# 6. PEATÜKK

# TEHTED HULKADEGA

## Hulkade ühend

Nii nagu saame omavahel täisarve kombineerides (liites, lahutades, korrutades ja mõnikord jagades) moodustada uusi täisarve, nii on võimalik kahe hulga ühendamisel moodustada uusi hulki.

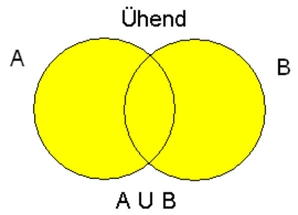
**Definitsioon 1.** Hulkade $A$ ja $B$ ***ühendiks*** ehk summaks nimetatakse hulka $A \cup B$, mille moodustavad kõik elemendid, mis kuuluvad vähemalt ühte hulkadest $A$ ja $B$, st

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \;\vee\; x \in B \}.$$

Sidesõna „või“ kasutatakse siin jällegi mittevälistavas tähenduses, st element $x$ võib kuuluda kas hulka $A$ või hulka $B$ või mõlemasse hulka korraga.

Ühiseid elemente arvestatakse vaid üks kord. Meelde jätmiseks ja segaduste vältimiseks tasub teada, et ühendi sümbol ∪ tuleneb inglisekeelsest sõnast *Union*.

Märgime, et alati $A \subseteq A \cup B$ ja $B \subseteq A \cup B$.




Tehete abil moodustatud hulkadest piltliku ettekujutuse saamiseks kasutatakse nn *Venni diagramme*. Kui hulgad $A$ ja $B$ on kujutatud ringidena, siis värvitud ala joonisel on nende ühend $A \cup B$.

**Näide 1.**

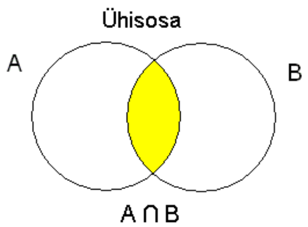
1) Kui $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{a, c, d, e\}$, siis $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$
2) $[0, 1) \cup (0, 1] = [0, 1]$
3) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

## Hulkade ühisosa

**Definitsioon 2.** Hulkade $A$ ja $B$ ***ühisosaks*** ehk ***lõikeks*** nimetatakse hulka $A \cap B$, mille moodustavad kõik elemendid, mis kuuluvad nii hulka $A$ kui hulka $B$, st

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \;\wedge\; x \in B \}.$$

Mistahes hulkade korral $A \cap B \subseteq A$ ja $A \cap B \subseteq B$. Ühisosa on Venni diagrammi abil kujutatud värvitud osana järgmiselt:



**Näide 2.**

1) Kui $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{a, c, d, e\}$, siis $A \cap B = \{a, c\}$.
2) $[0, 1) \cap (0, 1] = (0, 1)$
3) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ ja $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$

**Lause 1.** Iga kahe hulga $A$ ja $B$ korral kehtib $A \cap B \subseteq A \cup B$.

Tõestus. Peame näitama, et kui $x \in A \cap B$, siis $x \in A \cup B$. Seega, olgu antud suvaline element $x \in A \cap B$. Ühisosa definitsiooni kohaselt kuulub element $x$ mõlemasse hulka, nii hulka $A$ kui ka hulka $B$. Üldisust kitsendamata vaatame hulka $A$ (me oleksime sama hästi võinud valida ka hulga $B$). Kuna $x \in A$, siis kahe hulga ühendi definitsiooni kohaselt on õige ka väide, et $x \in A \cup B$. Seega oleme näidanud, et $A \cap B \subseteq A \cup B$. ■

Kui kahel hulgal $A$ ja $B$ ei ole ühiseid elemente, siis $A \cap B = \emptyset$ ning hulki $A$ ja $B$ nimetatakse **lõikumatuteks.** Näiteks hulgad $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{I}$ on lõikumatud.

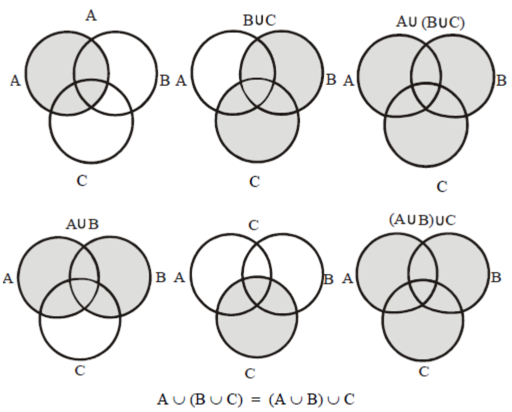
**Ülesanne 1.** Mida saab öelda hulkade $A$ ja $B$ kohta, kui $A \cap B = \emptyset$? Kui $A \cap B = A$? Kui $A \cap B = B$? Joonista vastavad Venni diagrammid.

**Ülesanne 2.** Tõesta, et kui element $x$ ei kuulu kahe hulga $A$ ja $B$ ühendisse, siis ei kuulu ta ka nende hulkade ühisossa.

**Teoreem 1.** Hulkade ühendil ja ühisosal on järgmised omadused:
1) $A \cup A = A,\ A \cap A = A$ (idempotentsus)
2) $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$ (kommutatiivsus)
3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (assotsiatiivsus)
4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributiivsus)

Tõestus. Omadused 1) – 3) järelduvad vahetult definitsioonidest ja on jäetud iseseisvaks tööks. Näitena tõestame teise distributiivsuse võrduse.
Olgu $x \in (A \cap B) \cup C$. Siis $x \in A \cap B$ või $x \in C$. Kui $x \in C$, siis $x \in A \cup C$ ja $x \in B \cup C$, mistõttu $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Kui aga $x \notin C$, siis $x \in A \cap B$ ehk $x \in A$ ja $x \in B$. Siis aga $x \in A \cup C$ ja $x \in B \cup C$, st $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Sellega on näidatud, et $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
Olgu nüüd $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Siis $x \in A \cup C$ ja $x \in B \cup C$. Kui $x \in C$, siis $x \in (A \cap B) \cup C$. Kui aga $x \notin C$, siis $x \in A$ ja $x \in B$ ehk $x \in A \cap B$ ning $x \in (A \cap B) \cup C$. Sellega on näidatud ka $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$ ning ühtlasi tõestatud teine distributiivsuse võrdus. ■

Assotsiatiivsuse omadust saab illustreerida Venni diagrammide abil järgmiselt: (Venni diagrammide joonistamine ei ole sama, mis tõestus!)



## Hulkade vahe

**Definitsioon 3.** Hulkade $A$ ja $B$ ***vaheks*** nimetatakse hulka $A \setminus B$, mille moodustavad elemendid, mis kuuluvad hulka $A$, aga ei kuulu hulka $B$, st

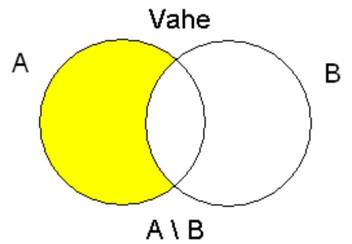
$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \ \land \ \neg(x \in B) \} = \{ x \mid x \in A \ \land \ x \notin B \}.$$

**Näide 3.**

1) Kui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $B = \{2, 4, 6\}$, siis $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$ ja $B \setminus A = \{6\}$.
2) $[0, 1) \setminus (0, 1) = \{0\}$.
3) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$

Esimene nendest näidetest kinnitab ka asjaolu, et üldiselt $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Venni diagrammil on kahe hulga vahe kujutatud järgmiselt:




**Ülesanne 3.** Olgu antud hulgad $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\}$ ja $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq 4\}$.

1) Kirjelda hulki $A, B$ ja $C$ kasutades intervalli tähistusi.
2) Leia $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $B \setminus C$ ja $C \setminus B$.

Lahendus. 1) $A = [-3, 3], B = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ ja $C = [-3, 5]$.
2) $A \cap B = [-3, -2) \cup (2, 3]$, $A \setminus B = [-2, 2]$, $B \cap C = [-3, -2) \cup (2, 5]$, $B \cup C = (-\infty, \infty)$, $B \setminus C = (-\infty, -3) \cup (5, \infty)$ ja $C \setminus B = [-2, 2]$.

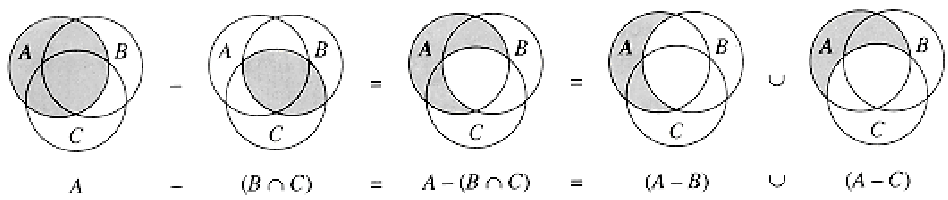
Hulkadega tegelemisel tuleb kasuks järgmise samasuse teadmine, mille tõestus on jäetud iseseisvaks ülesandeks.

**Lause 2.** Olgu $A, B$ ja $C$ hulgad. Siis

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \text{ ja } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Tõestus. Iseseisvaks tööks.

Lauses 2 antud teist seost saab Venni diagrammi abil illustreerida järgmiselt:

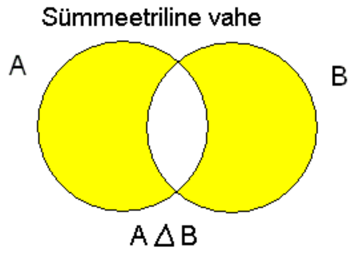



## Hulkade sümmeetriline vahe

**Definitsioon 4.** Hulkade $A$ ja $B$ ***sümmeetriliseks vaheks*** nimetatakse hulka $A \triangle B$, mille moodustavad elemendid, mis kuuluvad parajasti ühte kahest hulgast $A$ ja $B$:

$$A \triangle B = \{x \mid x \in A \ \land \ \neg(x \in B) \lor \neg(x \in A) \ \land \ x \in B\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Sümmeetrilist vahet kujutab järgmine Venni diagramm:




**Näide 4.** Kui $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{a, c, d, e\}$, siis $A \triangle B = \{b, d, e\}$.

**Lause 3.** Olgu $A$ ja $B$ hulgad. Siis $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. (Vaata ning võrdle seda tulemust sümmeetrilist vahet illustreeriva Venni diagrammiga!)

Tõestus. Peame tõestama, et kaks hulka $A \triangle B$ ja $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ on omavahel võrdsed. Selleks peame demonstreerima mõlemapoolseid sisalduvusi ehk peame näitama, et $A \triangle B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ja $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \triangle B$.
Näitame esiteks, et kui $x \in A \triangle B$, siis $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Seega, olgu $x \in A \triangle B$. Hulkade sümmeetriline vahe on defineeritud ühendi kaudu, seega $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, mis omakorda tähendab, et $x \in A \setminus B$ või $x \in B \setminus A$. Kuna me ei tea, kumb kahest olukorrast aset leiab, vaatleme mõlemat juhtu eraldi. Seega jaguneb meie tõestus kahe alamjuhu vahel ning mõlemal korral peame näitama, et $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

i. Olgu $x \in A \setminus B$, mis tähendab, et $x \in A$, kuid $x \notin B$. Kuna $x \in A$, siis võime öelda, et $x \in A \cup B$. Kuna $x \notin B$, siis ei ole element $x$ mõlemas hulgas, mis tähendab, et $x \notin A \cap B$. Kokkuvõtvalt $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
ii. Olgu $x \in B \setminus A$, mis tähendab, et $x \in B$, kuid $x \notin A$. Sarnaselt eelneva aruteluga võime väita, et $x \in A \cup B$, kuid $x \notin A \cap B$. Seega taas $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Teiseks peame näitama sisalduvust $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \triangle B$. Oletame, et $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Selle kohaselt $x \in A \cup B$, kuid $x \notin A \cap B$. Eesmärgiks on näidata, et $x \in A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ehk meil oleks vaja näidata, et $x \in A \setminus B$ või $x \in B \setminus A$. Milline informatsioon meil hetkel teada on? Kuna $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, siis $x$ kuulub ühte hulkadest $A$ või $B$, aga mitte mõlemasse. Ehk teisisõnu, kas $x \in A$ ja $x \notin B$ või et $x \in B$, kuid $x \notin A$. See aga tähendab, et $x \in A \setminus B$ või $x \in B \setminus A$, just täpselt, mida soovisimegi! Seega $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$. Kuna mõlemapoolsed sisalduvused on näidatud, oleme tõestanud, et $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. ■

Lisaks just tõestatud Lausele 3 on sümmeetrilisel vahel veel järgmised omadused.

**Lause 4.**
1) $A \triangle B = B \triangle A$ (kommutatiivsus);
2) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ (assotsiatiivsus);
3) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$ (distributiivsus);
4) $A \triangle B = A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset$.

**Tõestus.** Iseseisev töö.

**Ülesanne 4.** Kujuta Venni diagrammil hulgad $A \setminus (B \cup C)$, $A \cap (B \setminus C)$, $(A \setminus B) \setminus C$, $A \setminus (B \setminus C)$.

Koolimatemaatikas tegeletakse näiteks naturaalarvude hulgaga või täisarvude hulgaga, kusjuures uurimise objektideks on nii nende hulkade elemendid ja osahulgad kui ka elementide vahel defineeritud seosed, tehted ja funktsioonid. Hulgateoorias nimetatakse sellist hulka, mille uurimise objektideks on peamiselt selle hulga elemendid ja osahulgad ning nende vahel defineeritud seosed, tehted ja funktsioonid, **universaalhulgaks** ja tähistatakse tähega U.

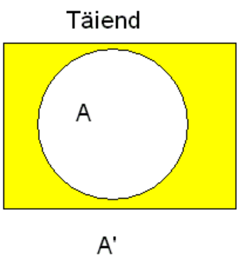
## Hulga täiend

Kui tegeldakse mingi universaalse hulga $U$ elementidega, siis võivad iga konkreetse hulga $A \subseteq U$ puhul huvi pakkuda ka sellised universaalse hulga elemendid, mis hulka $A$ ei kuulu. Näiteks, kui aritmeetikas on universaalseks hulgaks naturaalarvude hulk, siis koos paarisarvude hulgaga pakuvad huvi ka paaritud arvud.

**Definitsioon 5.** Hulga $A$ ***täiendiks*** $A'$ (või $\bar{A}$) nimetatakse hulka, mille moodustavad kõik need universaalse hulga elemendid, mis ei kuulu hulka $A$:

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\} = \{x \in U \mid \neg(x \in A)\} = U \setminus A.$$

Hulga $A$ täiendit saab Venni diagrammi abil kujutada järgmiselt:




**Näide 5.**

1) Kui $U = \mathbb{Z}$, siis $\mathbb{N}' = \{0, -1, -2, \dots\}$.
2) Kui $U = \mathbb{R}$, siis $\mathbb{Q}' = \mathbb{I}$.

**Lause 5.** Hulga täiendi moodustamisel kehtivad järgmised omadused:

1) $\emptyset' = U$,
2) $U' = \emptyset$,
3) $A \cup A' = U$,
4) $A \cap A' = \emptyset$,
5) $A'' = A$,
6) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
7) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Tõestus. Omadused 1) – 5) järelduvad vahetult täiendi definitsioonist ja on jäetud iseseisvaks tööks. Omadusi 6) ja 7) nimetatakse ***de Morgani valemiteks***. Antud valemid väljendavad ühendi ja ühisosa duaalsust täiendi võtmise suhtes. Meie tõestame vaid de Morgani valemi 7). Valemi 6) tõestus on analoogne.

7) Kahe hulga võrdsuse näitamiseks peame näitama mõlemad sisalduvused, esiteks $(A \cap B)' \subseteq A' \cup B'$ ja teiseks $A' \cup B' \subseteq (A \cap B)'$. Olgu $x \in (A \cap B)'$. Siis $x \notin A \cap B$. See aga tähendab, et $x \notin A$ või $x \notin B$ või $x$ ei kuulu kumbagi hulka. Seega peab kehtima, et $x \in A'$ või $x \in B'$ ehk teiste sõnadega, $x \in A' \cup B'$.

Vastupidiselt, olgu nüüd $x \in A' \cup B'$. Siis $x \in A'$ või $x \in B'$, mis omakorda tähendab, et $x \notin A$ või $x \notin B$. Kuna $x$ ei kuulu vähemalt ühte hulkadest $A$ või $B$, siis ta ei saa olla nende ühisosas ehk $x \notin A \cap B$. See on aga sama mis $x \in (A \cap B)'$. Seega saame mõlema pidisest arutelust järeldada, et hulgad $(A \cap B)'$ ja $A' \cup B'$ on võrdsed. ■

Hulkade $A$ ja $B$ vahet $A \setminus B$ nimetatakse mõnikord ka **hulga $B$ täiendiks hulga $A$ suhtes**. Põhjuse selleks annab definitsioon $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$.

## Tehete järjekord

Lugedes ühisosa võtmist korrutamisele sarnaseks ja teisi binaarseid tehteid liitmise taolisteks teheteks, kasutame sellist prioriteedijärjekorda:

a. täiend,
b. ühisosa,
c. ühend, vahe, sümmeetriline vahe.

Neli hulgateoreetilist tehet (ühend, ühisosa, vahe ja sümmeetriline vahe) on omavahel seotud selles mõttes, et igaühte neist saab väljendada teiste kaudu. De Morgani seadustest järeldub lisaks nn ***duaalsuse printsiip***, mis tähendab, et etteantud hulkadest, nt hulkadest X, Y, Z saab moodustada uusi hulki tehete $\cap$, $\cup$ ja ' abil. Seejuures igast tõesest võrdusest niimoodi moodustatud hulkade vahel saame uue, samuti tõese võrduse, kui asendame kõik hulgad nende täiendhulkadega ning tehted $\cap$ ja $\cup$ vastavalt tehetega $\cup$ ja $\cap$.

Näiteks võime kirjutada $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ ning eespool oli juba antud esitus $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

**Ülesanne 5.** 1) Avalda $A \cup B$ ja $A \setminus B$ tehete $\cap$ ja $\vartriangle$ abil.
2)Avalda $A \cap B$ ja $A \setminus B$ tehete $\cup$ ja $\vartriangle$ abil.
3) Avalda $A \cup B$ tehete $\setminus$ ja $\vartriangle$ abil.

**Ülesanne 6.** Tõesta, et $A \cup B$ ei ole võimalik avaldada tehete $\cap$ ja $\setminus$ abil ning $A \setminus B$ ei ole võimalik avaldada tehete $\cup$ ja $\cap$ abil.

## Tehete omadused - kokkuvõte

Oled kindlasti märganud, et avaldiste lihtsustamisel ja võrdlemisel on kasulik teada tehete algebralisi omadusi. Hulgateoreetilisi tehteid sisse tuues esitasime igas alapeatükis mõned lihtsamad omadused, mis tulenesid otseselt tehete definitsioonidest. Näiteks said sa teada, et ühend, ühisosa ja sümmeetriline vahe on kommutatiivsed tehted, aga vahe ei ole (too kontranäide!).

Mõned hulgateooria samasused saame lausearvutusest otse üle võtta. Ühend, ühisosa ja täiend on defineeritud vastavalt komponenthulkadesse kuulumise tingimuste disjunktsiooni, konjunktsiooni ja eituse abil. Seetõttu on neil tehetel nii ühekaupa kui ka omavahelistes seostes samad omadused, mis vastavatel lausearvutuse tehetel.

Nagu reaalarvude ja lausearvutuse jaoks, kehtivad ka hulgateoreetiliste tehete kohta mitmed keerulisemad samasused, kus esineb korraga mitu tehet. Peale idempotentsuse, kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse kehtivad mõned distributiivsuse seadused, ühtesid tehteid saab avaldada teiste kaudu jne. Esitame siin kokkuvõtvalt olulisemad samasused, millega mõnedest sa juba eespool tutvusid ja mida sagedasti kasutatakse.

1. Nagu lausearvutuses disjunktsiooni ja konjunktsiooni vahel, kehtivad ka ühendi ja ühisosa vahel kaks distributiivsuse seadust. Lisaks jaotub ühisosa võtmine ka hulkade vahele ja sümmeetrilisele vahele.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C), \quad A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

2. Neelduvuse seadused

$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A.$$

3. De Morgani seadused

$$(A \cap B)' = A' \cup B', \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

4. Vahe ja sümmeetriline vahe avalduvad ühisosa, ühendi ja täiendi kaudu järgmiselt:

$$A \setminus B = A \cap B', \quad A \triangle B = A \cap B' \cup B \cap A'$$

5. Vahe seosed teiste tehetega:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B),$$

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A),$$

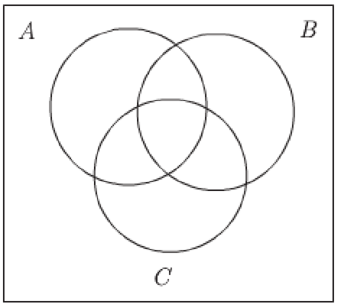
$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

6. Sümmeetriline vahe avaldub sümmeetriliselt $A$ ja $B$ suhtes:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

## Lõplikud ja lõpmatud ühendid ja ühisosad

Tihti seisame silmitsi olukorraga, kus hulgatehteid kasutades tuleb omavahel ühendada kolm või rohkem hulka. Tüüpiline Venni diagramm kolme hulga jaoks näeb välja selline:




Kolme hulga ühend defineeritakse kui $A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \lor x \in B \lor x \in C\}$. Jällegi, kui tahame, et element $x$ kuuluks kolme hulga ühendisse, peab ta kuuluma vähemalt ühte nendest hulkadest.

**Ülesanne 7.** Oletame, et $x \in A \cup B \cup C$, kuid $x \notin A \cap B \cap C$. Kui mitmesse hulka saab element $x$ korraga kuuluda?

Kahe hulga ühendi ja ühisosa definitsioone saab üldistada

- $n$ hulga juhule ($n \geq 1$),
- hulkade jadale $\{A_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots\}$
- ja koguni suvalisele hulkade hulgale või süsteemile.

Need üldised definitsioonid rakendavad sama ideed, nagu definitsioonid kahe komponendi puhul: ühendi moodustavad objektid, mis kuuluvad vähemalt ühte liidetavatest hulkadest, ja ühisosa need objektid, mis kuuluvad igasse vaadeldavasse hulka.

Nii saame $n$ hulga ($n \geq 1$) ühendi ja ühisosa defineerida võrdustega

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\},$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}.$$

Hulkade jada $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ühendi ja ühisosa saame defineerida võrdustega

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = \{x \mid leidub\ i \geq 1, nii\ et\ x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots = \{x \mid iga\ i \geq 1\ korral\ x \in A_i\}.$$

Kui $\{A_\alpha\}$ on hulkade $A_\alpha$ süsteem, siis defineerime $\bigcup_\alpha A_\alpha$ kui kõigi selliste elementide hulga, mis kuuluvad vähemalt ühte hulkadest $A_\alpha$ ning $\bigcap_\alpha A_\alpha$ kui kõigi selliste elementide hulka, mis kuuluvad igasse hulka $A_\alpha$. Seega

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = \{x \mid \exists \alpha \text{ nii, et } x \in A_\alpha\} \text{ ja } \bigcap_\alpha A_\alpha = \{x \mid \forall \alpha \text{ korral } x \in A_\alpha\}.$$

**<u>Näide 6.</u>**

1) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) = \mathbb{R}$.
2) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$.
3) $\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} (a, b) = \mathbb{R}$.
4) Iga hulga $A$ korral $\bigcup_{a\in A} \{a\} = A$.

De Morgani seadused on üldistatavad mis tahes (isegi lõpmatu) arvu hulkade jaoks. Näiteks suvalistele ühisosadele ja ühenditele üldistuvad need järgmiselt:

$$\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)' = \bigcap_\alpha A'_\alpha, \quad \left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)' = \bigcup_\alpha A'_\alpha.$$

## Hulkade otsekorrutis

**<u>Definitsioon 5.</u>** Hulkade $A$ ja $B$ ***otsekorrutiseks*** (või ***kartesiuse*** ehk ***Descartes'i korrutiseks***) nimetatakse kõigi paaride $(a, b)$ hulka, kus $a \in A$, $b \in B$, seejuures elementide järjekord paarides on oluline.

Hulkade $A$ ja $B$ otsekorrutist tähistatakse $A \times B$. Seega

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

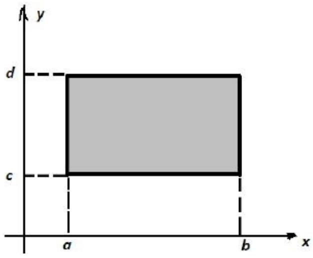
Öeldakse ka, et $A \times B$ on kõigi järjestatud paaride $(a, b)$ hulk, kus $a \in A$, $b \in B$. Sõna "*järjestatud*" tähendab siin asjaolu, et kaht paari loetakse võrdseks siis ja ainult siis, kui nende vastavad elemendid on võrdsed, st

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c\ ja\ b = d).$$

Otsekorrutist $A \times A$ nimetatakse ka hulga $A$ (otse)***ruuduks*** ja tähistatakse $A^2$. Meile tuttavana võime ka koordinaattasandit vaadelda reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ ruuduna: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

**Näide 7.**

Ristkülikut $E = \{(x;\ y) :\ a \leq x \leq b\ ja\ c \leq y \leq d\}$ võime esitada lõikude $A = [a, b]$ ja $B = [c, d]$ otsekorrutisena $E = [a, b] \times [c, d]$.




**Näide 8.** Kui $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ja $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, siis otsekorrutist $A \times B = \{(a, 1), \dots, (h, 8)\}$ võib vaadelda kui malelaua ruudustikku (males kirjutatakse lühemalt $a1, \dots, h8$)

Peaks olema pikemata selge, et hulkade otsekorrutamine pole üldjuhul kommutatiivne, s.o. kui $A \neq B$, siis $A \times B \neq B \times A$. Näiteks $[1, 3] \times [4, 5] \neq [4, 5] \times [1, 3]$ (tee joonis!).

**Lause 6.** Hulkade $A, B, C$ ja $D$ korral, kui $A \subseteq B$ ja $C \subseteq D$, siis $A \times C \subseteq B \times D$.

Arutelu. Esiteks peame mõistma, et väide $A \times C \subseteq B \times D$ on ümber kirjutatav „Kui …, siis …“ vormis ehk kujul „Kui $w \in A \times C$, siis $w \in B \times D$“. Seega, et näidata, et üks hulk on teise hulga alamhulk, tuleb esimesest hulgast võtta üks suvaline element ja näidata, et see sama element peab kuuluma ka teise hulka. Järgnevalt on aga vaja aru saada, milliste elementidega me antud juhul tegeleme. Milline element on $w$? Kuna $w$ kuulub hulka $A \times C$, peab ta olema järjestatud paar, ehk kujul $(a, c)$, kus $a \in A$ ja $c \in C$.

Tõestus. Olgu $A, B, C$ ja $D$ hulgad selliselt, et $A \subseteq B$ ja $C \subseteq D$. Peame tõestama, et $A \times C \subseteq B \times D$. Seega, olgu $w$ element hulgast $A \times C$. Peame näitama, et $w \in B \times D$. Kuna $w \in A \times C$, siis saame w kirjutada kujul $(a, c)$, kus $a \in A$ ja $c \in C$ (otsekorrutise definitsiooni põhjal). Kuna element $a \in A$ ja hulk $A \subseteq B$, siis ka $a \in B$. Sarnaselt, kuna $c \in C$ ja $C \subseteq D$, siis $c \in D$. Kasutades uuesti otsekorrutise definitsiooni, võime väita, et $(a, c) \in B \times D$, mis aga tähendab seda, et $w \in B \times D$.
Oleme seega näidanud, et iga hulga $A \times C$ element on ka hulga $B \times D$ element. Osahulga definitsiooni kohaselt tähendab see, et $A \times C \subseteq B \times D$. ■

**Ülesanne 8.** Tõestada, et kui $A \neq \emptyset$ ja $B \neq \emptyset$, siis $A \times B = B \times A$ parajasti siis, kui $A = B$.

**Teoreem 2.** Hulkade $A, B, C$ ja $D$ jaoks kehtivad järgmised võrdused:

1) $A \times \emptyset = \emptyset,\ \ \emptyset \times A = \emptyset$;
2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
3) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
4) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;
5) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$;
6) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Tõestus. Kontrollime võrduse 2) samaväärsuste ahela abil:

$$(a, b) \in A \times (B \cup C) \quad \Leftrightarrow \quad a \in A\ \wedge\ b \in B \cup C\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a \in A\ \wedge (b \in B \vee b \in C)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (a \in A \ \wedge b \in B) \vee (a \in A \ \wedge b \in C) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (a,b) \in A \times B \ \vee \ (a,b) \in A \times C \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C).$$

Ülejäänud võrduste kontroll teosta iseseisvalt. ■

Kahe hulga otsekorrutise mõiste on vahetult üldistatav mistahes lõplikule arvule hulkadele. Tähistame sümboliga $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $n$-järjendit s.t $n$ elemendi järjestatud hulka. Hulkade $A_1, \dots, A_n$ ***otsekorrutiseks*** $A_1 \times \dots \times A_n$ nimetatakse hulka kõigist $n$-järjenditest, mille elemendid on vastavatest hulkadest, st

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Otsekorrutist $\underbrace{A \times \dots \times A}_{n}$ tähistatakse $A^n$.

Kui hulgas $A$ on $m$ elementi ja hulgas $B$ on $n$ elementi, siis hulgas $A \times B$ on $m \cdot n$ elementi. Üldisemalt, kui $A_1$ koosneb $m_1$ elemendist, …, $A_n$ koosneb $m_n$ elemendist, siis $A_1 \times \dots \times A_n$ koosneb $m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ elemendist.

__**Ülesanne 9.**__ Tõestada, et kui $A_i \neq \emptyset, \ B_i \neq \emptyset, \ i = 1, \dots, n$, siis

1) $A_1 \times \dots \times A_n \subseteq B_1 \times \dots \times B_n$ parajasti siis, kui $A_1 \subseteq B_1, \dots, A_n \subseteq B_n$;
2) $A_1 \times \dots \times A_n = B_1 \times \dots \times B_n$ parajasti siis, kui $A_1 = B_1, \dots, A_n = B_n$.