10. PEATÜKK
PÖÖRDFUNKTSIOON JA LIITFUNKTSIOON

Pöördfunktsioon

Kui R on binaarne seos hulkade X ja Y elementide vahel, siis R pöördseoseks ehk pöördrelatsiooniks me nimetasime seost $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ hulkade Y ja X elementide vahel, mis saadi lihtsalt kõigi seosesse R kuuluvate paaride ümberpööramise teel. On selge, et igal binaarsel seosel leidub pöördseos.

Küsimus. Vaadeldes funktsiooni f kui seost hulkade X ja Y elementide vahel, millistel tingimustel on pöördseos f^{-1} funktsioon hulgast Y hulka X?

Pöördseose f^{-1} saame moodustada ka siis, kui f on funktsioon, ainult et funktsiooni pöördseos ei tarvitse ise olla funktsioon hulgast Y hulka X. Selleks on kaks võimalikku põhjust, millest üks on seotud sürjektiivsusega ja teine injektiivsusega. Nimelt, kui funktsioon f ei ole sürjektiivne, siis leidub $y \in Y$, millel pole originaali (vt järgmist näidet).

Näide 1. Vaatleme ruutfunktsiooni $f(x) = x^2$ funktsioonina reaalarvude hulgast reaalarvude hulka. On selge, et negatiivseteks arvudeks ei kujutata ühtegi reaalarvu ja järelikult ei sisalda pöördseos ühegi negatiivse arvu korral sellist paari, kus see arv oleks esimeseks komponendiks. Järelikult ei ole pöördseos f^{-1} hulgal $\mathbb{R}$ defineeritud funktsioon.

Kui aga funktsioon f ei ole injektiivne, siis leidub $y \in Y$, millel on vähemalt kaks originaali.

Näide 2. Vaatleme nüüd ruutfunktsiooni $f(x) = x^2$ funktsioonina $f: \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. See funktsioon kujutab arvud -1 ja 1 samaks arvuks 1. Järelikult pöördseos f^{-1} sisaldab paare $(1, -1)$ ja $(1, 1)$ ja ei ole seetõttu funktsioon, sest ta pole ühene.

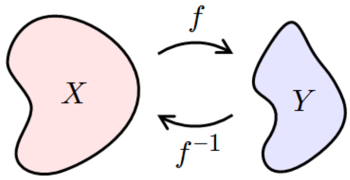
Näide 3. Olgu $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ja $Y = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Olgu $f: X \to Y$ antud kujul $f = \{(0, 5), (1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 7)\}$. Siis $f^{-1} = \{(5, 0), (7, 1), (8, 2), (9, 3), (7, 4)\}$. Kas f^{-1} on funktsioon? Ei ole. Ja seda lausa kahel põhjusel. Esiteks on paarid $(7, 1)$ ja $(7, 4)$ mõlemad pöördseose f^{-1} elemendid ja seetõttu pole f^{-1} ühene ehk injektiivne. Teiseks, pöördseose määramispiirkond $\{5, 7, 8, 9\} \neq Y$.

Seega, selleks, et f^{-1} oleks funktsioon, peab ta kõigepealt olema seos. See ei ole meil õnneks kunagi probleemiks, sest niipea kui f on seos, on seda ka f^{-1}. Teiseks, kui elementide paarid $(x, y), (x, z) \in f^{-1}$, peab alati kehtima $y = z$. Sõnastades selle tingimuse ümber funktsiooni f jaoks, saame, et kui $(y, x), (z, x) \in f$, siis peab kehtima $y = z$. See on täpselt üks-ühesuse ehk injektiivsuse nõue ja selle nõude vastu funktsioonid näidetes 2 ja 3 eksisidki. Pealekujutuse ehk sürjektiivsuse nõue hoolitseb selle eest, et funktsiooni f^{-1} määramispiirkonnaks oleks täpselt funktsiooni f muutumispiirkond (=sihthulk). Kui funktsioon f ei oleks sürjektiivne, leiduks hulgas Y element y, mille korral $f^{-1}(y)$ oleks defineerimata (s.t. tal ei ole originaali).

Kokkuvõtvalt, kui funktsioon $f: X \to Y$ on bijektiivne, siis leidub iga $y \in Y$ jaoks parajasti üks paar $(x, y) \in f$, mille teine komponent on y. Järelikult on iga bijektiivse funktsiooni pööramisel saadud seos funktsioon, mida on loomulik nimetada pöördfunktsiooniks.

Definitsioon. Bijektiivse funktsiooni $f: X \to Y$ ***pöördfunktsiooniks*** nimetatakse funktsiooni $f^{-1}: Y \to X$, mis seab igale $y \in Y$ vastavusse sellise elemendi $x \in X$, mille korral $f(x) = y$.

Seega, pöördfunktsiooni määramispiirkonnaks on Y ja muutumispiirkonnaks X. Pöördfunktsiooni tähistatakse $x = f^{-1}(y)$, kuid selle asemel kasutatakse pigem kuju $y = f^{-1}(x)$ (vahetatakse sõltuva ja sõltumatu muutuja tähistused).



Seose ehk järjestatud paaride hulgana esitades kehtib $f^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in f\}$.

Definitsioonile eelnenud arutlus näitas seda, et funktsioonil f leidub pöördfunktsioon parajasti siis, kui f on bijektiivne. Järgnevalt teeme kindlaks mõned pöördfunktsiooni lihtsad omadused.

<u>Lause 1.</u> Kui funktsioon $f^{-1}: Y \to X$ on funktsiooni $f: X \to Y$ pöördfunktsioon, siis iga $x \in X$ ja $y \in Y$ korral kehtib $f(x) = y \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(y) = x$.

<u>Tõestus.</u> Iseseisvaks tööks. (Vihje: Kontrolliks piisab pöördfunktsiooni esitamisest paaride hulgana.)

<u>Lause 2.</u> Kui funktsioonil $f: X \to Y$ leidub pöördfunktsioon f^{-1}, siis ka funktsioonil $f^{-1}: Y \to X$ leidub pöördfunktsioon ja $(f^{-1})^{-1} = f$.

<u>Tõestus.</u> Iseseisvaks tööks. (Vihje: Lisaks on vajalik ka pöördfunktsiooni injektiivsuse ning sürjektiivsuse kontroll.)

Tähistust f^{-1} kasutasime me eespool hulga $B \subseteq Y$ originaali jaoks, defineerides $f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$. Pöördfunktsiooni definitsioon võimaldab aga mõista nüüd vasakul f^{-1} kui funktsiooni hulgast Y hulka X ja $f^{-1}(B)$ kui hulga B kujutist selle funktsiooniga. Veendume, et selline mõistmine on kooskõlas varasemaga.

$$f^{-1}(B) = \{ f^{-1}(y) \mid y \in B\} = \{x \mid \exists y\, [(y, x) \in f^{-1} \wedge y \in B]\} = \{x \mid \exists y\, [(x, y) \in f \wedge y \in B]\} = \{x \mid \exists y\, [f(x) = y \wedge y \in B]\} = \{x \mid f(x) \in B\}.$$

Esimesed kaks võrdust on saadud hulga kujutise definitsioonist, kolmas pöördfunktsiooni definitsioonist, neljas funktsiooni relatsioonilise esituse $(x, y) \in f$ asendamisel esitusega $f(x) = y$. Viimasel sammul on y asendatud temaga võrdse $f(x)$ tähistusega ja jäetud ära kvantor (sest tema mõjupiirkonnas ei ole muutujat y).

Pöördfunktsioon f^{-1} on ühene, kui f on injektiivne. Vastupidisel juhul on see mitmene.

Mainime siinjuures ka ära, et väljendid "funktsioon $f: X \to Y$ on bijektsioon", "eksisteerib pöördfunktsioon $f^{-1}: Y \to X$", "funktsioon $f: X \to Y$ on pööratav" on kõik samaväärsed.

Liitfunktsioon

Täpselt samuti nagu on olemas aritmeetilised tehted (näiteks $+$ või $\times$) arvude kombineerimiseks ja hulgateoreetilised tehted (näiteks $\cup$ ja $\cap$) hulkade kombineerimiseks, on olemas ka tehted funktsioonide kombineerimiseks. Liitfunktsiooniks ehk funktsioonide (kujutuste) kompositsiooniks nimetatakse matemaatikas funktsiooni, mis saadakse kahe funktsiooni järjest rakendamisel.

Definitsioon. Olgu X, Y ja Z mingid hulgad. Funktsioonide $f: X \to Y$ ning $g: Y \to Z$ ***liitfunktsiooniks*** ehk ***kompositsiooniks*** nimetatakse niisugust funktsiooni $h: X \to Z$, et $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ iga $x \in X$ korral.

Funktsiooni g nimetatakse siin ***välimiseks*** funktsiooniks, funktsiooni f ***sisemiseks*** funktsiooniks. Funktsioonide f ja g liitfunktsiooni tähistatakse $g \circ f$. Funktsioonide f ja g liitfunktsiooni või nende liitfunktsiooni väärtuste leidmist nimetatakse ka funktsioonide f ja g järjest rakendamiseks.

Näide 4. Olgu $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{6, 7, 8, 9\}$ ja $Z = \{10, 11, 12\}$ Olgu $f: X \to Y$ ja $g: Y \to Z$ antud kujul

$$f = \{(1, 6), (2, 6), (3, 9), (4, 7), (5, 7)\} \text{ ja}$$
$$g = \{(6, 10), (7, 11), (8, 12), (9, 12)\}.$$

Siis $(g \circ f) = \{(1, 10), (2, 10), (3, 12), (4, 11), (5, 11)\}$.
Leiame $(g \circ f)(2) = g\big(f(2)\big) = g(6) = 10.$ Seega paar $(2, 10) \in g \circ f$, ehk $(g \circ f)(2) = 10$.

Märkused. 1) Funktsioonide kompositsioon $g \circ f$ on võimalik vaid siis, kui funktsiooni g lähtehulk on sama kui funktsiooni f sihthulk.
2) Kompositsiooni $g \circ f$ määramispiirkond on sama kui funktsiooni f määramispiirkond.
3) Võib juhtuda, et on võimalik defineerida nii $g \circ f$ kui ka $f \circ g$, kuid need kaks funktsiooni ei pruugi samad olla, s.t. üldjuhul $f \circ g \neq g \circ f$. Seega, funktsioonide kompositsioon ei ole kommutatiivne.

Näide 5. Olgu $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ja olgu $f: X \to X$ ja $g: X \to X$ antud kujul

$$f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4,1), (5, 1)\} \text{ ja}$$
$$g = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}.$$

Siis nende funktsioonide kompositsioonid avalduvad järgmiselt:

$$g \circ f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5)\}.$$
$$f \circ g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}.$$

Seega $f \circ g \neq g \circ f$.

Sellegipoolest on funktsioonide kompositsioonil assotsiatiivsuse omadus.

Lause 3. Olgu X, Y, Z ja W hulgad ning $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ ja $h: Z \to W$. Siis $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Tõestus. Peame näitama, et kaks funktsiooni on võrdsed. Kuidas seda teha? Selleks näitame kõigepealt, et nende funktsioonide määramispiirkonnad on võrdsed, ning seejärel näitame, et iga elemendi x korral nende ühisest määramispiirkonnast kummagi funktsiooni abil saadud kujutis on sama. Nendest kahest sammust saamegi siis järeldada, et antud funktsioonid on võrdsed.
Seega, kontrollime esiteks, et funktsioonide $h \circ (g \circ f)$ ja $(h \circ g) \circ f$ määramispiirkonnad on samad. Ülal toodud märkuse 2) kohaselt on funktsioonidel $h \circ (g \circ f)$ ja $g \circ f$ ühine määramispiirkond, mis omakorda kattub funktsiooni f määramispiirkonnaga X (veelkordne märkuse 2) rakendus). Sama võime öelda parempoolse kompositsiooni kohta, s.t. funktsioonidel $(h \circ g) \circ f$ ja f on sama määramispiirkond X. Seega on mõlemal funktsioonil sama määramispiirkond X.

Teiseks kontrollime, et iga $x \in X$ korral nende funktsioonide poolt saadud kujutised on võrdsed. Olgu x hulga X suvaline element. Siis $[h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h[g[f(x)]]$ ja $[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)[f(x)] = h[g[f(x)]]$.
Järelikult $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. ■

Lause 4. Kui $f: X \to Y$ ja $g: Y \to Z$ on injektiivsed, siis ka $g \circ f: X \to Z$ on injektiivne.

Tõestus. Olgu : $x_1 \neq x_2$. Siis funktsiooni f injektiivsuse tõttu $f(x_1) \neq f(x_2)$. Sellest aga järeldub funktsiooni g injektiivsuse tõttu $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ ehk $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$.

Lause 5. Kui $f: X \to Y$ ja $g: Y \to Z$ on sürjektiivsed, siis ka $g \circ f: X \to Z$ on sürjektiivne.

Tõestus. Valime vabalt $z \in Z$. Siis g sürjektiivsuse tõttu leidub $y \in Y$ nii, et $g(y) = z$. Nüüd f sürjektiivsuse tõttu leidub $x \in X$ nii, et $f(x) = y$. Seega $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, mis ütleb, et $g \circ f$ on sürjektiivne. ■

Järeldus. Kui $f: X \to Y$ ja $g: Y \to Z$ on bijektiivsed, siis ka $g \circ f: X \to Z$ on bijektiivne.

Definitsioon. ***Samasusteisenduseks*** ehk ***identsusteisenduseks*** $I_X: X \to X$ nimetatakse funktsiooni, mis hulga X igale elemendile seab vastavusse sama elemendi, seega $I_X(x) = x,\ x \in X$.

Kui meil on selge, millise hulga samasusteisendust vaadeldakse, siis alumist indeksit ei lisata.

Lause 6. Olgu antud funktsioon $f: X \to Y$, kus X ja Y on hulgad. Siis $f \circ I_X = I_Y \circ f = f$.

Tõestus. Peame näitama, et kõik kolm funktsiooni on võrdsed. Tõestamisel kasutame sama taktikat kui lause 3 tõestamisel. Arutleme kõigepealt selle üle, et miks $f \circ I_X = f$. Kuna funktsiooni $f \circ I_X$ määramispiirkond on sama kui funktsioonil I_X (vt märkus 2) ja funktsiooni I_X määramispiirkond on X, siis järelikult langevad funktsioonide $f \circ I_X$ ja f määramispiirkonnad kokku. Võtame nüüd suvalise elemendi $x \in X$ ja kontrollime $(f \circ I_X)(x) = f\big(I_X(x)\big) = f(x)$. Näeme, et elemendi x kujutis mõlema funktsiooniga on sama. Järelikult $f \circ I_X = f$. Tõestus, et $I_Y \circ f = f$ on analoogne ja seepärast jäetud iseseisvaks tööks. ■

Lause 7. Olgu X ja Y hulgad ning funktsioon $f: X \to Y$ bijektsioon. Siis $f \circ f^{-1} = I_Y$ ja $f^{-1} \circ f = I_X$.

Tõestus. Iseseisvaks tööks.

Ülesanne 1. Tõesta, et kui $f: X \to Y$ ja $g: Y \to Z$ korral $g \circ f = I$, siis f on injektiivne ja g on sürjektiivne.

Lause 8. Kui funktsioonidel $f: X \to Y$ ja $g: Y \to Z$ leiduvad pöördfunktsioonid, siis ka funktsioonil $g \circ f: X \to Z$ leidub pöördfunktsioon ja $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Tõestus. Leidugu funktsioonidel f ja g pöördfunktsioonid. Pöördfunktsioonide olemasolust järeldub, et funktsioonid f ja g on bijektiivsed, s.t. iga $y \in Y$ jaoks leidub parajasti üks $x \in X$ nii, et $f(x) = y$, ja iga $z \in Z$ jaoks leidub parajasti üks $y \in Y$ nii, et $g(y) = z$. Nendest järeldub, et iga $z \in Z$ jaoks leidub parajasti üks $x \in X$ nii, et $(g \circ f)(x) = z$, s.t. järeldub funktsiooni $g \circ f$ bijektiivsus. Bijektiivse funktsiooni $g \circ f$ pöördseos on tema pöördfunktsioon ja meil jääb veel tõestada võrdus. Pöördfunktsiooni definitsioon nõuab, et iga $z \in Z$ korral

$(g \circ f)((g \circ f\ )^{-1}(z)) = z$. Kui paneme võrduse vasakus pooles pöördfunktsiooni kohale $f^{-1} \circ g^{-1}$, rakendame esimesel sammul funktsioonide kompositsiooni assotsiatiivsust ja edasi kaks korda pöördfunktsiooni definitsiooni, saame $(g \circ f)[(f^{-1} \circ g^{-1})(z)] = g(ff^{-1})(g^{-1}(z)) = g\ (g\ ^{-1}(z)) = z$, s.t. oleme näidanud, et $(g \circ f\ )^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■