5. PEATÜKK

HULGA MÕISTE

Selles peatükis räägime kõige fundamentaalsemast ideest matemaatikas – nimelt *hulgast* ja tutvustame hulgateooria algtõdesid. Kuna hulk on matemaatikas algmõiste, siis ei defineerita seda üldisemate mõistete kaudu. Hulkadest kui objektidest aga konstrueeritakse kõik matemaatilised struktuurid (näeme seda edasistes peatükkides tihti). Siinses kursuses ei ole meie eesmärgiks käsitleda hulgateooria aksiomaatilist ülesehitust, vaid anda mitteformaalsem ülevaade sellest, mis on hulk, kuidas matemaatikud hulki tähistavad ning millised olulised mõisted ja seosed on hulkade abil kirjeldatavad.

Hulki oled sa enda ümber näinud kogu aeg. Kõik järgnevad on näited hulkadest: üliõpilased siin kursusel kellel on oma iPad, sellel nädalal poest ostetud puuviljad, negatiivsed täisarvud, jne. Lapsena õppisid sa valjult tähestikku pähe, tegelikult aga ütlesid tähti, mis kuuluvad spetsiaalsesse hulka nimega „Eesti tähestik". Seega, hulk on mingite objektide kogu.

Täpsemalt defineeris hulgateooria rajaja Georg Cantor **hulga** kui sellise omavahel erinevate objektide kogu, millest saab mõelda kui tervikust. Mida sellisest definitsioonist veel välja lugeda saab? Kõigepealt väidab eelnev lause, et hulka kuuluvad objektid on omavahel *erinevad*. Teiseks peab olema võimalik üheselt otsustada, kas antud objekt kuulub vaadeldavasse hulka või mitte.

Hulga all mõistetakse üksteisest erinevate objektide kogumit, mida vaadeldakse ühe tervikuna ja kus iga objekti korral on võimalik üheselt kindlaks määrata, kas ta kuulub antud hulka.

Objekte, mis moodustavad hulga (kuuluvad hulka), nimetatakse **hulga elementideks**. Hulga element ja hulk ise loetakse alati erinevateks objektideks, seega hulk ei ole kunagi iseenda elemendiks.

Kahte hulka loetakse **võrdseteks**, kui nad koosnevad ühtedest ja samadest elementidest.

Hulki tähistatakse tavaliselt suurte ladina tähtedega $A, B, C, X, Y, \ldots$, hulga elemente aga väikeste ladina tähtedega $a, b, c, x, y, \ldots$ Kui element a kuulub hulka A, siis kirjutame, et $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$; kui a ei ole hulga A element, siis kirjutatakse $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}$.

Hulkade kirjeldamine

Hulkade kirjeldamisel on väga oluline täpselt kirja panna, millised elemendid antud hulka kuuluvad. Elementide *erinevuse* nõue hulga mõiste määrangus tähendab, et hulgas ei saa olla mitut elementi, mida loeme omavahel võrdseteks. Näiteks ei saa rääkida hulgast, mis koosneb kahest punasest ja kolmest sinisest kuulikesest, kusjuures punaseid kuule omavahel ja siniseid kuule omavahel loeksime ühesugusteks. Võrrandi $(x-1)^2 = 0$ lahendite hulgas on üks element, mitte kaks võrdset arvu 1.

Kui hulk koosneb väikesest arvust elementidest, siis võib need elemendid looksulgude vahel komadega eraldatult üles loetleda. Näiteks $S = \{1, 2, 3\}$ on hulk, mis koosneb elementidest 1, 2 ja 3. Ei ole oluline, millises järjekorras hulga elemendid kirja pandud on. Seega $S = \{3, 2, 1\} = \{2, 1, 3\}$ tähistavad kõik eelpool mainitud hulka S. Eesti Vabariigi presidentide hulk on $A = \{\text{Päts, Meri, Rüütel, Ilves}\}$ ning kõigi arvust 20 väiksemate positiivsete paarisarvude hulk on $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$.

Mõnedes hulkades on aga liiga palju elemente, et neid kõiki üles loendada. Näiteks $X = \{1, 3, 5, \dots, 49\}$ on kõigi 50-st väiksemate positiivsete paaritute arvude hulk ning $Y = \{2, 4, 6, \dots\}$ on kõigi positiivsete paarisarvude hulk. Antud kirjaviisis mõttepunktid (kolm punkti) tähendavad seda, et jätka loendust „samal viisil“.

Hulga elementide loendi esitamise asemel võib hulga määrata ka temasse kuulumise tingimuse abil, sest sageli kuuluvad samasse hulka elemendid, mis rahuldavad teatud tingimust või millel on mõni ühine omadus. Sellistel juhtudel kasutame kirjeldusviisi $S = \{x : p(x)\}$ või $S = \{x \mid p(x)\}$, kus $p(x)$ tähistab tingimust või tingimuste loetelu, mida vaadeldavasse hulka kuuluvad elemendid x peavad rahuldama. (Erinevates allikates pannakse elemendi üldkuju ja tingimuste vahele kas püstkriips või koolon.) Näiteks, kui uurime võrrandi reaalarvulisi lahendeid, siis $S = \{x \mid (x-1)(x+2)(x+3) = 0\}$ on kõigi selliste reaalarvude x hulk, mis rahuldavad võrrandit $(x-1)(x+2)(x+3) = 0$ ehk S on selle võrrandi reaalarvuliste lahendite hulk. Me oleks võinud ka kirjutada, et $S = \{1, -2, -3\}$. Kuigi viimane kirjutusviis on palju lihtsam, et anna see meile aga informatsiooni selle kohta, et algselt olime huvitatud teatud võrrandi lahenditest.

<u>**Näide 1.**</u> Hulkade erinevaid kirjeldusviise:

1) $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$
2) $B = \{3n \mid n \in \mathbb{N} \text{ ja } n > 0\} = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$.

<u>**Ülesanne 1.**</u> Pane paaritute täisarvude hulk kirja kahel erineval viisil.

Mõned hulgad matemaatikas on kasutusel nii tihti, et nendele on antud omad tähistused. Tähtsamad arvuhulgad on

- **naturaalarvude hulk** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- **täisarvude hulk** $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;
- **ratsionaalarvude hulk** $\mathbb{Q} = \{q \mid q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$;
- **reaalarvude hulk** $\mathbb{R}$;
- **kompleksarvude hulk** $\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$.

Arvude intervallid saab samuti hulkadena kirja panna:

Lõik $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x \le b\} = \{x \in \mathbb{R}, a \le x \le b\}$
Vahemik $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
Poollõik $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \le x < b\}$
Poollõik $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \le b\}$

Hulgas ei pea aga olema ühtegi elementi. Tundub küll veider vaadelda hulki, milles elemendid puuduvad, kuid sellised hulgad kerkivad esile väga tihti ning väga erinevates olukordades. Näiteks, kui A on võrrandi $x^2 + 1 = 0$ reaalarvuliste lahendite hulk, siis hulgas A ei ole ühtegi elementi. Matemaatikas on olemas vaid üks hulk, milles pole ühtegi elementi ja see on **tühi hulk**. Tühja hulka tähistatakse $\emptyset$. Näiteks, kõigi reaalarvude x hulk, mis rahuldavad võrratust $x^2 < 0$, on samuti tühi hulk.

Definitsioon 1. ***Tühjaks hulgaks*** nimetatakse hulka, mis ei sisalda ühtegi elementi.

***☺ Kolm teadlast jälgivad tühja maja. Majja läheb üks mees, veidi hiljem tulevad majast välja kaks meest. Bioloog: "Pooldumine." Füüsik: "Optiline effekt." Matemaatik: "Kui nüüd see üks mees majja tagasi läheks, oleks maja jälle tühi..."

Hulga elementideks võivad olla ka hulgad ise.

Näide 2.

1) Hulk $S = \{1, 2, \{1, 2\}, \emptyset\}$ koosneb neljast elemendist, millest kaks on ise hulgad, nimelt $\{1, 2\}$ ja $\emptyset$.
2) Hulk $T = \{0, \{1, 2, 3\}, 4, 5\}$ koosneb samuti neljast elemendist, nimelt kolmest täisarvust 0, 4 ja 5 ning ühest hulgast $\{1, 2, 3\}$. Kuigi $2 \in \{1, 2, 3\}$, ei ole arv 2 hulga T element; s.t. $2 \notin T$.

Hulga S korral tähistame sümboliga $|S|$ hulgas S olevate elementide arvu. Sümbolit $|S|$ nimetatakse ka **hulga kardinaalarvuks** ehk **kardinaalsuseks**. Kui $A = \{1, 2\}$ ja $B = \{1, 2, \{1, 2\}, \emptyset\}$, siis $|A| = 2$ ja $|B| = 4$. Samuti $|\emptyset| = 0$. Kui hulgas on lõplik arv elemente, siis $|S| = n$, kus n on mingi mittenegatiivne täisarv. Lõpmatu hulga kardinaalsuse juurde tuleme tagasi hiljem.

Vaatame veel näiteid.

Näide 3. Olgu $D = \{n \in \mathbb{N} : n \le 9\}$, $E = \{x \in \mathbb{Q} : x \le 9\}$, $H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\}$ ja $J = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 - 2 = 0\}$.

(a) Kirjelda hulka D, loetledes üles kõik tema elemendid.
(b) Nimeta kolm elementi, mis kuuluvad hulka E, aga ei kuulu hulka D.
(c) Kirjelda hulka H, loetledes üles kõik tema elemendid.
(d) Kirjelda hulka J mõnel muul viisil.
(e) Leia hulkade D, H ja J kardinaalsus.

Lahendus.

(a) $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
(b) $\frac{7}{5}, 0, -3$.
(c) $H = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.
(d) $J = \emptyset$.
(e) $|D| = 9,\ |H| = 2,\ |J| = 0$.

Näide 4. Millistesse järgmistesse hulkadesse kuulub arv -2?

$S_1 = \{-1, -2, \{-1\}, \{-2\}, \{-1, -2\}\}$
$S_2 = \{x \in \mathbb{N} :\ -x \in \mathbb{N}\}$
$S_3 = \{x \in \mathbb{Z} :\ x^2 = 2^x\}$
$S_4 = \{x \in \mathbb{Z} : |x| = -x\}$
$S_5 = \{\{-1, -2\}, \{-2, -3\}, \{-1, -3\}\}$

Lahendus. Arv -2 kuulub hulkadesse S_1 ja S_4. Hulga S_4 korral näeme, et $|-2| = 2 = -(-2)$. Hulk S_2 on tühi, $S_2 = \emptyset$. Kuna $(-2)^2 = 4$ ja $2^{-2} = \frac{1}{4}$, siis $-2 \notin S_3$. Ning viimaseks, kuna hulga S_5 kõikideks elementideks on hulgad, ei saa -2 hulga S_5 elemendiks olla, sest ta on arv, aga mitte hulk.

Ülesanne 2. Mõtle välja üks viie-täheline sõna nii, et $|S| = 3$, kus S on sõnas esinevate tähtede hulk.

Osahulk

Järgnevalt uurime, millistel tingimustel saavad ühe hulga elemendid olla teise hulga elementideks. Ühe äärmusena võime vaadelda juhtu, kus kõik hulga A elemendid kuuluvad ka hulka B. Teise äärmusena aga juhtu, kus mitte ükski hulga A element ei kuulu hulka B.

Definitsioon 2. Hulka A nimetatakse hulga B ***osahulgaks***, kui kõik hulga A elemendid on hulga B elementideks (ehk hulga A iga element kuulub hulka B).

Kui hulk A on hulga B osahulk, siis kirjutame $A \subseteq B$. Kui hulk A ei ole hulga B osahulk, siis kirjutame $A \nsubseteq B$. Kvantorite abil saame osahulgaks olemist ja mitteolemist kirja panna järgmiselt:

$A \subseteq B$	tähendab, et	$\forall x \in U\ [(x \in A) \Rightarrow (x \in B)]$
$A \nsubseteq B$	tähendab, et	$\neg(\forall x \in U)[(x \in A) \Rightarrow (x \in B)]$
		$\equiv (\exists x \in U)\neg[(x \in A) \Rightarrow (x \in B)]$
		$\equiv (\exists x \in U)[(x \in A) \wedge (x \notin B)]$

Seega, $A \nsubseteq B$ tähendab seda, et peab leiduma selline hulga A element, mis ei kuulu hulka B.

Näide 5.
1) $(0,1) \subseteq [0,1]$.
2) Hulgal $\{a\}$ on kaks osahulka: $\emptyset$ ja $\{a\}$.
3) Hulgal $\{a, b\}$ on järgmised osahulgad: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$,$\{a, b\}$.

Lause 1. Hulkade sisalduvusseosel $\subseteq$ on järgmised põhiomadused.
1) **Refleksiivsus:** Iga hulga A korral $A \subseteq A$.
2) **Antisümmeetrilisus:** Kui A ja B on hulgad nii, et $A \subseteq B$ ja $B \subseteq A$, siis $A = B$.
3) **Transitiivsus:** Kui A, B ja C on hulgad nii, et $A \subseteq B$ ja $B \subseteq C$, siis $A \subseteq C$.
4) Tühi hulk $\emptyset$ on iga hulga osahulk.

Tõestus. Tõestame kolmanda ja neljanda omaduse. Esimese kahe omaduse tõestus on jäetud iseseisvaks tööks.

3) Eelduseks on, et $A \subseteq B$ ja $B \subseteq C$. Peame näitama, et $A \subseteq C$. Viimase väite tõestamiseks võtame suvalise elemendi x hulgast A ja näitame, et siis $x \in C$. Kuna esimesest eeldusest $A \subseteq B$, siis sellest, et $x \in A$ järeldub, et $x \in B$. Teise eelduse kohaselt $B \subseteq C$, seega iga hulga B element on ka hulga C elemendiks. Kuna meil $x \in B$, siis järeldame, et ka $x \in C$. Olemegi näidanud, et suvalise elemendi x korral hulgast A see element kuulub ka hulka C. Seega $A \subseteq C$.

4) Oletame väite vastaselt, et leidub hulk A nii, et $\emptyset \nsubseteq A$. Definitsiooni kohaselt peab siis leiduma element x hulgast $\emptyset$, mis ei kuulu hulka A. See on aga võimatu, sest hulgas $\emptyset$ ei leidu ühtegi elementi. Seega $\emptyset \subseteq A$ iga hulga A korral. ■

Tühi hulk on üheselt määratud, sest kui leiduksid tühjad hulgad $\emptyset_1$ ja $\emptyset_2$, siis Lauses 1 toodud neljanda omaduse põhjal $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ (sest $\emptyset_1$ on tühi hulk) ning $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$ (sest $\emptyset_2$ on tühi hulk). Nendest sisalduvustest aga järeldub, et $\emptyset_1 = \emptyset_2$.

Näide 6. Transitiivsuse omadust illustreerivad kenasti arvuhulkade omavahelised seosed: kuna $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ja $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, siis loomulikult $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$.

Ülesanne 3. Leia kaks hulka A ja B nii, et A on nii hulga B element kui ka osahulk.

Lahendus. Otsime kahte hulka A ja B nii, et $A \in B$ ja $A \subseteq B$. Alustame ühe-elemendilisest hulgast, näiteks $A = \{1\}$. Kuna soovime, et $A \in B$, peab hulk B sisaldama hulka $\{1\}$ kui ühte oma elementi. Teisalt soovime aga, et $A \subseteq B$, mis tähendab definitsiooni järgi seda, et iga hulga A element peab olema ka hulga B elemendiks. Kuna arv 1 on hulga A ainus element, peab arv 1 olema ka hulga B elemendiks. Seega üks võimalik valik hulgaks B on $B = \{1, \{1\}\}$, kuigi ka hulk $B = \{1,\ 2,\ \{1\}\}$ rahuldab nõutud tingimusi nagu ka veel paljud teised hulgad.

Definitsioon 3. Kahte hulka A ja B loetakse ***võrdseteks*** ja kirjutatakse $A = B$, kui hulgad A ja B koosnevad samadest elementidest.

Viimase tingimuse võib kirja panna ka selliselt:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \ \forall x\ [x \in A \Leftrightarrow x \in B].$$

Näiteks annab ruutvõrrandi lahendamine tulemuseks, et

$$A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\} = B.$$

Sisalduvusseose teist omadust ehk antisümmeetrilisuse omadust kasutatakse sageli just siis, kui on vaja tõestada, et kaks hulka on võrdsed. Võrduse tõestamiseks näidatakse sel juhul, et kumbki hulkadest on teise hulga osahulk. Ehk siis võrdsuse $A = B$ tõestamiseks näidatakse, et $A \subseteq B$ ja $B \subseteq A$. Kui $A \neq B$, siis peab leiduma vähemalt üks element, mis kuulub ühte nendest hulkadest, aga mitte teise.

Definitsioon 4. Hulka A nimetatakse hulga B ***pärisosahulgaks*** ja kirjutatakse $A \subset B$, kui hulk A on hulga B osahulk ja $A \neq B$.

Näide 7:

1) Kui $S = \{4, 5, 7\}$ ja $T = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, siis $S \subset T$.
2) Arvuhulkade vahel kehtivad sisalduvused $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
3) Kui $a < b$, siis $(a, b) \subset (a, b] \subset [a, b]$.

Märkus. Seoste $A \subseteq B$ ja $A \subset B$ vahekord on analoogiline arvude vahelise mitterange ja range võrratusega. Mõnedes raamatutes, kus osahulgaks või pärisosahulgaks olemisel pole vaja täpset vahet teha, kasutatakse $A \subseteq B$ tähenduses tähistust $A \subset B$.

Ülesanne 4. Tõesta, et täisarvude hulk $\mathbb{Z}$ on ratsionaalarvude hulga $\mathbb{Q}$ pärisosahulk.

Lahendus. Meil on vaja näidata kahte asja. Esiteks peame näitama, et kui element x kuulub täisarvude hulka $\mathbb{Z}$, siis kuulub ta ka ratsionaalarvude hulka $\mathbb{Q}$ (kuuluvuse ehk osahulgaks olemise tingimus). Teiseks peame näitama, et leidub selline element y, mis kuulub ratsionaalarvude hulka $\mathbb{Q}$, aga ei kuulu täisarvude hulka $\mathbb{Z}$ (*päris*osahulgaks olemise tingimus). Need kaks väidet saame lausearvutuse sümboolikat kasutades kirja panna järgmiselt:

$$\forall x\ [(x \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (x \in \mathbb{Q})]$$

$$\exists y\ [(y \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (y \notin \mathbb{Z})]$$

Esimese väite tõestus on lihtne. Olgu $x \in \mathbb{Z}$. Kuna iga täisarvu saab arvuga 1 jagada, võime kirjutada $x = \frac{x}{1}$. Nüüd on arv x esitatud kujul, kus lugejas ja nimetajas on täisarv. Ratsionaalarvu definitsiooni kohaselt on x seega ratsionaalarv ehk $x \in \mathbb{Q}$. Teise osa tõestuseks on meil vaja leida ratsionaalarv, mis ei ole samal ajal täisarv. Võtame näiteks $y = \frac{1}{2}$ (selliseid arve on ju palju!). Definitsiooni kohaselt on y ratsionaalarv (esitatud kahe täisarvu suhtena ning SÜT(1, 2)=1), kuid y pole täisarv. Seega oleme leidnud vähemalt ühe arvu y, mis kuulub ratsionaalarvude hulka $\mathbb{Q}$, aga ei kuulu täisarvude hulka $\mathbb{Z}$. Sellega oleme näidanud, et täisarvude hulk $\mathbb{Z}$ on ratsionaalarvude hulga $\mathbb{Q}$ pärisosahulk.

Ülesanne 5. Tõesta, et ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$ on reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ pärisosahulk.

Hulga A **kõigi osahulkade hulka** tähistatakse tavaliselt $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.

Ülesanne 6. Iga hulga korral leia tema kõigi osahulkade hulk. Samuti määra $|A|$ ja $|\mathcal{P}(A)|$.
(a) $A = \emptyset$, (b) $A = \{a, b\}$ (c) $A = \{1, 2, 3\}$

Lahendus. (a) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$. Antud juhul $|A| = 0$ ja $|\mathcal{P}(A)| = 1$.
(b) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Seekord $|A| = 2$ ja $|\mathcal{P}(A)| = 4$.
(c) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Nüüd $|A| = 3$ ja $|\mathcal{P}(A)| = 8$.

Pane tähele, et iga hulga korral kehtib seos $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. Seega, kui hulgas A on n elementi, siis sellel hulgal on 2^n erinevat osahulka.

Näide 8. Kui $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, siis $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Siinjuures on oluline mõista, et ükski hulkadest $\emptyset, \{\emptyset\}$ ja $\{\{\emptyset\}\}$ ei ole omavahel võrdsed. (Tühi kast ja kast, mille sees on tühi kast, ei ole samad asjad.) Antud hulga C korral on korrektne kirjutada

$$\emptyset \subseteq C,\ \emptyset \subset C,\ \emptyset \in C,\ \{\emptyset\} \subseteq C,\ \{\emptyset\} \subset C,\ \{\emptyset\} \in C,$$

samuti nagu $\{\{\emptyset\}\} \subseteq C$, $\{\{\emptyset\}\} \notin C$, $\{\{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(C)$.

Tehted hulkadega

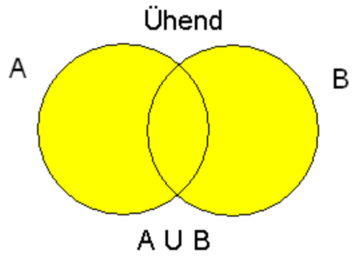
Hulkade ühend

Nii nagu saame omavahel täisarve kombineerides (liites, lahutades, korrutades ja mõnikord jagades) moodustada uusi täisarve, nii on võimalik kahe hulga ühendamisel moodustada uusi hulki.

Definitsioon 5. Hulkade A ja B ***ühendiks*** ehk summaks nimetatakse hulka $A \cup B$, mille moodustavad kõik elemendid, mis kuuluvad vähemalt ühte hulkadest A ja B, st

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \ \vee \ x \in B \}.$$

Sidesõna „või“ kasutatakse siin jällegi mittevälistavas tähenduses, st element x võib kuuluda kas hulka A või hulka B või mõlemasse hulka korraga. Märgime, et alati $A \subseteq A \cup B$ ja $B \subseteq A \cup B$.



Tehete abil moodustatud hulkadest piltliku ettekujutuse saamiseks kasutatakse nn *Venni diagramme.* Kui hulgad A ja B on kujutatud ringidena, siis värvitud ala joonisel on nende ühend $A \cup B$.

Näide 9.

1) Kui $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{a, c, d, e\}$, siis $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.
2) $[0, 1) \cup (0, 1] = [0, 1]$
3) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

Hulkade ühisosa

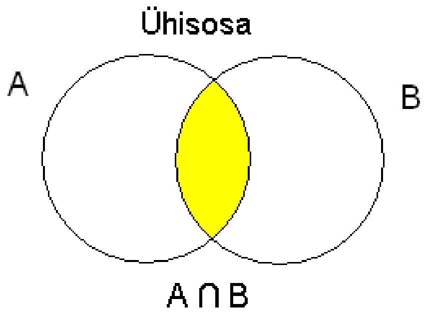
Definitsioon 6. Hulkade A ja B ***ühisosaks*** ehk lõikeks nimetatakse hulka $A \cap B$, mille moodustavad kõik elemendid, mis kuuluvad nii hulka A kui hulka B, st

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B \}.$$

Mistahes hulkade korral $A \cap B \subseteq A$ ja $A \cap B \subseteq B$. Ühisosa on Venni diagrammi abil kujutatud värvitud osana järgmiselt:

Näide 10.

1) Kui $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{a, c, d, e\}$, siis $A \cap B = \{a, c\}$.
2) $[0, 1) \cap (0, 1] = (0, 1)$
3) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ ja $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$



Lause 2. Iga kahe hulga A ja B korral kehtib $A \cap B \subseteq A \cup B$.

Tõestus. Peame näitama, et kui $x \in A \cap B$, siis $x \in A \cup B$. Seega, olgu antud suvaline element $x \in A \cap B$. Ühisosa definitsiooni kohaselt kuulub element x mõlemasse hulka, nii hulka A kui ka hulka B. Üldisust kitsendamata vaatame hulka A (me oleksime sama hästi võinud valida ka hulga B). Kuna $x \in A$, siis kahe hulga ühendi definitsiooni kohaselt on õige ka väide, et $x \in A \cup B$. Seega oleme näidanud, et $A \cap B \subseteq A \cup B$.

Kui kahel hulgal A ja B ei ole ühiseid elemente, siis $A \cap B = \emptyset$ ning hulki A ja B nimetatakse **lõikumatuteks.** Näiteks hulgad $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{I}$ on lõikumatud.

Ülesanne 7. Mida saab öelda hulkade A ja B kohta, kui $A \cap B = \emptyset$? Kui $A \cap B = A$? Kui $A \cap B = B$?

Ülesanne 8. Tõesta, et kui element x ei kuulu kahe hulga A ja B ühendisse, siis ei kuulu ta ka nende hulkade ühisossa.

Teoreem 1. Hulkade ühendil ja ühisosal on järgmised omadused:

1) $A \cup A = A,\ A \cap A = A$ (idempotentsus)
2) $A \cup B = B \cup A,\ \ A \cap B = B \cap A$ (kommutatiivsus)
3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ \ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (assotsiatiivsus)
4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),\ \ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributiivsus)

Tõestus. Omadused 1) – 3) järelduvad vahetult definitsioonidest ja on jäetud iseseisvaks tööks. Näitena tõestame teise distributiivsuse võrduse.
Olgu $x \in (A \cap B) \cup C$. Siis $x \in A \cap B$ või $x \in C$. Kui $x \in C$, siis $x \in A \cup C$ või $x \in B \cup C$, mistõttu $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Kui aga $x \notin C$, siis $x \in A \cap B$ ehk $x \in A$ ja $x \in B$. Siis aga $x \in A \cup C$ ja $x \in B \cup C$, st $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Sellega on näidatud, et $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Olgu nüüd $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Siis $x \in A \cup C$ ja $x \in B \cup C$. Kui $x \in C$, siis $x \in (A \cap B) \cup C$. Kui aga $x \notin C$, siis $x \in A$ ja $x \in B$ ehk $x \in A \cap B$ ning $x \in (A \cap B) \cup C$. Sellega on näidatud ka $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$ ning ühtlasi tõestatud teine distributiivsuse võrdus. ■

Hulkade vahe

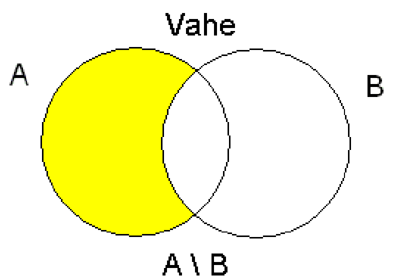
Definitsioon 7. Hulkade A ja B ***vaheks*** nimetatakse hulka $A \setminus B$, mille moodustavad elemendid, mis kuuluvad hulka A, aga ei kuulu hulka B, st

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ \neg(x \in B)\} = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$$

Näide 11.

1) $[0,1) \setminus (0,1) = \{0\}$.
2) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$

Venni diagrammil on kahe hulga vahe kujutatud järgmiselt:



Ülesanne 9. Olgu antud hulgad $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\}$ ja $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \le 4\}$.
1) Kirjelda hulki A, B ja C kasutades intervalli tähistusi.
2) Leia $A \cap B,\ A \setminus B,\ B \cap C,\ B \cup C,\ B \setminus C$ ja $C \setminus B$.

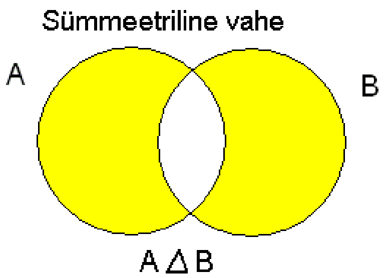
Lahendus. 1) $A = [-3,3], B = (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$ ja $C = [-3,5]$.
2) $A \cap B = [-3,-2) \cup (2,3],\ A \setminus B = [-2,2],\ B \cap C = [-3,-2) \cup (2,5],\ B \cup C = (-\infty,\infty),\ B \setminus C = (-\infty,-3) \cup (5,\infty)$ ja $C \setminus B = [-2,2]$.

Hulkade sümmeetriline vahe

Definitsioon 8. Hulkade A ja B ***sümmeetriliseks vaheks*** nimetatakse hulka $A \vartriangle B$, mille moodustavad elemendid, mis kuuluvad parajasti ühte kahest hulgast A ja B:

$$A \vartriangle B = \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B) \vee \neg(x \in A) \wedge x \in B\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Sümmeetrilist vahet kujutab selline Venni diagramm:



Lause 3. Olgu A ja B hulgad. Siis $A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Tõestus. Peame tõestama, et kaks hulka $A \vartriangle B$ ja $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ on omavahel võrdsed. Selleks peame demonstreerima mõlemapoolseid sisalduvusi ehk peame näitama, et $A \vartriangle B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ja $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \vartriangle B$.
Näitame esiteks, et kui $x \in A \vartriangle B$, siis $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Seega, olgu $x \in A \vartriangle B$. Hulkade sümmeetriline vahe on defineeritud ühendi kaudu, seega $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, mis omakorda tähendab, et $x \in A \setminus B$ või $x \in B \setminus A$. Kuna me ei tea, kumb kahest olukorrast aset leiab, vaatleme mõlemat juhtu eraldi. Seega jaguneb meie tõestus kahe alamjuhu vahel ning mõlemal korral peame näitama, et $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

i. Olgu $x \in A \setminus B$, mis tähendab, et $x \in A$, kuid $x \notin B$. Kuna $x \in A$, siis võime öelda, et $x \in A \cup B$. Kuna $x \notin B$, siis ei ole element x mõlemas hulgas, mis tähendab, et $x \notin A \cap B$. Kokkuvõtvalt $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
ii. Olgu $x \in B \setminus A$, mis tähendab, et $x \in B$, kuid $x \notin A$. Sarnaselt eelneva aruteluga võime väita, et $x \in A \cup B$, kuid $x \notin A \cap B$. Seega taas $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Teiseks peame näitama sisalduvust $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \vartriangle B$. Oletame, et $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Selle kohaselt $x \in A \cup B$, kuid $x \notin A \cap B$. Eesmärgiks on näidata, et $x \in A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ehk meil oleks vaja näidata, et $x \in A \setminus B$ või $x \in B \setminus A$. Milline informatsioon meil hetkel teada on? Kuna $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, siis x kuulub ühte hulkadest A või B, aga mitte mõlemasse. Ehk teisisõnu, kas $x \in A$ ja $x \notin B$ või et $x \in B$, kuid $x \notin A$. See aga tähendab, et $x \in A \setminus B$ või $x \in B \setminus A$, just täpselt, mida soovisimegi! Seega $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \vartriangle B$. Kuna mõlemapoolsed sisalduvused on näidatud, oleme tõestanud, et $A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. ■

Hulkadega tegelemisel tuleb kasuks ka järgmise samasuse teadmine, mille tõestus on jäetud iseseisvaks ülesandeks.

Lause 4 (DeMorgani seadus). Olgu A, B ja C hulgad. Siis $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ja $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Tõestus. Iseseisvaks tööks.

Koolimatemaatikas tegeletakse näiteks naturaalarvude hulgaga või täisarvude hulgaga, kusjuures uurimise objektideks on nii nende hulkade elemendid ja alamhulgad kui ka elementide vahel defineeritud seosed, tehted ja funktsioonid. Hulgateoorias nimetatakse sellist hulka, mille uurimise objektideks on peamiselt selle hulga elemendid ja alamhulgad ning nende vahel defineeritud seosed, tehted ja funktsioonid, **universaalhulgaks** ja tähistatakse tähega U.

Hulga täiend

Kui tegeldakse mingi universaalse hulga U elementidega, siis võivad iga konkreetse hulga $A \subseteq U$ puhul huvi pakkuda ka sellised universaalse hulga elemendid, mis hulka A ei kuulu. Näiteks, kui aritmeetikas on universaalseks hulgaks naturaalarvude hulk, siis koos paarisarvude hulgaga pakuvad huvi ka paaritud arvud.

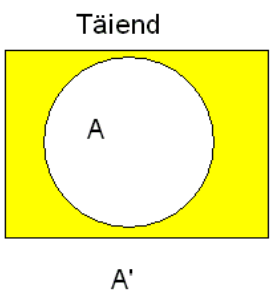
Definitsioon 9. Hulga A ***täiendiks*** A' (või $\bar{A}$) nimetatakse hulka, mille moodustavad kõik need universaalse hulga elemendid, mis ei kuulu hulka A:

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\} = \{x \in U \mid \neg(x \in A)\}$$

Näide 12.

1) Kui $U = \mathbb{Z}$, siis $\overline{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
2) Kui $U = \mathbb{R}$, siis $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{I}$.

Hulga A täiendit saab Venni diagrammi abil kujutada järgmiselt:



Ülesanne 10. Olgu antud mingi universaalhulk U ja temas suvaline hulk A. Mis on hulga A täiendi täiend?

Hulkade A ja B vahet $A \setminus B$ nimetatakse mõnikord ka **hulga *B* täiendiks hulga *A* suhtes**. Põhjuse selleks annab definitsioon $A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \,\wedge\, x \notin B \,\}$. Samuti näitame hiljem, et $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Lause 5. Tõestage, et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Tõestus. Kahe hulga võrdsuse näitamiseks peame näitama mõlemad sisaldused, esiteks $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$ ja teiseks $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. Olgu $x \in \overline{A \cap B}$. Siis $x \notin A \cap B$. See aga tähendab, et $x \notin A$ või $x \notin B$ või x ei kuulu kumbagi hulka. Seega peab kehtima, et $x \in \bar{A}$ või $x \in \bar{B}$ ehk teiste sõnadega, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Vastupidiselt, olgu nüüd $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Siis $x \in \bar{A}$ või $x \in \bar{B}$, mis omakorda tähendab, et $x \notin A$ või $x \notin B$. Kuna x ei kuulu vähemalt ühte hulkadest A või B, ta ei saa olla nende ühisosas ehk $x \notin A \cap B$. See on aga sama kui $x \in \overline{A \cap B}$. Seega järeldame oma mõlema pidisest arutelust, et hulgad $\overline{A \cap B}$ ja $\bar{A} \cup \bar{B}$ on võrdsed.