3. PEATÜKK

LAUSETE TEISENDAMINE

Järeldamine

Järeldamine ehk arutlus on mõtlemisprotsess, mille käigus ühele või mitmele otsustusele tuginedes jõutakse uue otsustuseni. Järeldamise tulemust nimetatakse ***järelduseks***, otsustusi aga, millele tuginetakse – ***eeldusteks***. Kui kõik eeldused on tõesed ning deduktiivne järeldus on õigesti tehtud, siis on ka järeldus tõene. Seega, loogika reeglite abil uute väidete tuletamine on ühtlasi nende väidete tõestamine. Meie uurime käesolevalt küsimust, millal on lausearvutuse valem tõene, kui mingite teiste lausearvutuse valemite tõesus on teada.

Näitena vaatame kolme lauset:

1. *Kui täna on 16. september, siis homme on 17. september.*
2. *Täna on 16. september.*
3. *Homme on 17. september.*

Võime öelda, et lause 3 järeldub lausetest 1 ja 2. Samuti, olles õppinud, et lause ja tema pöördvastandlause on loogiliselt samaväärsed, võime väita, et lausest *„Kui vihma sajab, siis katused on märjad"* järeldub *„Kui katused ei ole märjad, siis vihma ei saja"*.

Definitsioon 1. Ütleme, et valemitest $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ ***järeldub*** valem $\mathcal{G}$, kui igal neis valemeis esinevate muutujate väärtustusel, millel $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ on tõesed, on ka $\mathcal{G}$ tõene.

Asjaolu, et valemitest $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ järeldub valem $\mathcal{G}$, tähistatakse kirjutisega

$$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n \vDash \mathcal{G},$$

kus sümbolit $\vDash$ loetakse sõnaga „*järeldub*".

Eeldused on alati vasakul pool sümbolit $\vDash$. Kui vasakul on komadega eraldatud mitu valemit, siis on mitu eeldust. Paremal pool $\vDash$ sümbolit on järeldus. Mõnikord kasutatakse sõna *järeldus* ka tähenduses *järeldamine*.

Järeldumist saab kindlaks teha tõeväärtustabeli abil. Valime tõeväärtustabelist välja read, milles valemid $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ on kõik tõesed, ja selgitame, kas nendes ridades on ka valem $\mathcal{G}$ tõene. Kui on, siis järeldumine kehtib; kui aga leidub rida, milles valemid $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ on tõesed, kuid valem $\mathcal{G}$ on väär, siis oleme leidnud väärtustuse, mis väidetava järeldumise ümber lükkab.

Näide 1. Teha kindlaks, kas valemitest $\neg(X \wedge Y)$ ja $Y \Rightarrow X$ järeldub valem $\neg Y$.

Koostame tõeväärtustabeli

X	Y	$\neg(X \wedge Y)$		$Y \Rightarrow X$	$\neg Y$
1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1

Kaks esimest valemit on mõlemad tõesed ainult teises ja neljandas reas. Et ka kolmas valem on nendes ridades tõene, siis järeldumine kehtib ehk $\neg(X \wedge Y), Y \Rightarrow X \vDash \neg Y$.

Näide 2. Näidata, et valemitest $X \Rightarrow Y$ ja $Y \Rightarrow Z$ järeldub valem $X \Rightarrow Z$.

Seekord me tõeväärtustabelit välja ei kirjuta, vaid kontrollime järeldumise tõesust arutluse teel. Kõigepealt märkame, et ainukene olukord, kus kahest esimesest valemist kolmandat valemit järelduda ei saa on siis, kui mingil väärtustusel eeldused (s.t. kaks esimest valemit) on tõesed, kuid väide (s.t. kolmas valem) on väär. Teiste sõnadega, nii $X \Rightarrow Y$ on tõene (ehk väärtusega 1), kui ka $Y \Rightarrow Z$ on tõene (ehk väärtusega 1), kuid $X \Rightarrow Z$ on väär (ehk väärtusega 0). Tuletades meelde, et implikatsioon saab väär olla ainult siis, kui eeldus on tõene ja väide väär, peab meie juhul järelikult kehtima, et X on tõene (ehk väärtusega 1) ja Z on väär (ehk väärtusega 0). Esimese valemi $X \Rightarrow Y$ tõesusest järeldub seega, et Y peab olema tõene (ehk väärtusega 1), kuid teine valem $Y \Rightarrow Z$ ei saa nüüd enam kehtida, sest Y on tõene ja Z on väär.

Näide 3. Olgu antud lausemuutujad, mille tähendus on järgmine: X = *„Kiiruste liitmisseadus kehtib"*, Y = *„Valgus liigub kinnistähtedega seotud taustsüsteemis kõigis suundades sama kiirusega"* ning Z = *„Valgus liigub Maal kõigis suundades sama kiirusega"*.

Kehtib valem $X \wedge Y \Rightarrow \neg Z$ ehk tekstikujul *„Kui kiiruste liitmisseadus kehtib ja valgus liigub kinnistähtedega seotud taustsüsteemis kõigis suundades sama kiirusega, siis pole Maal valguse liikumiskiirus kõigis suundades sama"*, sest Maa ilmselt liigub kinnistähtedega seotud taustsüsteemi suhtes. Peale selle kehtib valem Y, sest see on Einsteini relatiivsusteooria põhipostulaat, ja valem Z, sest see järeldub Michelson-Morley katsest (1887). Vaatleme niisiis kolme valemit

$$X \wedge Y \Rightarrow \neg Z, \quad Y \quad \text{ja} \quad Z.$$

Eeldame, et kõik need valemid on tõesed. Kuna Z on tõene, siis $\neg Z$ on väär ning esimeses valemis implikatsiooni tõesuse kehtimiseks peab osavalem $X \wedge Y$ olema väär. Et aga Y on tõene, siis peab X olema väär ja seega $\neg X$ tõene. Sellega oleme näidanud, et toodud kolmest valemist järeldub valem $\neg X$ ehk sõnades *„Kiiruste liitmisseadus ei kehti"*.

Näide 4. Kontrollida, et kehtivad järgmised (kõige lihtsamad) lauseloogika järeldused:

1) *Modus ponens* (ld *'jaatav moodus'*): $X \Rightarrow Y,\ X \ \vDash\ Y$
2) *Modus tollens* (ld *'eitav moodus'*): $X \Rightarrow Y,\ \neg Y \ \vDash\ \neg X$

Toome veel ühe näite lausearvutuse vahendite kasutamisest arutluse õigsuse kontrollimisel.

Näide 5. Kontrollige, kas järgmine arutlus on õige.

> *Kui inimene on andekas ja auahne, siis ta teeb karjääri. Järelikult: kui inimene on auahne, kuid karjääri ei tee, siis ta ei ole andekas.*

Kõigepealt paneme antud arutluse kirja loogiliste valemite abil: $A \wedge B \Rightarrow C \ \vDash\ B \wedge \neg C \Rightarrow \neg A$. Antud arutlus on õige siis, kui selline järeldus on tõestatav. Kuna ka paremal pool $\vDash$ märki on implikatsioon, alustame tegelikult kahe eeldusega: $A \wedge B \Rightarrow C$ ja $B \wedge \neg C$, ning eesmärgiks on näidata, et nendest järeldub $\neg A$. Oletame taas vastuväiteliselt, antud arutelu andekuse ja auahnuse kohta on väär. See saab juhtuda vaid siis, kui eeldused on tõesed ja järeldus $\neg A$ on väär. Sellest järelduvalt peab A olema tõene. Teisest eelduse valemist saame, et kuna $B \wedge \neg C$ on tõene, siis peab B olema tõene ning ka $\neg C$ olema tõene, ehk C peab olema väär. Nüüd saime aga vastuolu eelduse esimese valemiga $A \wedge B \Rightarrow C$, sest see ei saa leitud $A,\ B$ ja C väärtustel enam tõene olla.

Teine võimalus järeldumist kindlaks teha on kasutada alljärgnevat teoreemi, mis taandab järeldumise kontrollimise üheainsa valemi samaselt tõesuse kontrollimisele. Niisugust lähenemist kasutatakse eriti siis, kui valemit analüüsitakse arvutil, sest lausearvutuse standardülesannete, nagu samaselt tõesuse kontroll, lahendamiseks on koostatud hulgaliselt tavalisi ja heuristilisi efektiivseid algoritme.

Teoreem 1. Valemitest $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ järeldub valem $\mathcal{G}$ parajasti siis, kui valem $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene.

Tõestus. Kui valemitest $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ järeldub valem $\mathcal{G}$, siis neil väärtustustel, millel valemid $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ on tõesed, on ka valem $\mathcal{G}$ tõene, mistõttu $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ on tõene. Väärtustustel, millel mõni valemitest $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ on väär, on valem $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ tõene seetõttu, et implikatsiooni eesliige on väär.
Ümberpöördult, kui valem $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene, siis igal väärtustusel, millel valemid $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ on tõesed, on ka $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_n$ tõene, mistõttu valem $\mathcal{G}$ on samuti tõene. ■

Näide 6. Kordame uuesti näites 1 toodud ülesannet, kus pidi kindlaks tegema, kas valemitest $\neg(X \wedge Y)$ ja $Y \Rightarrow X$ järeldub valem $\neg Y$. Kasutades teoreemi 1, kontrollime seega, kas valem $\neg(X \wedge Y) \wedge (Y \Rightarrow X) \Rightarrow \neg Y$ on samaselt tõene. Selleks koostame vastava tõeväärtustabeli:

X	Y	$\neg(X \wedge Y)$		$\wedge$	$(Y \Rightarrow X)$	$\Rightarrow$	$\neg Y$
1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1

Viimasest implikatsiooni veerust näeme, et valem on samaselt tõene ja seega järeldus kehtib.

Sarnaselt saab näites 2 antud järeldumist kontrollida valemi $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Z)$ samaselt tõesust näidates, jne.

Samaväärsus

Koostades valemite $\neg(X \wedge Y)$ ja $\neg X \vee \neg Y$ tõeväärtustabelid, näeme, et valemite tõeväärtusveerud langevad kokku:

X	Y	$\neg(X \wedge Y)$		$\neg X \vee \neg Y$		
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1

Igapäevase keele abil on lihtne veenduda, et need valemid väljendavad ühte ja sama: esimene valem tähendab *„Pole nii, et laused X ja Y on mõlemad tõesed“* ning teine valem *„Vähemalt üks lausetest X või Y on väär“*. Ühesuguse tõeväärtusveeruga valemeid ei ole võimalik sisu järgi teineteisest eristada, ehkki neil võib olla erinev väliskuju. Niisugustest kaalutlustest lähtudes anname järgmise definitsiooni.

<u>**Definitsioon 2.**</u> Valemeid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ nimetatakse ***samaväärseteks***, kui nende tõeväärtused on võrdsed igal neis valemeis esinevate muutujate väärtustusel.

Asjaolu, et valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed, märgib kirjutis $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$.

Samaväärsete valemite puhul järeldub esimesest valemist teine ja teisest esimene, s.t., järeldus on mõlemapidine. Eeldusest järeldub tulem ja vastupidi.

<u>**Näide 7.**</u> Näitame, et valemid $\neg(X \vee Y)$ ja $\neg X \wedge \neg Y$ on samaväärsed. Selleks võrdleme nende tõeväärtusi kasutades tõeväärtustabelit.

X	Y	$\neg(X \vee Y)$		$\neg X \wedge \neg Y$		
1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1

Seega näeme, et kehtivad samaväärsused $\neg(X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$ ja $\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$. Neid samaväärsusi nimetatakse ***de Morgani seadusteks***.

Samaväärsed võivad olla ka erinevaid muutujaid sisaldavad valemid. Näiteks, kui

$$\mathcal{F} = (Y \Rightarrow X) \wedge (\neg Y \Rightarrow X) \quad \text{ja} \quad \mathcal{G} = (X \vee Z) \wedge (X \vee \neg Z),$$

siis $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$ (kontrolli!). Kõik samaselt tõesed valemid on üksteisega samaväärsed, sest sellised valemid on igal väärtustusel tõesed. Analoogilisel põhjusel on omavahel samaväärsed kõik samaselt väärad valemid.

Loogiliselt samaväärsete valemitena esitatud väiteid võib teatud piires pidada sama mõtte või tähendusega väideteks, sest ükskõik, milline maailm ka poleks, kui üks neist väidetest on tõene, on seda paratamatult ka teine ning vastupidi.

<u>**Teoreem 2.**</u> Valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed parajasti siis, kui valemist $\mathcal{F}$ järeldub valem $\mathcal{G}$ ja valemist $\mathcal{G}$ järeldub valem $\mathcal{F}$.

<u>Tõestus.</u> Kui $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$, siis suvalisel valemites $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ esinevate lausemuutujate väärtustusel on need valemid kas mõlemad tõesed või mõlemad väärad. Seepärast kehtivad seosed $\mathcal{F} \vDash \mathcal{G}$ ja $\mathcal{G} \vDash \mathcal{F}$.
Ümberpöördult, kui viimased seosed kehtivad, siis ei saa leiduda väärtustust, kus $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ tõeväärtused oleksid erinevad, mistõttu $\mathcal{F} \equiv \mathcal{G}$. Seega, valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed parajasti siis, kui valemist $\mathcal{F}$ järeldub valem $\mathcal{G}$ ja valemist $\mathcal{G}$ järeldub valem $\mathcal{F}$. ■

Niisugust omadust kasutatakse tihti valemite samaväärsuse tõestamisel.

Kahe valemi samaväärsuse kontrolli saab samuti taandada teatava ühe valemi samaselt tõesuse kontrollile, nii nagu nägime järeldumise puhul.

<u>**Teoreem 3.**</u> Valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed parajasti siis, kui valem $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene.

<u>Tõestus.</u> Eeldame, et valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on samaväärsed. Valime valemites $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ esinevatele muutujatele suvalise väärtustuse. Kui valitud väärtustusel kehtib, et valem $\mathcal{F}$ on tõene (väärtusega 1) ja valem $\mathcal{G}$ on tõene (väärtusega 1), siis $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ on samuti tõene (väärtusega 1), kui aga valitud väärtustusel kehtib, et valem $\mathcal{F}$ on väär (väärtusega 0) ja valem $\mathcal{G}$ on väär

(väärtusega 0), siis jällegi $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ on tõene (ehk väärtusega 1). Järelikult on valem $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ tõene sõltumata väärtustusest ehk samaselt tõene.
Eeldame nüüd ümberpöördult, et valem $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene. Valime selles valemis esinevatele muutujatele suvalise väärtustuse. Et ekvivalents on tõene, siis kas mõlemad $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on tõesed või mõlemad $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on väärad. See tähendab, valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ tõeväärtused on suvalisel väärtustusel samad. Vastavalt definitsioonile on valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ samaväärsed. ■

Lausearvutuse põhisamaväärsused

On olemas hulk ***lausearvutuse põhisamaväärsusi***, mida kasutatakse lausearvutuses teistest rohkem. Tähtsamad neist on järgmised.

1) Idempotentsuse seadused:
   a) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$,
   b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$.

2) Kommutatiivsuse seadused:
   a) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \equiv \mathcal{G} \wedge \mathcal{F}$,
   b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$.

3) Assotsiatiivsuse seadused:
   a) $(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \wedge \mathcal{H} \equiv \mathcal{F} \wedge (\mathcal{G} \wedge \mathcal{H})$,
   b) $(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \vee \mathcal{H} \equiv \mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$.

4) Distributiivsuse seadused:
   a) $\mathcal{F} \wedge (\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) \equiv \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vee \mathcal{F} \wedge \mathcal{H}$,
   b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \wedge \mathcal{H} \equiv (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{F} \vee \mathcal{H})$.

5) Neelamisseadused:
   a) $\mathcal{F} \wedge (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \mathcal{F}$,
   b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$.

6) De Morgani seadused (duaalsus):
   a) $\neg(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \vee \neg\mathcal{G}$,
   b) $\neg(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G}$.

7) Kahekordse eituse seadus: $\neg\neg\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$.

8) Liikmete elimineerimise reeglid, kus T on suvaline samaselt tõene valem ja V on suvaline samaselt väär valem:
   a) $\mathcal{F} \wedge T \equiv \mathcal{F}$,
   b) $\mathcal{F} \vee T \equiv T$,
   c) $\mathcal{F} \wedge V \equiv V$,
   d) $\mathcal{F} \vee V \equiv \mathcal{F}$.

9) Implikatsiooni avaldis konjunktsiooni ja disjunktsiooni kaudu:
   a) $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \equiv \neg(\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G})$,
   b) $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$.

10) Konjunktsiooni ja disjunktsiooni avaldis implikatsiooni kaudu:
   a) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \equiv \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$,

b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$.

11) Ekvivalentsi avaldis teiste tehete kaudu:

a) $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} \equiv \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vee \neg\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G}$,

b) $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} \equiv (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F})$.

Kõiki neid samaväärsusi saab kontrollida tõeväärtustabeli abil. Näiteks samaväärsused 9a) ja 9b) tulenevad järgmisest tabelist:

$\mathcal{F}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$	$\neg(\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G})$		$\neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$
1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1

Kuid nende samaväärsuste kehtivust võib tõestada ka otsese arutlemise teel. Tõestame näiteks esimese distributiivsuse seadustest punktis 4).

Tõestus. Kui $\mathcal{F} \wedge (\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$ on tõene (väärtusega 1), siis $\mathcal{F}$ on tõene ja $\mathcal{G} \vee \mathcal{H}$ on tõene. Kui viimases seoses $\mathcal{G}$ on tõene, siis ka $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$ on tõene. Kui aga $\mathcal{H}$ on tõene, siis on ka $\mathcal{F} \wedge \mathcal{H}$ tõene. Mõlemal juhul on parempoolne valem tõene. Ümberpöördult, olgu $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vee \mathcal{F} \wedge \mathcal{H}$ tõene. Kui $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$ on tõene, siis mõlemad $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on tõesed, millest järeldub, et ka $\mathcal{G} \vee \mathcal{H}$ on tõene. Seetõttu on vasakpoolne valem tõene. Kui aga $\mathcal{F} \wedge \mathcal{H}$ on tõene, siis mõlemad $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{H}$ on tõesed, millest omakorda järeldub, et $\mathcal{G} \vee \mathcal{H}$ on tõene. Ka sel juhul on vasakpoolne valem tõene. Niisiis oleme näidanud, et vasakpoolsest valemist järeldub parempoolne ning parempoolest vasakpoolne. See tähendab, et need valemid on samaväärsed. ■

Et konjunktsiooni, disjunktsiooni ja ekvivalentsi tõeväärtus ei muutu komponentlausete järjekorra muutmisel, siis on need loogilised tehted *kommutatiivsed*. Implikatsioon aga ei ole kommutatiivne. Seepärast tuleb implikatsiooni korral silmas pidada komponentlausete järjekorda.

Samaväärsused 9) – 11) näitavad, et osa loogilisi tehteid on samaväärsed teiste loogiliste tehete kombinatsioonidega.

Otsustuse eitamine

Nagu varasemalt (esimeses peatükis) õpitud, seisneb otsustuse eitamine antud väitele vasturääkiva väite leidmises. Lihtotsustuse eitamise reeglid võib kokku võtta järgmises tabelis:

Otsustus	**Otsustuse eitus**
Kõik S on P	Mõni S ei ole P
Mitte ükski S ei ole P	Mõni S on P
Mõni S on P	Mitte ükski S ei ole P
Mõni S ei ole P	Kõik S on P

Tabeli esimesele reale vastab juba tuntud kvantori ja eituse vahetamisseadus

$$\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x),$$

ning tabeli kolmandale reale vastab samaväärsus $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$.

Liitotsustuse eitamise reeglid saab aga lausearvutuse põhisamaväärsuste abil kirja panna järgmiselt:

Otsustus	**Otsustuse eitus**
$\neg A$	A
$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
$A \Leftrightarrow B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Näide 8. Tabelis olevat viimast rida võime selgitada järgmise näite abil.

Lause: *„Inimene tunneb tööst rõõmu ainult siis, kui ta töö eest korralikku palka saab"*.

Lause eitus: *„Mõni inimene tunneb tööst rõõmu, kuigi ei saa töö eest korralikku palka või saab korralikku palka, kuid ei tunne tööst rõõmu"*.

Samaväärsuse 6) ehk De Morgani seaduste tundmine on abiks ka järgmise kvantoritega lause eitamisel.

Näide 9. Lause

„Kõikide täisarvude a ja b korral, kui korrutis ab on paarisarv, siis a on paarisarv või b on paarisarv"

eitus oleks järgmine:

„Leiduvad sellised täisarvud a ja b, mille korral ab on paarisarv ja a ning b on mõlemad paaritud arvud."

Proovi selle näite esialgne lause ja tema eitus kirja panna lausearvutuse valemite abil.

Valemite lihtsustamine

Samaväärsused etendavad lausearvutuses sarnast osa nagu samasused algebras. Nii nagu algebras kasutatakse samasusi avaldiste lihtsustamiseks, nii võib ka lausearvutuse valemeid teisendada ja lihtsustada lausearvutuse samaväärsustega, kusjuures tekkiv valem jääb igal sammul samaväärseks esialgsega. Üks teisendussamm tähendab valemi enda või tema osavalemi asendamist teise, samaväärse valemiga. Kui asendame valemis $\mathcal{F}$ mingi osavalemi $\mathcal{F}_1$ samaväärse valemiga $\mathcal{F}_2$, siis on tulemuseks saadav valem ja valem $\mathcal{F}$ igal väärtustusel ühesuguse tõeväärtusega, sest uus osavalem $\mathcal{F}_2$ annab igal väärtustusel sama tõeväärtuse nagu osavalem $\mathcal{F}_1$, edasised tehted valemi tõeväärtuse arvutamisel tehakse juba ühtemoodi.

Tavaliselt on lihtsustamisel otstarbekas elimineerida kõik tehted peale eituse, konjunktsiooni ja disjunktsiooni, sest nende tehete vahel kehtivad kõige lihtsamad seosed. Mõnikord on parem enne tehete elimineerimist lihtsustada antud valemi mingit osavalemit.

Teoreem 4. Iga lausearvutuse valemi $\mathcal{F}$ jaoks leidub temaga loogiliselt samaväärne valem, mis ei sisalda loogilisi tehteid $\Rightarrow$ ja $\Leftrightarrow$.

Tõestus. Teoreem järeldub eelpool toodud arutelust ning loogilistest samaväärsustest 9) ja 11).

■

Näide 10. Lihtsustada valem $\neg X \vee Y \Rightarrow X \wedge Y$.

Tähistame $\mathcal{F} = (\neg X \vee Y \Rightarrow X \wedge Y)$. Avaldades vaadeldavas valemis implikatsiooni eituse ja disjunktsiooni kaudu, saame $\mathcal{F} \equiv \neg(\neg X \vee Y) \vee (X \wedge Y)$. De Morgani seaduse abil viime eituse sulgude sisse: $\mathcal{F} \equiv \neg\neg X \wedge \neg Y \vee (X \wedge Y)$. Kahekordse eituse ning tegelikult mittevajalikud sulud võime ära jätta: $\mathcal{F} \equiv X \wedge \neg Y \vee X \wedge Y$. Nüüd võime rakendada distributiivsuse seadust ja tuua ühise teguri sulgude ette: $\mathcal{F} \equiv X \wedge (\neg Y \vee Y)$. Viimases valemis on liige $\neg Y \vee Y$ samaselt tõene ning me võime ta liikmete elimineerimise reegli põhjal välja jätta. Kokkuvõttes saame $\mathcal{F} \equiv X$.

Näide 11. Avalda $\neg(X \Leftrightarrow Y)$ eituse, disjunktsiooni ja konjunktsiooni abil.

$$\neg(X \Leftrightarrow Y) \equiv \neg((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)) \equiv (\neg(X \Rightarrow Y)) \vee (\neg(Y \Rightarrow X))$$
$$\equiv (X \wedge (\neg Y)) \vee (Y \wedge (\neg X))$$

Näide 12. Teisenda valem $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Leftrightarrow \neg(Y \Rightarrow X)$ selle valemiga loogiliselt samaväärseks valemiks, nii et saadud valemis puuduvad loogilised tehted $\Leftrightarrow$ ja $\Rightarrow$.

$$(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Leftrightarrow \neg(Y \Rightarrow X) \equiv (X \Rightarrow (\neg Y \vee Z)) \Leftrightarrow (\neg(\neg Y \vee X))$$

$$\equiv \big(\neg X \vee (\neg Y \vee Z)\big) \Leftrightarrow \neg(\neg Y \vee X)$$

$$\equiv \Big(\big(\neg X \vee (\neg Y \vee Z)\big) \wedge \neg(\neg Y \vee X)\Big) \vee \big(\neg(\neg X \vee (\neg Y \vee Z)\big) \wedge \neg\neg(\neg Y \vee X))$$

$$\equiv \Big(\big(\neg X \vee (\neg Y \vee Z)\big) \wedge (\neg X \wedge Y)\Big) \vee \big((X \wedge (Y \wedge \neg Z)\big) \wedge (\neg Y \vee X))$$

Lisaks võime konkreetsemalt väita järgmist.

Lause 1. Iga valemi korral leidub temaga samaväärne valem, mis sisaldab ainult järgmisi tehteid:

a) $\wedge$ ja $\neg$,
b) $\vee$ ja $\neg$,
c) $\Rightarrow$ ja $\neg$.

<u>Tõestus.</u> a) Esimese väite põhjendamisel kasutame samaväärsusi 9a), 11a) ja samaväärsusest 6) saadavat $X \vee Y \equiv \neg(\neg X \wedge \neg Y)$. b) Teise väite põhjendamisel kasutame samaväärsusi 9b), 11a) ja samaväärsusest 6) saadavat $X \wedge Y \equiv \neg(\neg X \vee \neg Y)$. c) Kolmanda väite põhjendamisel kasutame samaväärsusi 11b), 10a) ja 10b). ∎