2. PEATÜKK

LAUSEARVUTUS

Errare humanum est, stultum est in errore perseverare.
(Eksimine on inimlik, kuid eksimuses kangekaelselt püsimine on rumal – ladinakeelne vanasõna).

Matemaatiline loogika

Loogika *(kr. logiké techne – mõtlemiskunst, logos – sõna, mõiste, mõistus)* ***on teadus õigest mõtlemisest, selle vormidest ja struktuuridest.***

Antiik-Kreeka mõtlejat Aristotelest (384 - 322 e.m.a.) peetakse loogikateaduse rajajaks. Kindlasti tunti ja kasutati mõningaid loogikareegleid juba enne Aristotelest, kuid Aristoteles oli esimene, kes rajas loogika süsteemse teadusena. Sõna “loogika” pärineb samuti kreeka keelest, kuid Aristoteles ise oma õpetust veel selle nimega ei kutsunud. Aristotelese loogikat ning selle edasiarendusi tuntakse ka nime all *traditsiooniline loogika*. 19. sajandi teisel poolel hakkas arenema *kaasaegne loogika*, mis tunneb rohkem loogikareegleid kui Aristotelese loogika. Kaasaegset loogikat tuntakse ka nime all *matemaatiline loogika*.

Matemaatiline loogika on loogika haru, milles loogikaprobleemide käsitlemiseks kasutatakse matemaatilisi meetodeid. Kirjeldades mingi valdkonna mõisteid ja väiteid, tuuakse sisse formaliseeritud keel, mis on matemaatiliseks uurimiseks piisavalt täpne, ühemõtteline ja lihtne. Seejuures tehakse vahet keele süntaktilistel aspektidel, mis käsitlevad objekte kui teatavate reeglite järgi koostatud sümbolijärjendeid, ning semantilistel aspektidel, mis annavad süntaktilistele objektidele interpretatsiooni ehk „tähenduse“. Tänaseks on matemaatiline loogika jagunenud paljudeks harudeks. Et aga matemaatilises loogikas kasutatavad formaliseeritud keeled on osutunud väga sobivaks programmide koostamise ja analüüsimise juures, siis on kogu valdkonna areng üha tihedamini seotud arvutiteadusega.

Traditsioonilise loogika aluseks on ***mõtlemisseadused***, mida kutsutakse ka *loogika aksioomideks*. Mõtlemisseadusteks nimetame niisuguseid seadusi, millele peab alluma meie mõtlemine, et ta oleks loogiline ehk tõelevastav. Aristoteles sõnastas kolm mõtlemisseadust: *samasuse seaduse, vasturääkivuste lubamatuse seaduse ja välistatud kolmanda seaduse*. W.G. Leibniz (1646 – 1716) lisas neile neljanda – *küllaldase aluse seaduse*.

1) ***Samasuse seadus*** väidab, et iga mõiste või väide peab ühe arutluse kestel jääma samaks. Selle seaduse rikkumine põhjustab asjatuid vaidlusi, mille kohta vanasõna ütleb: „Üks räägib aiast ja teine aiaaugust.“ Matemaatikas on oluline jälgida, et mõisted, mida me arutluses kasutame, ei muutuks oma sisult arutluse käigus, vaid et me kasutaksime ühte mõistet ainult ühes tähenduses. Võimaluse piires tuleb vältida „igapäeva kõnekeelt“, sest kõnekeelele on omane mitmetähenduslikkus.
2) ***Vasturääkivuse lubamatuse seadus*** ütleb, et kaks teineteist eitavat lauset ei saa olla tõesed üheaegselt. Näiteks ei saa fikseeritud kordajatega ruutvõrrandi diskriminant olla samaaegselt negatiivne ja mittenegatiivne, või üks ja sama naturaalarv üheaegselt algarv ja kordarv. Kui mingi arutluse tulemusena oleme jõudnud selleni, et kehtivad korraga kaks teineteisele vasturääkivat lauset, siis on ilmselt arutluses tehtud viga. Kui viga on lihtne, siis saame ta hõlpsasti parandada. Kui viga on keerulisem ja peidetud, võib vea

tekkepõhjuste uurimine pakkuda tööd matemaatikutele, loogikutele ja filosoofidele aastakümneteks või isegi sajanditeks. Selliseid vigu nimetatakse paradoksideks ehk antinoomiateks ning sofismideks.

3) ***Välistatud kolmanda seadus*** ütleb, et kahest teineteisele vasturääkivast väitest on üks tõene ja teine väär; kolmandat võimalust ei ole. Seega kaks suurust võivad olla võrdsed või mittevõrdsed; loomad võivad olla selgroolised või selgrootud, mingit kolmandat võimalust olla ei saa (tetrium non datur).
4) ***Küllaldase aluse seadus*** deklareerib, et igal otsustusel ning mõttel peab olema kindel alus, ehk iga väidet on vaja põhjendada mingi teise väitega, mille tõesus on kontrollitud. Näiteks, kui väidame, et *trapetsi kesklõik on paralleelne trapetsi alustega ja võrdub aluste poolsummaga*, siis tuleb seda väidet põhjendada tõestamise teel.

Matemaatilise loogika aluse moodustavad lausearvutus ja predikaatarvutus. Lausearvutuse eesmärk on uurida lausete omavahelist kombineerumist liitlauseks, näiteks kuidas tekkinud liitlause tõeväärtus sõltub komponentlausete tõeväärtusest. Predikaatarvutus on lausearvutuse üldistus, kus fikseeritud tõeväärtusega lausete asemel vaadeldakse selliseid lauseid, mille tõeväärtus võib sõltuda argumentide väärtustest (näiteks laused "$2x + 3 = 11$" ja *„x on algarv“*).

Lausearvutuse põhimõisted

Lausearvutuse põhiliseks uuritavaks objektiks on lause, mis võib pärineda ükskõik millisest valdkonnast. Siiski, mitte iga keeleliselt korrektne lause ei ole matemaatilise loogika lause. Matemaatilises loogikas nimetatakse ***lauseks*** ainult niisugust väljendit (väidet, kõnekeele lauset), mille korral saab rääkida selle sisu vastavusest või mittevastavusest tegelikkusele. Kui lause sisu vastab tegelikkusele, siis nimetatakse seda lauset ***tõeseks***. Kui aga lause sisu ei vasta tegelikkusele, siis nimetatakse seda lauset ***vääraks***. Seega, oluline on, et igale lausele saaks vastavusse seada tema ***tõeväärtuse***, mis kirjeldab lause tegelikkusele vastavuse määra. Eeldame, et

- iga lause on kas tõene või väär (välistatud kolmanda seadus);
- ükski lause ei ole korraga tõene ja väär (mittevasturääkivuse seadus).

Seega vaatleme ainult niisugused laused, mis midagi väidavad, kusjuures igal väitel on olemas ühene tõeväärtus.

Näiteks laused *„Abruka on üks Eesti saartest“* ja *„Arv 19 on algarv“* on tõesed, aga laused *„Hobune on kodulind“, „Kuu on üks suur kollane juustukera“* ja „$25 > 50$“ on väärad. Lausete *„Kas sul on iPad?“, „Tere päevast!“* ja „$x > 0$“ kohta ei oska me öelda, kas nad on tõesed või väärad (viimasel juhul on tõesuse määramiseks vaja teada x-i väärtust arvuliselt). Välistatud kolmanda seaduse nõudel jäävad kõrvale kõik küsilaused ja paljud hüüdlaused, samuti kõik käsud ning mõttetud sõnaühendid. Mittevasturääkivuse seadus välistab mitmesugused paradoksid, näiteks *„See lause siin on väär“* või *„Ma valetan praegu“*, sest selliste väidete tõeväärtust pole võimalik üheselt määrata.

Kui lause on tõene, siis öeldakse, et selle tõeväärtus on t, ning kui lause on väär, siis selle tõeväärtus on v. Kasutatakse ka tähti t ja f (inglise keeles true, false) või numbreid 1 ja 0.

Lausearvutuse eesmärk ei ole uurida lausete sisulist tähendust, vaid antud lausetest uute lausete moodustamist. Loogiliste tehete abil saab lausetest moodustada **liitlauseid**. Lauseid, millest liitlause moodustatakse, nimetatakse **komponentlauseteks** (**lihtlauseteks**). Liitlause nagu iga komponentlausegi, võib olla kas tõene või väär, kusjuures liitlause tõeväärtus sõltub ainult komponentlausete tõeväärtustest. Liitlausete moodustamiseks tuuakse sisse tähised komponentlausete ja seoste märkimiseks ning pannakse vaadeldav lause kirja sümbolkujul. Komponentlausete tähistamiseks kasutame suuri ladina tähti A, B, C jne, mida nimetame **lausemuutujateks**, grammatilistele seostele aga vastavad lausearvutuse tehted. Kahte lauset, mis on sisu poolest identsed, aga vormilt erinevad, loetakse võrdseteks ja tähistatakse ühe ja sama tähega. Näiteks laused *„Täisnurkse kolmnurga kõrgus on selle kolmnurga kaatetite projektsioonide geomeetriline keskmine“* ja *„Täisnurkse kolmnurga kõrguse ruut võrdub selle kolmnurga kaatetite projektsioonide korrutisega“* väljendavad üht ja sama tõsiasja, on oma sisult võrdsed ja me võime neid tähistada ühe ja sama tähega. Sisu poolest erinevaid lauseid tähistatakse erinevate tähtedega.

Tähtsamad lausearvutuse tehted

- ***Eitus*** (märk ¬) on loogiline tehe, mida rakendatakse ainult ühele lausele. Igapäevakeeles väljendab eitus lause mittekehtimist, näiteks *„Sidrun ei ole hapu“*. Selle lause võib kirja panna valemiga $\neg A$, kus A = *„Sidrun on hapu“*.

Lause A **eituseks** nimetatakse lauset $\neg A$, mis on tõene parajasti siis, kui lause A on väär.

Kui lause sisaldab kvantorit, siis lause eitamine toimub järgmiselt:

$$"\exists x, P(x)" \text{ eitus on } "\forall x,\ mitte\ P(x)"$$

$$"\forall x, Q(x)" \text{ eitus on } "\exists x,\ mitte\ Q(x)"$$

Kvantoriga lause eitamisel tuleb vahetada kvantor ja eitada lauset.

Näide 1.

Lause		Eitus
Ühegi naturaalarvu logaritm pole null.	-	Vähemalt ühe naturaalarvu logaritm on null.
Leidub arv, millega ei saa jagada.	-	Iga arvuga saab jagada.

- ***Konjunktsiooni*** keeleliseks vasteks on sõnad *„ja“* või *„ning“*. Tehtemärgina kasutatakse sümboleid & või ∧. Näiteks *„Puhub tuul ja sajab vihma“* on valemkujul kirjutatuna $A \& B$ või $A \wedge B$, kus A=*“Puhub tuul“* ning B=*“Sajab vihma“*. Konjunktsiooni nimetatakse vahel ka *loogiliseks korrutiseks*.

Lausete A ja B **konjunktsioon** $A \wedge B$ on tõene parajasti siis, kui mõlemad komponentlaused A ja B on tõesed.

- ***Disjunktsioon*** (märk ∨) väljendab seost *„või“*. Näiteks *„Helen laulab või Mart laulab“* on valemkujul $A \vee B$. Sidesõna *„või“* kasutatakse siin mittevälistavas tähenduses: *„Kas A või B või mõlemad“*. Igapäevases keeles on käibel ka välistav *„või“*: *„Kas A* *või B, aga mitte mõlemad"*, näiteks *„Ma külvan põllule rukist või panen põllule kartulid"*. Disjunktsiooni all mõistame mittevälistavat *„või"*.

Lausete A ja B **disjunktsioon** $A \vee B$ on tõene parajasti siis, kui vähemalt üks komponentidest A või B on tõene.

Mittevälistava „või" abil moodustatud liitlause on väär siis ja ainult siis, kui mõlemad komponentlaused on väärad.

- ***Implikatsioon*** (märk $\rightarrow$ või $\Rightarrow$ või $\supset$) väljendab tingimuslikku konstruktsiooni *„kui ..., siis ..."*. Näiteks *„Kui Sven terve aasta korralikult õpib, siis suudab ta kevadel eksamid hõlpsasti ära teha"* või *„Kui kehtib teoreem A, siis kehtib teoreem B"*. Mõlemad laused võib kirja panna valemiga $A \rightarrow B$ või $A \Rightarrow B$. Implikatsiooni saab sõnastada mitmel eri viisil. Näiteks: 1) *Kui on A, siis on B*. 2) *A-st järeldub B*. 3) *A on B piisav tingimus*. 4) *B on A tarvilik tingimus*. 5) *B on ainult siis, kui on A*.

Lausete A ja B **implikatsioon** $A \Rightarrow B$ on tõene parajasti siis, kui A on väär või B on tõene.

NB! Implikatsioon ei ole sümmeetriline tehe. Hoolikalt tuleb jälgida, milline avaldis on kirjutatud märgist $\Rightarrow$ vasakule poole, milline avaldis aga paremale poole.

- ***Ekvivalents*** (märk $\leftrightarrow$ või $\Leftrightarrow$ või $\sim$) tähendab matemaatikas sagedasti kasutatavat seost *„parajasti siis, kui"* ehk *„siis ja ainult siis, kui"* ehk *„on ekvivalentne sellega et"*. Näiteks lause *„arv r on ratsionaalarv parajasti siis, kui r esitub kas lõpliku või (lõpmatu) perioodilise kümnendmurruna"* on valemkujul $A \leftrightarrow B$ ehk $A \Leftrightarrow B$.

Lausete A ja B **ekvivalents** $A \Leftrightarrow B$ või $A \sim B$ on tõene parajasti siis, kui kas A ja B on mõlemad tõesed või mõlemad väärad.

Kõik toodud tehete definitsioonid saab esitada ühises tabelis:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
t	t	t	t	t	t	v
t	v	v	t	v	v	v
v	t	v	t	t	v	t
v	v	v	v	t	t	t

Eitus on ainus loogiline tehe, mida saab rakendada ka ainult ühele lausele. Ülejäänud loogiliste tehete – konjunktsioon, disjunktsioon, implikatsioon, ekvivalents – rakendamiseks peab olema vähemalt kaks komponenti.

Loogiliste tehete *prioriteedid* võimaldavad vähendada valemites kasutatavate sulgude arvu. Kõige kõrgema prioriteediga on eitusetehe ja kõige madalama prioriteediga ekvivalentsitehe. Teiste tehete prioriteet ehk tugevusjärjekord fikseeritakse tavaliselt nii, et see kahaneb järgmises tehete loetelus vasakult paremale:

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow$$

Olles seega piiritlenud lausearvutuse tehted, võime nüüd koostada lihtsamatest lausetest keerulisemaid, ühendades neid omavahel lausearvutuse tehete abil. Näiteks saame moodustada lause

$$\big((A \Leftrightarrow B) \Longrightarrow (A \wedge C)\big) \vee \neg B.$$

Niisugustes operatsioonides eeldame endiselt järgmiste tingimuste täidetust:

- tehteid võib teostada ükskõik milliste lausetega (sisulist seost nende vahel ei nõuta);
- tehte tulemusena saadud lause tõeväärtus sõltub ainult komponentlausete tõeväärtustest, mitte nende sisust.

Nendest tingimustest järeldub vahetult, et lausetega tehete sooritamisel on oluline mitte lausete sisu, vaid tõeväärtus. Lausearvutuse üks põhilisi ülesandeid ongi liitlause tõeväärtuse leidmine.

Liitlausete tõeväärtuse leidmine

Kui komponentlausete tõeväärtused on ette antud, siis liitlause tõeväärtuse leidmiseks tuleb komponentlaused asendada nende tõeväärtustega ning arvestada tehete järjekorda ja loogiliste tehete definitsioone. Kui komponentlausete tõeväärtused pole ette antud, siis määratakse liitlause tõeväärtused komponentlausete tõeväärtuste kõikvõimalike kombinatsioonide korral. Seda on otstarbekas teha tabeli kujul, mida nimetatakse liitlause **tõeväärtustabeliks**.

<u>Näide 2.</u> Koostame näiteks liitlause $(\neg A \Rightarrow B) \vee (A \wedge B)$ tõeväärtustabeli. Tabeli peasse kirjutame komponentlaused A ja B ning üksikud tehted nõutavas järjekorras. Kahe komponentlause korral on 4 võimalikku tõeväärtuste kombinatsiooni. Nendega täidamegi komponentlausete A ja B tõeväärtuste veerud ning seejärel täidame tabeli ülejäänud veerud, arvestades vastavaid loogilisi tehteid.

A	B	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow B$	$A \wedge B$	$(\neg A \Rightarrow B) \vee (A \wedge B)$
t	t	v	t	t	t
t	v	v	t	v	t
v	t	t	t	v	t
v	v	t	v	v	v

Liitlause $(\neg A \Rightarrow B) \vee (A \wedge B)$ tõeväärtused on tabeli viimases veerus. Näeme, et antud liitlause on väär vaid ühel juhul, ja nimelt siis, kui mõlemad komponentlaused on väärad ($A = v$ ja $B = v$).

Lausearvutuse valemid

Kirjutades laused üles sümbolkujul, saamegi ***lausearvutuse valemid***. Kui see on tehtud, siis võime edasise uurimise aluseks võtta valemid ja jätta kõrvale laused, millest need valemid saadi. Täpse eeskirja valemite kirjapanemiseks määrab kindlaks lausearvutuse süntaks, mis väljendub järgmises definitsioonis.

<u>Definitsioon 1.</u> ***Lausearvutuse valemid*** on parajasti need, mida saab koostada järgmiste reeglite abil:

1) iga lausemuutuja on lausearvutuse valem;
2) tõeväärtused t ja v on valemid;
3) kui $\mathcal{F}$ on lausearvutuse valem, siis ka $\neg\mathcal{F}$ on lausearvutuse valem;

4) kui $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on lausearvutuse valemid, siis ka $(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}), (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}), (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G})$ ja $(\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G})$ on lausearvutuse valemid.

Näiteks avaldis $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D})$ on valem, kui $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ on valemid.

Definitsioonist järeldub, et valem saab sõltuda lõplikust arvust muutujatest ning on antud eeskiri, kuidas lihtsamatest valemitest saab järk-järgult moodustada keerulisemaid. Niisugust tüüpi definitsioonid esinevad loogikas üsna sageli, neid nimetatakse ***induktiivseteks***, sest vormi poolest meenutavad nad matemaatilise induktsiooni printsiipi. Tingimus 1) kujutab seejuures induktsiooni baasi, tingimused 3) ja 4) aga induktsiooni sammu (induktsioonist räägime lähemalt hiljem).

Lähtudes lausemuutujatest, saame koostada valemid, mis sisaldavad ühte lausearvutuse tehet; lähtudes lausemuutujatest ja ühe tehtega valemitest, saame koostada kahe tehtega valemid jne. Kõiki antud valemi konstrueerimise käigus tekkinud valemeid nimetatakse selle valemi **osavalemiteks** ehk **alamvalemiteks**, konstrueerimise viimasel sammul kasutatud tehet aga valemi **peatehteks**. Kui lauses on mitu erinevat loogikatehet, siis tuleb arvestada sulgudega ja tehete järjekorraga (tuleta meelde: kõigepealt eitused, siis konjunktsioonid, siis disjunktsioonid, seejärel implikatsioonid ja ekvivalents). Kui mitme liikme konjunktsioonis või disjunktsioonis sooritatakse tehteid vasakult paremale, siis võib tehete järjekorda täpsustavatest sulgudest loobuda (vasakassotsiatiivsus). Samuti võib valemi välimised sulud ära jätta.

Näide 3. Olgu antud valem $\Big(\big((X \wedge \neg Y) \wedge (Z \Rightarrow \neg X)\big) \Leftrightarrow (Y \vee X)\Big)$.
Lausemuutujad X, Y, Z on lausearvutuse valemid definitsiooni esimese punkti põhjal.
Kolmanda punkti põhjal on lausearvutuse valemid ka näiteks $\neg X$ ja $\neg Y$ ning neljanda punkti põhjal $(Y \vee X)$. Edasi on lausearvutuse valemid $(X \wedge \neg Y)$, $(Z \Rightarrow \neg X)$ ja $((X \wedge \neg Y) \wedge (Z \Rightarrow \neg X))$ ning samuti $(((X \wedge \neg Y) \wedge (Z \Rightarrow \neg X)) \Leftrightarrow (Y \vee X))$. Viimase valemi peatehe on $\Leftrightarrow$ ja tema osavalemid on parajasti kõik loetletud valemid.

Näide 4. Vaatleme taas eelmise näite valemit $\Big(\big((X \wedge \neg Y) \wedge (Z \Rightarrow \neg X)\big) \Leftrightarrow (Y \vee X)\Big)$.
Jättes ära välimised sulud, saame $((X \wedge \neg Y) \wedge (Z \Rightarrow \neg X)) \Leftrightarrow (Y \vee X)$.
Tehete prioriteeti arvestades võime loobuda sulgudest valemi peatehte kummagi poole ümber:

$$(X \wedge \neg Y) \wedge (Z \Rightarrow \neg X) \Leftrightarrow Y \vee X.$$

Vasakassotsiatiivsuse reegli põhjal pole tarvis ka esimesi sulge:

$$X \wedge \neg Y \wedge (Z \Rightarrow \neg X) \Leftrightarrow Y \vee X.$$

Kokkuvõttes on valem omandanud hoopis ülevaatlikuma kuju.

Muutujate väärtustused

Iga lausemuutuja võib olla kas tõene või väär. Kui näiteks muutuja X on tõene, siis kirjutame $X = 1$, vastasel korral, kui muutuja X on väär, kirjutame $X = 0$. Juhul, kui vaatluse all on korraga hulk lausemuutujaid ja me omistame tõeväärtuse igale muutujale, siis nimetatakse sellist tõeväärtuste komplekti **muutujate väärtustuseks**. Näiteks muutujakomplekti X, Y, Z üks võimalik väärtustus on $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 1$ ehk lühemalt $(1, 0, 1)$.

Olgu antud mingi lausearvutuse valem. Omistame kõigile selles valemis esinevatele lausemuutujatele tõeväärtused, s.o anname neile muutujatele mingi väärtustuse. Valemi tõeväärtuse leidmiseks sellel väärtustusel tuleb sooritada kõik valemi tehted, milleks annab reeglid järgmine definitsioon.

<u>Definitsioon 2.</u> ***Lausearvutuse valemi $\mathcal{F}$ tõeväärtus*** etteantud väärtustusel leitakse järgmiste reeglite abil:

1) Kui $\mathcal{F} = \neg\mathcal{G}$, siis $\mathcal{F} = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G} = 0$.
2) Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \wedge H$, siis $\mathcal{F} = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G} = 1$ ja $\mathcal{H} = 1$.
3) Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \vee H$, siis $\mathcal{F} = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G} = 1$ või $\mathcal{H} = 1$.
4) Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}$, siis $\mathcal{F} = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G} = 0$ või $\mathcal{H} = 1$.
5) Kui $\mathcal{F} = \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{H}$, siis $\mathcal{F} = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{G} = 1$ ja $\mathcal{H} = 1$ või $\mathcal{G} = 0$ ja $\mathcal{H} = 0$.

Eituse puhul on tegemist lihtsa postulaadiga, et teineteist eitavate lausete tõeväärtused on vastupidised. Konjunktsioon on tõene ainult juhul, kui mõlemad komponentlaused on tõesed. Disjunktsioon on tõene, kui on tõene vähemalt üks komponentlause. Seega realiseerib disjunktsioon sõna „või“ mittevälistavat tähendust. Implikatsioon on väär ainult siis, kui eesliige on tõene ja tagaliige väär. Kuigi tavakeeles kipume väära eesliikmega implikatsiooni (näiteks *„Kui 1 = 2, siis täna on tööpäev“*) pidama rohkem vääraks kui tõeseks, peetakse tõeväärtuse arvutamise reeglites silmas pigem järeldumist matemaatilises mõttes. Näiteks pole meil mingit põhjust lugeda järeldust *„Kui arv x on positiivne, siis arvu x ruut on positiivne“* vääraks juhul, kui vaadeldav arv on negatiivne või null. Lõpuks, ekvivalents kehtib siis, kui pooled on võrdse tõeväärtusega.

<u>Näide 5.</u> Leida valemi $X \wedge \neg Y \wedge (Z \Rightarrow \neg X) \Leftrightarrow Y \vee X$ tõeväärtus muutujate X, Y, Z väärtustusel $(1, 0, 1)$.

<u>Lahendus:</u> Järgime sama skeemi nagu näites 3. Kõigepealt teame, et $X = 1,\ Y = 0,\ Z = 1$. Eelneva definitsiooni esimese punkti põhjal saame $\neg X = 0$ ja $\neg Y = 1$ ning kolmanda punkti põhjal $Y \vee X = 1$. Edasi leiame analoogilisel viisil $X \wedge \neg Y = 1$ ning $Z \Rightarrow \neg X = 0$, mistõttu $X \wedge \neg Y \wedge (Z \Rightarrow \neg X) = 0$. Lõpuks näeme, et $X \wedge \neg Y \wedge (Z \Rightarrow \neg X) \Leftrightarrow Y \vee X = 0$. Vaadeldaval väärtustusel on valem järelikult väär.

Sarnaselt eespool antud tabelile on ka siin tark tegu tehete toimet ülevaatlikumalt kirjeldada *tõeväärtustabeliga*, mille vasakus osas on valemi argumentide kõikvõimalikud väärtustused, paremas osas aga tehete tulemused. Keerukama valemi tõeväärtustabelis kirjutatakse tehte tulemused iga tehtemärgi alla omaette veergu. Näites 5 konstrueeritud valemi tõeväärtustabeliks saame niiviisi

				4	2	6		5	1	7		3	
X	Y	Z	X	$\wedge$	$\neg Y$	$\wedge$	$(Z$	$\Rightarrow$	$\neg X)$	$\Leftrightarrow$	Y	$\vee$	X
1	1	1		0	0	0		0	0	0		1	
1	1	0		0	0	0		1	0	0		1	
1	0	1		1	1	0		0	0	0		1	
1	0	0		1	1	1		1	0	1		1	
0	1	1		0	0	0		1	1	0		1	
0	1	0		0	0	0		1	1	0		1	
0	0	1		0	1	0		1	1	1		0	
0	0	0		0	1	0		1	1	1		0	

Numbrid ülal tähistavad järjekorda, milles tehted on sooritatud (antud juhul on võimalikud mite erinevat järjekorda). Valemi tõeväärtused leiame viimasena (antud juhul seitsmendana) arvutatud ehk peatehtele vastavast veerust.

Tõeväärtustabel on lausearvutuse valemi analüüsimise universaalne meetod. Enamiku ülesannetest, mis puudutavad lausearvutuse valemi tõesust või väärust, saab lahendada tõeväärtustabeliga, kuigi mõnede spetsiaalsete ülesannete lahendamiseks on olemas ka teisi meetodeid. Et aga n muutujaga valemi tõeväärtustabel sisaldab 2^n rida, siis kasvab tõeväärtustabeli maht muutujate arvu suurenedes väga kiiresti (m tehtemärgi korral tuleb teha $2^n \cdot m$ tehet).

Valemite omadused

Järgnevas vaatleme lausearvutuse valemite „globaalseid“ omadusi, jälgides valemi tõeväärtust seal esinevate lausemuutujate erinevatel väärtustustel.

Definitsioon 3. Lausearvutuse valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse ***samaselt tõeseks*** ehk ***tautoloogiaks***, kui ta on igal väärtustusel tõene ning ***samaselt vääraks*** ehk ***vastuoluliseks***, kui ta on igal väärtustusel väär.

Samaselt tõest valemit nimetatakse ka **loogiliselt tõeseks** valemiks ning samaselt väära valemit **kontradiktsiooniks** või **loogiliselt vääraks** valemiks. Üks samaselt tõene valem on näiteks $X \vee \neg X$, mis väljendab välistatud kolmanda seadust. Mittevasturääkivuse seadust kirjeldab aga samaselt väär valem $X \wedge \neg X$.

Samaselt tõesed valemid väljendavad üldkehtivaid loogikaseadusi ning pakuvad seetõttu loogikas suurt huvi. Asendades niisuguses valemis kõik lausemuutujad mingite lausetega, saame liitlause, mis on alati tõene. Näiteks kui valemis $X \vee \neg X$ võtta X = *„Mul on õigus“*, siis saame lause *„Mul on õigus või mul ei ole õigus“*, mis on tõene sõltumata sellest, kas mul õigus oli.

Et samaselt tõene valem on igas olukorras tõene, olenemata sellest, milline maailm tegelikult on, siis ei sisalda ta informatsiooni ja on seega sisutühi (ta ei ütle maailma kohta midagi). Kui näiteks lause *„Homme on ilus ilm või homme ei ole ilus ilm“* esineks ilmateates, siis pole sellest homse ilma kohta võimalik midagi teada saada. Teinekord esineb taolise struktuuriga väiteid igapäevases keeles, näiteks *„Seadus võetakse Riigikogus vastu või ei võeta“*. Kuigi niisugune väide otsest informatsiooni ei kanna, saab järeldada lause esitamise faktist, et tegemist on mingi seadusega, mille vastuvõtmise suhtes pole kõik saadikud ühel meelel. Selline kaudne tõlgendamine jääb aga väljapoole lausearvutuse piire.

Samaselt väärad valemid esitavad väiteid, mis mingil tingimusel tõesed olla ei saa. Vaatleme näiteks valemit $X \wedge \neg X$ ja valime X = *„Homme on ilus ilm“*. Saame lause *„Homme on ilus ilm ja pole ilus ilm“*, mis ei saa olla tõene, sest siis peaks homne ilm olema ühtaegu nii ilus kui ka halb. Seetõttu ka samaselt väära valemina esinev lause on infotühi

Iga valemi samaselt tõesust saab kontrollida tõeväärtustabeliga: valemi tõeväärtuste veerus peab esinema ainult väärtus 1. Et tõeväärtustabel on lõplik, siis saab lausearvutuse valemi samaselt tõesust alati kindlaks teha lõpliku arvu sammudega ehk, algoritmiteooria terminites, lausearvutuse samaselt tõeste valemite hulk on lahenduv. Analoogilised märkused kehtivad samaselt väärade valemite kohta.

Näide 6. Näidata, et valem $X \wedge Y \vee X \wedge \neg Y \vee \neg X \wedge Y \vee \neg X \wedge \neg Y$ on samaselt tõene.

Koostame tõeväärtustabeli:

			1		9		3	2	10	4	5		11	6	8	7
X	Y	X	$\wedge$	Y	$\vee$	X	$\wedge$	$\neg Y$	$\vee$	$\neg X$	$\wedge$	Y	$\vee$	$\neg X$	$\wedge$	$\neg Y$
1	1		1		1		0	0	1	0	0		1	0	0	0
1	0		0		1		1	1	1	0	0		1	0	0	1
0	1		0		0		0	0	1	1	1		1	1	0	0
0	0		0		0		0	0	0	1	0		1	1	1	1

Et antud valemi tõeväärtuste veerus esinevad ainult tõesed väärtused, siis on valem samaselt tõene. Seda valemit võib pidada välistatud kolmanda seaduse üldistuseks kahe lausemuutuja juhule.

Näide 7. Näidata, et valem $\neg(A \vee B) \wedge \neg(\neg A \vee \neg B)$ on samaselt väär.

Koostame tõeväärtustabeli

		2		1		7	6	3	5	4
A	B	$\neg$	$(A$	$\vee$	$B)$	$\wedge$	$\neg$	$(\neg A$	$\vee$	$\neg B)$
1	1	0		1		0	1	0	0	0
1	0	0		1		0	0	0	1	1
0	1	0		1		0	0	1	1	0
0	0	1		0		0	0	1	1	1

Et antud valemi tõeväärtuste veerus esinevad ainult väärad väärtused, siis on valem samaselt väär.

Kui kaks valemit ei ole neis esinevate lausemuutujate ühelgi väärtustusel korraga tõesed, siis nimetatakse neid valemeid **vasturääkivateks.** Näite 7 põhjal võime öelda, et valemid $\neg(A \vee B)$ ja $\neg(\neg A \vee \neg B)$ on vasturääkivad. Analoogiliselt mõistetakse vasturääkivust kolme, nelja ja enama valemi puhul.

Vaatleme veel ühte valemiklassi.

Definitsioon 4. Lausearvutuse valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse ***kehtestatavaks***, kui ta on vähemalt ühel väärtustusel tõene. Valemit nimetatakse ***kummutatavaks***, kui ta on vähemalt ühe väärtustuse korral väär.

Näiteks valem $\neg(A \vee B)$ on kehtestatav, sest tema tõeväärtuste veerus esineb 1 (vaata näide 7, teise tehte tõeväärtused). Otse definitsioonist järeldub, et iga samaselt tõene valem on kehtestatav, sest selline valem on samuti vähemalt ühel väärtustusel tõene.

Sissetoodud valemiklasside vahel kehtivad järgmised seosed.

Teoreem 1. Valem $\mathcal{F}$ on samaselt tõene parajasti siis, kui tema eitus $\neg\mathcal{F}$ on samaselt väär.

Tõestus. Andes valemis $\mathcal{F}$ esinevatele lausemuutujatele suvalise väärtustuse, näeme, et valemite $\mathcal{F}$ ja $\neg\mathcal{F}$ tõeväärtused on vastupidised. Järelikult kui $\mathcal{F}$ on igal väärtustusel tõene, siis $\neg\mathcal{F}$ on igal väärtustusel väär ja ümberpöördult. ■

Teoreem 2. Valem $\mathcal{F}$ on kehtestatav parajasti siis, kui tema eitus $\neg\mathcal{F}$ ei ole samaselt tõene.

Tõestus. Kui $\mathcal{F}$ on kehtestatav, siis väärtustusel, kus $\mathcal{F}$ on tõene, on valem $\neg\mathcal{F}$ väär ja ei saa seetõttu olla samaselt tõene. Ümberpöördult, kui $\neg\mathcal{F}$ ei ole samaselt tõene, siis leidub väärtustus, kus $\neg\mathcal{F}$ on väär ja $\mathcal{F}$ järelikult tõene. ■

Analoogiat kasutades võime eelmisele kahe teoreemile lisaks väita, et valem $\mathcal{F}$ on samaselt väär parajasti siis, kui tema eitus $\neg\mathcal{F}$ on samaselt tõene, ning valem $\mathcal{F}$ on kummutatav parajasti siis, kui $\mathcal{F}$ ei ole samaselt tõene. Kõige lihtsam neid omadusi kindlaks teha on koostada nende tõeväärtustabelid.