_i}{y_i}\} \quad \text{ou} \quad \lambda = -\min_{i:y_i \geq 0}\{\frac{x_i}{y_i}\}.$$

   Assim, o vetor $z = x + \lambda y$ seria uma solução realizável, isto é, $z \geq 0$, com supt(z) $\subsetneq$ supt(x), onde surge uma contradição, pois supt(x) é mimimal. Logo $|$supt$(x)| \leq m$, e x é uma solução básica realizável. ■

Colorário 5.1.1 *O conjunto (politopo) convexo $X = \{X \in I\!R^n : Ax = b; x \geq 0\}$ possui um número finito $v(x)$ de pontos extremos e $v(x) \leq C_n^m$, onde m é a dimensão do vetor b.*

Colorário 5.1.2 *Todos os pontos de um poliedro convexo $X \subset I\!R^n$ são combinação convexa dos pontos extremos de X.*

Teorema 5.2 *Otimalidade de um ponto extremo: dado o Programa Linear (P):*

$$\begin{array}{lll} \max & z = cx & \\ \text{s. à} & Ax = b & \qquad (P) \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

O ótimo de z (ou seja, o $\max z$) se encontra em ao menos um ponto extremo do politopo $X = \{X \in I\!R^n : Ax = b; x \geq 0\}$. Se ele se encontra em vários pontos extremos, ele também se encontra em todos os pontos formados pelas combinações convexas destes pontos extremos.

Teorema 5.3 *Condição necessária e suficiente para a otimalidade de uma solução básica*

Uma condição necessária e suficiente para que uma solução básica viável seja ótima é

$$\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N \geq 0$$

onde $\bar{c}_N$ é o vetor de coeficientes das variáveis não básicas na função objetivo.

5.1 Interpretação algébrica do método simplex

Seja um programa linear (P') escrito sob a forma padrão:

$$\begin{array}{lll} \max & z = c'x' & \\ \text{s. à} & A'x' \leq b & \qquad (P'). \\ & x' \geq 0 & \end{array}$$

Ao introduzir a variável de folga x_{n+i} para cada uma das m equações, ou seja $i = 1, 2, \ldots, m$, o problema na forma canônica (P) equivalente ao problema (P') obtido pode ser escrito:

$$\begin{array}{ll} \max & z = cx \\ \text{s. à} & Ax = b \qquad\qquad (P), \\ & \quad x \geq 0 \end{array}$$

ou simplesmente:

$$\begin{array}{rl} z & = cx \\ Ax & = b \qquad\qquad (P), \\ x & \geq 0 \end{array}$$

onde uma solução básica inicial é obtida com as seguintes características:

- as n variáveis originais do problema são não básicas, portanto nulas;
- as m variáveis de folga são as variáveis básicas, portanto, iguais aos respectivos lados direitos;
- o valor da função objetivo desta solução é nulo ($z = 0$).

Por outro lado, em (P), os vetores c e x, e a matriz A, da solução básica inicial, podem ser escritos:

- $c = [c_N, c_B]$, onde c_N são os n coeficientes das variáveis não básicas, que inicialmente são as variáveis originais do problema, e c_B são os m coeficientes das variáveis básicas, que inicialmente são as variáveis de folga. Observe que inicialmente os elementos de c_B são nulos;
- $x = \begin{bmatrix} x_N \\ x_B \end{bmatrix}$, onde x_N são as n variáveis não básicas que, inicialmente, são as variáveis originais do problema e x_B são as m variáveis básicas que, inicialmente, são as variáveis de folga;
- $A = [N, B]$, onde N é antes definida, matriz A de dimensão m por n formada pelos coeficientes das variáveis originais nas restrições do programa linear. A matriz B é a matriz identidade I da ordem m. A atual matriz A é igual à $[N, I]$.

Logo, o quadro inicial do simplex mostra o problema:

$$z = [c_N, c_B] \begin{bmatrix} x_N \\ x_B \end{bmatrix}$$

$$[N, B] \begin{bmatrix} x_N \\ x_B \end{bmatrix} = b,$$

ou seja, a solução inicial de (P) verifica $Nx_N + Bx_B = b$.

Como as variáveis não básicas são nulas, isto é, todos os elementos do vetor x_N são zeros, tem-se $Bx_B = b$. Mas, inicialmente, $B = I$ e $Ix_B = b$, logo, a solução inicial do simplex é $x_B = b$, ou seja, as variáveis de folga são iguais ao lado direito das restrições.

Por outro lado, com algumas simples inversões de colunas, sem ainda realizar nenhuma iteração do simplex, pode-se escrever a matriz A e os vetores acima da seguinte maneira: $A = [B, N]$, $c = [c_B, c_N]$ e $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$. Escrevendo a matriz A e os vetores c e x desta forma, a solução de inicial de (P) verifica $Bx_B + Nx_N = b$.

Uma iteração do método simplex consiste na mudança de base onde uma variável básica sai da base e uma variável não básica entra na base. Mesmo depois de iterações sucessivas, uma base pode ser identificada e, com simples inversões na ordem das variáveis (inversões de colunas), a equação $Bx_B + Nx_N = b$ sempre é verificada, inclusive na solução ótima.

Como, em qualquer solução básica, inclusive na solução ótima, $x_N = 0$, tem-se $Bx_B = b$, logo, $x_B = B^{-1}b$. Isto significa que, para obter uma solução básica relativa à uma base x_B qualquer, basta identificar na matriz A as colunas das variáveis que compõem a base. Estas colunas compõem a matriz B, obter sua inversa B^{-1} e multiplicar pela esquerda o vetor b por B^{-1}.

Observa-se que a matriz A do quadro inicial do simplex mostrada acima, $A = [N, I]$, e que o método simplex, durante as iterações, mantém sempre a matriz identidade em seu quadro. Assim, direcionado pela condição de otimalidade: $\bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N \geq 0$, onde todos os coeficientes da função objetivo são não negativos, o simplex durante as iterações, ao colocar e tirar variáveis da base, está buscando a matriz inversa daquela mostrada no quadro inicial composta pelas variáveis básicas.

Em outras palavras, seja x^* uma solução ótima, a matriz B é aquela mostrada no quadro inicial do simplex composta pelas variáveis básicas desta solução ótima. A matriz B^{-1} é mostrada no quadro final composta pelas colunas da matriz identidade inicial (rever inversão de matriz na seção anterior).

Exemplo 5.1 *Interpretação algébrica do simplex.*

Seja o quadro inicial do primeiro exemplo resolvido:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
	1	- 3	- 5	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	2	0	1	0	12
x_5	0	3	2	0	0	1	18

A solução ótima foi obtida no quadro simplex:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
	1	0	0	0	3/2	1	36
x_3	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6
x_1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

onde

$$x_B^* = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

No quadro inicial, as colunas destas variáveis que compõem a base formam a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

é obtida no quadro final pelas colunas das variáveis que compunham a base inicial. Observe que a equação $x_B^* = B^{-1}b$ é verificada, ou seja

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 6

Dualidade

6.1 Definições em dualidade

Seja o programa linear na forma padrão :

$$
(P)\left\{
\begin{array}{lll}
\max & z = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{s.a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \forall i = 1, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0 & \forall j = 1, \ldots, n
\end{array}
\right.
$$

Se considerarmos as matrizes

$$
x_{n1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_i \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad
A_{mn} = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}
\end{bmatrix}, \quad
b_{m1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_i \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{e}
$$

$c_{1n} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_j & \ldots & c_n \end{bmatrix}$.

Definição 6.1 *Primal*

Chama-se PRIMAL o programa linear (P):

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = cx \\
\text{s. à} & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
\end{array}
\qquad (P)
$$

Definição 6.2 *Dual*

Chama-se DUAL (D) do programa linear (P) definido acima, o programa linear escrito sob a forma:

$$
\begin{array}{ll}
\min & w = b^T y \\
\text{s. à} & A^T y \geq c^T \\
 & y \geq 0
\end{array}
\qquad (D)
$$

onde b^T, A^T e c^T são as matrizes transpostas de b, A e c, respectivamente. As m componentes do vetor y são as variáveis do problema.

Escreve-se ainda o dual utilizando de somatórios:

$$(D)\left\{\begin{array}{lll} \max & z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{s.a} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & \forall j = 1, \ldots, n \\ & y_i \geq 0 & \forall i = 1, \ldots, m \end{array}\right.$$

Note então que, se o programa primal possui m restrições (linhas) e n variáveis (colunas), então o programa dual associado possui n restrições (linhas) e m variáveis (colunas). Como mostra as próximas seções, as variáveis duais estão relacionadas às restrições do primal e as restrições do dual estão relacionadas às variáveis primais.

Exemplo 6.1

Seja o programa linear (P) abaixo denominado PRIMAL:

$$\begin{array}{lcccccc} \max & z & = & 4\,x_1 & +5\,x_2 & & (0) \\ \text{sujeito às} & & & 2\,x_1 & +\ x_2 & \leq 8 & (1) \\ \text{retrições} & & & x_1 & +2\,x_2 & \leq 7 & (2) \\ & & & 0\,x_1 & +\ x_2 & \leq 3 & (3) \\ & x_1 \geq 0 & & & & x_2 \geq 0 & \end{array}$$

o programa linear DUAL associado à (P), ou simplesmente o DUAL de (P) é:

$$\begin{array}{lcccccc} \min & w & = & 8\,y_1 & +7\,y_2 & +3\,y_3 & & (0) \\ \text{sujeito às} & & & 2\,y_1 & +\ y_2 & +0\,y_3 & \geq 4 & (1) \\ \text{retrições} & & & y_1 & +2\,y_2 & +1\,y_3 & \geq 5 & (2) \\ & & & y_1 \geq 0 & y_2 \geq 0 & y_3 \geq 0 & & \end{array}$$

6.2 Teoremas em dualidade

Como apresentado pela seção anterior, dado um programa linear na forma padrão, denomidado PRIMAL, define-se o programa linear DUAL associado a ele. Partindo da definição do dual, mostra-se através de teoremas, as consequências desta definição e sua importância para uma maior interpretação, principalmente econômica, da teoria da Programação Linear.

Inicialmente apresenta-se um teorema que generaliza a definição de dualidade.

Teorema 6.1 Generalização do Dual
O Dual do Dual é o Primal

Este teorema generaliza a definição do DUAL para qualquer programa linear PRIMAL, mesmo fora da forma padrão.

Ao demonstrar que o dual do dual é o primal, verifica-se que se torna desnecessário definir qual o programa linear é o primal e qual é o dual. Basta portanto, identificar um programa como primal e o outro será o seu dual. Assim, dado um programa linear qualquer (fora da forma padrão), para construir o seu dual pode-se utilizar uma tabela gerada a partir da demonstração do teorema acima, onde se descreve as relações entre as variáveis e restrições dos programas lineares primais-duais (tabela 6.1).

PRIMAL (DUAL)	DUAL (PRIMAL)
maximizar	minimizar
$i^{\text{ésima}}$ restrição $\geq$	$i^{\text{ésima}}$ variável ≤ 0
$i^{\text{ésima}}$ restrição $\leq$	$i^{\text{ésima}}$ variável ≥ 0
$i^{\text{ésima}}$ restrição $=$	$i^{\text{ésima}}$ variável $\in I\!R$
$j^{\text{ésima}}$ variável ≥ 0	$j^{\text{ésima}}$ restrição $\geq$
$j^{\text{ésima}}$ variável ≤ 0	$j^{\text{ésima}}$ restrição $\leq$
$j^{\text{ésima}}$ variável $\in I\!R$	$j^{\text{ésima}}$ restrição $=$

Tabela 6.1: Conversão PRIMAL $\times$ DUAL

Para construir o programa linear dual de um programa linear primal qualquer, basta identificar a função objetivo do primal. Se a função objetivo do primal for de maximizar, então considera-se o primal como a coluna à esquerda e o dual a coluna à direita da tabela. Se a função objetivo do primal for de minimizar, então considera-se o primal como a coluna à direita e o dual como a coluna à esquerda da tabela. Os programas lineares primal (P) e o seu dual (D) são denominados par PRIMAL-DUAL.

O próximo teorema garante uma relação entre os valores das funções objetivo para quaisquer soluções viáveis do par de programas lineares primal-dual.

Teorema 6.2 *Se (P) e (D) são um par PRIMAL-DUAL, para qualquer solução viável $\bar{x}$ de (P) e qualquer solução viàvel $\bar{y}$ de (D), tem-se*

$$c\bar{x} \leq b^T\bar{y}$$

Este teorema garante então que o valor da função objetivo de qualquer solução viável do primal é menor ou igual ao valor da função objetivo de qualquer solução viável do dual.

A partir deste teorema, demonstra-se o corolário abaixo que garante uma relação entre os valores ótimos da função objetivo do par de programas lineares primal-dual.

Colorário 6.2.1 *Se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são soluções viáveis de (P) e (D), respectivamente, e se $c\bar{x} \geq b^T\bar{y}$, então:*

1. $c\bar{x} = b^T\bar{y}$
2. *$\bar{x}$ e $\bar{y}$ são as respectivas soluções ótimas de (P) e (D)*

Logo, o valor ótimo da função objetivo do primal é igual ao valor ótimo da função objetivo do dual.

O teorema e seu corolário acima garantem uma relação entre os valores das funções objetivo do primal e dual quando esses programas lineares possuem soluções viáveis. O teorema abaixo generaliza a relação de viabilidade para qualquer par primal-dual de programas lineares.

Teorema 6.3 *Teorema da Dualidade: considere o par de programas lineares duais (P) e (D)*

1. *Se um e outro admitem soluções viáveis, ambos têm ao menos uma solução ótima e o valor de suas funções objetivos são iguais;*
2. *Se um dos programas admite um conjunto de soluções viáveis nas quais a função objetivo é ilimitada (superiormente para (P) e inferiormente para (D)), logo o outro não tem solução viável;*
3. *Se (P) (resp. (D)) tem uma solução viável, mas (D) (resp. (P)) não, então (P) (resp. (D)) admite um conjunto de soluções viáveis nas quais a função objetivo é ilimitada superiormente (resp. inferiormente);*
4. *Pode acontecer que nem (P) e nem (D) tenham soluções viáveis*

Como já comentado na seção anterior, as variáveis duais estão relacionadas às restrições do primal e as restrições do dual estão relacionadas às variáveis do primal. Resta então mostrar mais detalhadamente estas relações. Antes porém, considere a definição abaixo.

Definição 6.3 *Restrições justas e folgadas: seja $\bar{x}$ uma solução viável de (P). Uma restrição i qualquer é denominada:*

1. *$folgada$ se $A_i\bar{x} < b_i$: isto implica que a variável de folga x_{n+i} associada a esta restrição é positiva, ou seja, $x_{n+i} > 0$ e portanto ela está na base na solução $\bar{x}$;*
2. *$justa$ se $A_i\bar{x} = b_i$: isto implica que a variável folga x_{n+i} associada a esta restrição é nula, ou seja, $x_{n+i} = 0$. Note aqui que $x_{n+i} = 0$ não implica que x_{n+i} esteja fora da base na solução $\bar{x}$, ela pode ser uma variável básica degenerada.*

Finalizando, o teorema abaixo (teorema da folga complementar) demonstra as condições necessárias e suficientes para quea duas soluções, uma do primal e outra do dual, sejam um par de soluções ótimas.

Teorema 6.4 *Teorema da folga complementar: as condições necessárias e suficientes para que duas soluções viáveis do par de programas lineares primal-duais (P) e (D) sejam um par de soluções ótimas são:*

- *se uma restrição de um dos programas lineares é folgada, a variável dual correspondente do dual é nula;*
- *se uma variável de um dos programas lineares é positiva, a restrição correspondente do dual é justa.*

Importante: pode ocorrer que uma restrição de um dos programas seja justa e a variável dual correspondente do dual seja nula.

As próximas seções apresentam as principais consequências e as aplicações dos teoremas da dualidade.

6.3 Consequências do teorema da folga complementar

Supondo que um programa linear (P) tenha uma solução ótima e esteja na sua forma padrão:

$$(P)\begin{cases} \max & z = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \forall i = 1,\dots,m \\ & x_j \ge 0 \qquad\qquad \forall j = 1,\dots,n \end{cases}$$

Após introduzir as variáveis de folga, o quadro inicial do método simplex pode ser generalizado:

base	z	x_1	x_2	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+i}	$\dots$	x_{n+m}	LD
	1	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_j$	$\dots$	$-c_n$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	0
x_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	b_1
x_{n+2}	0	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2j}	$\dots$	a_{2n}	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	b_2
$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+i}	0	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{in}	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	b_i
$\vdots$	0	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	0	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	b_m

Lembrando que uma iteração do método simplex consiste em multiplicar uma linha do quadro por um determinado valor e adicioná-la à função objetivo, após aplicar o método simplex, obtém-se o quadro simplex que mostra uma solução ótima. A função objetivo (linha $zero$) possui a seguinte forma:

z	x_1	x_2	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+i}	$\dots$	x_{n+m}	LD
1	$p_1^* - c_1$	$p_2^* - c_2$	$\dots$	$p_j^* - c_j$	$\dots$	$p_n^* - c_n$	p_{n+1}^*	p_{n+2}^*	$\dots$	p_{n+i}^*	$\dots$	p_{n+m}^*	p_0^*

onde o asterisco nos valores de p representam a solução ótima. Neste quadro, tem-se:

- p_j^*: valor total adicionado ao coeficiente $-c_j$ (para $j = 1, 2, \dots, n$) na linha *zero* para transformá-lo no respectivo coeficiente do quadro final;
- p_{n+i}^*: coeficiente no quadro final da variável de folga x_{n+i}. Observe que este coeficiente é nulo no quadro inicial;
- p_0^*: valor final da função objetivo, ou seja, valor ótimo de z.

Como os coeficientes das variáveis de folga na função objetivo do quadro inicial do simplex são nulos e, em cada linha do quadro inicial, os coeficientes das variáveis de folga são também nulos (exceto na linha que a variável de folga está na base, onde esse coeficiente é igual à unidade) em um quadro qualquer do simplex, tem-se então:

p_{n+i} representa o valor total que multiplica a linha i, durante as iterações do simplex e que foi adicionado à função objetivo

Logo, no quadro final onde mostra a solução ótima do problema,

1. $p_j^* = \sum_{i=1}^m p_{n+i}^* a_{ij}$ para $j = 1, 2, \dots, n$;
2. $p_0^* = \sum_{i=1}^m p_{n+i}^* b_i$.
   Como a solução do primal é ótima, todos os coeficientes da função objetivo no quadro final do simplex são positivos ou nulos. Então:
3. $p_{n+i}^* \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$, e
4. $p_j^* - c_j \geq 0$, portanto $p_j^* \geq c_j$, para $i = 1, 2, \dots, n$;
   Ainda, pela relação dada em (1), tem-se
5. $\sum_{i=1}^m p_{n+i}^* a_{ij} \geq c_j$, para $j = 1, 2, \dots, n$;

Das relações (3) e (4) conclui-se que p_{n+i}^*, para $i = 1, 2, \dots, n$, é solução viável do dual.

Como p_{n+i}^*, para $i = 1, 2, \dots, n$, é solução viável do dual, o valor da função objetivo do dual é dado por:

$$w = \sum_{i=1}^m p_{n+i}^* b_i$$

De (2), conclui-se que

$$w = p_0^* = z^*$$

Finalmente, do item (1) do teorema da dualidade, p_{n+i}^*, para $i = 1, 2, \dots, m$, é solução ótima do dual.

Assim, o teorema da folga complementar pode ser reescrito:

1. o coeficiente da variável de folga x_{n+i} do primal na função objetivo do quadro final do simplex é um valor ótimo para a variável y_i do programa dual; ou seja:
   $$y_i^* = p_{n+i}^*, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m$$
2. o coeficiente da variável primal x_j na função objetivo no quadro final do simplex é um valor ótimo para a variável de folga y_{m+j} do dual, ou seja:
   $$y_{m+j}^* = p_j^*, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n$$

Ao observar as restrições do programa dual:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n,$$

ao introduzir as variáveis de excesso y_{m+j}, para $j = 1, 2, \ldots, n$, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n,$$

obtém-se então, na solução ótima do programa dual:

$$y^*_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y^*_i - c_j, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n,$$

Assim, a função objetivo do quadro final do simplex do primal pode ser lida:

z	x_1	x_2	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\ldots$	x_{n+i}	$\ldots$	x_{n+m}	LD
1	y^*_{m+1}	y^*_{m+2}	$\ldots$	y^*_{m+j}	$\ldots$	y^*_{m+n}	y^*_1	y^*_2	$\ldots$	y^*_i	$\ldots$	y^*_m	$w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

6.4 Interpretação econômica do dual

Seja o problema de programação linear abaixo.

Uma determinada empresa está interessada em maximizar o lucro mensal proveniente de quatro de seus produtos, designados por I, II, III e IV. Para fabricar esses quatro produtos, ela utiliza dois tipos de máquinas (M1 e M2) e dois tipos de mão-de-obra (MO1 e MO2) que têm as disponibilidades conforme os dados das tabelas abaixo.

Máqs.	tempo disponível (horas-máquinas/mês)
M1	80
M2	20

Mão-de-obra	tempo disponível (homens-hora/mês)
MO1	120
MO2	160

Tabela 6.2: Disponibilidade de recursos

O setor técnico da empresa fornece os dados de produtividade, conforme as tabelas (6.3), para produzir uma unidade de cada produto.

Máq	Produtos			
	I	II	III	IV
M1	5	4	8	9
M2	2	6	-	8

Mão-de-obra	Produtos			
	I	II	III	IV
MO1	2	4	2	8
MO2	7	3	-	7

Tabela 6.3: Utilização de recursos

O setor comercial da empresa fornece as informações referentes ao lucro unitário de cada produto, mostrado pela tabela (6.4).

Deseja-se saber a produção mensal dos produtos I, II, III e IV para que o lucro mensal da empresa, proveniente desses quatro produtos, seja máximo. Formule um modelo de programação linear que expresse o objetivo e as restrições desta empresa.

Se no Primal:

Produtos	Lucro Unitário (R$/unidade)
I	10,00
II	8,00
III	9,00
IV	7,00

Tabela 6.4: Informações comerciais

- x_j: nível da atividade j $(j = 1, 2, \ldots, n)$
- c_j: lucro unitário da atividade j $(j = 1, 2, \ldots, n)$
- z: lucro total
- b_i: quantidade do recurso i disponível
- a_{ij}: quantidade do recurso i consumida pela atividade j $(j = 1, 2, \ldots, n)$

Na solução ótima:

$$z^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

y_i é interpretado como o valor implícito do recurso i $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Assim, o Dual é interpretado economicamente:

1. as restrições
   - $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$: significa que a contribuição para o lucro real do composto de recursos tem que ser pelo menos tanto quanto se eles fossem utilizados por uma unidade da atividade j; do contrário não estaríamos fazendo o melhor uso possível dos recursos;
   - $y_i \geq 0$: significa que a contribuição para o lucro do recurso i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ tem que ser não negativa, do contrário, seria melhor não utilizar o recurso
2. a função objetivo $\min w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$: minimizar o valor implícito total dos recursos consumidos pelas atividades.

6.5 Exercícios

6.5.1 Escreva o dual do Problema do Caminho Crítico

Definição do problema

O Problema do Caminho Crítico tal como Makhorin apresenta na documentação do GLPk é anunciado: executar um projeto consiste em executar um conjunto de atividades previamente definidas. Algumas das atividades podem ser executadas independentemente de outras atividades, enquanto que algumas outras atividades dependem do término de execução de determinadas atividades antecedentes à ela. Assim, define-se as relações de antecedências e precedências entre as atividades do conjunto de atividades que compõem a execução do projeto. Todas as relação de antecedências e procedências são conhecidas à priori. A execução de cada uma das atividades demanda um período de tempo, que depende somente da atividade. Deseja saber as datas de início de execução de cada atividade de maneira que todas as relações de antecedências e precedências sejam satisfeitas e que minimize a data de término para a conclusão do projeto. Concluir o projeto significa executar todas as suas atividades.

Este problema é modelado:

Dados:

- J: conjunto de atividades j;
- P_j: conjunto de antecessoras de j, isto é, conjunto de atividades $i \in J$ que precedem imediatamente a atividade j, para todo $j \in J$;
- t_j: tempo de duração da execução da atividade $j \in J$.

Variáveis:

- $x_j \geq 0$, para todo $j \in J$: data de início de execução da atividade j;
- $z \geq 0$, maior data de término de execução do projeto.

Modelo:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z & & (6.1)\\
\text{sujeito à} \quad & z \geq x_j + t_j \quad \forall j \in J & & (6.2)\\
& x_j \geq x_k + t_k \quad \forall j \in J \text{ e } k \in P_j & & (6.3)\\
& x_j \geq 0 \quad \forall\, j \in J & & (6.4)\\
& z \geq 0 & & (6.5)
\end{aligned}
$$

A Função Objetivo (6.1) minimiza o valor de z que é a maior data de término. O valor da data de término de uma atividade $j \in J$ é calculada somando a data de início da atividade de j, x_j, que é uma variável, ao seu tempo de duração t_j, que é um parâmetro do problema; assim, as restrições (6.2) garantem que z é maior que a data de término de todas as atividades do projeto, incluive daquela atividade que é executada para finalizar o projeto. Para iniciar a execução de uma atividade $j \in J$ do projeto é necessário que sejam finalizadas todas as atividades em seu conjunto de antecessoras; assim, as restrições (6.3) garantem que, para toda atividade $j \in J$ e para toda atividade $k \in P_j$, a data de inicio de execução de j deve ser maior ou igual à data de inicio da atividade k mais o tempo de processamento da atividade k. As restrições (6.4) e (6.5) definem o domínio das variáveis.

A Figura 6.1 apresenta apresenta o arquivo `.dat` para uma instância do Problema de um Caminho Crítico.

```
data;

/* The optimal solution is 46 */

param : J :  t :=
        A    3    /* Excavate */
        B    4    /* Lay foundation */
        C    3    /* Rough plumbing */
        D   10    /* Frame */
        E    8    /* Finish exterior */
        F    4    /* Install HVAC */
        G    6    /* Rough electric */
        H    8    /* Sheet rock */
        I    5    /* Install cabinets */
        J    5    /* Paint */
        K    4    /* Final plumbing */
        L    2    /* Final electric */
        M    4    /* Install flooring */
;

set P[B] := A;
set P[C] := B;
set P[D] := B;
set P[E] := D;
set P[F] := D;
set P[G] := D;
set P[H] := C E F G;
set P[I] := H;
set P[J] := H;
set P[K] := I;
set P[L] := J;
set P[M] := K L;

end;
```

Figura 6.1: Arquivo `.dat` para um Problema de um Caminho Crítico

Resolução:

Note que z é uma variável e que existem variáveis no lado direito das restrições. Reescrevendo o problema explicitando os coeficientes de todas as variáveis na função objetivo e reescrevendo cada restrição com as variáveis e seus respectivos coeficientes no lado esquerdo e os termos independentes de variáveis no lado direito, o problema fica:

$$\text{minimize} \quad z' = 1z + \sum_{j \in J} 0x_j \tag{6.6}$$

$$\text{sujeito à} \quad z - x_j \geq t_j \quad \forall j \in J \tag{6.7}$$

$$x_j - x_k \geq t_k \quad \forall j \in J \text{ e } k \in P_j \tag{6.8}$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall\, j \in J \tag{6.9}$$

$$z \geq 0 \tag{6.10}$$

Escrevendo o dual, utilizando da Tabela 6.5 da dualidade escrita a partir do Teorema 1 da dualidade:

Tabela 6.5: Tabela da dualidade

PRIMAL (DUAL)	DUAL (PRIMAL)
maximizar	minimizar
$i^{\text{ésima}}$ restrição $\geq$	$i^{\text{ésima}}$ variável ≤ 0
$i^{\text{ésima}}$ restrição $\leq$	$i^{\text{ésima}}$ variável ≥ 0
$i^{\text{ésima}}$ restrição $=$	$i^{\text{ésima}}$ variável $\in I\!R$
$j^{\text{ésima}}$ variável ≥ 0	$j^{\text{ésima}}$ restrição $\geq$
$j^{\text{ésima}}$ variável ≤ 0	$j^{\text{ésima}}$ restrição $\leq$
$j^{\text{ésima}}$ variável $\in I\!R$	$j^{\text{ésima}}$ restrição $=$

O problema primal do exercício é de minimização, portanto o primal está na coluna direita da tabela 6.5 da dualidade.

- variáveis do dual: o número de variáveis duais é igual ao número de restrições do primal, a cada restrição do primal, associa-se uma variável dual:
  - às restrições (6.7) associa-se as variáveis duais $u_j \geq 0$, uma para cada restrição $j \in J$, estas variáveis são maiores ou iguais a zero, pois o primal é de minimizar e as restrições do primal as quais estas variáveis duais estão associadas são do tipo $\geq$;
  - às restrições (6.8) associa-se as variáveis duais $v_{jk} \geq 0$, uma para cada restrição do primal referente ao par (i, k) de variáveis primais x_j e x_k, estas variáveis são maiores ou iguais a zero, pois o primal é de minimizar e as restrições do primal as quais estas variáveis duais estão associadas são do tipo $\geq$;
- função objetivo do dual: é de maximizar, o coeficiente de cada viariável dual na função objetivo do dual é igual ao lado direito da restrição da restrição a qual a variável dual foi associada, assim a função objetivo do dual é igual ao somatório do lado direito das restrições do primal que multiplica a variável dual correspondente; como existem dois tipos de restrições no primal e consequentemente dois tipos de variáveis duais, a função objetivo do dual se compõe de dois somatórios , ou seja:

$$\text{maximizar } w = \sum_{j \in J} t_j \; u_j + \sum_{j \in J, k \in P_j} t_k \; v_{jk}$$

- restrições do dual: o número de restrições do dual é igual ao número de variáveis do primal, ou seja, é igual ao número de elementos de J mais um, referente à variável z do primal. Os coeficientes de cada restrição do dual corresponde aos cooeficientes de cada variável do primail, ou seja, uma restrição do dual para cada coluna do primal:
  - coeficientes da variável z: existe uma única restrição no dual associada a esta variável do primal, os coeficientes de z são iguais à 1 e só aparecem nas restrições primais (6.7), assim a restrição dual associada aos coeficientes da variável primal z será o somatório do coeficiente 1 que multiplica a variável dual correspondente, uma para cada $j \in J$, o lado direito desta restrição será igual à 1, que é o coeficiente de z na função objetivo do primal; conforme o teorema 1 da dualidade, esta restrição é do tipo $\leq$, já que o primal é de minimizar e $z \geq 0$; esta restrição do dual fica então:
  $$\sum_{j \in J} u_j \leq 1$$
  - coeficientes das variáveis x_j para todo $j \in J$: o número de restrições do dual assuciadas a cada variavel primal deste tipo será igual ao número de elementos de J, em cada restição do primal (6.7) o coeficiente de x_j é igual à -1 somente para j considerado, para os demais x_j os coeficientes são nulos, assim o coeficiente da variável dual u_j é igual à -1; voltando para a definisão do problema, cada atividade do projeto pode ter várias atividades antecessoras e ela pode ser também antecessora de várias outras atividades, assim quando ela é antecessora de outra atividade, seu coeficiente na restrição do primal é -1, quando ela não é antecessora, seu coeficiente é $+1$, consequentemente para cada $j \in J$, a restrição dual correspondente terá um somatório positivo para todas as vezes que a atividade j não for antecessora de outra e terá um somatório negativo para todas as vezes que a atividade j for antecessora de outra atividade, estas restrições são do tipo $\leq$, já que o primal é de minimizar e $x_j \geq 0$; esta restrição do dual fica então:

  $$-1u_j + \sum_{k \in P_j} v_{jk} - \sum_{k : j \in P_k} v_{kj} \leq 0 \qquad \forall \; j \in J$$

Logo, o dual é escrito:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & w = \sum_{j \in J} t_j \; u_j + \sum_{j \in J, k \in P_j} t_k \; v_{jk} && (6.11)\\
\text{sujeito à} \quad & \sum_{j \in J} u_j \; \leq \; 1 && (6.12)\\
& -1u_j + \sum_{k \in P_j} v_{jk} - \sum_{k : j \in P_k} v_{kj} \; \leq \; 0 \quad \forall j \in J && (6.13)\\
& u_j \; \geq \; 0 \quad \forall \; j \in J && (6.14)\\
& v_{jk} \; \geq \; 0 \quad \forall j \in J \text{ e } k \in P_j && (6.15)
\end{aligned}
$$

Todos os coeficientes das variávei primais e duais do exemplo do arquivo .dat mostrado na definição do problema podem ser vistos na Tabela 6.6. Esta tabela não é o quadro simplex, ela mostra nas linhas as restrições do problema primal e nas colunas as restrições do problema dual.

Tabela 6.6: Tabela de coeficientes do exemplo do Problema de Caminho Crítico

	variáveis primais															
z'	z	x_A	x_B	x_C	x_D	x_E	x_F	x_G	x_H	x_I	x_J	x_K	x_L	x_M	LD	variáveis
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		duais
0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	t_A	u_A
0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	t_B	u_B
0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	t_C	u_C
0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	t_D	u_D
0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	t_E	u_E
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	t_F	u_F
0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	t_G	u_G
0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	t_H	u_H
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	t_I	u_I
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	t_J	u_J
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	t_K	u_K
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	t_L	u_L
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	t_M	u_M
0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	t_A	v_{BA}
0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	t_B	v_{CB}
0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	t_B	v_{DB}
0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	t_D	v_{ED}
0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	t_D	v_{FD}
0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	t_D	v_{GD}
0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	t_C	v_{HC}
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	t_E	v_{HE}
0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	t_F	v_{HF}
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	t_G	v_{HG}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	t_H	v_{IH}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	t_H	v_{JH}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	t_I	v_{KI}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	t_J	v_{LJ}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	t_k	v_{MK}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	t_L	v_{ML}

Observe a coluna da variável primal z, esta coluna gera uma única restrição (6.12):

$$u_A + u_B + u_C + u_D + u_E + u_F + u_G + u_H + u_I + u_J + u_K + u_L + u_M \leq 1.$$

Observe a coluna da variável x_H do primal que gera a restrição $j = H$ do dual, aparece o coeficiente -1 para a variável dual u_H, os coeficientes iguais à $+1$ para as variáveis duais v_{HC}, v_{HE} e v_{HF} e os coeficientes iguais à -1 para as variáveis duais v_{IH} e v_{JH}. Assim, a restrição do dual para $j = H$ fica:

$$-u_H + v_{HC} + v_{HE} + v_{HF} - v_{IH} - v_{JH} \leq 0.$$

Interpretação econômica do dual:

- Primal: a função objetivo do primal é de minimizar, todas as variáveis primais são positivas e todos os coeficientes na função objetivo são possitivos, assim a sulução ótima do primal será diferente de zero se e somente se alguma das restrições obrigarem que alguma variável seja positiva e serão portanto justas, consequentemente a variável dual associada a ela será diferente de zero:

  - a variável z calcula o valor do caminho crítico;
  - as variáveis x_j calculam a data de início de cada atividade $j \in J$;
  - em uma solução ótima do primal:
    * uma restrição das restrições (6.7) será justa se ela calcula o valor de z, assim, pode-se identificar qual a atividade final do projeto que determina a data de término do projeto;
    * algumas das restrições (6.8) serão justas quando a regra de antecedencia entre as atividades (j, k) representada pela restrição faz com que as atividades j e k sejam determinantes para o cálculo da data de término do projeto, faz com que o valor de z aumente;

- Dual: a função objetivo do dual é de maximização, todos os seus coeficientes são positivos e todas as variáveis duais são positivas, assim, a solução ótima do dual só não tenderá para o infinito se e somente se existem restrições do dual que limite os valores das variáveis duais:

  - em uma solução ótima do dual:
    * variáveis u_j: estas variáveis duais estão associadas às restrições (6.7) do primal e será positiva somente para a restrição (6.7) que for justa, logo, esta variável dual será positiva para aquela atividade de determina o valor do caminho crítico;
    * variáveis v_{jk}: estas variáveis estão associadas às restrições (6.8) do primal e será positiva somente para as restrições (6.7) que forem justas, logo, estas variáveis duais serão positivas para aquela sequencia de atividades de determinam o camilho crítico;
  - a restrição (6.12) limita à unidade a soma de todas as variáveis u_j, como a u_j está associada a restrição primal que calcula o valor de z e seu valor está limitado na unidade, logo, na solução ótimo do dual, $u_j = 1$ somente para atividade crítica j que está no caminho crítico;
  - as restrições (6.13) diz que, para cada atividade $j \in J$, a soma de uma grandeza (àquela grandeza representada pelas variáveis v_{jk}) associada a todas as atividades antecessoras à j é menor ou igual a soma desta grandeza associadas a todas as atividades as quais j é antecessora mais a grandeza associada à atividade j (àquela grandeza associada à variável dual u_j); considerando j associada à atividade crítica que determina a data final do projeto, assim $u_j = 1$ na solução ótima do dual, sendo a última, ela não é antecessora de nenhuma outra atividade, assim, pelas restrições (6.13 do dual, ela possuirá somente uma antecessora k e terá somente a variável $v_{jk} = 1$, assim sucessivamente até remontar todo o caminho crítico que determina a data de termino do projeto dada por $z^* = w^*$, que são os valores das funções objetivos do primal e dual, respectivamente.

  voltando na definição do Problema do Caminho Crítico, sabe-se que tanto o primal quanto o dual determinam um caminho crítico no desenvolvimento do projeto: o primal minimiza a data de termino do projete determinando o caminho crítico com o cálculo das datas de início de cada atividade, respeitando as relações de antecendências entre as atividades do projeto e os tempos de execução de cada atividade; o dual determina o maior caminho entre as atividades calculando o valor da data final de execução do projeto considerando os tempos de execução das atividades e garantindo a existência de um único caminho dado por uma sequência de atividades.

OBS.: Este tipo de problema dual é bem conhecido da literatura, a matriz de coeficientes A desse problema é unimodular o que garante que os valores das variáveis duais, mesmo sendo definidas como maiores ou iguais a zero, assumam os valores inteiros em $\{0, 1\}$. São conhecidos como modelos de fluxo.

6.6 Algoritmo Dual-Simplex

Durante as iterações, até a obtenção da solução ótima, os quadros do Método Simplex apresentado possuem duas características importantes:

1. a solução não é ótima, quando for ótima o método para; e
2. a solução básica mostrada é sempre viável.

O Método Simples com tais características será denominado a partir de agora como Método PRIMAL-SIMPLEX. Um novo Método Simplex, que não possui tais características pode ser construído, que será denomidado de Método DUAL-SIMPLEX. Para isto faz-se uma análise do que acontece a cada iteração do Método PRIMAL-SIMPLEX, comparando-a com o que acontece a cada iteração do Método DUAL-SIMPLEX.

Somente por questões didáticas apresenta-se aqui um problema de programação linear o qual o Método PRIMAL-SIMPLEX é aplicado. O Método DUAL-SIMPLEX é aplicado no problema DUAL do problema apresentado. Assim é possível fazer uma análise do que ocorre durante as iterações de cada um dos métodos. Entretanto, em condições normais NÃO É NECESSÁRIO escrever o dual de um problema para aplicar o Método DUAL-SIMPLEX, ele pode ser aplicado diretamente a qualquer problema de programação linear.

Seja o Programa Linear PRIMAL

$$
\begin{array}{lrrl}
\max & z = 3\,x_1 + & 5\,x_2 & \\
\text{s. a} & x_1 & & \leq 4 \\
 & & 2\,x_2 & \leq 12 \\
 & 3\,x_1 + & 2\,x_2 & \leq 18 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

O Programa Linear DUAL associado é então escrito:

$$
\begin{array}{lrrrl}
\min & w = 4\,y_1 + & 12\,y_2 + & 18 y_3 & \\
\text{s. a} & y_1 + & 0\,y_2 + & 3\,y_3 & \geq 3 \\
 & 0\,y_1 + & 2\,y_2 + & 2\,y_3 & \geq 5 \\
 & y_1 \geq 0 & y_2 \geq 0 & y_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

6.6.1 Inicialização

Tanto num método como no outro, a inicialização do algoritmo consiste na obtenção de uma solução básica inicial. No método PRIMAL, esta solução básica inicial será viável e não ótima. No método DUAL, esta solução básica inicial será ótima, porém não será viável.

6.6.1.1 Método PRIMAL-SIMPLEX

Ao introduzir as variáveis de folga, o PRIMAL fica:

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\max & z = 3\,x_1 + & 5\,x_2 & & & & \\
\text{s. a} & x_1 & + & x_3 & & & = 4 \\
 & & 2\,x_2 + & & x_4 & & = 12 \\
 & 3\,x_1 + & 2\,x_2 + & & & x_5 & = 18 \\
 & x_1 \geq 0; & x_2 \geq 0; & x_3 \geq 0; & x_4 \geq 0; & x_5 \geq 0 &
\end{array}
$$

Assim, o quadro inicial do então Método PRIMAL-SIMPLEX fica:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
	1	- 3	- 5	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	2	0	1	0	12
x_5	0	3	2	0	0	1	18

A solução básica inicial apresentada neste quadro é:

- variáveis não básicas: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$,
- variáveis básicas: $x_3 = 4$, $x_4 = 12$, $x_5 = 18$, e
- função objetivo: $z = 0$.

Duas características se destacam nesta solução básica:

1. é viável: todas as restrições são satisfeitas;
2. não é ótima: existe coeficiente negativo na função objetivo.

6.6.1.2 Método DUAL-SIMPLEX

Por outro lado, multiplicando a função objetivo e todas as restrições do DUAL por (-1), o problema fica reescrito:

$$\begin{array}{llllllll}
\max & (-w) = -4\,y_1 - & 12\,y_2 - & 18 y_3 & & & & \\
\text{s. a} & -y_1 + & 0\,y_2 - & 3\,y_3 + & y_4 & & & = -3 \\
& 0\,y_1 - & 2\,y_2 - & 2\,y_3 + & & y_5 & & = -5 \\
& y_1 \geq 0; & y_2 \geq 0; & y_3 \geq 0; & y_4 \geq 0; & y_5 \geq 0; & &
\end{array}$$

Ao construir um quadro da mesma forma que foi escrito para o PRIMAL, mas permitindo agora que o lado direito seja negativo, tem-se o quadro para o DUAL, denomidado Quadro do DUAL-SIMPLEX:

base	$(-w)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	LD
	1	4	12	18	0	0	0
y_4	0	- 1	0	- 3	1	0	- 3
y_5	0	0	- 2	- 2	0	1	- 5

Uma solução básica não viável pode ser vista diretamente neste quadro:

- variáveis não básicas: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ e $y_3 = 0$,
- variáveis básicas: $y_4 = -3$, $y_5 = -5$, e
- função objetivo: $w = 0$.

Duas características se destacam nesta solução básica:

1. não é viável: todas as restrições não são satisfeitas;
2. seria ótima: não existe coeficiente negativo na função objetivo.

6.6.2 Regra de parada

A regra de parada do Método PRIMAL-SIMPLEX consiste na verificação se a atual solução básica é ótima ou não. Esta verificação é feita verificando a existência ou não de coeficientes negativos na função objetivo. Se existir coeficiente negativo a atual solução básica não é ótima.

A regra de parada do Método DUAL-SIMPLEX consiste em verificar se a atual solução básica é ótima ou não. Esta verificação é feita verificando se todas as restrições são satisfeitas, isto é, se todos os lados direitos das restrições são positivos ou nulos. Se existir lado direito negativo, a solução básica mostrada não é viável.

6.6.3 Iterações

6.6.3.1 Método PRIMAL-SIMPLEX

Uma iteração do Método PRIMAL consiste em determinar uma nova solução básica adjacente melhor que a solução básica atual, isto é, uma solução básica que possui um valor melhor para a função objetivo. Uma nova solução básica é determinada aqui definindo qual variável básica que deve sair da base e qual a variável não básica deve entrar na base. Estas escolhas são feitas:

- Variável que entra da base: é aquela que possui o coeficiente mais negativo na função objetivo;
- Variável que sai da base: é aquela que primeiro se anula quando a variável que esta entrando assume um maior valor positivo. A determinação da variável que sai da base pode ser feito dividindo o lado direito de cada restrição pelo respectivo coeficiente da coluna da variável que está entrando na base, a variável que sai é aquela que possui a menor divisão.

Em outras palavras, uma variável não básica, por definição, possui valor nulo numa solução básica. Assim, quando uma variável não básica entra na base, na nova solução básica esta variável deve assumir um maior valor positivo de maneira que todas as restrições continuam sendo respeitadas, ou seja, de maneira que a nova solução básica continua viável.

No exemplo estudado, as variáveis que entra e sai da base é obtida no quadro PRIMAL abaixo:

			$\downarrow$						
base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD		
	1	- 3	- 5	0	0	0	0	L_0	
x_3	0	1	0	1	0	0	4	L_1	
x_4	0	0	2	0	1	0	12	L_2	$12/2 = 6 \quad \leftarrow$
x_5	0	3	2	0	0	1	18	L_3	$18/2 = 9$

A variável que entra na base é x_2 e a variável que sai é x_4.

6.6.3.2 Método DUAL-SIMPLEX

Uma iteração do Método DUAL consiste em determinar uma solução básica mais próxima da região de viabilidade que a atual solução básica. Isto é feito com a viabilização de uma das restrições não satisfeitas.

É importante observar que, aqui no método dual, o quadro simplex deve sempre apresentar: *(i)* uma solução básica **ótima**, ou seja, todos os coeficientes da função objetivo devem sempre ser positivos; e *(ii)* **não viável**, isto é, pelo menos uma das restrições deve ser violada. Quando todas as restrições forem viáveis, o método para pois a solução ótima foi obtida.

Como no método primal, uma nova solução básica aqui é obtida aqui também fazendo uma variável básica sair da base e uma variável não básica entrar na base. Esta mudança de base de ser feita de maneira que uma das restrições violadas passe a ser respeitada, ou seja, um lado direito deixe de ser negativo, e que o coeficiente da variável que entra na base fique nulo na função objetivo. Assim, a escolha das variáveis que entra e sai da base é feita:

- Variável que sai da base: é a variável básica da restrição mais violada, ou seja, é a variável básica da restrição com lado direito mais negativo. A linha referente a esta restrição é a linha pivô.
- Variável que entra na base: é aquela cujo o seu coeficiente na função objetivo primeiro se anula ao se adicionar múltiplos da linha pivô. Para isso, basta dividir os coeficientes da função objetivo pelo respectivo coeficiente da linha pivô, se o coeficiente for estritamente negativo.

No exemplo tem-se:

- teste para y_2: 12/(-2) = -6
- teste para y_3: 18/(-2) = -9

logo, a variável que entra na base é y_2.

base	$(-w)$	y_1	y_2 ↓	y_3	y_4	y_5	LD		
$(-w)$	1	4	12	18	0	0	0	L_0	
y_4	0	- 1	0	- 3	1	0	- 3	L_1	
y_5	0	0	- 2	- 2	0	1	- 5	L_2	←

As iterações do Método Dual-Simplex continua como no Método Primal-Simplex.

No exemplo, o novo quadro fica:

base	$(-w)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	LD	
$(-w)$	1	4	0	6	0	6	- 30	$L'_0 = L_0 + 6L_2$
y_4	0	- 1	0	- 3	1	0	- 3	$L'_1 = L_1$
y_2	0	0	1	1	0	- 1/2	5/2	$L'_2 = L_2/(-2)$

Solução básica mostrada no quadro:

- variáveis básicas: $y_4 = -3$ e $y_2 = 5/2$;
- variáveis não básicas: $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ e $y_5 = 0$;
- função objetivo: $w = 30$

Esta solução não é ótima, pois y_4 é negativo. Compare este quadro com o segundo quadro do Método Primal-Simplex mostrado abaixo:

base	z	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	LD			
	1	- 3	0	0	5/2	0	30	$L'_0 = L_0 + 5L'_2$		
x_3	0	1	0	1	0	0	4	$L'_1 = L_1$	4/1 = 4	
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6	$L'_2 = L_2/2$		
x_5	0	3	0	0	-1	1	6	$L'_3 = L_3 - L_2$	6/3 = 2	←

Uma nova iteração do Método Dual-Simplex:

- variável que sai da base: y_4, a mais negativa;
- variável que entra na base: y_1: $4/(-1) = -4$; y_3: $6/(-3) = -2$, logo y_3 entra na base;

base	$(-w)$	y_1	y_2	y_3 $\downarrow$	y_4	y_5	LD		
$(-w)$	1	4	0	6	0	6	-30	L'_0	
y_4	0	- 1	0	- 3	1	0	- 3	L'_1	$\leftarrow$
y_2	0	0	1	1	- 1/2	1	5/2	L'_2	

Assim, o novo quadro do Dual-Simplex fica:

base	$(-w)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	LD	
$(-w)$	1	2	0	0	2	6	- 36	$L''_0 = L'_0 + 2L'_1$
y_3	0	1/3	0	1	-1/3	0	1	$L''_1 = L'_1/(-3)$
y_2	0	-1/3	1	0	1/3	- 1/2	3/2	$L''_2 = L'_2 - L''_2$

Solução básica mostrada no quadro:

- variáveis básicas: $y_3 = 1$ e $y_2 = 5/2$;
- variáveis não básicas: $y_1 = 0$, $y_4 = 0$ e $y_5 = 0$;
- função objetivo: $w = 36$

Esta solução é ótima, pois todas as restrições são satisfeitas. Compare este último quadro do Dual-Simplex com o último quadro do Primal-Simplex abaixo:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD	
	1	0	0	0	3/2	1	36	$L''_0 = L'_0 + L'_3$
x_3	0	0	0	1	1/3	-1/3	2	$L''_1 = L'_1 - L''_3$
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6	$L''_2 = L'_2$
x_1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2	$L''_3 = L'_3/3$

Finalizando, pode-se observar o Teorema da folga complementar comparando as soluções ótimas dos problemas primal e dual:

- os valores ótimos das variáveis originais do primal são os coeficientes da função objetivo das variáveis de folga do dual:
  - $x_1^* = \overline{b}_{3+1}^* = 2$
  - $x_2^* = \overline{b}_{3+2}^* = 6$
- os coeficientes as variáveis de folga na função objetivo do primal são os valores ótimos para as variável originais do dual:
  - $\overline{c}_{2+1}^* = y_1^* = 0$
  - $\overline{c}_{2+2}^* = y_2^* = 3/2$
  - $\overline{c}_{2+3}^* = y_3^* = 1$

6.7 Um Método Primal/Dual-Simplex

Um Método Primal/Dual-Simplex pode agora ser construido. A grande vantagem deste novo método consiste na não necessidade da introdução das variáveis artificiais para as restrições do tipo maior ou igual. Veja o exemplo:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z = 5\,x_1 + & 2\,x_2 & & \\
\text{s. a} & x_1 + & 0\,x_2 & \leq 3 \\
 & 0\,x_1 + & x_2 & \leq 4 \\
 & 1\,x_1 + & 2\,x_2 & \geq 9 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & \\
\end{array}
$$

Multiplicando a terceira restrição por (-1) e introduzindo as variáveis de folga, o problema fica:

$$
\begin{array}{llllllll}
\max & z = 5\,x_1 + & 2\,x_2 & & & & \\
\text{s. a} & x_1 + & 0\,x_2 + & 1\,x_3 + & 0\,x_4 + & 0\,x_5 & = 3 \\
 & 0\,x_1 + & x_2 + & 0\,x_3 + & 1\,x_4 + & 0\,x_5 & = 4 \\
 & -1\,x_1 - & 2\,x_2 + & 0\,x_3 + & 0\,x_4 + & 1\,x_5 & = -9 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 & x_5 \geq 0 & \\
\end{array}
$$

Construindo um quadro primal/dual-simplex:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
	1	- 5	- 2	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	2	0	1	0	12
x_5	0	- 1	- 2	0	0	1	-9

Solução básica mostrada no quadro:

- variáveis básicas: $x_3 = 4$, $x_4 = 12$ e $x_5 = -9$;
- variáveis não básicas: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$;
- função objetivo: $z = 0$

Esta solução básica não é ótima pois existe coeficiente negativo na função objetivo e não é viável pois a terceira restrição não é satisfeita. Faz-se então uma iteração do método dual-simplex para viabilizar a terceira restrição:

- variável que sai da base: x_5, que corresponde a variável básica da restrição não satisfeita
- variável que entra na base:
  - teste para x_1: (-5)/(-1) = 5
  - teste para x_2: (-2)/(-2) = 1, escolhe esta variável

O novo quadro primal/dual-simplex fica:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD	
	1	-4	0	0	0	-1/2	9	$L_0' = L_0 - L_3$
x_3	0	1	0	1	0	0	4	$L_1' = L_1$
x_4	0	-1	0	0	1	1	3	$L_2' = L_2 + L_3$
x_2	0	1/2	1	0	0	-1/2	2	$L_3' = L_3/(-2)$

- variáveis básicas: $x_3 = 4$, $x_4 = 3$ e $x_2 = 2$;
- variáveis não básicas: $x_1 = 0$, $x_5 = 0$;
- função objetivo: $z = 9$

Esta solução básica não é ótima mas ela é viável. As iterações do Método Primal-Simplex podem continuar normalmente até que uma solução ótima seja encontrada.

6.8 Exercícios

6.8.1 Dualidade I

Escreva o dual dos programas lineares do exercício ??.

6.8.2 Dualidade II

Resolva os programas lineares duais do exercíco 6.8.2 utilizando a resolução gráfica e o método simplex. Compare as soluções do primal e do dual.

6.8.3 Solução Computacional

Utilizando de programa computacional comercial ou não, resolva os programas lineares primais da questão ?? e os duais da questão 6.8.2. Exemplo de programas computacionais para a programação linear: Excel, LINDO, GLPK.

6.8.4 Dualidade III - O proplema do transporte

Escreva o modelo do dual para o problema do transporte.

6.8.5 Dualidade IV

$$
\begin{array}{llcl}
\max & z = \sum_{i=1}^{m} u_i - \sum_{j=1}^{m} v_j & & \\
\text{s. a} & u_i - v_j & \leq & c_{ij} \\
 & u_i \text{ e } v_j & \in & I\!R
\end{array}
$$

Comente este problema. Que problema é esse? Qual o dual desse problema?

6.8.6 Algoritmo Dual-Simlex

6.8.6.1 Solução gráfica

Mostre graficamente (solução gráfica) o que acontece durante as iterações do algoritmo Dual-Simplex para um problema abaixo:

$$\begin{array}{llrrl} \min & w = 4\,y_1 + & 12\,y_2 & \\ \text{s. a} & y_1 + & 0\,y_2 & \geq 3 \\ & 0\,y_1 + & 2\,y_2 & \geq 5 \\ & y_1 \geq 0 & y_2 \geq 0 & \end{array}$$

6.8.6.2 Pivoteamento do Método Dual-Simplex

Mostre porque o coeficiente da linha pivô deve ser estritamente negativo.

6.8.6.3 Algoritmo Primal/Dual-Simplex

Escreva o Algoritmo Primal/Dual-Simplex.

6.8.7 Algoritmo Dual-Simplex

Seja o programa linear (P) abaixo denominado PRIMAL:

$$\begin{array}{lcccccl} \max & z & = & -4\,x_1 & -5\,x_2 & & (0) \\ \text{sujeito às} & & & 2\,x_1 & +\ x_2 & \geq 8 & (1) \\ \text{retrições} & & & x_1 & +2\,x_2 & \geq 7 & (2) \\ & & & 0\,x_1 & +\ x_2 & \geq 3 & (3) \\ & & x_1 \geq 0 & & & x_2 \geq 0 & \end{array}$$

1. Resolva este problema graficamente.
2. Construa o quadro inicial do dual-simplex.
3. Comente algumas situações onde o algoritmo Dual-Simplex pode ser melhor que o algoritmo Primal-Simplex.

6.8.8 Iteração do Dual Simplex

Dado o quadro inicial do método dual-simplex, faça uma iteração do método dual-simplex.

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
	1	4	5	0	0	0	0
x_3	0	- 1	- 2	1	0	0	- 6
x_4	0	1	- 3	0	1	0	- 2
x_5	0	- 7	- 1	0	0	1	- 1

6.8.9 Teorema da Folga complementar I

1. O que diz o teorema da folga complementar, qual sua importância;
2. Como identificar os valores ótimos das variáveis duais (originais e de folga) no último quadro simplex do primal, quando este mostra uma solução ótima do primal? Se necessário, dê um exemplo numérico.

6.8.10 Teorema da Folga complementar II

1. Se no problema primal a função objetivo pode crescer indefinidamente, o que acontesse com a solução do seu dual?
2. Se um problema primal não tenha solução viável, o que acontesse com o seu dual?
3. Se um problema primal possui soluções ótimas múltiplas, o que acontesse com a solução de seu dual?

6.8.11 Dualidade

Seja o problema abaixo, onde p_i é dado:

$$\begin{array}{lrcll} \text{minimizar} & z = t_n - t_1 & & & \\ \text{s. a} & t_j - t_i & \geq & p_i & \forall\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n \text{ e } i \neq j \\ & t_i & \geq & 0 & \forall\ i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

1. Crie um exemplo para n = 3
2. Escreva o dual do exemplo
3. Generalise o dual para o problema acima

6.8.12 Formulação Primal - Dual

6.8.12.1 Formulação Primal

A Rede Mundo de Televisão deseja saber qual a fração de seu tempo total disponível para anuncio que deve vender a cada um de seus grandes anunciantes. A seguinte versão é uma versão simplificada de seu problema de determinação de vendas de horários. Suponha que haja três classificações para o tempo de propaganda da rede: horário nobre noturno, horário da tarde em dia de semana e em sábado/domingo (antes das 18 horas).

A rede vende grandes espaços de tempo a K grandes anunciantes que têm um efeito significativo em seus lucros. A rede sabe que o Anunciante k quer comprar um pacote consistindo, proporcionalmente em minutos, de a_{1k}, a_{2k} e a_{3k} minutos nas três faixas de horários e deseja pagar até A_k Reais por este pacote. Sejam x_k a fração de tempo que a Rede vende a cada um dos grandes anunciantes, respectivamente. A rede também vende tempo a muitos anunciantes menores e calcula que, no total, ela pode vender, no máximo, M_1, M_2 e M_3 minutos de horário nobre, de dia de semana e de fim de semana, respectivamente, desde que seus preços não violem os limites de gastos A_k dos K grandes anunciantes.

$$\begin{array}{lrcll} \text{maximizar} & z = \displaystyle\sum_{k=1}^{k} A_k x_k & & & \\ \text{s. a} & \displaystyle\sum_{k=1}^{k} a_{ik} x_k & \leq & M_i & \forall i = 1, 2, 3; \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i = 1, 2, 3. \end{array}$$

6.8.12.2 Formulação Dual

(Wagner)

A Rede Mundo de Televisão quer estabelecer preços competitivos mas lucrativos para o tempo de comerciais. A seguinte versão é uma versão simplificada de seu problema de preços. Suponha que haja três classificações para o tempo de propaganda da rede: horário nobre noturno, horário da tarde em dia de semana e em sábado/domingo (antes das 18 horas). Sejam p_1, p_2 e p_3 o preço por minuto para cada uma destas faixas de horário, respectivamente.

A rede vende grandes espaços de tempo a K grandes anunciantes que têm um efeito significativo na determinação dos preços. A rede sabe que o Anunciante k quer comprar um pacote consistindo em a_{1k}, a_{2k} e a_{3k} minutos nas três faixas de horário e deseja pagar até A_k Reais por este pacote. A rede também vende tempo a muitos anunciantes menores e calcula que, no total, ela pode vender M_1, M_2 e M_3 minutos de horário nobre, de dia de semana e de fim de semana, respectivamente, desde que seus preços não violem os limites de gastos A_k dos K grandes anunciantes.

1. Formule o problema de preços como um modelo de programação linear.
2. Suponha que a Rede Mundo deseje saber se ela deve considerar satisfazer a todos menos um dos limites de gastos de seus maiores anunciantes. Como você analisaria esta possibilidade?

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{minimizar} & z = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} M_i p_i & & & \\
\text{s. a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{ik} p_i & \geq & A_k & \forall k = 1, \ldots, K; \\
& p_k & \geq & 0 & \forall k = 1, \ldots, K.
\end{array}
$$

Capítulo 7

Análise de sensibilidade (pós-otimização)

A análise de sensibilidade (ou análise de pós-otimização) consiste em determinar a sensibilidade de uma solução ótima de um programa linear em relação aos parâmetros dados do problema, isto é, se um parâmetro qualquer do problema mudar, o que acontecerá com a atual solução ótima obtida. Assim, a análise de sensibilidade consiste em estudar as consequências na atual solução ótima quando os parâmetros mudam.

7.1 Mudança no valor dos coeficientes c_j (c_j muda para c'_j)

Pode-se notar que estes parâmetros aparecem na função objetivo, e não aparece em nenhuma restrição do problema, assim a região de viabilidade do problema não muda e, portanto, a atual solução ótima continua viável. Resta entãi saber se a atual solução básica continua ótima após a mudança de um dos parâmetros mudar c_j.

Como já visto anteriormente, a função objetivo no quadro inicial do simplex pode ser escrita na forma:

z	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+m}	LD
1	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_n$	0	0	$\dots$	0	0

onde o coeficiente de x_j na função objetivo é $(-c_j)$. Após as interações do simplex, a se obter uma solução básica ótima, a função objetivo passa para a forma:

z	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+m}	LD
1	$p_1^* - c_1$	$p_2^* - c_2$	$\dots$	$p_n^* - c_n$	p_{n+1}^*	p_{n+2}^*	$\dots$	p_{n+m}^*	p_0^*

onde o coeficiente de x_j passa a ser $(p_j^* - c_j)$.

Se o parâmetro c_j muda para c'_j e as mesmas iterações do simplex forem feitas, o quadro simplex seria exatamente o mesmo, exceto para o coeficiente de x_j na função objetivo. O valor não seria mais $(p_j^* - c_j)$ e sim $(p_j^* - c'_j)$. Deve-se então estudar o valor $(p_j^* - c'_j)$ para análise sobre o que acontece com a atual solução ótima.

São duas situações que se deve analisar, quando um parâmetro c_j mudar:

1. se x_j é variável básica na atual solução ótima;
2. se x_j não é variável básica na atual solução ótima.

7.1.1 Mudança de c_j quando x_j é variável básica

Os coeficientes da função objetivo do quadro final do simplex, numa solução ótima, devem ser positivos ou nulos. Considerando que x_j é uma variável básica na solução ótima mostrada no quadro final do simplex, seu coeficiente é nulo, isto é, $p_j^* - c_j = 0$. O valor de p_j^* é então obtido: $p_j^* = c_j$. Assim, se c_j assumir um outro valor c'_j no programa linear, o coeficiente de x_j no quadro final do simplex deixa de ser nulo e passa para:

$$p_j^* - c'_j = c_j - c'_j.$$

Substitui-se então o coeficiente de x_j na função objetivo do último quadro simplex por $(c_j - c'_j)$. Ao substituir o coeficiente de x_j no quadro simplex, o novo quadro não é mais um quadro simplex, pois o coeficiente da variável básica x_j não é mais nulo. Para que se tenha de fato um quadro simplex, deve-se então anular o coeficiente de x_j. Isto pode ser feito fazendo $L'_0 = L_0 - (c_j - c'j) \times L_j$ onde L_j é a linha do quadro a qual x_j é básica. Ao fazer esta operação de linha, os coeficientes da função objetivo devem mudar. Se todos continuarem positivos ou nulos, a atual solução continua ótima. Senão, deve-se continuar as iterações do simplex até se obter uma nova solução ótima.

Exemplo 7.1

Seja o problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeito à} & \qquad\quad x_1 \le 4 \\ & \qquad\quad 2x_2 \le 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ & x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \end{array}$$

O quadro inicial do simplex, após a introdução das variáveis de folga, é:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
	1	- 3	- 5	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	2	0	1	0	12
x_5	0	3	2	0	0	1	18

Após algumas interações do simplex, obtém-se o quadro que mostra uma solução ótima:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
	1	0	0	0	3/2	1	36
x_3	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6
x_1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

Note que x_1 é uma variável básica na atua solução ótima.

Se o coeficiente de x_1, inicialmente $c_1 = 3$, passa para $c'_1 = 2$, o que acontece com a atual solução básica?

E se passar para $c'_1 = 4$, o que acontece com a atual solução básica?

7.1.2 Mudança de c_j quando x_j não é variável básica

Se x_j não é uma variável básica, seu coeficiente na função objetivo no quadro final do simplex é positivo, isto é, $p_j^* - c_j \ge 0$. Se o coeficiente c_j muda de valor e assume o valor c'_j, para que a atual solução continue ótima deve-se ter:

$$p_j^* - c'_j \ge 0 \implies p_j^* \ge c'_j.$$

Subtraindo c_j lado a lado, obtém-se:

$$p_j^* - c_j \geq c_j' - c_j,$$

isto é, se o coeficiente de x_j na função objetivo do atual quadro simplex $(p_j^* - c_j)$ for maior ou igual à $(c_j' - c_j)$, a atual solução mostrada no quadro continua ótima e o valor da função objetivo continua aquele mostrado no quadro. Se isto não acontecer, implica que $p_j^* - c_j' < 0$, isto é, o novo coeficiente de x_j na função objetivo do quadro final do simplex é negativo. O valor $(p_j^* - c_j')$ do novo coeficiente de x_j na função objetivo do atual quadro simplex pode ser calculado subtraindo c_j' de cada parcela da diferença $p_j^* - c_j$, isto é:

$$p_j^* - c_j' = (p_j^* - c_j) - (c_j' - c_j),$$

isto é, o valor do coeficiente de x_j na função objetivo do novo quadro do simplex passa a ser a diferença do atual coeficiente menos a diferença entre c_j' e c_j. Esta solução não é ótima, e x_j deve entrar na base numa próxima iteração do simplex.

Exemplo 7.2

Seja o problema de programação linear:

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & z = x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeito à} & \qquad\quad x_1 \leq 3 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & \quad x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \end{array}$$

Cujo quadro inicial do simplex é:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
	1	- 1	- 3	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	3
x_4	0	2	3	0	1	24

Após algumas iterações do simplex, chega-se ao quadro que mostra uma solução básica ótima:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
	1	1	0	0	1	24
x_3	0	1	0	1	0	3
x_2	0	2/3	1	0	1/3	8

Note que x_1 na atual solução ótima não é uma variável básica.

O que acontece com a atual solução ótima, se:

1. $c_1 = 1$ muda para $c_1' = 3/2$;
2. $c_1 = 1$ muda para $c_1' = 3$.

7.2 Exercícios

7.2.1 Coeficientes c_j

Comente, com um exemplo numérico, o que pode acontecer com uma solução ótima de um programa linear quando um coeficiente c_j de uma variável básica (no ótimo) mudar. E se a variável fosse não básica. O que aconteceria.

7.2.2 Coeficientes b_i

O que aconteceria com a solução ótima de um problema de programação linear se o lado direito de uma restrição mudar? Explique.

7.2.3 Análise de pós-otimização

Dado os quadros inicial e final do método simplex de um problema de programação linear:

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
	1	- 1	- 3	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	3
x_4	0	2	3	0	1	24

base	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
	1	1	0	0	1	24
x_3	0	1	0	1	0	3
x_2	0	2/3	1	0	1/3	8

O que acontece com a solução ótima se mudarem os coeficientes iniciais:

1. $c_2 = 3$ para $c_2' = 2$;
2. $c_1 = 1$ para $c_1' = 3$.

Capítulo 8

Relaxação Lagrangeana

Seja o problema de programação matemática:

$$
(P) \qquad \begin{array}{rrcll}
\text{minimizar} & f(x) & & & (8.1)\\
\text{susjeito a} & g_i(x) & \leq & 0 \qquad \forall\, i = 1,2,\ldots,m & (8.2)\\
& x & \in & S & (8.3)\\
& x & = & (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \;\in\; I\!R^n & (8.4)
\end{array}
$$

onde $f(x)$ e $g_i(x)$, para $i = 1,2,\ldots,m$ são funções quaisquer e S um conjunto finito discreto, ou seja, $S = \{y^1, y^2, \ldots, y^K\}$. o Conjunto S é chamado de *soluções* de (P). Uma *solução viável* $x \in S$ é uma solução de (P) que verifica também as restrições (8.2).

Associa-se à cada restrição $g_i(x) \leq 0$, com $i = 1,2,\ldots,m$, um número $\pi_i \geq 0$, denominados *multiplicadores de lagrange* e defini-se a *Função de Lagrange*:

$$\mathcal{L}(x,\pi) = f(x) + \pi g(x)$$

onde $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$ e $g(x) = [g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)]^T$.

Se as restrições (8.2) são do tipo $g_i(x) \geq 0$ os coeficientes de lagrange são definidos como $\pi_i \leq 0$, e se forem do tipo $g_i(x) = 0$, $\pi_i \in I\!R$.

Por definição, o problema dual de (P) é o problema:

$$
(D) \qquad \begin{array}{rll}
\text{maximizar} & \min\limits_{x \in S}\{\mathcal{L}(x,\pi)\} & (8.5)\\
\text{susjeito a} & \pi \in I\!R^{m+} & (8.6)
\end{array}
$$

ou ainda, introduzindo a função

$$L(\pi) = \min_{x \in S}\{\mathcal{L}(x,\pi)\}$$

denominada *função dual*, (D) pode ser escrito:

$$
(D) \qquad \begin{array}{rll}
\text{maximizar} & L(\pi) & (8.7)\\
\text{susjeito a} & \pi \in I\!R^{m+} & (8.8)
\end{array}
$$

A função dual de um problema de programação discreta possui um certo número de propriedades importantes:

Propriedade 8.1 *Limite inferior*

Para todo $\pi \in I\!R^{m+}$ e para toda solução viável x de (P):

$$L(x) \leq f(x).$$

Em particular, $L(X) \leq f(x^*)$ onde x^* é uma solução ótima de (P).

Demonstração:

Por definição, $L(\pi) = \min_{x \in S}\{\mathcal{L}(x,\pi)\}$ e $\mathcal{L}(x,\pi) = f(x) + \pi g(x)$, assim

$$L(\pi) \leq f(x) + \pi g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i g_i(x), \quad \forall\ \pi \geq 0;\ \forall\ x \in S.$$

Como $\pi \geq 0$ e $g_i(x) \leq 0$, para toda solução viável de (P), então

$$L(\pi) \leq f(x).$$

Em particular para uma solução ótima x^* de (P) e para uma solução ótima π^* de (D):

$$L(\pi) \leq L(\pi^*) \leq f(x^*). \quad \square$$

Uma conseqüência imediata da propriedade 1 é a seguinte: se o dual (D) tem uma solução ótima ilimitada $(+\infty)$ então o primal (P) não tem solução viável.

Propriedade 8.2 *Concavidade*

A função $L(\pi)$ é uma função $concava$ de π e também é linear por partes.

Demonstração

Sejam $\pi^1 \geq 0$ e $\pi^2 \geq 0$ quaisquer e, para todo $\theta \in [0,1]$, seja $\pi = \theta\pi^1 + (1-\theta)\pi^2$. Por definição de $L(\pi)$, existe um $\bar{x} \in S$ tal que:

$$L(\pi) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i g_i(\bar{x})$$

e, por definição de $L(\pi^1)$ e $L(\pi^2)$:

$$L(\pi^1) \leq f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i^1 g_i(\bar{x})$$

$$L(\pi^2) \leq f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i^2 g_i(\bar{x})$$

Multiplicando a primeira inequação por $\theta \in [0,1]$ e a segunda por $(1-\theta)$ e adicionando as duas, obtém-se:

$$\theta L(\pi^1) + (1-\theta)L(\pi^2) \leq f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i g_i(\bar{x}) = L(\pi)$$

o que mostra que $L(\pi)$ é concava.

Para mostrar que é linear por partes, é suficiente remarcar que $L(\pi)$ é em $I\!R^{m+1}$, o envelope inferior da família de K hyperplanos $(k = |S|)$ de equações:

$$z = f(y^1) + \pi g(y^1)$$
$$z = f(y^2) + \pi g(y^2)$$
$$\ldots$$
$$z = f(y^K) + \pi g(y^K)$$

Para a próxima propriedade, é necessário a definição de sub-gradiente.

O vetor $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)^T$ é um $sub\text{-}gradiente$ de L no ponto π se, para todo $\pi' \in I\!R^{m+}$, verifica:

$$L(\pi') \leq L(\pi) + (\pi' - \pi)\gamma.$$

Capítulo 9

Programações Lineares Binária, Inteira e Inteira Mista

9.1 Introdução

Este capítulo introduz variáveis inteiras em problemas de programação matemática. A função objetivo e as restrições do problema são lineares. Com essas consideraçõe, três tipos de problemas podem ser identificados:

- Programação Linear Binária, onde as variáveis podem assumir somentes os valores nulo ou unitário.
- Programação Linear Inteira, onde as variáveis podem assumir o valor nulo ou qualquer valor no conjunto do números naturais.
- Programação Linear Inteira Mista, onde algumas variáveis podem assumir qualquer valor no conjunto dos números reais não negativo e outra parte das variáveis podem assumir qualquer valor inteiro não negativo.

Cada um desses tipos de problemas possui particularidades matemáticas que os caracterizam, entretanto, não podem ser resolvidos utilizando diretamente o método simplex.

Particularmente, pode-se definir Programação inteira da seguinte maneira. Considere um problema de programação linear $(\mathcal{P})$ as variáveis podem assumir qualquer valor real não negativo, o que pode-se dizer que as variáveis são contínuas. Ao introduzir um nova restrição ao problema fazendo com que todas as variáveis devam assumir valores inteiros não nulos, o novo problema $(\mathcal{P}')$ obtido não é um problema de programação linear e sim um problema de programação inteira. Na programação interira, diz-se que as variáveis são discretas e o algoritmo simplex não pode ser utilizado para a obtenção de uma solução ótima do problema. É necessário então o desenvolvimento de novas técnicas de resolução.

Num primeiro momento, pode-se pensar retirar as restrições que obrigam as variáveis a assumirem somente valores inteiros não negativos, isto é, substituir as restrições $x \in \boldsymbol{Z}^+$ pelas restrições $x \in I\!R^+$. Neste caso, diz-se que o problema sofreu uma relaxação linear, ou simplesmente, o problema foi relaxado. Resolver o problema relaxado e arredondar a solução ótima obtida para o problema relaxado para obter uma solução para o problema original. Este procedimento na maioria das veses mostra-se inadeguado, por dois motivos básicos:

- a solução arredondada não é viável para o problema original
- o valor da função objetivo com a solução arredondada é ruim se comparada a solução ótima inteira

Os exemplos abaixo ilustram estas situações. Sugere-se aqui que os problemas sejam resolvidos graficamente.

- a viabilidade não é mantida.

Exemplo 9.1

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = x_1 + 2x_2 && (9.1)\\ \text{sujeito a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2,5 && (9.2)\\ & x_1 + x_2 \leq 3,5 && (9.3)\\ & x_1 \in I\!N \qquad x_2 \in I\!N && (9.4) \end{aligned}$$

Solução ótima contínua:

$$x_1 = 0,5; x_2 = 3 \text{ e } z = 3,5$$

Solução ótima inteira:

$$x_1 = 1; x_2 = 2 \text{ e } z = 3$$

- o valor ótimo inteiro está longe do valor arredondado.

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = x_1 + 5x_2\\ \text{sujeito à} \quad & x_1 + 10x_2 \leq 20\\ & x_1 \leq 2\\ & x_1 \in I\!N \qquad x_2 \in I\!N \end{aligned}$$

Solução ótima contínua:

$$x_1 = 2; x_2 = 9/5 \text{ e } z = 11$$

Solução ótima inteira:

$$x_1 = 0; x_2 = 2 \text{ e } z = 10$$

9.2 Técnica *branch-and-bound*

Nos problemas de programação inteira que possuem um número finito de soluções viáveis, pode-se utilizar um procedimento de enumeração de todas as soluções para encontrar uma solução ótima. A dificuldade consiste na existência de um número consideravelmente grande de soluções. Por exemplo, se existem 10 variáveis e cada uma pode assumir dez valores diferentes, o número de soluções possíveis seria então 10^{10}. É necessário então desenvolver uma técnica sistemática e eficiente para buscar entre todas as soluções possíveis, uma que seja ótima.

Supondo que o problema seja de minimização. A técnica de *branch-and-bound* consiste em construir uma árvore de pesquisa cujos vértices k possuem as seguintes características:

- Aberto: se existem soluções a serem pesquisadas no vértice;
- Fechado: se não existem soluções a serem pesquisadas no vértice;
- Limite superior (LS_k): melhor solução viável conhecida. Inicialmente $LS_k = \infty$;
- Limite inferior (LI_k): menor valor possível para uma solução viável naquele vértice;
- Subconjunto de soluções (S_k): subconjunto de soluções possíveis com a característica k.

Considere ainda:

- LA: lista de vértices aberto. Nesta lista serão guardados os vértices da árvore que foram gerados durante iterações do algoritmo, mas que, na iteração presente, ainda não se têm informações suficientes para avaliá-lo;

- LF: lista de vértices fechado. Nesta lista serão guardados os vértices da árvore que foram gerados durante as iterações do algoritmo e que já se tem, na iteração presente, informações suficientes para avaliar a qualidade dos vértices que podem ser gerados a partir dele. Ou os vértices gerados a partir dele já se encontram na lista aberto, ou por não existir uma solução viável a partir dele, ou por não existir uma solução melhor a partir dele que a atual melhor solução encontrada pelo algoritmo;

- LS: limite superior do problema, é o valor da melhor solução viável conhecida até a atual iteração. Inicialmente $LS = \infty$;

- LI: limite inferior do problema. Inicialmente calcula-se o LI através de uma fórmula específica do problema;

Um algoritmo geral pode ser estruturado:

- *inicialização*: Faça:
  1. $LA = \{0\}$: colocar o vértice 0 na lista aberto;
  2. $LF = \emptyset$: lista fechado é vazia;
  3. $LS = LS_0 = \infty$; $LI_0 = 0$;
  4. $LI = 0$ ou calculado pelas características do problema;
  5. $S_0 =$ conjunto de todo o universo de valores para as variáveis. Isto inclui as soluções não viáveis do problema;
  6. $s = \emptyset$ melhor solução encontrada;

- *regra de parada*:
  - se $LI \geq LS$ ou $LA = \emptyset$: PARE
    * se $s = \emptyset$: o problema não tem solução;
    * senão: s é a solução ótima;
  - senão: vá para *iteração*;

- *iteração*
  1. *branch*: na lista aberto LA, selecione um vértice k (por exemplo, o vértice de menor limite inferior LI_k, neste caso, faça $LI = \max\{LI, LI_k\}$);
     (a) retire o vértice k de LA e coloque-o em LF;
     (b) utilizando uma regra apropriada, subdivida o subconjunto S_k de soluções representadas pelo vértice k em novos subconjuntos $S_{k'}$ gerando assim os novos vértices k' para a árvore de pesquisa;
  2. *bound*: para cada novo vértice k' gerado, verifique se existe a possibilidade de soluções viáveis no vértice;
     - se sim:
       (a) calcule o limite inferior $LI_{k'}$ do vértice;
       (b) verifique se $LI_{k'} < LS$
         * se sim: verifique se uma solução viável foi encontrada;
           · se sim:
             (i) $s =$ nova solução encontrada;
             (ii) $LS = LI_{k'}$;
             (iii) transferir todos os vértices k'' de LA cujo $LI_{k''} \geq LS$ para LF;
           · senão: colocar o vértice na LA;
         * senão: colocar o vértice k' na LF;
     - senão: colocar o vértice k' na lista fechado LF;
  3. voltar para a *regra de parada*

A performace de um algoritmo *branch-and-bound* está diretamente relacionada com:

1. uma maneira eficiente de selecionar o vértice para dividir o seu subconjunto de soluções (*branch*); e

2. uma maneira de se obter uma bom limite inferior ($bound$).

São três as maneiras principais para selecionar um vértice no passo de $branch$ do algoritmo:

1. pelo menor limite inferior;
2. pela largura da árvore;
3. pela profundidade da árvore.

O cálculo de um bom limite inferior depende do problema no qual a técnica é aplicada.

9.3 Programação Linear Binária

Inicialmente é importante observar que todo problema de Programação Linear Inteira pode ser transformado em Programação Linear Binária, para isso, basta transformar as variáveis do problema, que estão escritas na base decimal, em variáveis na base binária. Por exemplo, se x é uma variável interira positiva que pode assumir um valor máximo igual a u, ou seja,

$$0 \leq x \leq u$$

pode-se transforma-la para a base binária ao determinar o valor de n tal que,

$$2^n \leq u < 2^{n+1},$$

e criando as variáveis binárias y_i (ou seja $y_i \in \{0, 1\}$) tais que cada valor interiro viável de x pode ser escrito em função das variáveis y_i através da expressão:

$$x = \sum_{i=0}^{n} 2^i y_i,$$

onde $y_i \in \{0, 1\}$. Assim a variável x pode ser substituida em todo o problema por esta soma envolvendo $(n+1)$ variáveis binárias. Ao determinar os valores ótimo de cada y_i no problema binário, calcula-se o valor de x.

Exemplo 9.2

Considere um problema de Programação Linear Inteira onde a variável interira x pode assumir valores inteiros entre 0 e 17.

Para transformar a variável x para o sistema binário, obtém-se inicialente o valor de $n = 4$, pois $2^4 \leq 17 < 2^5$, pode-se observar as relações de equivalência entre os valores interiros para a variável x e os valores binários para as variáveis y_i:

valores de x	valores de y_i
$x = 3$	$y_0 = 1$; $y_1 = 1$; $y_2 = 0$; $y_3 = 0$; $y_4 = 0$;
$x = 7$	$y_0 = 1$; $y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_3 = 0$; $y_4 = 0$;
$x = 8$	$y_0 = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = 0$; $y_3 = 1$; $y_4 = 0$;
$x = 15$	$y_0 = 1$; $y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_3 = 1$; $y_4 = 0$;
$x = 17$	$y_0 = 1$; $y_1 = 0$; $y_2 = 0$; $y_3 = 0$; $y_4 = 1$;

9.3.1 Definição

Um Programa Linear Binário é um problema que pode ser escrito sob a forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{sujeito à} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \geq \ b_i & \forall i = 1, \ldots, m \\ & x_j \ \in \ \{0, 1\} & \forall j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Nota-se que, em qualquer programa linear binário, é possível através de inversões na ordem das variáveis, ordenar o vetor c de maneira que $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$. Nota-se ainda que os coeficientes do vetor c podem ser todos não negativos. Se, em um problema, algum c_j for negativo, basta substituir, em todo modelo, x_j por $(1 - x'_j)$, onde $x'_j \in \{0, 1\}$.

Para resolver este problema, basta verificar se é viável fazer $x_j = 0, \ \forall \ j = 1, \ldots, n$. Se não, criar um procedimento enumerativo fazendo combinações de $x_j = 1$ para os menores índices j até encontrar uma solução ótima.

9.3.2 Algoritmo de *branch-and-bound* para PLIB

O algoritmo *branch-and-bound* para Programação Linear Inteira Binária (PLIB) apresentado aqui é uma simplificação do algoritmo aditivo de Balas [2]. Este algoritmo formou a base para grande parte do desenvolvimento de algoritmo sobre esse problema. O nome aditivo vem do fato de que todas as operações aritméticas são de adições ou de subtrações simples.

Este algoritmo é aplicado para o problema em uma forma padrão que consiste em:

1. todos os coeficientes da função objetivos são não negativos, ou seja $c_j \geq 0$;
2. as variáveis do problema estão ordenadas em ordem crescente dos coeficientes da função objetivo, ou seja $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$;
3. todas as restrições são do tipo $\geq$.

O algoritmo *branch-and-bound* utilizado aqui é o mesmo apresentado em seções anteriores, introduzindo a notação:

- *solução parcial*: subconjunto de soluções onde se conhece o valor de k primeiras variáveis do conjunto total das n variáveis do problema $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$;
- *solução completa*: solução onde se conhece o valor de todas as n variáveis do problema;
- *conclusão* de uma solução parcial: é uma solução completa partindo de uma solução parcial $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots$
- z_k^*: valor ótimo da função objetivo quando a solução onde a s k primeiras variáveis foram fixadas e as $n - k$ variáveis restantes forem nulas ($x_j = 0$ para $j = k + 1, \ldots, n$) for solução viável do problema.

Cada vértice k da árvore de pesquisa representa uma solução parcial onde as k primeiras variáveis foram fixadas. A regra para subdividir o vértice k da árvore (*branch*) consiste em criar dois novos vértices onde a variável x_{k+1} é fixada em $x_{k+1} = 0$ em um novo vértice e $x_{k+1} = 1$ no outro vértice.

Verificar se existe uma solução viável no vértice k da árvore consiste em verificar se cada restrição, individualmente, do problema pode ser satisfeita, sendo que as k primeiras variáveis representadas pelo vértice da árvore já foram fixadas. O vértice k da árvore não tem solução viável se

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} + \sum_{j=k+1}^{n} \max\{a_{ij}, 0\} < b_i$$

para algum $i = 1, \ldots, m$, uma vez que $\max\{a_{ij}, 0\} = \max\{a_{ij}x_j : x_j = 0 \text{ ou } x_j = 1\}$.

O limite inferior de cada vértice é calculado:

$$LI_k = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j & \text{se } x_k = 1 \text{ (ou se } k = 0 \text{ ou } k = n); \\ z_k^* & \text{se } (x_1, \ldots, x_k = 0, x_{k+1} = 0, \ldots, x_n = 0) \text{ for viável;} \\ \sum_{j=1}^{k-1} c_j x_j + c_{k+1} & \text{se } x_k = 0. \end{cases}$$

Exemplo 9.3

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 10x_6 \\ \text{sujeito à} \quad & -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 2x_6 \geq 2 \\ & -5x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \geq -2 \\ & 5x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 - x_6 \geq 3 \\ & x_j \in \{0, 1\}\ \forall j = 1, \ldots, 6. \end{aligned}$$

9.4 Um algoritmo de *branch-and-bound* para PLIM

Um problema de Programação Linear Inteira Mista consiste em um programa linear onde algumas variáveis só podem assumir valores inteiros (em $I\!N$), não necessariamente binárias, e as demais podem assumir valores contínuos (em $I\!R$). Este problema pode então ser definido como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{sujeito à} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ & x_i \in I\!N \quad \forall j = 1, \ldots, I (I < n), \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Quando $i = n$, este problema é uma problema de Programação Linear Inteira.

O algoritmo apresentado foi desenvolvido por Dakin [5] baseado num algoritmo *branch-and-bound* pioneiro de Land e Doig [9].

Este algoritmo é próximo ao algoritmo aditivo de Balas. Cada vértice da árvore de pesquisa representa um subconjunto de soluções onde um programa linear é resolvido pelo simplex. Inicialmente, vértice $k = 0$ da árvore de pesquisa, relaxa-se (ignora-se) a restrição de variáveis inteiras e resolve-se o programa linear resultante pelo simplex. Se a solução obtida possui os valores inteiros para $x_j, j = 1, \ldots, I$, então a solução obtida é uma solução ótima para o problema original.

O particionamento do subconjunto de soluções representado pelo vértice k da árvore de pesquisa ($branch$) pela primeira variável inteira x_j que, na solução atual, não possui valor inteiro. Sejam l_1 e $l_2 = l_1 + 1$ dois valores inteiros tais que $l_1 \leq x_j \leq l_2$. Dois novos vértices k' e k'' da árvore são então acrescentados ao programa linear representado pelo vértice k da árvore duas restrições, ao novo vértice k' acrescenta-se a restrição $x_l \leq l_1$ e ao novo vértice k'' acrescenta-se a restrição $x_j \geq l_2$.

Referências Bibliográficas

[1] M. Arenales, V. Armentano, R. Morabito, and H. Yanasse. *Pesquisa Operacional: Para cursos de engenharia*. Elsevier Brasil, 2015.

[2] E. Balas. An algorithm for solving linera programs with zero-one variables. *Operations Research*, 13(4):517–546, 1965.

[3] M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis, and H.D. Sherali. *Linear Programming and Network Flows*. Wiley, 2010.

[4] E. M. L. Beale. Cycling in the dual simplex algorithm. *Naval Research Logistics Quarterly*, 2(4):269–276, December 1955.

[5] R. J. Dakin. A tree search algorithm for mixed integer programming problems. *Computer Journal*, 8(3):250–255, 1965.

[6] M.C. Goldbarg and H.P.L. Luna. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. CAMPUS - RJ, 2005.

[7] G. Hadley. *Linear Programming*. Addison-Wesley Publishing Company, INC., 1963.

[8] F.S. Hillier and G.J. Lieberman. *Introdução à Pesquisa Operacional*. AMGH, 2013.

[9] A. H. Land and A. G. Doig. An automatic method for solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28:497–520, 1960.

[10] L.S. Lasdon. *Optimization Theory for Large Systems*. Dover books on Mathematics. Dover Publications, 1970.

[11] N. Maculan and M.H.C. Fampa. *Otimização linear*. EdUnB, 2006.

[12] M. Minoux. *Programmation Mathématique - Théorie et Algorithmes*. Dunod, Paris, 1983.

[13] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. Wiley Series in Discrete Mathematics & Optimization. John Wiley & Sons, 1998.

[14] H.M. Wagner. *Pesquisa Operacional*. LTC, 1986.