1. PEATÜKK
SISSEJUHATUS

Sometimes ideas just come to me. Other times I have to sweat and almost bleed to make ideas come. It's a mysterious process, but I hope I never find out exactly how it works.
J. K. Rowling (author of the Harry Potter novels)

Sissejuhatuseks

Tõenäoliselt on sinu kokkupuude matemaatikaga kuni praeguse hetkeni suuresti koosnenud ülesannete lahendamisest, kasutades teatud selgeksõpitud lahendusviise ja tehnikaid. Näiteks oled sa õppinud, kuidas lahendada algebralisi võrrandeid ja võrrandisüsteeme, kuidas lihtsustada avaldisi või kontrollida trigonomeetriliste seoste kehtivust. Kasutades teatud reegleid ja lihtsustamist, oled õppinud leidma funktsiooni tuletist ja integraali ning nende abil uurinud funktsiooni käitumist või arvutanud pindalasid ja ruumalasid. Enamasti nõuab selliste ülesannete lahendamine vaid piisavalt harjutamist.

Kõik need meetodid ja tulemused, mida sa koolimatemaatikas õppinud oled, on kunagi ammu teiste inimeste poolt avastatud ning aastate kui mitte aastasadade jooksul nende õigsus kontrollitud. Sinu jaoks on see matemaatika muidugi uus olnud ja nagu iga uue asjaga, oled sa selle omandamisel palju õppinud ja vaeva näinud. Uue tarkuse omandamine võiks ja peaks aga huvitav olema! Oled nõus? Nii tore oleks avastada matemaatikas midagi uut, mida me enne ei teadnud ja näidata, et see uus tulemus kehtib. Aga kuidas seda tehakse? Kuidas tullakse välja uute tulemustega? Kuidas avastatakse uusi seoseid ja uusi meetodeid? Üheks võimaluseks on vaadelda erinevaid näiteid ja leida nende näidete vahel mõni ühine omadus. Vaadeldud näidetele toetudes sõnastatakse teatud hüpotees ehk väide, mille kohta usutakse, et see võiks kehtida. Esimeseks sammuks tuleb aga iseennast veenda, et see, mida me väidame, on tegelikult ka tõene. Matemaatikas tähendab veenmine tõestuse konstrueerimist. Kuna iseendale lisaks peame ka kõiki teisi oma tulemuse õigsuses veenma, siis peab meie tõestus olema nii selgelt ja loogiliselt kirjutatud, et inimesed, kes tunnevad vastavaid matemaatilisi meetodeid, meid usuksid. Siinkohal tuleks ära märkida ka seda, et kui matemaatikas on väitele esitatud korrektne tõestus, siis ei kahtle enam keegi selle tulemuse õigsuses. Kokkuvõttes tähendab see seda, et sinu tulemus on tõestatud - järelikult see kehtib. Jutu lõpp. Ei ole mingisugust muud alternatiivi. Ja just selle poolest erinebki matemaatika teistest distsipliinidest.

Kursuse eesmärk

See kursus on üpris erinev sinu senistest kursustest. Meie kõige suuremaks eesmärgiks on arendada matemaatilise tõestuse konstrueerimise ja kirjutamise oskust, nii et sinu kirjutatud tõestused oleksid selged ja arusaadavad ka teistele. Matemaatilise sisu kõrval pöörame suurt tähelepanu ka matemaatilise mõtlemise protsessile ja selle arendamisele. Seega teeme üheskoos läbi arengu, kus sa muutud inimesest, kes matemaatikat kasutab, inimeseks, kes seda ka sügavamalt mõistab. Võib-olla saab see sinu esimeseks sammuks teel, kus sa ühel päeval ise uut matemaatikat ja uusi teadmisi lood. See kõik on saavutatav, kui sa vaid ise seda soovid.

Suur osa matemaatikast, mida sa oma järgnevates kursustes kohtad, põhineb teadmistele, mida sa sellelt kursuselt omandad. Mida tõsisemalt sa praegu materjali õpid ja matemaatilise mõtlemise protsessi arendad, seda kergem on sul hiljem matemaatikast aru saada. Tegelikult on ju nii, et iga ainet on meeldivam õppida, kui sa sellest ka aru saad. Selle saavutamiseks tuleb sul aga vaeva näha. Liiga tihti kuuleme lapsi või täiskasvanuid väitmas, et nad pole matemaatikas head. See on aga vaid nende väär alibi, mille taha peitu pugeda. Matemaatikat on võimalik selgeks õppida nagu iga teist ainet koolis. Teinekord kuuleme jällegi kedagi väitmas, et kuigi neil läheb matemaatikas hästi ja neile meeldib matemaatika, ei suuda nad kirja panna tõestuskäike. Ka see ei ole mingi argument, sest tõestustest arusaamiseks läheb vaja enesekindlust ja pingutust. See, et sa kontrolltöö või eksami tegid ära ilma suurema õppimiseta ja pingutamiseta, ei ole kindlasti kiitlemist väärt. Pigem on kiitlemist väärt see, kui saad öelda, et sul on hea matemaatiline ettevalmistus.

Matemaatika kui keel

Matemaatika aitab maailma kirjeldada nagu iga teinegi keel ning lubab seeläbi matemaatika keelt valdavatel inimestel omavahel suhelda ning informatsiooni vahetada. Siiski on matemaatika keel tavapärastest keeltest veidi erinev just selle poolest, et kui tavapärases keeles võib sõna esineda kohati mitmes tähenduses, siis matemaatika kirjeldab objekte oluliselt täpsemalt ja seejuures üheselt mõistetavalt. Lisaks kasutavad matemaatikud mõistete kirjeldamiseks eraldiseisvat sõnavara, millega oled osaliselt juba koolipingis tutvunud, aga mida me selle kursuse jooksul pidevalt edasi arendame. Märkad peagi, et matemaatikat on tunduvalt raskem õppida siis, kui sa tema keelt ei valda.

> ***☺ *Matemaatikud on nagu prantslased: mida sa neile ka ei ütleks, nad tõlgivad selle oma keelde ja edasine on juba midagi täielikult erinevat. (Johann Wolfgang von Goethe)*

Miks õppida matemaatikat?

Matemaatika arendab mõtlemist, mida läheb vaja pea igal erialal. Näiteks juristina töötades aitab matemaatika sul kindlasti kõige selgemalt oma argumente üles ehitada või teiste argumentidest vigu leida. Arstina töötades aitab statistika tundmine mõista ravimifirmade poolt välja hõisatud reklaamloosungite tegelikku sisu või aru saada mida ikkagi tähendab, kui üks või teine DNA-s olev geen suurendab haigestumise riski. Arhitektina ja ehitajana pead oskama jooniseid teha ja nendelt infot lugeda, arvutada ruumide ja pindade suurusi või teadma, kuidas leida tala kandevõimet. Arvuti leiutati matemaatikute poolt ning kui sa äkki veel ei tea, siis mõistavad arvutid ainult matemaatikal põhinevat algoritmilist keelt, mis tähendab aga seda, et kui sa soovid, et arvuti sinu eest midagi ära teeks, pead talle seda ütlema täpselt ja konkreetselt – matemaatiliselt. Lisaks avaldab matemaatika suurt mõju ka kunstile, luulele ja muusikale. Kunstis ja arhitektuuris leiab sageli kuldlõikele põhinevate proportsioonide kasutamist, muusikalised helid koosnevad harmoonilistest võnkumistest ning matemaatikuharidusega on näiteks „Alice Imedemaal" ja „Karupoeg Puhhi" autorid. Viimastest raamatutest leiab ka toredaid sõnamänge. Näiteks Lewis Caroll loetleb üles aritmeetika neli tehet – kiitmine, nahutamine, jorutamine ja pragamine.

Matemaatika aitab mõista ja kirjeldada meid ümbritsevat maailma. Kahekümnenda sajandi ühe suurima füüsiku Richard Feynman'i sõnul on matemaatika valdamine looduse kirjeldamiseks lausa möödapääsmatu. Matemaatiline bioloogia, matemaatiline füüsika ja teised matemaatikat otseselt kasutavad suunad pole tekkinud juhuslikult, vaid vajadusest kirjeldada meie ümber toimuvaid protsesse.

Kindlasti pole siin loetletud näited ainsad, kus matemaatikat vaja läheb või kus ta kasuks võiks tulla – väike maadlus matemaatikaga on hea treening kogu eluks.

Kuidas õppida matemaatikat?

Matemaatika õppimine ei ole kerge. Ei ole olemas retsepti, kuidas õppida matemaatikat nii, et see oleks huvitav ja tulemused head. Võin aga anda mõned soovitused.

Ole kursis sellega, mis toimub loengutes ja praktikumides. See eeldab kohal käimist ning igaks tunniks ettevalmistatud olemist. Pärast iga loengut käi materjal üle, kirjuta tähtsamad kohad oma sõnadega ümber või täida materjalis puuduolevad lüngad. Kui midagi jäi arusaamatuks, küsi kohe kas oma õppejõu või kursusekaaslase käest! Oleks väga hea, kui sul on kaaslane, kellega regulaarselt kursuse materjale arutada.

Loe loengukonspekti hoolega ja hoia paber ning pliiats käepärast. Teemat lugedes püüa leida sealt kõige olulisem. Lahenda iseseisvalt läbi kõik näidisülesanded ning tee nõutud kodutöö. Ole kindel, et sa ikka ise ka aru saad, mida kirjutad! ☺ Lahenda lisaks ka neid ülesandeid, mida kodutööks antud pole. Veelgi parem on, kui suudad ise mõne ülesande välja mõelda või kontrolltööks valmistumisel endale ise kontrolltöö kirjutada (miks mitte ka teistes ainetes). Seda tehes üllatad sa iseennastki, kui vilunuks sa võid saada! Loovus on matemaatikas väga oluline. Avastades ja luues midagi ise, ei aita sa kaasa vaid enda matemaatiliste teadmiste sügavamaks muutumisele, vaid võid panustada ka matemaatika valdkonna arengusse. Kui oled leidnud esimese seene või teinud oma esimese avastuse, siis vaata ringi: nad kasvavad kobaras.

Rõhutan veelkord – matemaatika õppimiseks on vaja enesekindlust, eneseusku ja tugevat pingutust! Pea meeles järgmisi vanasõnu: *„Usinus on õnne ema“*, *„Tamme ei langetata ühe hoobiga“*, *„Proovi kõiki kimbus olevaid võtmeid“* või *„Kui sa ei saa teha seda, mida soovid, siis tee seda, mida suudad“* ning mõtle, mida need sinu jaoks tähendavad.

> ***☺ Üks sell olla otsustanud minna aju siirdamise kliinikusse, et oma aju suurendada. Sekretär seletas talle, et hetkel on saadaval vaid kolme sorti ajusid. Doktorite omad on 20$ unts, advokaatide omad 30$ unts ja matemaatikute omad $1000 unts.
> "1000 dollarit untsi eest!" karjus sell. " Miks nad nii kallid on?"
> "Sest ühe untsi saamiseks on nii palju matemaatikuid vaja."

Matemaatiline maailmapilt

Miks just maailmapilt? Maailmapildiks on kombeks nimetada teadmiste süsteemi, mille abil inimene tunnetab teda ümbritsevat maailma ja suhestab end sellega. Maailmapilt on kogu süstematiseeritud info, mida indiviid vastava maailma kohta omab ning see kujuneb välja inimeste kogemuste, teadmiste, tõekspidamiste ja uskumuste baasil. Matemaatikas kujuneb maailmapilt välja aksioomide valiku ja teoreemide tõestamise baasil. Märkima peab ka seda, et erinevatel ajastutel ja erinevatel kultuuridel võib olla erinev maailmapilt. Tänapäeval on tähtis teaduslik maailmapilt, mis toetub teaduses üldomaksvõetud seisukohtadele. Kuigi ühiskondlik maailmapilt on pidevas muutumises, on matemaatikas väljakujunenud maailmapilt tänu aluseks võetud aksioomidele ning rangele loogilisele ülesehitusele üpris kindlapiiriline. Matemaatiline maailmapilt tähendab meile matemaatiliste teadmiste konteksti, millesse uued lisanduvad teadmised hästi sobituvad.

Sümbolite kasutamisest ja matemaatika õigekirjutamisest

Kuigi matemaatika on sümbolitele orienteeritud õppeaine, sisaldab matemaatiline tekst sümbolite kõrval ka sõnu. Järgnevalt vaatame üldtuntud soovitusi matemaatilise teksti kirjutamisel:

1. ***Ära alusta lauset sümboli, valemi või avaldisega.***
   Matemaatilise teksti kirjutamine järgib samu reegleid kui tavalise eestikeelse teksti kirjutamine. Näiteks peab lause alati algama suure tähega. Kui lause algab võrrandiga või sümboliga, tundub see suure algustähe puudumise tõttu ebatäiuslik. Samuti on lauset kergem lugeda kui see algab sõnaga.
   Selle asemel, et kirjutada:
   $x^2 - 6x + 8 = 0$ *on kaks erinevat reaalarvulist lahendit.*
   Kirjuta:
   Võrrandil $x^2 - 6x + 8 = 0$ *on kaks erinevat reaalarvulist lahendit.*

2. ***Eralda samasse loetelusse mittekuuluvad sümbolid sõnadega.***
   Ei ole soovitatav kirjutada kahte matemaatilist avaldist või sümbolit kõrvuti kui nad ei kuulu samasse loetelusse. Selleks, et teha lause paremini loetavaks ning kergemini mõistetavamaks, peaks taolised sümbolid sobiva sõnaga eraldatud olema.
   Lause:
   Lisaks arvule a, b *on samuti võrrandi* $(x-a)(x-b) = 0$ *lahendiks.*
   Oleks palju selgem, kui lause kirjutada kujul:
   Lisaks arvule a *on arv* b *samuti võrrandi* $(x-a)(x-b) = 0$ *lahendiks.*

3. ***Ära ühenda omavahel sõnu ja sümboleid.***
   Selle asemel, et kirjutada:
   Iga täisarv ≥ 2 *on kas algarv või kordarv.*
   Õigem on kirjutada:
   Iga arvust kaks suurem täisarv on kas algarv või kordarv.

4. ***Matemaatilistele sümbolitele ei lisata käändelõppe.***
   Näiteks, kirjuta *"pideva funktsiooniga f "*, mitte *"pideva f - ga"*.

5. ***Kirjuta arv välja sõnadega, kui see kirjeldab nimisõna, kui arv on väike või kergesti sõnadega kirjeldatav. Arvulise väärtuse kirjeldamiseks kasuta numbreid.***
   Näited: *Leidub täpselt kaks 4. järku gruppi.*
   Miljon eestlast ei saa kõik korraga eksida.
   Arvust 101 väiksemaid positiivseid arve on sada.
   Ühe pileti võid mulle ikka anda!

6. ***Jälgi, et valemite järel on punktid-komad nagu vaja!***

7. ***Väldi professionaalses matemaatilises tekstis sümboleid*** $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\therefore$ ***(välja arvatud kui kirjutad matemaatilise loogika tehteid).***
   Antud sümbolid on lühenditeks järgmistele väljenditele:

" $\Rightarrow$ " = "järeldub“
" $\forall$ " = "iga“
" $\exists$ " = "leidub“
" $\therefore$" = "järelikult, seega“

Nende sümbolite teadmine tuleb kasuks, kui on vaja kiirelt loengus märkmeid teha või kui visandad teoreemile selle tõestuse esimesi versioone. Paljud matemaatikud aga väldivad neid sümboleid oma lõplikus professionaalses tekstis.

Harjutamiseks. Kirjuta järgmised laused korrektselt ümber. Millist stiilireeglit on rikutud?

a) Liites 2 3-e ja 4 5-e, saame vastuseks kakskümmend kuus.
b) Olgu x positiivne reaalarv. x võib olla ka ≤ -1. $x = 0$ on ka sobiv.
c) On olemas 3 sorti inimesi need kes ei oska arvutada ja need kes oskavad.
d) Võrrandi $x^2 = 36$ lahendamiseks $\sqrt{}$ võrrandi mõlemaid pooli.
e) $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 3x + 4$ tähendab $f(x) = g(x) = x = 4$.
f) Kas sa tead, et $\sqrt{\frac{6}{1^2} + \frac{6}{2^2} + \frac{6}{3^2} + \frac{6}{4^2} + \cdots}$ on võrdne π-ga?

2. PEATÜKK

MÕISTE, DEFINITSIOON, TEOREEM, EELDUS JA VÄIDE

Mõiste

Matemaatikat õppides oleme kokku puutunud paljude mõistetega. Meile on tuttavad näiteks geomeetria mõisted *punkt, sirge, tasand, kolmnurk, vektor, risttahukas, kuup*, aga ka paljud muud mõisted matemaatika teistest valdkondadest. Selleks, et õpitust aru saada ja oma teadmisi rakendada, tuleb kasutatavaid mõisteid tunda. Nii näiteks saad sa kindlasti aru lausest *„Eksponentfunktsiooni tuletis on võrdne funktsiooni enesega“*, sest sa tunned mõisteid *eksponentfunktsioon* ja *tuletis*. Seevastu sa arvatavasti ei saa aru sellise lause tähendusest: *„Mistahes mittetühja hulga kõigi ekvivalentsusseoste hulga ja kõigi klassijaotuste hulga vahel on olemas loomulik üksühene vastavus“*, sest sa võib-olla pole veel õppinud mõisteid *ekvivalentsusseos, klassijaotus* või *üksühene vastavus*.

Igal mõistel on ***sisu*** ning ***maht.***

Mõiste sisuks nimetatakse kõigi selliste tunnuste hulka, mis on sellele mõistele omased.

Mõiste mahuks nimetatakse kõigi nende objektide hulka, mis antud mõiste alla kuuluvad.

Näiteks mõiste *„kolmnurk“* sisu haarab selliseid tunnuseid nagu: *on hulknurk, tal on kolm külge, kolm nurka, sisenurkade summa on 180°* jne. Mõiste *„kolmnurk“* mahu moodustavad kõikvõimalikud kolmnurgad (võrdkülgsed, võrdhaarsed, iseküLgsed, aga samuti teravnurksed, täisnurksed ja nürinurksed).

Mida laiem on mõiste sisu, seda kitsam on tema maht, ja vastupidi – mida kitsam on mõiste sisu, seda laiem on tema maht. Oskad sa tuua vastavaid näiteid?

Nagu igapäevases mõtlemistegevuses, nii ka matemaatikas üldistatakse või ahendatakse mõisteid. Mõiste **üldistamine** tähendab siirdumist vähem üldiselt mõistelt üldisemale mõistele (*generalisatsioon*). Mõiste **ahendamine** tähendab siirdumist üldisemalt mõistelt vähem üldisele mõistele (*determinatsioon*). Selliseid mõistete ridu, milles mõisted on astmeliselt tuletatavad üldistamise või ahendamise teel, nimetatakse loogilisteks redeliteks. Näiteks loodusteadustes on kasutusel järgmine astmestik: *riik, alamriik, hõimkond, klass, selts, sugukond, perekond, liik, alaliik*. Matemaatikas võib näitena tuua astmestiku: *nelinurk, kumer nelinurk, rööpkülik, ristkülik, ruut*.

Ülesanne. Ahenda ja üldista järgmisi mõisteid:

a) kolmnurk; b) geomeetria; c) ratsionaalarv; d) juur.

Sisu järgi jaotatakse mõisted **lihtmõisteteks** (kirjeldatakse ühe tunnuse alused) ja **liitmõisteteks** (kirjeldatakse rohkem kui ühe tunnuse alusel). Mahu järgi liigitatakse mõisteid **üksikmõisteteks** (tegemist vaid ühe objektiga) ja **üldmõisteteks** (rohkem kui üks objekt). Kogumõiste on tervikut moodustavate üksuste kogum.

Defineerimine

Kui me kasutame mõnda mõistet ja tahame selle mõiste sisu seletada ka teistele, siis võime üles lugeda selle mõiste tunnuseid. Näiteks võime kirjeldada rööpkülikut järgnevalt: *„Rööpkülik on tasandiline kujund; hulknurk; tal on neli külge ja neli nurka; tema vastasküljed on paralleelsed ja võrdsed; diagonaalid poolitavad teineteist; sisenurkade summa on 360°; rööpküliku pindala leitakse kui aluse ja kõrguse korrutis."* Selline kirjeldamisviis pole aga kuigi otstarbekas, sest osa loetletud omadustest on ülejäänutest järelduvad. Selleks, et täpselt ja lühidalt määratleda rööpkülikut, tuleb teda ***defineerida***, tehes seda näiteks nii: *„Rööpkülikuks nimetatakse nelinurka, mille vastasküljed on paralleelsed."*

Mõistete seletamist lihtsamate ja tuntumate mõistete abil nimetatakse mõiste **defineerimiseks** ja mõiste seletust nimetatakse **definitsiooniks**.

Definitsioon peab andma täpse ja lühikese vastuse küsimusele *„Mida nimetatakse ...?"* või *„Mis on ...?"*. Selleks, et definitsioon oleks täpne, peab ta alluma järgmistele reeglitele. Reeglite tundmine ja nendest kinnipidamine võimaldab vältida ebakorrektsust defineerimisel.

1) Definitsioon peab sisaldama ainult nii palju tunnuseid, et ta täpselt piiritleks defineeritava mahu. Definitsioon *„Kolmnurk on hulknurk"* on liiga lai, aga definitsioon *„Kolmnurk on hulknurk, millel on kolm võrdset külge"* jällegi liiga kitsas. (Seleta miks?) Liiga kitsas definitsioonis on liigitunnuseid rohkem kui vaja.

2) Defineeritavat mõistet ei tohi defineerida defineeritava mõiste enda, mõne tema sünonüümi või mõne sellise mõiste kaudu, mis muutub mõistetavaks defineeritava mõiste abil. Seega, definitsioon ei tohi sisaldada ringi. Kui sellest reeglist ei peeta kinni, saame ***tautoloogia*** ehk vea *„idem per idem"*, mis tähendab ühe ja sama sõna kordumist definitsioonis.

3) Definitsioon peab olema võimaluse korral jaatav, sest eitava definitsiooni juures jääb defineeritava sisu määramatuks. Näiteks, *„punkt on see, millel ei ole osi ega mingisugust suurust"* või *„kolmnurgal ei ole neli külge"* ei ava vastavate mõistete sisu.

Eitavaid definitsioone võib tarvitada ainult siis, kui defineeritav mõiste on ise eitavas laadis.

4) Definitsioon peab olema selge ja arusaadav, see tähendab, et definitsioonis ei tohi kasutada kahemõttelisi, metafoorseid ja segaseid väljendeid. Sellised väljendid nagu *„lõvi on loomade kuningas“* ja *„kordamine on tarkuse ema“* ei ole definitsioonid, aga neist võib olla abi mõistete sisu selgitamisel. Ka kuulus Hegeli poolt antud definitsioon riigile, *“Riik on maailma vaimu poliitiline ilmutis”* on ebakorrektne sel samal põhjusel.

Definitsioon niisiis peab mõiste täielikult määrama. Defineerimisel näidatakse hulk, millesse defineeritav objekt kuulub, ja lisatakse tingimus, mis eristab defineeritava objekti selle hulga kõigist teistest elementidest. Näiteks rööpküliku defineerimisel märgitakse, et ta kuulub nelinurkade hulka, ja lisatakse tunnus, mille poolest ta erineb kõigist teistest nelinurkadest.

Mõistet, mis määrab hulga, milles defineeritav objekt sisaldub, nimetatakse **soomõisteks.**

Tingimust, mis eraldab defineeritava objekti selle hulga teistest elementidest, nimetatakse **liigitunnuseks.**

Sageli saab antud mõistet mitmel viisil defineerida. Näiteks rööpküliku defineerimisel võib võtta soomõisteks ka hulknurga või koguni tasapinnalise kujundi. Seejuures tuleb vastavalt muuta ka liigitunnust. Kuid ka siis, kui soomõisteks on võetud *nelinurk*, saab liigitunnust valida mitmeti; selleks võib võtta näiteks *vastaskülgede võrdsuse* või *vastaskülgede paralleelsuse*.

Mõisted, mida me mingi mõiste defineerimisel kasutame, peavad varasemast tuntud olema. Järelikult peavad need mõisted olema üldjuhul ise varem defineeritud. Nii tekivad teatavad mõistete jadad. Nende jadade alguses on mõisted, mis jäetakse defineerimata ja mis on aluseks teiste mõistete defineerimisel. Neid mõisteid nimetatakse ***algmõisteteks***. Matemaatikas kasutatakse algmõistetena näiteks *punkti, sirget, tasandit, ruumi, hulka, arvu, suurust* ja palju teisi.

☺ *** Tüdrukute pesapalli mängus on kolm kohtunikku - üks insener, teine füüsik ja kolmas matemaatik. Viimane võistkonna mängija jõuab võistkonna plaadile palliga üheaegselt, kuid kõik kolm kohtunikku otsustavad, et võistleja on mängust väljas. Tüdruku vihane isa küsib, et miks kohtunikud nii otsustasid. Inseneriist kohtunik vastab, „Ta on väljas, kuna ma usaldan vaid seda, mis on tegelikkuses toimunud“. Füüsikust kohtunik ütleb, „Ta on väljas, kuna ma usaldan ja kinnitan vaid seda, mida ma näen“. Matemaatik vastab, „Ta on väljas, kuna mina ütlen nii“. (Oskad sa matemaatiku vaatekohta kommenteerida?)

Liigitamine

Liigitamine on teatava mõiste mahu täielik ja korrapärastatud avamine. Näiteks kolmnurki võime liigitada nurkade järgi nürinurkseiks, teravnurkseiks ja täisnurkseiks. Liigitades külgede järgi võime jaotada kolmnurki võrdkülgseiks, võrdhaarseiks ja isekülgseiks. Liigitus peab toimuma ühel alusel, see tähendab, et liigituse alus peab olema üks ja seesama kogu liigituses, siis on ta selge ja järjekindel ning liigituse liikmed välistavad üksteist. Vastasel korral satub üks ja sama objekt kahe või enama liigituse liikme alla. Liigitus peab olema ka pidev, s.t. liigituses ei tohi olla hüpet. Teaduslikku liigitust nimetatakse ***klassifikatsiooniks***.

Teoreem ja tõestus

Matemaatikas ei kontrollita tõele vastavust mitte eksperimenteerimise ja mõõtmise abil, vaid hoopis tõestades.

Teoreem (kr. *theóréma* – vaadeldav, uuritav väide) on lause, mille õigsust tuleb tõestada arutluse kaudu, tuginedes aksioomidele ja varem tõestatud lausetele. Lauset, mille õigsust ei põhjendata teiste lausete abil, nimetatakse **aksioomiks** (kr. *axióma* – omaksvõetud lause) ehk **postulaadiks** (ld. *postulátum* – nõutav). Aksioomid väljendavad algmõistete vahelisi seoseid. Seega, aksioom on seotud teoreemiga nagu algmõiste definitsiooniga. Mõlemad annavad edasisteks arutlusteks vajaliku lähtekoha. Aksioomidena vaadeldakse näiteks selliseid lauseid:

- *Igale naturaalarvule järgneb vahetult ainult üks naturaalarv.*
- *Kaht erinevat punkti läbib ainult üks sirge.*
- *Iga kahe punkti A ja B korral* $\overline{AB} = \overline{BA}$
- *Väljaspool sirget olevat punkti läbib ainult üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega (paralleelide aksioom).*

Ülejäänud valemid ja tulemused sõnastatakse lausetena, mida nimetataksegi teoreemideks. Kõigi teoreemide tõesus või väärus tuleneb aluseks võetud aksioomidest[1]. Et aksioome ei tõestata, siis tekib küsimus, millest tuleneb nende tõesus. Aksioomide tõesuse üle otsustame nende alusel tõestatud teoreemide rakendamisel; iga teooriat kontrollib praktika. Aksioomid on õigupoolest vaid hüpoteesid.

Teoreemi sõnastatakse tavaliselt kujul: *„Kui A, siis B“*. Teoreemi osa A, mis on seotud sõnaga *kui*, nimetatakse teoreemi ***eelduseks***, ja osa, mis on seotud sõnaga *siis*, ***väiteks***. Eelduses öeldakse, millistest objektidest on teoreemis juttu, ehk mis on antud või mis on teada. Väites öeldakse, mis eeldusest järeldub, ehk mida on vaja tõestada.

Näide. *„Kui kaks vektorit on risti, siis on nende vektorite skalaarkorrutis null.“* Selle teoreemi eelduseks on kahe vektori ristseis ja väiteks see, et nende vektorite skalaarkorrutis on null.

Lühiduse mõttes sõnastatakse teoreeme mõnikord ka lihtlausetena. Väidet *„Kõrvunurkade summa on 180°“* on võimalik ümber sõnastada liitlausena *„Kui nurgad on kõrvunurgad, siis nende summa on 180°“*.

Teoreemi tõestamine tähendab selle näitamist, et eeldusest A järeldub väide B; lühemalt $A \Rightarrow B$. Tõestamisel lähtutakse aksioomidest ja varem tõestatud teoreemidest.

Matemaatikas on väidete tõestamine palju rangem kui teistes distsipliinides. Kui me näiteks väidame, et „Juulikuus on Tartus palavad ilmad“, siis oma viimaste aastate kogemustele tuginedes võime öelda, et see on tõsi, aga kas see tähendab ka seda, et igal aastal on iga juulikuu päev palav? Muidugi mitte! Ei ole kuigi tark tegu teha sellist kõikehõlmavat järeldust üldise ilma puudutava väite kohta. Füüsikud ütlevad, et „Kui keha lastakse lahti maapinna lähedal, siis langeb see keha kiirendusega 9,8 m/s^2.“ See lause on juba suurema tõenäosusega õige võrreldes Tartus juulikuist ilma puudutava lausega, aga ka see füüsika reegel ei ole absoluutselt korrektne. Esiteks, suurus 9,8 on saadud ümardades. Teiseks, sõna „lähedal“ on väga ebamäärane. Galaktika mõõtmetes on ka Kuu Maale lähedal, aga see ei ole see sama „lähedal“ olemine, mida meie siin silmas peame. Me võiksime täpsustada öeldes, et „lähedal“ tähendab „100 meetri kõrgusel maapinnast“, aga isegi sellise täpsustusega on probleem. Nimelt on isegi

[1] Et teoreemid tõestatakse loogilise arutlusega, siis tuleb uurida veel loogikat – õpetust õigest mõtlemisest. Ka loogikas eraldatakse välja aksioomid – õige mõtlemise põhiseadused.

100 meetri kõrgusel oleva keha gravitatsioonijõud pisut väiksem kui maapinnal oleval kehal. Ja ka maapinnal pole gravitatsioon ühe ja sama suurusega: Everesti mäe otsas on gravitatsioon väiksem kui merepinnal!

Seega enamus lauseid, mida me igapäevaselt ütleme ja väidame ning usume tõesed olevat, ei pruugi olla tõesed absoluutselt ja universaalselt. Matemaatikas aga sõna „tõene" tähendab absoluutset, ilma igasuguste tingimusteta või erijuhtudeta tõeseks olemist.

Vaatame näitena Pythagorase teoreemi, mis väidab, et kui a ja b on täisnurkse kolmnurga kaks kaatetit ja c on sama kolmnurga hüpotenuus, siis kehtib võrdus $a^2 + b^2 = c^2$. Loomulikult on see väide ilma igasuguste eranditeta tõene! Me teame seda sellepärast, et sellele teoreemile on olemas tõestus (tegelikult palju erinevaid tõestusi). Sa võid muidugi küsida ja imestada, et kas see teoreem ikka tõesti kehtib joonistades täisnurkse kolmnurga paberile ja mõõtes külgede pikkused tuhandiku millimeetri täpsuseni. Ilmneb, et Pythagorase teoreem sinu joonise puhul ei kehti, sest see kolmnurk, mille sa joonestasid, et ole täpne täisnurkne kolmnurk! Joonestamine on matemaatikas oluline abivahend vastava kontseptiooni mõistmisel, aga tegelikult pole see muud kui vaid visand ehk tint paberil. „Tõeline" täisnurkne kolmnurk saab vaid meie mõtetes eksisteerida.

> ☺ *** Insener, füüsik ja matemaatik sõidavad rongiga läbi Šotimaa. Järsku märkavad nad mäeküljel musti lambaid. „Vaadake," hüüab insener. „Šotimaa selles osas on mustad lambad!" „Tõesti-tõesti," nähvab füüsik vastu. „Sa ei tohiks nii kiiresti järeldusi teha. Kõik, mis me öelda saame on see, et mõned lambad Šotimaa selles osas on mustad." „Nojah, ühe külje poole pealt küll," pomiseb matemaatik oma nina alla.

Vahetades teoreemis *„Kui A, siis B"* eelduse ja väite, saame lause *„Kui B, siis A"*. Seda lauset nimetatakse antud lause **pöördlauseks**. Kui lause kehtib, siis selle lause pöördlause ei pruugi kehtida.

<u>Näide.</u> Lause *„Kui arv lõpeb 0-ga, siis ta jagub 5-ga"* kehtib. Selle lause pöördlause *„Kui arv jagub 5-ga, siis ta lõpeb 0-ga"* ei kehti. Kui võtame aga näiteks lause *„Kui kolmnurga küljed on võrdsed, siis on ta nurgad võrdsed"* ja moodustame pöördlause *„Kui kolmnurga nurgad on võrdsed, siis ta küljed on võrdsed"*, siis kehtivad nii lause kui ka tema pöördlause.

Seega, antud teoreemi kehtivusest ei järeldu pöördlause kehtivus. Kui aga pöördlause on tõene, siis nimetatakse seda **pöördteoreemiks**.

Asendades teoreemis *„Kui A, siis B"* eelduse ja väite nende eitustega (sümbolid $\neg A$ ja $\neg B$), saame lause *„Kui ¬A, siis ¬B"*. Nii moodustatud lauset nimetatakse antud teoreemi **vastandlauseks**. Jällegi, antud teoreemi kehtivusest ei järeldu tema vastandlause kehtivus.

<u>Näide.</u> Lause *„Kui kujund on kolmnurk, siis ta on hulknurk"* kehtib. Selle lause vastandlause on *„Kui kujund ei ole kolmnurk, siis ta ei ole hulknurk"*. See lause ei ole tõene (näiteks nelinurk ei ole kolmnurk, aga hulknurk on ta ikkagi). Teoreemi *„Kui arv jagub 9-ga, siis ta ristsumma jagub 9-ga"* vastandlause on *„Kui arv ei jagu 9-ga, siis ta ristsumma ei jagu 9-ga"*. Need laused on mõlemad tõesed.

Kui vahetada teoreemis *„Kui A, siis B"* eeldus ja väide ning asendada nende eitustega, saame lause *„Kui ¬B, siis ¬A"*. Seda lauset nimetatakse antud teoreemi **pöördvastandlauseks**. Antud teoreemi kehtivusest järeldub alati selle teoreemi pöördvastandlause kehtivus ning vastupidi. Sümboleis: $Kui\ A,\ siis\ B \iff Kui\ \neg B,\ siis\ \neg A.$
Öeldakse ka, et need laused on loogiliselt samaväärsed.

Lausetega ning nende pöörd-, vastand- ja pöördvastandlausetega tegeleme lähemalt järgmises lausearvutuse peatükis.

Teoreemis järeldub väide eeldusest. Sel juhul öeldakse, et eeldus on **piisav** väite tõestuseks. Kui kehtib ka teoreemi pöördteoreem, siis järeldub väitest eeldus. Sel juhul öeldakse, et eeldus on **tarvilik** väite tõestuseks. Kui koos teoreemiga kehtib ka pöördteoreem, siis võetakse tavaliselt need teoreemid kokku üheks lauseks, kasutades ühte väljenditest *„on tarvilik ja piisav“, „siis ja ainult siis“, „parajasti siis“.*

Näide. *„Selleks, et arv jaguks 5-ga, on tarvilik ja piisav, et ta lõpeb 0-ga või 5-ga.“*
„Arv jagub 5-ga siis ja ainult siis, kui ta lõpeb 0-ga või 5-ga.“
„Arv jagub 5-ga parajasti siis, kui ta lõpeb 0-ga või 5-ga.“

Sellised laused esitavad nn tarvilikke ja piisavaid tingimusi. Et korraga kehtivad nii $A \Rightarrow B$ kui ka $B \Rightarrow A$, siis võib seda märkida ka nii: $A \Leftrightarrow B$. Tarvilikke ja piisavaid tingimusi tõestades tõestatakse eraldi tarvilikkus („Kui *A*, siis *B*“) ja piisavus („Kui *B*, siis *A*“).

Kui mõiste definitsioonis sisalduv liigitunnus on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et soomõistega määratud hulga element on defineeritav objekt, siis saab näiteks teoreemi, mis sisaldab tarvilikku ja piisavat tingimust, ümber sõnastada uuritava mõiste uueks definitsiooniks.

Mõiste senine definitsioon muutub siis teoreemiks, mis sisaldab tarvilikku ja piisavat tingimust.

Näide:

Def. Rööpkülikuks nimetatakse nelinurka, mille diagonaalid poolitavad teineteist.

Teoreem. Nelinurk on rööpkülik siis ja ainult siis, kui ta vastasküljed on paralleelsed.

Märk ■ näitab teoreemi tõestuse lõppu.

Mõned teoreemid on huvitavamad ja tähtsamad kui teised. Seetõttu kasutavad matemaatikud sõna „teoreem“ asemel ka teisi alternatiivseid väljendeid. Sõna „teoreem“ kasutatakse vaid kõige tähtsamate ning üldistavamate tulemuste puhul. Muudel juhtudel kasutatakse järgnevaid nimetusi:

- **Tulemus** (Result) Väga tagasihoidlik ja üldine nimetus teoreemi kohta. Kõiki tähtsaid ja vähem tähtsaid teoreeme võib kutsuda tulemusteks.
- **Fakt** (Fact) Väga väikese tähtsusega tulemus. Näiteks „$6 + 3 = 9$“ on fakt.
- **Lause** (Proposition) Väiksema tähtsusega teoreem. On küll olulisem kui fakt, aga mitte nii oluline kui teoreem.
- **Lemma** (Lemma) Teoreem, mille eesmärgiks on anda vahetulemus, mille abil tähtsamat teoreemi tõestada. Mõnedel teoreemidel on väga keerulised ja pikad tõestused, mis jagatakse osadeks ehk tükkideks. Lemma võibki olla üks selline osa või vahend, mille abil keerulisemat teoreemi tõestada.
- **Järeldus** (Corollary) Lühikese ja lihtsa tõestusega tulemus, mille tõestuse olulisemaks osaks on eelnevat tõestatud teoreem.
- **Väide** (Claim) Sarnane lemmale, s.t. esineb pikema teoreemi tõestuses ja aitab organiseerida tõestuses vajaminevaid samme. Võib sisaldada vaid vastava teoreemi tõestuse seisukohalt olulisi termineid.

Olemasolu ja üldisuse kvantorid

Järgmises konspekti peatükis näeme, kuidas matemaatikud kasutavad spetsiaalseid loogikatehteid, mida nimetatakse ***kvantoriteks***. Meie siin praeguses sissejuhatavas peatükis predikaatarvutust lähemalt ei käsitle, aga kvantorite kui sümbolite tundmisest on abi juba praegu.

Paljudes matemaatika lausetes (teoreemides!) esinevad sõnad *„kõik“, „iga“, „leidub“, „eksisteerib“, „on olemas“, „vähemalt üks“*. Näiteks *„Kõik arvud jaguvad kahega“, „On olemas lineaarseid funktsioone“, „Vähemalt üks algarv on paarisarv“*, jne.

Osa neist lausetest on tõesed, osa väärad. Selliste lausete kirjutamisel kasutatakse loogikas kahte märki. Üks neist on **olemasolu kvantor** ∃ (loetakse ka „leidub“), teine **üldisuse kvantor** ∀ (loetakse ka „iga“). Need sümbolid kujutavad endast saksakeelsete sõnade *„Existieren“* ja *„Alle“* ümberpööratud esitähti. Kvantori märgi taha tuleb alati kirjutada muutuja, millele see kvantor rakendub.

Kuidas siis neid sümboleid kasutatakse? Näiteks kirjutusviis "$\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2+1>0$" tähendab *„iga reaalarvulise x korral on x^2+1 suurem nullist“*. Selle lause üldise kuju "$\forall x\ \ P(x)$" võib kirja panna selliselt: *„Mistahes objekti või indiviidi x korral (antud objektide või indiviidide hulgast) lause P(x) on tõene.“*

Kirjutusviis "$\exists x,\ \ x^3-27=0$" tähendab *„leidub x, mille korral $x^3-27=0$“*. Üldkujul siin "$\exists x\ P(x)$“ tähistab lauset *„leidub x, mille korral kehtib P(x)”* ehk *„vähemalt ühel indiviidil on omadus P”*. Sõna *leiduma* ei tähenda siin seda, et leidub üks ja ainult üks objekt, mis rahuldab antud tingimust, vaid et leidub <u>vähemalt</u> üks objekt (s.t. võib leiduda ka mitu), mis rahuldab antud tingimust.

Kui lauses kasutatakse üldisuse kvantorit, siis selle lausega väidetakse midagi *kõigi* antud liiki objektide kohta ja seetõttu peab neid väiteid tõestama ka üldkujul. Seevastu lause ümberlükkeks piisab ühest kontranäitest. Näiteks Pierre Fermat esitas hüpoteesi, et iga naturaalarvu n korral $2^{(2^n)}+1$ on algarv. Hüpotees peab paika $k=0,1,2,3$ ja 4 korral, aga $k=5$ korral näitas Leonhard Euler, et saadud arv jagub arvuga 641. Sellega oli hüpotees ümber lükatud.

Kvantoreid ∀ ja ∃ võib omavahel kombineerida. Näiteks "$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x<y$" tähistab lauset *„iga reaalarvu x korral leidub reaalarv y selliselt, et $x<y$”*, mille me kõik usume õige olevat. Eelnevas lauses aga kvantorid ära vahetades, saame väära lause "$\exists x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ x<y$", mida loetakse *„leidub reaalarv x nii, et iga reaalarvu y korral $x<y$”*. Mõtle viimasele lausele ise kontranäide!

Samuti võib kvantori märgi alla võtta rohkem kui ühe muutuja. Näiteks "$\exists\ x,y,\ \ x+y=5$" tähistab lauset *„leiduvad arvud x ja y, mille korral kehtib $x+y=5$”*.
Vahetades olemasolu kvantori üldisuse kvantori vastu, saame aga vale väite "$\forall\ x,y,\ \ x+y=5$" ehk *„kõikide arvude x ja y korral kehtib $x+y=5$”*. Sarnaselt võime moodustada laused "$\forall x\ \exists y,\ \ x+y=5$" või "$\exists x\ \forall y,\ \ x+y=5$". Jällegi on üks nendest lausetest tõene (milline?) ja teine väär. Seega üldjuhul laused

$$"\ \forall x\ \exists y,\ \ P(x,y)\ kehtib"$$
$$"\ \exists x\ \forall y,\ \ P(x,y)\ kehtib“$$

ei ole samaväärsed.

Olemasolu ja üldisuse kvantoreid sisaldavate lausete eitamine

Olgu antud järgmised kaks lauset:

- „Ei ole olemas täisarvu, mis on sama aegselt paaris ja paaritu" ning
- „Mitte kõik naturaalarvud ei ole algarvud".

Sümbolite abil saame need laused kirja panna järgmiselt:

- $\neg(\exists x \in \mathbb{Z}, x \text{ on paarisarv ja } x \text{ on paaritu arv})$.
- $\neg(\forall x \in \mathbb{N}, x \text{ on algarv})$.

Mõeldes esimese lause peale, saame selle ümber sõnastada kujul *„Kõik täisarvud ei ole samaaegselt paaris ja paaritud"* ehk sümbolitega $\forall x \in \mathbb{Z}, \neg(x \text{ on paarisarv ja } x \text{ on paaritu arv})$. Samamoodi on võimalik teine lause ümber sõnastada öeldes *„Leidub naturaalarv, mis ei ole algarv"* ehk matemaatika keeles $\exists x \in \mathbb{N}, \neg(x \text{ on algarv})$.

Väike spikker, mis aitab eituste moodustamist meeles pidada:

$$\neg(\forall x\ P(x) = \exists x(\neg P(x))$$

$$\neg(\exists x\ P(x)) = \forall x(\neg P(x))$$

Kas selliselt moodustatud laused on tõesed või mitte ja kuidas moodustada kvantoreid sisaldavate keerulisemate lausete eitusi, arutame järgmises peatükis.