7. PEATÜKK

SEOSED

Asjade ja sündmustega, mis on omavahel seoses, puutume me igapäevaelus tihti kokku. Näiteks on igal inimesel oma telefoni number, töötamine võib olla seotud palga saamisega, sugulussidemete kaudu oled sa seotud teiste inimestega jne. Matemaatikas huvitume samuti mitmesugustest seostest, näiteks seosest arvu ja tema jagajate vahel, täisarvu ja temale järgneva täisarvu vahel või kõrgemas matemaatikas argumendi väärtuse x ja vastava funktsiooni väärtuse $f(x)$ vahel. Geomeetrias on üheks seose näiteks kongruentsus, mida kasutatakse kolmnurkade uurimisel. Need näited kinnitavad, et matemaatikas leidub seoseid peaaegu igal sammul. Tüüpiliselt kasutame seoseid mingite objektide uurimiseks (kolmnurgad, täisarvud, maatriksid jne.), selles peatükis on meie eesmärgiks aga seoseid endid uurida.

Mis siis on seos matemaatikas? Seose definitsiooni saad kohe järgnevalt lugeda, aga ära, palun, ehmu! Esmapilgul võib see definitsioon tunduda segadusse ajav ja sarnaneda üsna vähe sellele, mida sa seni oled arvanud seose olevat, nagu näiteks $\leq$ seose arvude hulgal. Loodan, et järgnevad näited aitavad seda definitsiooni selgitada. Mitmesuguste seoste matemaatiliseks kirjeldamiseks on esmalt aga vaja defineerida hulkade otsekorrutise mõiste, mis sai tehtud eelmises peatükis.

Definitsioon. ***Seoseks*** (ehk ***vastavuseks***, sageli ka ***relatsiooniks*** või ***suhteks***) hulkade A ja B vahel nimetatakse otsekorrutise $A \times B$ mistahes osahulka.

Seega, seos hulkade A ja B vahel on järjestatud paaride (a, b) hulk, kus $a \in A$ ja $b \in B$. Teisiti öeldes, seos on mingi osahulk $R \subseteq A \times B$. Paari $(a, b) \in R \subseteq A \times B$ korral öeldakse, et elemendid a ja b ***on seoses*** $\boldsymbol{R}$ ning tähistatakse ka $\boldsymbol{aRb}$. Mõnikord öeldakse osahulga R kohta, et see on seose graafik.

Kui $A = B$, ehk kui $R \subseteq A \times A$, siis räägitakse **seosest hulgal** $\boldsymbol{A}$.

Seoseid tähistame kas suurte ladina tähtedega või kreeka tähtedega.

Täpsem oleks ülal toodud definitsioonis rääkida **binaarsest seosest** ehk kahe hulga vahelisest seosest, sest *n-aarseks seoseks* hulkade $A_1, \dots, A_n$ vahel nimetatakse vastavalt otsekorrutise $A_1 \times \dots \times A_n$ mistahes osahulka. Edaspidi vaatleme peamiselt just *binaarseid seoseid*.

Sageli määratakse seoseid hoopis mingi kirjelduse või omaduse abil ning märgitakse teatud spetsiaalsete sümbolite abil, näiteks: $=$, $\neq$, $<$, $\leq$, $>$, $\subseteq$, $||$, jne. Tegelikkuses me mõtlemegi seosest harva kui järjestatud paaride hulgast. Pigem mõtleme seosest kui „testist“, mida arvupaar või objektide paar (a, b) rahuldama peab selleks, et aRb. Kui a ja b ei ole seoses R, siis tõmbame seost kirjeldavast märgist kriipsu läbi, nagu näiteks $a \neq b$ või $A \nsubseteq B$.

Seosed (relatsioonid) on väga tähtsad nii matemaatikas (eriti nn. ekvivalentsiseosed ja järjestusseosed) kui ka informaatikas (seoste esitamine erinevate andmestruktuuride abil ja nendel struktuuridel töötavad algoritmid, operatsioonid seostega, transitiivne sulund jne).

Kuidas siis mõista ülalpool antud seose definitsiooni kui mingit järjestatud paaride hulka? Mõtle nii, et seost kirjeldav järjestatud paaride hulk on täielik nimekiri kõikidest objektide paaridest, mis antud seost rahuldavad. Vaatame nüüd näiteid, mis aitaksid sellest definitsioonist paremini aru saada.

Näide 1. Olgu $A = \{2, 3\}$ ja $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Siis $R_1 = \{(2,2), (2,3), (3,1), (3,5)\}$ on binaarne seos hulkade A ja B vahel. Samade hulkade A ja B korral võime vaadelda veel palju teisi seoseid, näiteks seost R_2, mis on antud tingimusega, et see koosneb paaridest (a, b), millede korral b jagub arvuga a. Siis $R_2 = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6)\}$.

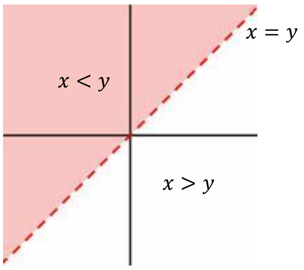
Näide 2. Olgu hulgaks A kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ ning seoseks R osahulk hulgas $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, mis koosneb kõikidest paaridest (a, b), mille korral arv a on arvu b jagaja. Seega $R = \{(a, b) : \ a, b \in \mathbb{N},\ a \mid b\}$. Seda seost R nimetatakse ***jaguvusseoseks***.

Näide 3. Olgu A mistahes hulk ja $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$. Mistahes elementide $a, b \in A$ korral $(a, b) \in R$ parajasti siis, kui $a = b$. Seda seost R nimetatakse ***võrdusseoseks*** hulga A elementide vahel.

Näide 4. Kui $A = \{1, 4, 5\}$, siis seoses $<$ ("on väiksem kui") on selle hulga elemendid 1 ja 4, 1 ja 5 ning 4 ja 5. Tegemist on seosega $R = \{(1, 4), (1, 5), (4, 5)\} \subseteq A \times A$ hulgal A.

Kuidas kirjeldada antud seost siis, kui hulgaks A oleks kõigi täisarvude hulk $\mathbb{Z}$? Paljud tuttavad matemaatilised seosed on esitatavad järjestatud paaride hulgana. Seost $<$ ("väiksem") täisarvudel võib esitada hulgana $R_{\mathbb{Z}} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z} \ \wedge \ y - x \in \mathbb{N}\}$, mis annab meile teada, et (x, y) on omavahel seoses, kui $y - x \in \mathbb{N}$ ehk kui $y - x$ on positiivne täisarv ehk kui $x < y$.

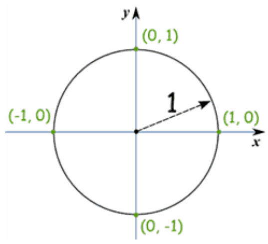
Olgu nüüd $A = \mathbb{R}$. Kuidas esitaksime või kujutaksime sama seost $R = \{(x, y) \mid x < y\}$ reaalarvude hulgal? Antud juhul väljendab seos punktipaaride hulka tasandil ja see hulk on kujutatud kõrval oleval joonisel.



Näide 5. Tasandi kõigi sirgete hulgal S võime vaadelda seost $s \,||\, t$, mis tähendab, et sirged s ja t on paralleelsed. Samuti oleksime võinud vaadata seost $s \perp t$, mille korral sirge s on risti sirgega t.

Näide 6.

Olgu $A = B = \mathbb{R},\ R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Seos R on ringjoonel paiknevate punktipaaride hulk tasandil (ringjoon on keskpunktiga koordinaatide alguspunktis ning raadiusega 1).



Näide 7. Olgu K õppeaine „Matemaatiline Maailmapilt" kuulajate hulk. Siis üheks seoseks hulgal K on $xRy \iff$ üliõpilane x on sümpaatne üliõpilasele y. Seega, seos R on teineteisele sümpaatsete üliõpilaste hulk.

Näide 8. Olgu M maakeral elavate inimeste hulk. Siis aRb, kui inimestel a ja b on ühised vanemad.

Ülesanne 1. Olgu täisarvude hulgal antud järgmised seosed:

$R_1 = \{(a,b) \mid a \le b\}$,
$R_2 = \{(a,b) \mid a > b\}$,
$R_3 = \{(a,b) \mid a = b$ või $a = -b\}$,
$R_4 = \{(a,b) \mid a = b\}$,
$R_5 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$,
$R_6 = \{(a,b) \mid a + b \le 3\}$.

Millised seosed sisaldavad paare $(1,1), (1,2), (2,1), (1,-1)$ ja $(2,2)$?

Lahendus. Paar $(1,1)$ kuulub seostesse R_1, R_3, R_4 ja R_6. Paar $(1,2)$ kuulub seostesse R_1 ja R_6. Paar $(2,1)$ kuulub seostesse R_2, R_5 ja R_6. Paar $(1,-1)$ kuulub seostesse R_2, R_3 ja R_6. Paar $(2,2)$ kuulub seostesse R_1, R_3 ja R_4.

Ülesanne 2. Kui palju erinevaid seoseid saab olla hulgal, milles on n elementi?

Lahendus. Seos hulgal A on otsekorrutise $A \times A$ osahulk. Kui hulgas A on n elementi, siis otsekorrutises on n^2 elementi. Eelnevast teame, et kui hulgas on m elementi, siis on sellel hulgal 2^m osahulka. Seega, hulgal $A \times A$ on 2^{n^2} osahulka ja täpselt sama palju saab seal olla ka seoseid. Näiteks, hulgal $\{a,b,c\}$ on $2^{3^2} = 2^9 = 512$ seost.

Seoste esitusviise

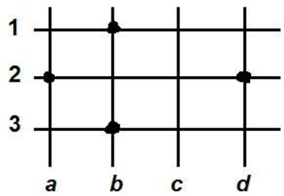
Seoseid võib esitada väga mitmel viisil.

i. Kui hulgad A ja B on lõplikud ja ei sisalda väga palju elemente, siis võib seost R määrata lihtsalt temasse kuuluvate elemendipaaride **loetelu teel** (vt näiteid 1 ja 2). Seost võib kujutada ka tabelina. Seos R_1 näites 1 esitub tabelina järgmiselt:

A	2	2	3	3
B	2	3	1	5

ii. Kui otsekorrutist $A \times B$ kujutada ristkülikuna, siis seost hulkade A ja B vahel võime kujutada ükskõik millise kujundina selle ristküliku sees. Ka iga funktsiooni, nt $y = x^2$ graafik on osahulk „tõkestamatus" ristkülikus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Lõplike hulkade A ja B korral võib ristküliku asemel joonistada teatud ruudustiku (vt joonis), märkides ära sõlmed, mis vastavad seoses asuvatele elemendipaaridele.

Joonisel on esitatud seos $R = \{(a,2), (b,1), (b,3), (d,2)\}$ hulkade $A = \{a,b,c,d\}$ ja $B = \{1,2,3\}$ vahel.



iii. **Maatriksesitus.** Olgu $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ja $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ ning $R \subseteq A \times B$. Seame seosele R vastavusse maatriksi $M_R = (m_{ij})$, kus $m_{ij} = 1$, kui $(a_i, b_j) \in R$ ja $m_{ij} = 0$, kui $(a_i, b_j) \notin R$, kus $i = 1, 2, \dots, n$ ja $j = 1, 2, \dots, m$.

Näide 9. Olgu $A = \{a,b,c,d\}$ ja $B = \{1,2,3\}$ ning $R = \{(a,2), (b,1), (b,3), (d,2)\}$. Siis

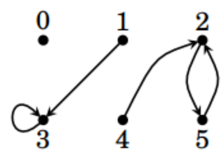
$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On kerge näha, et maatriksesitus on sisuliselt sama, mis eelmises punktis kirjeldatud „ruudustikuline” esitus. Maatriksite abil esitatud seose omadused on kergesti kindlaks tehtavad.

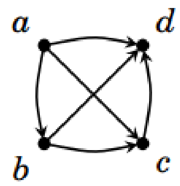
iv. Seoseid võib kujutada ka mitmesuguste **nooldiagrammide** abil. Joonisel on kujutatud seos R hulga $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ elementide vahel, kus $(a, b) \in R$ on väljendatud noolega elemendist a elementi b.

Kui element on seoses iseendaga, siis seda väljendab ringnool algus- ja lõpp-punktiga sama elemendi juures. Seega antud juhul

$$R = \{(1, 3), (2, 5), (3, 3), (4, 2), (5, 2)\}.$$



Tihti annabki seose graafiline kujutamine seosest palju parema ülevaate. Näiteks seos R hulgal $A = \{a, b, c, d\}$, kus xRy, kui x on tähestikus eespool kui y, on avaldatav hulgana
$R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$
ning nooldiagrammina (vt joonis).



v. Eespool oli juba mainitud, et seost võib määrata ka **sõnaliselt**, mingi **omaduse** või **tingimuse** abil, **valemina** jms.

Seoste omadused

Järgnevalt tutvustame seoste kirjeldamiseks ning klassifitseerimiseks vajaminevat sõnavara.

Definitsioon. Binaarset seost R hulgal A nimetatakse:
– ***refleksiivseks***, kui iga element on iseendaga seoses, s.o iga $a \in A$ korral $(a, a) \in R$;
– ***antirefleksiivseks***, kui ükski element ei ole endaga seoses, s.o iga $a \in A$ korral $(a, a) \notin R$;
– ***sümmeetriliseks***, kui elemendid on vastastikku seoses, s.o iga $a, b \in A$ korral, kui $(a, b) \in R$, siis $(b, a) \in R$;
– ***asümmeetriliseks***, kui elemendid tohivad olla seoses vaid ühes järjestuses, s.o iga $a, b \in A$ korral, kui $(a, b) \in R$, siis $(b, a) \notin R$;
– ***antisümmeetriliseks***, kui iga $a, b \in A$ korral $(a, b) \in R$ ja $(b, a) \in R$ vaid siis, kui $a = b$;
– ***transitiivseks***, kui iga $a, b, c \in A$ korral, kui $(a, b) \in R$ ja $(b, c) \in R$, siis $(a, c) \in R$;
– ***lineaarseks***, kui iga $a, b \in A$ korral $(a, b) \in R$ või $(b, a) \in R$.

Näide 10. Olgu antud seosed $R_1 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,3)\}$ ja $R_2 = \{(1,1), (2,1), (1, 2), (3, 3)\}$. Siis seos R_1 on refleksiivne, sest ta sisaldab kõiki paare kujul (a, a); nimelt, $(1, 1), (2, 2)$ ja $(3, 3)$. Seos R_2 ei ole refleksiivne, sest ta ei sisalda kõiki paare kujul (a, a); nimelt $(2, 2)$ on puudu. Seos R_2 ei ole samas ka antirefleksiivne, sest ta sisaldab paare $(1,1)$ ja $(3, 3)$.

Märkus 1. Seose sümmeetrilisus tähendab seda, et alati kui aRb, siis ka bRa. Seose antisümmeetrilisuse omadus ütleb aga seda, et vaadeldavas hulgas ei ole olemas kahte erinevat elementi, mille korral kehtivad mõlemad aRb ja bRa. Ainukene kord, kui see juhtuda saab, on siis, kui $a = b$. Sümmeetrilisuse ja antisümmeetrilisuse omadused ei ole teineteise vastandid, sest seosel võivad olemas olla mõlemad omadused korraga või võib juhtuda, et ei ole kumbagi omadust.

Ülesanne 3. Kas jaguvusseos naturaalarvude hulgal on refleksiivne? Sümmeetriline? Antisümmeetriline?

Lahendus. Kuna $a \mid a$ mistahes positiivse täisarvu korral, siis on jaguvusseos refleksiivne. (Kui me asendaksime naturaalarvude hulga täisarvude hulgaga, siis see seos enam refleksiivne ei oleks, sest nulli ei saa nulliga jagada.)
Jaguvusseos naturaalarvude hulgal ei ole sümmeetriline, sest $1 \mid 2$, aga $2 \nmid 1$. Jaguvusseos naturaalarvude hulgal on aga antisümmeetriline, sest iga elemendi $a, b \in \mathbb{N}$ korral, kui $a \mid b$ ja $b \mid a$, siis $a = b$.

Ülesanne 4. Tõesta, et kui seos on sümmeetriline ja antisümmeetriline, siis ta on transitiivne.

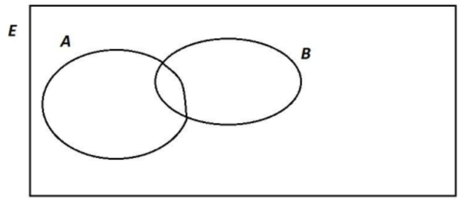
Märkus 2. Refleksiivsus ja antirefleksiivsus ei ole teineteise eitusteks. Näiteks kui seos ei ole refleksiivne, siis ta ei tarvitse olla antirefleksiivne.

Näide 11. Seos $<$ („väiksem“) reaalarvude hulgal on antirefleksiivne, asümmeetriline ja transitiivne. Seos $\leq$ hulgal $\mathbb{R}$ on refleksiivne, antisümmetriline, transitiivne ja lineaarne.

Näide 12. Sirgete paralleelsuse seos $s \,||\, t$ on sümmeetriline ja transitiivne, kuid ei ole refleksiivne, sest sirge ei saa olla iseendaga paralleelne (miks?). Sirgete paralleelsuse seos on samuti antirefleksiivne. Muid ülalnimetatud omadusi sellel seosel ei ole. Ent sirgete *samasihilisus* on sümmeetriline, transitiivne ja ka refleksiivne.

Näide 13. Sirgete ristioleku seos $s \perp t$ on antirefleksiivne, sümmeetriline, aga ei ole transitiivne.

Näide 14. Vaatleme hulga E kõikide osahulkade hulka $X = \mathcal{P}(E)$ ja sisalduvuse seost $\subseteq$ hulgal X. See seos on refleksiivne, antisümmetriline ja transitiivne, kuid pole lineaarne (vrd seosega $\leq$ näites 2). Tõepoolest, hulga E kaks suvalist osahulka A ja B ei tarvitse olla võrreldavad seose $\subseteq$ tähenduses (vaata joonist).



Näide 15. $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $R = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \gamma)\}$. Seosel R pole ühtki ülalnimetatud omadustest.

Ülesanne 5. Millised ülal nimetatud omadused on võrdusseosel $=$?

Ülesanne 6. Too näide seosest, mis on sümmeetriline ja transitiivne, aga mitte refleksiivne.

Tehted seostega

Kuna formaalselt on seos hulk, siis rakenduvad hulgateoreetilised tehted ka seostele. Näiteks saab rääkida seoste ühendist, ühisosast, vahest või täiendist.

Olgu antud seosed $R \subseteq A \times B$ ja $S \subseteq A \times B$, kus A ja B on hulgad.

Definitsioon. Seoste R ja S ***ühendiks*** nimetatakse seost $R \cup S$, mille korral $a(R \cup S)b \Leftrightarrow aRb \vee aSb$.

Definitsioon. Seoste R ja S ***ühisosaks*** ehk ***lõikeks*** nimetatakse seost $R \cap S$, mille korral $a(R \cap S)b \Leftrightarrow aRb \wedge aSb$.

Definitsioon. Seose R ***täiendiks*** nimetatakse seost R', mille korral $aR'b \Leftrightarrow \neg(aRb)$.

Nii defineeritud tehetele kanduvad mõistagi üle kõik suvaliste hulkade ühendi, ühisosa ja täiendi omadused. Universaalse hulga rollis on siin *universaalne* seos $U = A \times B$.

Definitsioon. Kui R on seos ja A on hulk, siis seost $R_A = R \cap (A \times A)$ nimetatakse seose R ***ahendiks*** hulgal A.

Järgmine definitsioon annab meile veel ühe seostele rakenduva operatsiooni.

Definitsioon. Seose R ***pöördseoseks*** nimetatakse seost $R^{-1} \subseteq B \times A$, mis saadakse järjestatud paarides olevaid elemente ümber vahetades, ehk $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.

Teisisõnu, $bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$. Ülemine indeks „$-1$" on siin ainult mugav ja kokkulepitud tähistus. See ei tähenda seose astmesse võtmist ega ka jagamist (mõlemad sellised tehted oleksid siinkohal absurdsed).

Igal seosel on olemas pöördseos. Kui R on seos hulgal A, siis on seda ka R^{-1}. Kui R on seos hulgast A hulka B, siis R^{-1} on seos hulgast B hulka A. On ka lihtne näha, et $(R^{-1})^{-1} = R$, s.t. pöördseose pöördseos ühtib esialgse seosega (Kontrolli!).

Näide 16. Olgu $R = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7), (3, 8)\}$. Siis $R^{-1} = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 3)\}$.

Näide 17. Olgu $X = Y = \mathbb{R}$ ja R reaalarvudel defineeritud range järjestuse seos $<$, s.o. $R = \{(x, y) | \, x < y\}$. Siis $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} = \{(y, x) \mid x < y\} = \{(y, x) \mid y > x\}$, st seose $<$ pöördseos on seos $>$.

Näide 18. Olgu $X = Y = \mathbb{R}$ ja I reaalarvudel defineeritud võrdusseos ehk ***ühikseos***, s. o. $I = \{(x, y) | \, x = y\}$. Siis $I^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in I\} = \{(y, x) \mid x = y\} = \{(y, x) \mid y = x\}$, st võrdusseose ehk ühikseose pöördseos on ta ise.

Kui seosel R on refleksiivsuse, transitiivsuse, sümmeetria või antisümmeetria omadus, siis ka tema pöördseosel R^{-1} on see omadus (need omadused).

Ülesanne 7. Näita, et seos R hulgal A on antisümmeetriline siis ja ainult siis, kui $R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Ülesanne 8. Näita, et seos R hulgal A on sümmeetriline siis ja ainult siis, kui $R = R^{-1}$.

Definitsioon. Seoste $R \subseteq A \times B$ ja $S \subseteq B \times C$ ***korrutiseks*** ehk ***kompositsiooniks*** nimetatakse seost $S \circ R \subseteq A \times C$, kus $S \circ R = \{(a,c) \mid \exists b \in B$ nii, et $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in S\}$.

Kasutatakse ka tähist SR. Sarnaselt eespool olevatele definitsioonidele, võime kahe seose korrutise definitsiooni tingimuse esitada ka kujul $a(S \circ R)c \iff \exists b \in B\ (aRb \wedge bSc)$.

Erijuhul, kui R ja S mõlemad on seosed hulgal A, on ka nende korrutis $S \circ R$ seos samal hulgal A.

Ülesanne 9. Olgu ühikseos $I = \{(a,a) \mid a \in A\}$. Tõesta, et seose $R \subseteq A \times B$ ja ühikseose $I \subseteq A \times A$ korral $R \circ I = R$, ühikseose $I \subseteq B \times B$ korral $I \circ R = R$.

Märgime, et seoste korrutamisel võib juhtuda, et $R \neq \emptyset$ ja $S \neq \emptyset$, aga $S \circ R = \emptyset$.

Lause 1. Kui $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ ja $T \subseteq C \times D$, siis

i. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$;
ii. $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Tõestus. Tõestuseks on järgmised samaväärsuste ahelad:

i. $(c,a) \in (S \circ R)^{-1} \iff (a,c) \in S \circ R \iff \exists b \in B\ (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \iff$
$\iff \exists b \in B\ (b,a) \in R^{-1} \wedge (c,b) \in S^{-1} \iff \exists b \in B\ (c,b) \in S^{-1} \wedge (b,a) \in R^{-1}$
$\iff (c,a) \in R^{-1} \circ S^{-1}$.

ii. $(a,d) \in T \circ (S \circ R) \iff \exists c \in C\ (a,c) \in SR \wedge (c,d) \in T \iff$
$\iff \exists c \in C\ \exists b \in B\ (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \wedge (c,d) \in T \iff$
$\iff \exists b \in B\ (a,b) \in R \wedge (b,d) \in TS \iff$
$\iff (a,d) \in (T \circ S) \circ R$.

Ekvivalentsusseos

Olgu A suvaline mittetühi hulk.

Definitsioon. Seost R hulgal A nimetatakse ***ekvivalentsusseoseks***, kui ta on

i. ***refleksiivne***, s.t. kui $aRa\ \forall a \in A$;
ii. ***sümmeetriline***, s.t. kui $aRb \Rightarrow bRa$;
iii. ***transitiivne***, s.t. kui $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

Kui R on ekvivalentsusseos ja aRb, siis öeldakse, et elemendid a ja b on *ekvivalentsed* (seose R järgi). Sageli väljendatakse ekvivalentsiseost kirjutades ka $a \sim b$.

Näide 20. Võrdsusseos $aRb \iff a = b$ on ilmselt ekvivalentsuseos suvalisel hulgal A. Tegemist on ühikseosega $R_A = I = \{(a,a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A$, mida mõnikord nimetatakse ka hulga A^2 diagonaaliks. Ühikseos ehk võrdusseos on kõige kitsam ekvivalentsusseos, sest ta on iga ekvivalentsusseose (kui refleksiivse seose) osahulk. Ka seos $U = A \times A$ on ekvivalentsusseos hulgal A (nn universaalne seos). Seoseid I ja U nimetatakse triviaalseteks seosteks hulgal A.

Näide 21. Kujundite kongruentsus nt planimeetrias on ekvivalentsuseos tasandi kõikide kujundite hulgal. Kolmnurkade (või hulknurkade) sarnasuse seos on samuti ekvivalentsusseos. Olgu märgitud, et sel juhul kasutatakse just sümboolikat $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Näide 22. Sirgete samasihilisus ja vektorite kollineaarsus ning komplanaarsus on ekvivalentsuseosed.

Näide 23. Kongruentsiseos täisarvude hulgal $\mathbb{Z}$ on samuti ekvivalentsusseos. Olgu $m > 0$ mingi fikseeritud naturaalarv. Täisarve a ja b nimetatakse ***kongruentseteks mooduli m järgi***, kui vahe $a - b$ jagub arvuga m ja kirjutatakse $a \equiv b \ (mod\ m)$.

Näiteks $25 \equiv 11 \ (mod\ 7)$, $21 \equiv 13 \ (mod\ 4)$.

Ülesanne 10. Näita, et kui ekvivalentsusseos on antisümmeetriline, siis on ta võrdus ehk ühikseos.

Ülesanne 11. Tõesta, et kui R ja S on ekvivalentsusseosed, siis $S \circ R$ on ekvivalentsusseos parajasti siis, kui $S \circ R = R \circ S$. Leia näide ekvivalentsusseostest R ja S (samal hulgal A), kus $S \circ R \neq R \circ S$.

Klassijaotused

Iga ekvivalentsuseose $R \subseteq A \times A$ abil saame hulga A jaotada nn ekvivalentsiklassideks.

Definitsioon. ***Ekvivalentsiklassiks*** elemendi $a \in A$ järgi (või ekvivalentsiklassiks seose R järgi esindajaga a) nimetatakse hulga A osahulka $[a]_R$, mis koosneb hulga A kõigist elementidest, mis on seoses R elemendiga a, s.o, elementidest, mis on ekvivalentsed elemendiga a: $[a]_R = \{x \mid x \in A \text{ ja } aRx\}$.

Niisiis $x \in [a]_R$ tähendab seda, et xRa. Refleksiivsuse tõttu $a \in [a]_R$.

Ekvivalentsiklasside hulk on teatud omadustega. Seepärast toome sisse järgmise mõiste.

Definitsioon. Öeldakse, et hulgal A on antud ***klassijaotus*** $K = \{K_i,\ i \in I\}$, kui kõik osahulgad $K_i \neq \emptyset$ ja on rahuldatud kaks järgmist nõuet:
1) iga kaks erinevat osahulka on mittelõikuvad, s.t iga $i, j \in I$ korral tingimusest $K_i \neq K_j$ järeldub, et $K_i \cap K_j = \emptyset$;
2) hulga A iga element kuulub mingisse antud osahulka, ehk hulk A võrdub osahulkade K_i ühendiga, s.t $A = \bigcup_{i \in I} K_i$.
Hulki $K_i,\ i \in I$ nimetatakse selle klassijaotuse K ***klassideks***.

Teiste sõnadega, klassijaotuse korral on hulk A jaotatud mittelõikuvateks mittetühjadeks osahulkadeks, mis moodustavadki hulkade süsteemi K (vaata joonist). Üldjuhul võib I olla ükskõik milline indeksite hulk (lõplik või lõpmatu).

Näide 24. Olgu G mingi gümnaasiumi kõikide õpilaste hulk ning K_{10}, K_{11} ja K_{12} vastavalt kõikide 10. klassi, 11. klassi ja 12. klassi õpilaste hulgad. Süsteem $\{K_{10}, K_{11}, K_{12}\}$ on klassijaotus hulgal G.

Näide 25. Hulga A kõik üheelemendilised osahulgad $\{\{a\} \mid a \in A\}$ moodustavad klassijaotuse, sest $\{a\} \neq \emptyset$, $\bigcup_{a\in A}\{a\} = A$, ja sellest, et $\{a\} \neq \{b\}$ (s.t. $a \neq b$), järeldub, et $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$. See on kõige peenem klassijaotus hulgal A.

Näide 26. Ühest osahulgast A koosnev klassijaotus $\{A\}$ on kõige jämedam klassijaotus hulgal A.

Näide 27. Kui $A = \mathbb{R}$, siis moodustavad klassijaotuse poollõigud $[i, i+1),\ i \in \mathbb{Z}$. (Kontrolli ise, et tingimused oleksid täidetud!)

Hulga A klassijaotused $\{K_i\}$ ja $\{L_j\}$ loeme võrdseteks, kui iga K_i korral leidub L_j nii, et $L_j = K_i$, ja vastupidi, iga L_j korral leidub K_i nii, et $K_i = L_j$.

Lause 2. Klassijaotused $K = \{K_i,\ i \in I\}$ ja $L = \{L_j,\ j \in J\}$ ühtivad, kui iga K_i korral leidub L_j nii, et $K_i = L_j$.

Tõestus. Valime vabalt L_j. Olgu $a \in L_j$. Et $a \in A$, siis $A = \bigcup_{i\in I} K_i$ tõttu leidub K_i nii, et $a \in K_i$. Leiame $L_{j'}$ nii, et $L_{j'} = K_i$. Siis $a \in L_j \cap L_{j'}$, seega $L_j \cap L_{j'} \neq \emptyset$. Sellest järeldub, et $L_j = L_{j'}$ ehk $K_i = L_j$. ■

Näitame, et mingi hulga kõigi ekvivalentsusseoste hulga ja sama hulga kõigi klassijaotuste hulga vahel on üksühene vastavus (selles mõttes, et igale ekvivalentsusseosele vastab üks klassijaotus ja vastupidi, ning kui võtta ekvivalentsuseosele vastavale klassijaotusele vastav ekvivalentsusseos, siis see ekvivalentsusseos langeb kokku esialgse ekvivalentsusseosega.)

Teoreem 2. 1) Olgu R suvaline ekvivalentsuseos hulgal A. Siis ekvivalentsiklasside süsteem $\{[a]_R \mid a \in A\}$ on klassijaotus hulgal A.

2) Vastupidi, kui $K = \{K_i,\ i \in I\}$, on klassijaotus hulgal A, siis seos R, kus aRb tähendab, et elemendid a ja b kuuluvad ühte ja samasse klassi (mingisse hulka K_i), on ekvivalentsuseos hulgal A.

Tõestus. 1) Näitame, et osahulkade süsteem $\{[a]_R \mid a \in A\}$ on klassijaotus hulgal A. Tõepoolest, seose R refleksiivsuse tõttu $\forall a \in A$ korral aRa, s.t. $\forall a \in A$ korral $a \in [a]_R$. Seega ei ole ükski klassijaotuse klassidest tühi ning iga element kuulub vähemalt ühte klassidest $[a]_R$. See viimane väide aga tähendab ka seda, et $\forall a \in A$ korral $a \in \bigcup_{a\in A}[a]_R$, s.t. $A \subseteq \bigcup_{a\in A}[a]_R$. Et vastupidine sisalduvus $\bigcup_{a\in A}[a]_R \subseteq A$ on ilmne (miks?), siis oleme tõestanud, et $A = \bigcup_{a\in A}[a]_R$. Seega on klassijaotuse definitsiooni teine tingimus täidetud. Esimese tingimuse kontrollimiseks võtame kaks osahulka $[a]_R$ ja $[b]_R$, kus $a, b \in A$, ning elemendi c nende ühisosast: $c \in [a]_R \cap [b]_R$. Et $c \in [a]_R$, siis on cRa, ning et $c \in [b]_R$, siis on cRb. Kuna cRa, siis saame seose R sümmeetria tõttu, et aRc. Kuna aRc ja cRb, siis seose R transitiivsuse tõttu aRb. Olgu nüüd x suvaline element osahulgast $[a]_R$. Siis xRa. Kuna aRb, siis järeldub sellest seose R transitiivsuse tõttu xRb. See tähendab, et $x \in [a]_R \Rightarrow x \in [b]_R$, ehk $[a]_R \subseteq [b]_R$. Samasugune arutelu annab meile $[b]_R \subseteq [a]_R$. Järelikult $[a]_R = [b]_R$ ning me oleme näidanud, et kui süsteemi $\{[a]_R \mid a \in A\}$ kaks elementi on erinevad, siis nende ühisosa on tühi hulk. Sellega on kontrollitud klassijaotuse definitsiooni teise tingimuse täidetus.

2) Olgu meil nüüd antud klassijaotus $K = \{K_i,\ i \in I\}$ hulgal A. Vaatleme seost R, mis on defineeritud tingimusega, et aRb siis, kui elemendid a ja b kuuluvad ühte ja samasse klassi,

ehk $aRb \Leftrightarrow \exists i \in I\ (a \in K_i \wedge b \in K_i)$. Näitame, et selliselt defineeritud seos on ekvivalentsusseos. Seos R on refleksiivne: iga $a \in A$ korral aRa, sest $A = \bigcup_{i \in I} K_i$ ning $a \in A$ tõttu peab element a vähemalt ühte hulka K_i kuuluma. Seos R on sümmeetriline: kui aRb, s.t. $\exists i \in I\ (a \in K_i \wedge b \in K_i)$, siis ka $b \in K_i \wedge a \in K_i$, s.t. bRa. Seos R on transitiivne: kui $a, b, c \in A$ korral aRb ja bRc, siis vastavalt seose R definitsioonile leiduvad niisugused $i, j \in I$, et $a \in K_i$ ja $b \in K_i$ ning $b \in K_j$ ja $c \in K_j$. Kuna nüüd $b \in K_i \cap K_j$, siis järeldub klassijaotuse definitsiooni esimesest tingimusest, et $K_i = K_j$. Järelikult $a, c \in K_i$, millest tuleneb, et aRc. Kokkuvõtvalt oleme näidanud, et seos R on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne ning järelikult ekvivalentsusseos. ■

Vaatleme juba näidetes esinenud ekvivalentsusseoseid ja klassijaotusi ning leiame neile loomulikult vastavad klassijaotused ja ekvivalentsusseosed.

Näide 28. Suvalises hulgas A antud võrdusseosele vastav klassijaotus koosneb hulkadest $[a]_R = \{b \mid b \in A \text{ ja } bRa\} = \{b \in A \mid b = a\} = \{a\},\ a \in A$. Seega vastab võrdusele kui kõige kitsamale ekvivalentsusseosele kõige peenem klassijaotus $\{\{a\} \mid a \in A\}$.

Näide 29. Vaatleme hulgas A ühehulgalist klassijaotust $\{A\}$. Talle vastava ekvivalentsusseose R korral $aRb \Leftrightarrow a \in A \wedge b \in A \Leftrightarrow (a, b) \in A \times A$. Seega antud juhul $R = U = A \times A$, s.t. kõige jämedamale klassijaotusele $\{A\}$ vastab kõige laiem ekvivalentsusseos ehk universaalne seos $A \times A$.

Faktorhulk

Definitsioon. Olgu R ekvivalentsuseos hulgal A. Hulka, mille elementideks on seosele R vastava klassijaotuse kõik klassid, nimetatakse hulga A ***faktorhulgaks*** ekvivalentsuseose R järgi ja tähistatakse A/R.

Seega, $A/R = \{[a]_R : a \in A\}$. Märgime, et erinevatele elementidele vastavad ekvivalentsiklassid võivad ühtida, s.t. $a \neq b$ korral võib olla $[a]_R = [b]_R$. Faktorhulga elementideks võetakse võrdsete ekvivalentsiklasside seast ainult üks.

Näide 30. Kui hulgas A vaadelda ekvivalentsusseosena R võrdust, s.t. $aRb \Leftrightarrow a = b$, siis $A/R = \{\{a\} \mid a \in A\}$.

Näide 31. Loeme tasandi $X = \mathbb{R}^2$ punktid $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$ ekvivalentseteks, kui nad asuvad samal vertikaalsel sirgel. Siis $[x] = \{y \in X \mid y_1 = x_1\}$ on kõigi punktide hulk, mis asuvad punktiga x ühel ja samal vertikaalsel sirgel, ehk punkti x läbiv vertikaalne sirge. Faktorhulk X/R koosneb siin kõigist vertikaalsetest sirgetest.

Näide 32. Kui R on samasihilisuse seos tasandi (või ruumi) sirgete hulgal A, siis vastava faktorhulga elementideks on konkreetsed sihid.

Näide 33. Kui R on vektorite võrdsuse seos $\vec{u} = \vec{v}$, siis iga ekvivalentsiklass koosneb samasuunalistest võrdse pikkusega vektoritest, mida vaadeldakse ühe ja sama vektorina. Seega faktorhulga elementideks on vabavektorid.