8. PEATÜKK

MATEMAATILINE INDUKTSIOON

Me kõik arvame, et tunneme naturaalarve hästi ja et meil on selged mitmed naturaalarvude omadused. Näiteks teame, et naturaalarve saab lahutada algtegurite korrutiseks või et summa ei sõltu liidetavate järjekorrast jne. Tegelikult on naturaalarvude hulk oma sisult aga palju rikkam ning isegi kaasaegsed matemaatikud ei tunne veel kõiki naturaalarvude omadusi. Näiteks pole teada, kas üle ühe paiknevate algarvude paaride, nn kaksikute hulk 3 ja 5, 5 ja 7, 11 ja 13, 17 ja 19, 29 ja 31, 41 ja 43, 59 ja 61, 71 ja 73, 101 ja 103 jne on lõplik või lõpmatu. Lahendamata probleeme naturaalarvude vallas võib välja tuua teisigi.

Meie tutvume siinses peatükis naturaalarvude ***järgnevuse omadusega***, mis ütleb, et igale naturaalarvule järgneb naturaalarv. Täpsemalt, igale naturaalarvule saab vahetult järgneda ainult üks naturaalarv. Järgnevuse omadus on naturaalarvude suhtes üks olulisemaid omadusi ja seetõttu on järgnevuse omadus koos järgnevuse ühesusega naturaalarvude teooria ülesehitamisel üheks aksioomiks. See omadus väljendab naturaalarvude olemust, mis seisnebki järgnevuses. Lisaks peegeldab järgnevuse omadus ka naturaalarvude järjestatust suuruse järgi ja asjaolu, et naturaalarvude järjend on lõpmatu. Aksioomiks on ka naturaalarvu 1 olemasolu, sest järgnevuse omadust saab kasutada alles siis, kui midagi on algselt olemas, millest alustada.

Naturaalarvude kohta käivaid väiteid ei saa tõestada kontrollimise teel, sest naturaalarvude hulk on lõpmatu. Seega on vaja mingit tõestamismeetodit, mis naturaalarvudega tegelemisel nõuaks ja kasutaks järgnevuse omadust. Kehtib järgmine väide (aksioom): *kui mingi naturaalarvude hulk sisaldab arvu 1 ja selles kehtib järgnevuse omadus, siis see hulk sisaldab kõiki naturaalarve*. Tänu sellele väitele saame nüüd naturaalarvude kohta käivaid väiteid tõestada lõpliku arvu sammudega.

Esiteks, tuleb näidata, et väide kehtib naturaalarvu 1 korral. Seda saab teha kontrollimise teel.

Teiseks tuleb näidata, et väitel on järgnevuse omadus. Kui see on näidatud, on meil õigus **kolmandaks** üldistada väide kõikidele naturaalarvudele.

Üldistamist üksikjuhult üldjuhule nimetatakse ***induktsiooniks***. Filosoofias on induktsioon arutlemise viis, mille puhul sellest, et ühtedel asjadel on teatav omadus, järeldatakse, et see omadus on ka mõnel teisel asjal või isegi kõikidel samalaadsetel asjadel. Induktsiooniks nimetatakse seal ka induktiivse arutluse esitamist. Erinevalt deduktsioonist ei taga aga induktsioon üldjuhul seda, et kui eeldused on tõesed, siis ka järeldus on tõene, mis tähendab, et üldistuse õigsus jääb tõestamata. Meie jaoks on siiski väga oluline, et tõesed eeldused tagaksid ka tõese järelduse, ja seda võimaldab meile matemaatiline induktsioon. Käesolevas peatükis vaatamegi veel ühte tõestusmeetodit – ***matemaatilist induktsiooni*** – mis täiendab harilikku induktsiooni, vältides valesid üldistusi. Kuigi nimetus sisaldab sõna „induktsioon“, on siiski tegemist deduktiivse tõestamise vormiga.

Alustame näitega probleemist, mille tõestamiseks läheb vaja matemaatilist induktsiooni.

Väide. Esimese n paaritu arvu summa on n^2.

Illustreerime seda väidet tabeliga, kus veergudeks on kirjas järjekorranumber (n), esimese n paaritu arvu summa ning n^2 väärtus.

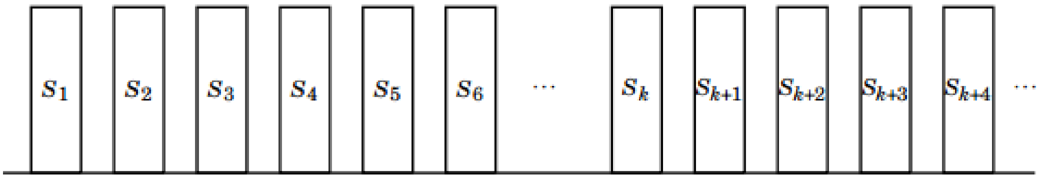
n	n esimese paaritu arvu summa	n^2
1	$1 =$	1
2	$1 + 3 =$	4
3	$1 + 3 + 5 =$	9
4	$1 + 3 + 5 + 7 =$	16
5	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$	25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + (2n - 1) =$	n^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Pane tähele, et esimeses viies reas on tõesti nii, et n esimese paaritu arvu summa on n^2. Samuti tasub märgata, et iga rea viimane liidetav on esitatav kujul $2n - 1$ (st, kui $n = 2$, siis teise rea viimane liidetav on $2 \cdot 2 - 1 = 3$; kui $n = 3$, kolmas paaritu arv summas on $2 \cdot 3 - 1 = 5$ jne). Aga siiski jääb õhku rippuma küsimus, et kas tõesti $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + (2n - 1)$ on võrdne arvuga n^2? Kas meie väide on tõene kõigi naturaalarvude korral? Sõnastame oma väite ümber järgmiselt. Iga naturaalarvu n korral (tabelis iga rea korral) olgu meil antud väited S_n järgmiselt:

$$
\begin{aligned}
&S_1: \quad 1 = 1^2 \\
&S_2: \quad 1 + 3 = 2^2 \\
&S_3: \quad 1 + 3 + 5 = 3^2 \\
&\vdots \\
&S_n: \quad 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

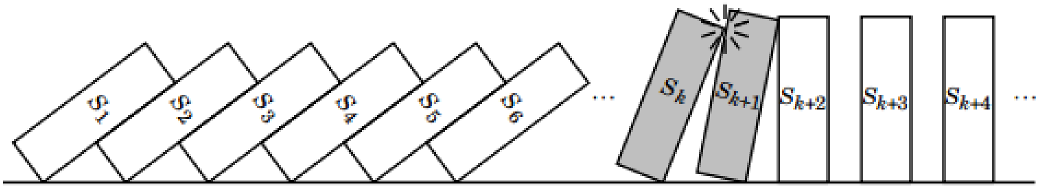
Küsime: kas kõik need väited on tõesed?

Matemaatiline induktsioon ongi mõeldud just seda tüüpi küsimuste vastamiseks, kus meil on antud terve hulk väiteid $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ ja me peame tõestama, et kõik need väited on tõesed. Meetod on tegelikult väga lihtne ja meetodi iseloomustamiseks mõtle pikale reale doominotele, mis üksteise kõrvale püsti on laotud. Oletame, et sa suudad ära tõestada (kontrollida) esimese väite. Sellele vastab esimese doomino ümber lükkamine. Lisaks oletame, et sa suudad näidata, et kui väide S_k on tõene (vastav doomino kukub), siis see sunnib järgmise väite S_{k+1} olema tõene (järgmise doomino kukkuma). Seega, nüüd, kui doomino S_1 kukub, ajab ta ümber järgmise doomino S_2, mis omakorda lükkab ümber doomino S_3, kukkudes ajab doomino S_3 ümber doomino S_4 jne. Meil ei jää lõpuks midagi muud üle, kui tõdeda, et kõik väited on tõesed (ehk kõik doominod ümber lükatud).

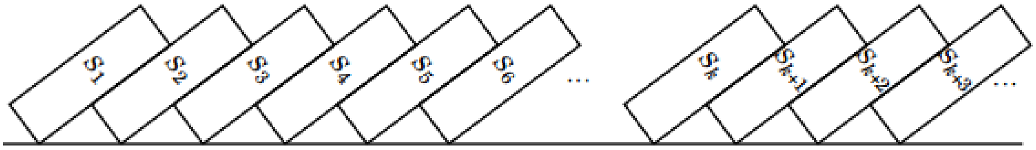


Väited on reastatud nagu doominod.

Oletame, et esimene väide on tõestatud (esimene doomino lükatakse ümber).



Oletame, et doomino S_k põhjustab alati doomino S_{k+1} ümberkukkumise.



Kõik doominod peavad kukkuma (ehk kõik väited peavad tõestatud saama).

Eelnev arutelu annab meile sammud, mis on vajalikud matemaatilise induktsiooni tõestusmeetodi läbiviimiseks:

(1) Näitame, et esimene väide S_1 on tõene (***induktsiooni baas***).
(2) Suvalise täisarvu $k \geq 1$ korral oletame, et S_k on tõene (***induktsiooni hüpotees***).
(3) Tõestame, et S_{k+1} on tõene (***induktsiooni samm***).

Matemaatilise induktsiooni meetodi põhjal järeldame, et iga S_n on tõene.

Märkused. 1) Pole oluline, et kõige esimene väide, mida kontrollitakse, vastab juhule $n = 1$. Piisab, kui väide kehtib mingi naturaalarvu korral ning üldistamine toimub sellele arvule järgnevatele arvudele.
2) Matemaatilise induktsiooniga tõestatavad valemid ja seosed kehtivad vaid naturaalarvude $n = 1, 2, 3, \ldots$ korral.
3) Matemaatilist induktsiooni saab rakendada ainult siis, kui mõlemad eeldused (induktsiooni baas ja induktsiooni samm) on rahuldatud.

Näide 1. Tõesta matemaatilise induktsiooni abil, et n esimese naturaalarvu summa võrdub avaldise $\frac{n(n+1)}{2}$ väärtusega, s.o.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 1.$$

Tõestus. Kuna valemi kehtivus sõltub naturaalarvust, saame tõestamiseks kasutame matemaatilist induktsiooni. Selleks kontrollime kõigepealt, kas valem kehtib $n = 1$ korral.

(1) Kui $n = 1$, siis valemi vasak pool $vp = 1$ ja parem pool $pp = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Järelikult $vp = pp$ ning valem kehtib, kui $n = 1$.

(2) Eeldame, et valem kehtib $n = k$ korral, s.t. $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

(3) Kontrollime, kas valemil on järgnevuse omadus, s.t. kas valemi kehtivusest k korral järeldub valemi kehtivus $k + 1$ korral. Seega tuleb näidata, et $1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Selle võrduse tõestamiseks lähtume väite vasakust poolest ja püüame selle teisendada väite paremaks pooleks. Teisendamise käigus kasutame oma eeldust, et valem kehtib k korral.

$$vp = \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + k}_{eeldus} + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2}$$
$$= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = pp$$

Seega näitasime, et esitatud valemil on järgnevuse omadus.

Induktsiooni baasi ja induktsiooni sammu ühendamisest järeldub, et tõestatav valem kehtib iga naturaalarvu n korral. ∎

Tõestame nüüd sissejuhatuses tutvustatud väite n esimese paaritu arvu summa kohta.

Näide 2. Tõesta matemaatilise induktsiooni abil, et n esimese paaritu naturaalarvu summa on n^2.

Tõestus. Kontrollime kõigepealt induktsiooni baasi kehtivust.

(1) Kui $n = 1$, siis valemi vasak pool $vp = 1$ ja parem pool $pp = 1^2 = 1$. Järelikult $vp = pp$ ning valem kehtib, kui $n = 1$.

(2) Eeldame, et valem kehtib $n = k$ korral, s.t. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$.

(3) Näitame, et sel juhul valem kehtib ka $n = k + 1$ korral, s.t. näitame, et $S_k \Rightarrow S_{k+1}$.

$$vp = \underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)}_{eeldus} + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2(k + 1) - 1)$$
$$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 = pp$$

Seega oleme matemaatilise induktsiooni abil tõestanud, et valem kehtib kõigi naturaalarvude korral. ∎

Näide 3. Tõesta, et kõigi täisarvude $n \geq 1$ korral jagub avaldis $2^{2n} - 1$ kolmega.

Tõestus.

(1) Tõestame, et tulemus kehtib $n = 1$ korral. Kuna $2^{2\cdot1} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$, siis avaldis jagub kolmega $n = 1$ korral. Seega S_1 on tõene.

(2) Eeldame, et väide kehtib $n = k$ korral, s.t. $S_k = 2^{2k} - 1$ jagub kolmega.

(3) Tõestame, et väide kehtib siis ka $n = k + 1$ korral. Selleks arvutame

$$S_{k+1} = 2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1 = 2^{2k} \cdot 2^2 - 1 = 2^{2k} \cdot 4 - 1 = 2^{2k} \cdot (1 + 3) - 1$$
$$= 2^{2k} \cdot 1 + 2^{2k} \cdot 3 - 1 = 2^{2k} \cdot 1 - 1 + 2^{2k} \cdot 3 = S_k + 2^{2k} \cdot 3.$$

Saadud avaldis jagub kolmega, kuna mõlemad liidetavad jaguvad kolmega (esimene liidetava jagub kolmega induktsiooni eelduse tõttu ja teises liikmes on 3 kordajaks).

Oleme seega matemaatilise induktsiooni abil tõestanud, et kõigi täisarvude $n \geq 1$ korral jagub avaldis $2^{2n} - 1$ kolmega. ∎

Näide 4. (Geomeetrilise jada n esimese liikme summa valem.) Tõesta matemaatilise induktsiooni abil, et $|r| < 1$ korral

$$a + ar + ar^2 + ar^3 \cdots + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}, \quad n \geq 0.$$

Tõestus. Iseseisvalt.

Näide 5. Tõesta, et $n \geq 1$ korral

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2.$$

Tõestus. Kasutame eelnevat tulemust võttes $a = 1$ ja $r = \frac{1}{2}$. Siis

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2.$$

Näide 6. (Aritmeetilise jada n esimese liikme summa valem.) Tõesta matemaatilise induktsiooni abil, et

$$\sum_{k=1}^{n} (a + (k-1)d) = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d], \quad n \geq 1.$$

Tõestus. Iseseisvalt.

Peatüki alguse poole märkisime, et matemaatilist induktsiooni saab rakendada ainult siis, kui mõlemad eeldused (induktsiooni baas ja induktsiooni samm) on rahuldatud. Toome siinjuures kaks näidet olukordadest, kus ainult üks eeldustest on rahuldatud, mistõttu matemaatilist induktsiooni tulemuse tõestamiseks kasutada ei saa. Alustame meile juba tuttavast väitest.

Näide 7. Iga naturaalarvu n korral on $n^2 + n + 41$ algarv.

Alustame induktsiooni baasist ja kontrollime väidet $n = 1$ korral: $1^2 + 1 + 41 = 43$, mis on algarv. Järgmiseks oletame, et väide kehtib $n = k$ korral, s.t. $k^2 + k + 41$ on algarv. Püüame tõestada, et siis ka $(k+1)^2 + (k+1) + 41$ on algarv. Sellega jääme aga jänni ning tõestamine ei õnnestu. Tegelikult teame, et juba väärtusel $n = 40$ on $40^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41(40+1)$ hoopis kordarv. Vaadeldud näide hoiatab kergekäeliste üldistuste tegemise eest. Siin küll kehtis induktsiooni baas, aga ei olnud võimalik näidata induktsiooni sammu kehtivust. Seega väide oli vale.

Näide 8. Tõesta, et iga naturaalarv võrdub talle järgneva naturaalarvuga.

Alustame seekord järgnevuse omaduse (ehk induktsiooni sammu) kontrollimisega, kuna eelmises näites just selle puudumine osutus määravaks. Seega oletame, et väide on õige $n = k$ korral, s.t. mingi naturaalarvu k korral on see arv võrdne talle järgneva naturaalarvuga, s.t. $k = k + 1$. Näitame, et siis on väide õige ka $n = k + 1$ korral. Selleks alustame vasakult poolelt $vp = \underbrace{k}_{eeldus} + 1 = (k+1) + 1 = k + 2 = pp$, kus näeme, et kasutades eeldust, saime tõese võrduse parema poolega. Seega induktsiooni samm kehtib. Kontrollime nüüd ka induktsiooni baasi, s.t. püüame leida konkreetse näite mõne naturaalarvu korral, kus naturaalarv võrdub talle järgneva naturaalarvuga. Sellist näidet meil aga leida ei õnnestu, s.t. meil ei õnnestu leida kahte järjestikust ja võrdset naturaalarvu. Väide on seega vale.

Tugev matemaatiline induktsioon

Mõnikord võib ette tulla olukord, kus on raske otse tõestada, et väitest S_k järeldub väide S_{k+1}. Pigem leiad, et on vajadus kasutada mõnda „madalamat“ väidet S_i $(i < k)$, et näidata S_{k+1} kehtivust. Sellistes olukordades on võimalik kasutada hariliku matemaatilise induktsiooni natukene muudetud varianti, mida kutsutakse **tugevaks matemaatilise induktsiooni printsiibiks** ja mis kõlab järgmiselt.

Olgu S_n üldväide, mille parameetri võimalikud väärtused on kõik naturaalarvud $n \geq 1$. Kui:

(1) väide S_1 kehtib *(induktsiooni baas)*,

(2) eeldame, et iga naturaalarvu k korral kõik väited S_i, kus $i = 1, 2, \ldots, k$ kehtivad (*induktsiooni eeldus*),

(3) ning sellest järeldub S_{k+1} kehtimine (*induktsiooni samm)*,

siis väide S_n kehtib iga naturaalarvu n korral.

Erinevus tavalise matemaatilise induktsiooni printsiibiga on selles, et nüüd järeldub S_{k+1} kehtimine kõigist eelnevatest väidetest $S_1, \ldots, S_k$, ehk meil on rohkem induktsiooni eeldusi, millest induktsiooni sammu tõestada. Kui tavalise matemaatilise induktsiooni korral me eeldasime, et S_k on tõene ja selle abil näitasime, et S_{k+1} peab olema tõene, siis nüüd võime eeldada, et $S_1, \ldots, S_k$ on kõik tõesed ja kasutada neid kõiki tõestamaks, et S_{k+1} on tõene.

Hoolimata oma nimest, on tugev matemaatiline induktsioon tegelikult sama „tugev“ kui tavaline matemaatiline induktsioon. Iga väide, mis on tõestatav tugeva matemaatilise induktsiooni abil, on seda tehtav ka tavalise matemaatilise induktsiooniga. Ainuke erinevus on selles, et mõningad tõestused võivad tugeva matemaatilise induktsiooni abil olla lihtsamad. Samas, kui on võimalik ainult S_k kehtivusest tõestada S_{k+1} kehtivus, siis tuleks kasutada tavalist matemaatilist induktsiooni.

Näide. Kastide virnadesse jagamise mäng. Oletame, et meil on ühes virnas (üksteise otsas) n kasti. Mängus teed rea samme, kus igal sammul jagad ühe virna kaheks mittetühjaks virnaks. Mäng lõpeb, kui igasse virna on jäänud vaid üks kast. Iga käigu eest saad punkte. Näiteks, kui jagad virna, milles oli $a + b$ kasti kahte virna, ühes a kasti ja teises b kasti, siis saad selle käigu eest ab punkti. Lõplik punktisumma saadakse igal käigul kogutud punktide kokku liitmisel. Milline strateegia suurendaks sinu lõpp-summat?

Teeme mängu läbi alustades 10 kastiga. Üks võimalik mängu käik oleks selline:

Virna kõrgus										Punkte
10										
5	5									25 punkti
5	3	2								6
4	3	2	1							4
2	3	2	1	2						4
2	2	2	1	2	1					2
1	2	2	1	2	1	1				1
1	1	2	1	2	1	1	1			1
1	1	1	1	2	1	1	1	1		1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
					Kokku punkte				=	45 punkti

Kas sa suudaksid leida parema strateegia?

Kasutame tugevat matemaatilist induktsiooni ja tõestame, et lõplik punktisumma sõltub ainult kastide arvust, mitte aga strateegiast!

Väide. Mistahes viisil n kasti hunnikutesse jaotamisel on lõplik punktisumma alati $\frac{n(n-1)}{2}$.

Induktsiooni baas: Kui $n = 1$, siis on meil virnas vaid üks kast. Kuna mängus ühtegi sammu teha ei ole võimalik, siis on punktisummaks $\frac{1(1-1)}{2} = 0$. Seega valem on õige $n = 1$ korral.

Induktsiooni eeldus: Oletame, et väited $S_1, \ldots, S_k$ on kõik tõesed mingi suvalise arvu k korral.

Induktsiooni samm: Näitame, et S_{k+1} on siis tõene. Seega, olgu meil virnas $k + 1$ kasti ning esimese sammuna jagame need kastid kahte uude virna kõrgustega i ja $(k + 1) - i$ kasti (mingi i korral, kus $1 \leq i \leq k$). Mängu lõpp-summa moodustavad sellel esimesel käigul saadud punktide ja kõikide järgmiste käikude punktide summa. Seega

$$lõppsumma =$$

$$(1. käigu\ punktid) + (i\ kasti\ jaotamise\ punktid) + (k + 1 - i\ \ kasti\ jaotamise\ punktid)$$

$$= i(k + 1 - i) + \frac{i(i - 1)}{2} + \frac{(k + 1 - i)(k + 1 - i - 1)}{2} =$$

$$\frac{k^2 + k}{2} = \frac{k(k + 1)}{2}.$$

Teisel sammul kasutasime eeldusi väidete S_i ja S_{k+1-i} kohta ning ülejäänud oli lihtsustamine. Seega näitasime, et suvalise k korral väidetest $S_1, \ldots, S_k$ järeldub väide S_{k+1}, millega oleme tõestanud meie üldise väite tugeva matemaatilise induktsiooni abil. ■