# 9. PEATÜKK

# FUNKTSIOONI DEFINITSIOON

Funktsiooni mõiste on üks kesksetest matemaatikas. Pikka aega olid funktsioonid peamiselt matemaatilise analüüsi uurimisobjektid ja vaadeldi ainult reaal- või kompleksarvudel defineeritud funktsioone, mida saab esitada mingi (elementaarfunktsioonidest koostatud) avaldise abil. Uuriti funktsioonide pidevust, diferentseeruvust, integreeruvust jne.

Ühe muutuja elementaarfunktsioonid on näiteks $f(x)=6$, $g(x)=3x$, $h(x)=x^2$, $k(x)=sin(x)$, $l(x)=e^x$, $m(x)=ln(x)$ jne. Aritmeetilised tehted ja astendamine annavad meile viis kahe muutuja funktsiooni $x+y$, $x-y$, $x\cdot y$, $x:y$ ja $x^y$.

Nii ühe kui mitme muutuja funktsioone ja konstante avaldistes kombineerides saame moodustada keerulisemaid funktsioone, näiteks $n(x)= tan(2\pi x+ln(3x^4-5x+8))$ või $p(x,y)=(x+y)^{sin(3x)}$.

Matemaatilise analüüsi alastes raamatutes kirjutatakse ka praegu mõnikord, et „*Funktsiooniks nimetatakse eeskirja, mis seab hulga X igale elemendile vastavusse hulga Y mingi elemendi*". Informaatik võiks seda ilmselt mõista nii, et see eeskiri tähendab algoritmi (programmi), mille abil saab argumendi väärtuse järgi leida funktsiooni väärtuse. Avaldise kujul antud funktsioonide jaoks on sellised algoritmid tõesti olemas, aga matemaatikas vaadeldakse ka üldisemaid olukordi, kus funktsiooni ei saa avaldada elementaarfunktsioonide kaudu ega ole olemas ka tema arvutamise algoritmi. Tegelikult ei eelda ka matemaatilise analüüsi teoreemid mingi eeskirja olemasolu, sest nende teoreemide tõestustes eeldust mingi eeskirja olemasolu kohta ei kasutata. Eeldatakse vaid seda, et igale argumendi väärtusele vastab mingi funktsiooni väärtus.

Hulgateoreetilises matemaatika käsitluses defineeritakse funktsiooni mõiste seose mõiste baasil. Argumentide ja väärtuste hulgad võivad olla suvalised (sealhulgas ei tarvitse nad ühtida) ja suvaline võib olla ka seadus, mille järgi argumendi väärtusele vastab funktsiooni väärtus.

**Definitsioon.** Olgu $X$ ja $Y$ mittetühjad hulgad. Seost $f\subseteq X\times Y$ nimetatakse ***funktsiooniks*** ehk ***kujutuseks*** hulgast $X$ hulka $Y$, kui iga $x\in X$ jaoks leidub täpselt üks selline $y\in Y$, et $(x,y)\in f$.

Seosest $f$ võib seega mõelda kui eeskirjast, mis seab hulga $X$ igale elemendile vastavusse hulga $Y$ kindla elemendi. Kui $f$ on funktsioon hulgast $X$ hulka $Y$, siis kirjutatakse $f$ kohta ka:

$$f : X\to Y \quad \text{või} \quad X\xrightarrow{f} Y$$

Kui $(x,y)\in f$, siis kasutatakse kirjutist $y=f(x)$ või $f: x\mapsto y$.

Hulka $X$ nimetatakse funktsiooni $f$ ***lähtehulgaks*** ehk ***määramispiirkonnaks*** ja hulka $Y$ nimetatakse funktsiooni $f$ ***sihthulgaks***. Elementi $y$ nimetatakse ***väärtuseks*** ehk ***elemendi x kujutiseks***, elementi $x$ nimetatakse funktsiooni ***argumendiks*** ehk ***elemendi y originaaliks***. Funktsiooni asemel räägitakse abstraktsemate hulkade korral ka ***operaatorist*** või ***kujutusest***. Kujutust $f: X\to X$ nimetatakse hulga $X$ ***teisenduseks***.

Funktsiooni mõiste hulgateoreetiline käsitlus samastab funktsiooni tema graafikuga, nagu me oleme seda reaalarvuliste funktsioonide korral harjunud mõistma, kus funktsiooni $f$ ***graafik*** on tasandi punktide ehk reaalarvupaaride hulk:

$$Gf = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \land y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Hulgateoreetilises käsitluses antav definitsioon vastab algebra traditsioonidele, kus tavaliselt tegeldakse ainult vaadeldava algebralise süsteemi kõigil elementidel defineeritud funktsioonidega (tihti nimetatakse neid seal kujutusteks). Matemaatilises analüüsis (ja ka koolimatemaatikas) öeldakse aga tavaliselt, et $f(x) = tan(x)$, $g(x) = ln(x)$ ja $h(x) = \sqrt{x}$ on funktsioonid reaalarvude hulgast reaalarvude hulka. Nendes distsipliinides kasutatav funktsiooni mõiste ei välista aga kõikjal defineeritud funktsioone, s.t. määramispiirkonnaks ei pea olema ainult reaalarvude hulk, võib olla ka mistahes hulk $X$. Konkreetse funktsiooni tundmaõppimine sisaldab muuhulgas tema määramispiirkonna ja muutumispiirkonna kindlakstegemist. Funktsiooni ***määramispiirkond*** matemaatilises analüüsis vastabki hulgale $X$ meie definitsioonis. ***Muutumispiirkond*** ehk funktsiooni $f$ väärtuste piirkond $f(X)$ on aga sihthulga $Y$ mingi osahulk.

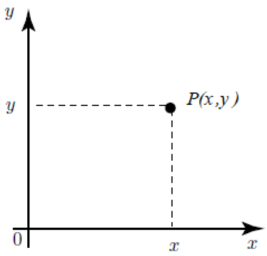
**Näiteid funktsioonidest:**

**1)** Elementaarmatemaatikast tuntud lineaarne funktsioon $y = ax + b$ $(a \neq 0)$, ruutfunktsioon $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ja trigonomeetrilised funktsioonid $y = sin(x)$ ning $y = cos(x)$ on funktsioonid reaalarvude hulgast reaalarvude hulka: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**2)** ***Konstantne funktsioon*** $f(x) = c$ seab kõigile hulga $X$ elementidele $x$ vastavusse ühe ja sama elemendi $c \in Y$.

**3)** ***Samasus-*** ehk ***identsusfunktsiooniks*** nimetatakse funktsiooni $f: X \to X$, kus $f(x) = x$.

**4)** Olgu funktsioon $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ antud võrdusega $f\big((x, y)\big) = (x, 0)$, s.t. $f$ seab tasandi punktile $P(x, y)$ vastavusse tema esimese koordinaadi $x$-teljel. Sellist funktsiooni nimetatakse ***projekteerimisteisenduseks*** $x$-teljele ehk ***projektoriks*** $x$-teljele. Analoogiliselt võib vaadelda projektorit $y$-teljele.




**5)** Olgu $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Vaatleme funktsioone $s: X \to X$, kus üks ja sama naturaalarv ei vasta kahele erinevale naturaalarvule, s.t. ei ole võimalik olukord, kus $s(i) = s(j)$, aga $i \neq j$. Niisuguse tingimuse täidetuse korral vastab igale arvule hulgast $X$ selle hulga mingi arv. Taolisi funktsioone esitatakse tavaliselt tabelina

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

kusjuures $\{i_1, i_2\, 2, \dots, i_n\} = X$, ning selliseid funktsioone nimetatakse substitutsioonideks. Näiteks üks võimalik substitutsioonidest on

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**6)** $f(x) = 1/x$ on funktsioon $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

**7)** Funktsioon ***põrand*** $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ seab reaalarvule $x$ vastavusse suurima temast väiksema või võrdse täisarvu, aga funktsioon ***lagi*** $\lceil x \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ seab reaalarvule $x$ vastavusse vähima temast suurema või võrdse täisarvu, s.t.

$$\lfloor x \rfloor = m, \quad kui \quad m \leq x < m+1, \qquad \lceil x \rceil = m, \quad kui \quad m-1 < x \leq m.$$

**8)** Reaalarvuliste liikmetega jada $a_1, a_2, a_3, \dots$ on vaadeldav funktsioonina $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, kus igale naturaalarvule on seatud vastavusse kindel reaalarv, s.t. $a_i = f(i),\ i \in \mathbb{N}$.

## Elemendi kujutis ja hulga kujutis

Olgu antud funktsioon $f : X \to Y$.

**Definitsioon.** Kui $x \in X$, $y \in Y$ ja $y = f(x)$, siis elementi $y$ nimetatakse ***elemendi x kujutiseks*** (funktsiooniga $f$).

Igal määramispiirkonna $X$ elemendil on parajasti üks kujutis.

**Näiteid elemendi kujutistest:**

**1)** Vaatleme funktsiooni $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siis arvu 0 kujutis on 0, sest $f(0) = 0$. Arvude $-1$ ja 1 kujutis on 1, sest $f(-1) = 1$ ja $f(1) = 1$.

**2)** Vaatleme funktsiooni $f(x) = \sqrt{x}$ , $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Siis arvu 4 kujutis on 2, sest $f(4) = 2$.

**3)** Vaatleme funktsiooni $f(x) = x + 1$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siis elemendi 0 kujutis on 1, sest $f(0) = 1$.

**Definitsioon.** Hulga $A \subseteq X$ ***kujutiseks*** nimetatakse hulga $Y$ osahulka, mis koosneb kõikide hulga $A$ elementide kujutistest, s.t.

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x\, [x \in A \wedge f(x) = y]\}.$$

**Definitsioon.** Funktsiooni kogu määramispiirkonna kujutist nimetatakse funktsiooni ***väärtuste piirkonnaks*** ehk ***muutumispiirkonnaks.***

**NB!** Kujutis ≠ kujutus. Sõna „kujutus“ tähistab funktsiooni (kujutamise viisi), sõna „kujutis“ tähendab aga funktsiooni väärtust, s.t. kujutamise tulemust.

**Näiteid hulga kujutistest:**

**1)** Vaatleme funktsiooni $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siis $f([-10, 10]) = [0, 100]$ ja $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$.

**2)** Vaatleme funktsiooni $f(x) = sin(x)$. Siis $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, aga ka $sin([-\pi, \pi]) = sin([0, 2\pi] = [-1, 1]$.

**3)** Vaatleme funktsiooni $f(x) = log(x)$. Siis $f((0,1]) = [-\infty, 0]$.

**4)** Vaatleme funktsiooni $f(x) = x + 2$ , $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siis $f([-10, 10]) = [-8, 12]$.

## Hulga ja elemendi originaal

Olgu antud funktsioon $f: X \to Y$.

**Definitsioon.** Hulga $B \subseteq Y$ ***originaaliks*** nimetatakse hulka, mis koosneb kõigist nendest hulga $X$ elementidest, mis kujutuvad hulga $B$ elemendiks, s.t.

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Tähistus $f^{-1}$ ei tähenda siin, et funktsioonil $f$ peaks leiduma pöördfunktsioon (küll aga tähendab see pöördseost).

Räägitakse ka sellest, et funktsiooni $f$ määramispiirkonna $X$ element $x$ on hulga $Y$ elemendi $y$ originaal, kui $f(x) = y$.

Mõnel hulga $Y$ elemendil võib originaale olla üks, mõnel rohkem ja mõnel mitte ühtegi. Näiteks, kui me vaatleme ruutfunktsiooni kui funktsiooni reaalarvude hulgast reaalarvude hulka, siis on igal positiivsel reaalarvul kaks originaali, arvul null on üks originaal ja negatiivsetel reaalarvudel pole mitte ühtegi originaali.

**Näiteid:**

**1)** Vaatleme funktsiooni $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siis $f^{-1}(\{1\}) = \{1, -1\}$ ja $f^{-1}([-10, -5]) = \emptyset$.

**2)** Vaatleme funktsiooni $f(x) = 0$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siis $f^{-1}(\{0\}) = \{\mathbb{R}\}$.

**3)** Vaatleme funktsiooni $f(x) = x + 1$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siis $f^{-1}(\{0\}) = \{-1\}$.

## Hulga kujutise omadusi

**Teoreem 1.** Olgu $f$ funktsioon hulgast $X$ hulka $Y$ ja $A, B \subseteq X$. Siis

1. $f(\emptyset) = \emptyset$
2. $f(X) \subseteq Y$
3. Kui $A \subseteq B$, siis $f(A) \subseteq f(B)$
4. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
5. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Tõestus.

1. Vastavalt hulga kujutise definitsioonile $f(\emptyset) = \{ f(x) \mid x \in \emptyset\}$. Kuna aga ükski $x$ tühja hulka ei kuulu, siis pole paremal olev tingimus rahuldatud ühegi elemendi $x$ korral. Seega on parempoolne hulk tühi.
2. Olgu $y \in f(X)$. Hulga kujutise definitsiooni põhjal $f(X) = \{y \in Y \mid \exists x\, [x \in X \land f(x) = y]\}$. Seega $y \in Y$.

Märkus. Esitame ka näite funktsioonist $f$, kus võrdus $f(X) = Y$ ei kehti. Vaatleme funktsiooni $f(x) = x^2$, kui funktsiooni reaalarvude hulgast reaalarvude hulka. Siis

$$f(\mathbb{R}) = \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty) \neq \mathbb{R}.$$

3. Olgu $A, B \subseteq X$ ja $A \subseteq B$. Väite 3 tõestamiseks tuleb meil vastavalt osahulga definitsioonile näidata, et kui $y \in f(A)$, siis $y \in f(B)$. Olgu $y \in f(A)$. Siis hulga kujutise definitsiooni järgi eksisteerib $x \in A$, nii et $y = f(x)$. Rakendades hulkadele $A$ ja $B$ osahulga definitsiooni, saame $x \in B$. Seega eksisteerib $x \in B$, nii et $y = f(x)$, mistõttu hulga kujutise definitsiooni järgi $y \in f(B)$.
4. Võrduse tõestamiseks näitame, et kumbki võrduse pooltest on teise poole osahulk. Olgu $y \in f(A \cup B)$. Siis hulga kujutise definitsiooni järgi eksisteerib $x \in A \cup B$, nii et $y = f(x)$. Ühendi definitsiooni järgi kehtib $x \in A \vee x \in B$. Kui $x \in A$, siis hulga kujutise definitsiooni järgi $f(x) \in f(A)$, millest $y = f(x)$ tõttu saame $y \in f(A)$ ja lõpuks ühendi definitsiooni järgi $y \in f(A) \cup f(B)$. Kui $x \in B$, siis saame samal viisil $f(x) \in f(B)$, $y \in f(B)$ ja lõpuks $y \in f(A) \cup f(B)$. Seega kehtib mõlemal juhul $y \in f(A) \cup f(B)$, millega oleme tõestanud, et $f(A \cup B)$ on hulga $f(A) \cup f(B)$ alamhulk. Teistpidi, olgu $y \in f(A) \cup f(B)$. Siis ühendi definitsiooni järgi kehtib $y \in f(A) \vee y \in f(B)$. Kui $y \in f(A)$, siis hulga kujutise definitsiooni järgi leidub selline $x \in A$, et $f(x) = y$. Siis ühendi definitsioon järgi ka $x \in A \cup B$ ja järelikult hulga kujutise definitsiooni järgi $y \in f(A \cup B)$. Kui $y \in f(B)$, siis on tõestus analoogiline. Oleme jälle mõlemal juhul saanud $y \in f(A \cup B)$ ja seega on hulk $f(A) \cup f(B)$ hulga $f(A \cup B)$ osahulk.
5. Olgu $y \in f(A \cap B)$. Hulga kujutise definitsiooni järgi eksisteerib $x \in A \cap B$, nii et $y = f(x)$. Ühisosa definitsiooni järgi kehtib siis $x \in A \wedge x \in B$. Et $y = f(x)$, siis hulga kujutise definitsiooni järgi saame konjunktsiooni esimesest poolest $y \in f(A)$ ja teisest poolest $y \in f(B)$. Siit saame hulkade ühisosa definitsiooni põhjal $y \in f(A) \cap f(B)$. ■

Omadused 4. ja 5. kehtivad suvalise arvu hulkade ühendi ja ühisosa korral, s.t. kehtivad ka

**4a)** $f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$

**5a)** $f(\bigcap_\alpha A_\alpha) \subseteq \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$

**Näiteid, kus $\boldsymbol{f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)}$:**

**1)** Olgu funktsioon $f(x) = |x|$ ja hulgad $A = \{-c\}$ ja $B = \{c\}$. Võttes nende kahe hulga ühisosa, saame võrduse $A \cap B = \emptyset$. Tuginedes funktsiooni kujutise esimesele omadusele, saame siis, et $f(A \cap B) = \emptyset$ . Samas aga $f(A) = \{c\}$ ja $f(B) = \{c\}$ ehk $f(A) \cap f(B) = \{c\}$.

**2)** Sama olukord tekib ka funktsiooniga $f(x) = x^2$, $A = \{-1\}$ ja $B = \{1\}$.

## Hulga originaali omadusi

<u>**Teoreem 2.**</u> Olgu $f: X \to Y$ funktsioon ja $A, B \subseteq Y$. Siis

1. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
2. $f^{-1}(Y) = X$
3. Kui $A \subseteq B$, siis $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$
4. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
5. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
6. $f^{-1}(B') = (f^{-1}(B))'$, s.t. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

Tõestus.

1. Vahetult originaali definitsioonist saame $f^{-1}(\emptyset) = \{x \in X \mid f(x) \in \emptyset\}$. Kuna pole selliseid hulga $X$ elemente, mis kujutuvad tühihulga elementideks, siis võrdus kehtib.
2. Vahetult originaali definitsioonist saame $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$. Funktsiooni definitsiooni järgi kujutub hulga $X$ iga element mingiks hulga $Y$ elemendiks. Seega võrdus kehtib.
3. Olgu $x \in f^{-1}(A)$. Originaali definitsioonist saame, et siis $f(x) \in A$. Eelduse kohaselt on hulk $A$ hulga $B$ osahulk, ehk siis ka $f(x) \in B$. Hulga originaali definitsiooni järgi kehtib $x \in f^{-1}(B)$.
4. Näitame, et suvalise $x \in X$ korral kehtib $x \in f^{-1}(A \cup B)$ parajasti siis, kui $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Iga teisenduse juures on paremal sulgudes toodud definitsioon, mida kasutatakse järgmise rea saamiseks.
   $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow$ (originaali def.)
   $f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow$ (ühendi def.)
   $f(x) \in A \ \vee\ f(x) \in B \Leftrightarrow$ (originaali def.)
   $x \in f^{-1}(A) \ \vee\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow$ (ühendi def.)
   $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
5. Näitame, et suvalise $x \in X$ korral kehtib $x \in f^{-1}(A \cap B)$ parajasti siis, kui $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
   $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow$ (originaali def.)
   $f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow$ (ühisosa def.)
   $f(x) \in A \ \wedge\ f(x)\, B \in \Leftrightarrow$ (originaali def.)
   $x \in f^{-1}(A) \ \wedge\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow$ (ühisosa def.)
   $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
6. Näitame kahe hulga võrdsust.
   $x \in f^{-1}(Y \setminus B) \Leftrightarrow$ (originaali def.)
   $f(x) \in Y \setminus B \Leftrightarrow$ (vahe def.)
   $f(x) \in Y \ \wedge\ \neg(f(x) \in B) \Leftrightarrow$ (originaali def.)
   $x \in f^{-1}(Y) \ \wedge\ \neg(x \in f^{-1}(B))$ $(f^{-1}(Y) = X)$
   $x \in X \ \wedge\ \neg(x \in f^{-1}(B)) \Leftrightarrow$ (vahe def.)
   $x \in X \setminus f^{-1}(B)$. ■

Omadused 4. ja 5. kehtivad suvalise arvu hulkade ühendi ja ühisosa korral, s.t. kehtivad ka

**4a)** $f^{-1}(\bigcup_\alpha B_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$

**5a)** $f^{-1}(\bigcap_\alpha B_\alpha) \subseteq \bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$

Hulkade kujutistel ei ole originaalide omadustega 6. analoogilist omadust. Kui näiteks $f: X \to Y$ on konstantne funktsioon, siis $f(A) = \{c\}$ (kui $A \neq \emptyset$), $f(X \setminus A) = \{c\}$ (kui $A \neq X$) ja $Y/f(A) = Y / \{c\}$ ning ei leia aset sisalduvused $f(X/A) \subseteq Y / f(A)$ ega ka $f(X/A) \supseteq Y / f(A)$ (kui $Y \neq \{c\}$).

Nagu näeme, on hulkade originaalide omadused paremad kui hulkade kujutiste omadused, mistõttu funktsioonide põhiomaduste määratlemisel teistes matemaatilistes distsipliinides kasutatakse rohkem hulkade originaale.

## Hulga kujutise originaal ja originaali kujutis

Kujutise ja originaali järjestikuse võtmise korral saame järgmised sisalduvused.

<u>**Teoreem 3.**</u> Olgu $f: X \to Y$ funktsioon. Siis
**1.** Kui $A \subseteq X$, siis $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
**2.** Kui $B \subseteq Y$, siis $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

<u>Tõestus.</u>
**1.** Olgu $A \subseteq X$ ja olgu $x \in A$. Meil on vaja näidata, et $x \in f^{-1}(f(A))$. Hulga kujutise definitsiooni põhjal võime kirjutada $f(x) \in f(A)$. Et saaksime kasutada hulga originaali omadusi, asendame elemendi $f(x) \in Y$ üheelemendilise hulgaga ja vastavalt seose „element" seosega „osahulk". Saame $\{f(x)\} \subseteq f(A)$. Nüüd rakendame sellele seosele hulga originaali omadust 3 ja saame: $f^{-1}(\{f(x)\}) \subseteq f^{-1}(f(A))$. Aga $x \in f^{-1}(\{f(x)\})$, sest $f(x) \in \{f(x)\}$ (vt hulga originaali definitsiooni). Kahest viimasest seosest saame $x \in f^{-1}(f(A))$.
**2.** Olgu $B \subseteq Y$ ja olgu $y \in f(f^{-1}B))$. Siis kujutise definitsiooni põhjal leidub $x \in f^{-1}(B)$, nii et kehtib $f(x) = y$. Seos $x \in f^{-1}(B)$ tähendab originaali definitsiooni põhjal, et $f(x) \in B$. Seega $y \in B$. ■

<u>**Näide**</u>, kus $A \subseteq X$ ja $A \neq f^{-1}(f(A))$.

Olgu $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ja $A = \{1, 2, 3\}$. Kõigi $x \in A$ korral kehtib $f(x) = x$, s.t. $f(A) = \{1, 2, 3\}$. Saame $f - 1(f(A)) = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\} \neq A$ , sest arvudeks 1, 2 ja 3 kujutuvad lisaks hulga $A$ elementidele ka nende vastandarvud.

<u>**Näide**</u>, kus $B \subseteq Y$ ja $f(f^{-1}(B)) \neq B$:

Olgu $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ja $B = \{-1,0,4\}$. Funktsiooniga $f$ kujutuvad hulka $B$ hulga $f^{-1}(B) = \{-2,0,2\}$ elemendid, mida funktsiooniga $f$ kujutades saame $f(f^{-1}(B)) = \{0,4\} \neq B$.

## Funktsioonide võrdsus

**Definitsioon.** Funktsioone $f: X \to Y$ ja $g: Z \to W$ nimetatakse ***võrdseteks***, kui $X = Z$, $Y = W$ ja $f(x) = g(x)$ iga $x \in X$ $(= Z)$ korral.

Seega näiteks funktsioonid $sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $sin: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ loeme erinevateks.

Seoste peale mõeldes ütleme, et kahte funktsiooni loetakse võrdseteks, kui nad on võrdsed kui seosed (s.t. kui paaride hulgad).

## Injektiivsed, sürjektiivsed ja bijektiivsed funktsioonid

**Definitsioon.** Funktsiooni $f: X \to Y$ nimetatakse
- ***injektiivseks*** ehk ***üksüheseks***, kui erinevate argumendi väärtuste korral on funktsiooni väärtused erinevad: $x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$;
- ***sürjektiivseks*** ehk ***pealekujutuseks***, kui iga $y \in Y$ jaoks leidub selline $x \in X$, et $f(x) = y$;
- ***bijektiivseks***, kui funktsioon on injektiivne ja sürjektiivne.

Injektiivsus tähendab, et ühelgi hulga $Y$ elemendil pole rohkem kui üks originaal.

Sürjektiivsus tähendab, et igal hulga $Y$ elemendil leidub vähemalt üks originaal.

Bijektiivsus tähendab, et igal hulga $Y$ elemendil leidub täpselt üks originaal.

**Näited.**

**1.** Olgu $f(x) = x^2$. Vaatleme sellise avaldisega antud funktsiooni erinevatel hulkadel. Funktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei ole injektiivne ega sürjektiivne, sest igaks positiivseks reaalarvuks kujutatakse üks positiivne ja üks negatiivne arv. Negatiivseteks arvudeks ei kujutata ühtegi $\mathbb{R}$ elementi.
Funktsioonina $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ on $x^2$ sürjektiivne, aga pole injektiivne.
Funktsioonina $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, aga ka funktsioonina $f\colon (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ on $x^2$ injektiivne ja sürjektiivne, s.t. bijektiivne.

**2.** Funktsioon $sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei ole injektiivne ega sürjektiivne. Miks?
Funktsioon $sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ on sürjektiivne, aga pole injektiivne. Miks?
Funktsioon $sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ on injektiivne, aga pole sürjektiivne. Miks?
Funktsioon $sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ on injektiivne ja sürjektiivne, s.t. on bijektiivne.

**3.** Olgu meil kaks lõplikku hulka $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ ja $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, milles on vastavalt $m$ ja $n$ elementi. Uurime, millistel tingimustel leidub injektiivne/sürjektiivne/bijektiivne funktsioon $f\colon X \to Y$.

a) Injektiivsus

Kui $m > n$, siis iga funktsioon $f\colon X \to Y$ peab kujutama mingid hulga $X$ elemendid üheks ja samaks hulga $Y$ elemendiks. Järelikult ei leidu injektiivset funktsiooni $f\colon X \to Y$. Kui $m \le n$, siis saab konstrueerida injektiivse funktsiooni, näiteks $f(x_i) = y_i$.

b) Sürjektiivsus

Kui $m < n$, siis saavad hulga $X$ elementide kujutisteks olla ainult $m$ elementi hulgas $Y$, s.t. ei leidu sürjektiivset kujutust. Kui $m \ge n$, siis leidub sürjektiivne kujutus.

c) Bijektiivne kujutus leidub parajasti siis, kui $m = n$.

**4.** Iga naturaalarvuliste liikmetega jada $a_0, a_1, a_2, \dots$ võime vaadelda kui funktsiooni $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kus $a(i) = a_i$. Kui näiteks $a_i = 2i$, siis $a$ on injektiivne, aga pole sürjektiivne. Kui $b_i = [i/2]$ (kus nurksulud tähistavad jagatise täisosa), siis $b$ on sürjektiivne, aga pole injektiivne.

**5.** Iga reaalarvuliste liikmetega jada $a_0, a_1, a_2, \dots$ võime vaadelda kui funktsiooni $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Kui kõik jada liikmed on erinevad, siis on funktsioon $a$ injektiivne. Hiljem tõestame, et ükski funktsioon $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ei saa olla sürjektiivne.

**Ülesanne.** Tõesta, et funktsioon $f\colon X \to Y$ rahuldab tingimust $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ parajasti siis, kui ta on injektiivne.

## Bijektsioon kui üksühene vastavus

Hulgateooria seisukohalt on funktsioonid $f\colon X \to Y$ paaride hulgad

$$f = \{(x, y) \mid x \in X \land y = f(x)\}.$$

Bijektiivne funktsioon $f: X \to Y$ on siis selline paaride hulk, kus

1. iga $x \in X$ jaoks leidub parajasti üks paar, milles $x$ on esimene komponent,
2. iga $y \in Y$ jaoks leidub parajasti üks paar, milles $y$ on teine komponent.

Bijektiivseid funktsioone nimetatakse ka ***üksühesteks vastavusteks*** hulkade $X$ ja $Y$ elementide vahel (või lihtsalt hulkade $X$ ja $Y$ vahel).

**<u>Näiteid</u> üksüheste vastavuste kohta.**

**1.** Olgu $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $Y = \{a, b, c, d, e\}$. Nende hulkade elemendid saame seada üksühesesse vastavusse näiteks paaride hulga (bijektiivse funktsiooni)

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d), (5, e)\}$$

abil, s.t. $f(1) = a,\ f(2) = b, \dots\ ,\ f(5) = e$.

**2.** Olgu $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ja olgu $Y = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \text{ on paarisarv}\}$. Need hulgad seab üksühesesse vastavusse bijektiivne funktsioon $f: X \to Y$, kus $f(x) = 2x$, ehk paaride hulk $\{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), \dots\}$

**3.** Vaatleme naturaalarvude hulka $\mathbb{N}$ ja täisarvude hulka $\mathbb{Z}$. Võime konstrueerida järgneva paaride hulga $f \subseteq X \times Y$:

$f = \{(0, 0), (1, 1), (2, -1), (3, 2), (4, -2), (5, 3), (6, -3), \dots\}$, s.t.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2}, & \text{kui } x \text{ on paaritu}, \\ -\dfrac{x}{2}, & \text{kui } x \text{ on paarisarv}. \end{cases}$$

See paaride hulk on üksühene vastavus (bijektsioon).

**4.** Vaatleme lõike $X = [a, b]$ ja $Y = [c, d]$, kus $a < b$ ja $c < d$. Leidub lineaarne funktsioon $f(x) = Ax + B$, mis kujutab lõigu $[a, b]$ üksüheselt lõigule $[c, d]$. Kordajad funktsiooni $f$ avaldise jaoks võime saada, kui nõuame, et funktsioon $f$ kujutaks lõigu $X$ otspunktid lõigu $Y$ otspunktideks, s.t. $f(a) = c$ ja $f(b) = d$. Siit saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} Aa + B = c \\ Ab + B = d \end{cases}$$

Lahutades teisest võrrandist esimese, saame $(b - a)A = d - c$, seega $A = \frac{d-c}{b-a}$. Asendades nüüd saadud $A$ väärtuse esimesse võrrandisse, saame $\frac{d-c}{b-a}a + B = c$, millest $B = c - \frac{d-c}{b-a}a = \frac{c(b-a)-a(d-c)}{b-a} = \frac{bc-ad}{b-a}$.

Märgime, et esialgsetes võrrandites väärtusi $c$ ja $d$ vahetades võime saada ka lineaarse funktsiooni, mis kujutab punkti $a$ punktiks $d$ ja punkti $b$ punktiks $c$.