

## METODY ITERACYJNE

Na tych laboratoriach skupimy się na rozwiązywaniu układu:

$$Ax = b$$

Naszym celem będzie więc napisanie funkcji `Solve` zastępującej funkcję `Gauss`. Nie będziemy jednak tego układu rozwiązywać metodą bezpośrednią, taką jak eliminacja Gaussa, ale metodą iteracyjną. Tzn: będziemy konstruować kolejne przybliżenia  $x^{(n)}$  dokładnego  $x$ , takie że  $b - Ax^{(n)}$  będzie coraz bliższe zeru.

$r = b - Ax^{(n)}$  nazywamy **residual'em**.

### Zadanie

Policz residual. Następnie policz i wyświetl jego normę:  $\|r\| = \sqrt{r^T r}$  (napisz funkcję liczącą normę wektora `norm(double *, int)`). Ile wynosi ta norma przed i po rozwiązaniu układu metodą eliminacji Gaussa?

## Na głupa

Pierwszym pomysłem na iteracyjne rozwiązywanie byłoby postawienie:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + p$$

Gdzie  $p$  jest „poprawką” w iteracji. Łatwo sprawdzić, że idealne  $p$  byłoby równe:

$$p = A^{-1}r$$

Jednak nie mamy  $A^{-1}$  (w tym rzecz). Zamiast niej użyjemy  $M^{-1}$ , gdzie  $M$  będzie przybliżeniem  $A$ . Macierz  $M^{-1}$  nazywamy **preconditioner'em**. Na początek zamiast rozwiązywać pełen układ, pominiemy większość jego elementów:

$$\begin{aligned} A_{11}p_1 + A_{12}p_2 + A_{13}p_3 + \dots + A_{1n}p_n &= r_1 \\ A_{21}p_1 + A_{22}p_2 + A_{23}p_3 + \dots + A_{2n}p_n &= r_2 \\ A_{31}p_1 + A_{32}p_2 + A_{33}p_3 + \dots + A_{3n}p_n &= r_3 \\ \dots & \\ A_{n1}p_1 + A_{n2}p_2 + A_{n3}p_3 + \dots + A_{nn}p_n &= r_n \end{aligned}$$

Co daje nam prosty wzór na  $p$ :

$$p_i = \frac{1}{A_{ii}}r_i$$

Jest to równoważne z wzięciem za  $M$  diagonalnej części  $A$ . Ten prosty schemat iteracji, z powyższą poprawką nazywamy **metodą Jacobiego**.

### Zadanie

Zaczynając od  $x = 0$  powtarzaj tę prostą iterację (np. 1000 razy). W każdej iteracji wyświetlaj normę residualu, a także wywołaj funkcję `draw\_residual(double)` by wykonać wykres zbieżności.

Tak wykonana iteracja się nie zbiega. Wprowadźmy współczynnik, który „przytłumi” wykonywane iteracje:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \alpha p$$

### Zadanie

Sprawdź zbieżność tego schematu przy różnych  $\alpha$ . Sprawdź 0.5, 0.9, 1.1 i 2.

### Zadanie

Wydziel z funkcji `Solve` część odpowiedzialną za mnożenie przez  $A$ : `Mult(double** A, double*x, double* r)` i preconditioner: `Precond(double** A, double*x, double* p)`

Spróbujmy poprawić nasz schemat biorąc lepszy preconditioner. Zauważmy, że licząc  $p_2$  mamy już obliczone  $p_1$  i możemy go użyć. Tak więc nie musimy pomijać elementów układu „pod diagonalą”:

$$\begin{aligned} A_{11}p_1 + A_{12}p_2 + A_{13}p_3 + \dots + A_{1n}p_n &= r_1 \\ A_{21}p_1 + A_{22}p_2 + A_{23}p_3 + \dots + A_{2n}p_n &= r_2 \\ A_{31}p_1 + A_{32}p_2 + A_{33}p_3 + \dots + A_{3n}p_n &= r_3 \\ \dots & \\ A_{n1}p_1 + A_{n2}p_2 + A_{n3}p_3 + \dots + A_{nn}p_n &= r_n \end{aligned}$$

Co daje nam prosty wzór na  $p$ :

$$p_i = \frac{1}{A_{ii}}(r_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}p_j)$$

Gdy  $\alpha = 1$  schemat taki nazywamy **Metodą Gaussa-Seidla**.

### Zadanie

Wypróbuj nowy wzór na  $p$ , znów sprawdzając różne  $\alpha$ .

Schematy z  $\alpha > 1$  nazywamy metodami **Successive Over-Relaxation** (SOR).

## Dobieramy $\alpha$

Widać wyraźnie, że zbieżność bardzo zależy od  $\alpha$  i jasnym jest, że najlepiej byłoby dobierać ten współczynnik w każdej iteracji. Zauważmy że residual po iteracji wynosi:

$$\hat{r} = r - \alpha Ap$$

Spróbujmy zminimalizować kwadrat normy tego residualu:

$$\hat{r}^T \hat{r} = (r - \alpha Ap)^T (r - \alpha Ap) = r^T r - 2\alpha r^T Ap + \alpha^2 (Ap)^T Ap$$

Licząc pochodną po  $\alpha$  mamy:

$$-r^T Ap + 2\alpha (Ap)^T Ap = 0$$

Ostatecznie:

$$\alpha = \frac{r^T Ap}{(Ap)^T Ap}$$

Schemat z takim  $\alpha$  nazywamy metodą **MINRES**.

### Zadanie

Oblicz wektor  $Ap$ . Zauważ, że wyrażenie  $a^T b$  to iloczyn skalarny dwóch wektorów  $a^T b = a \cdot b$ . Napisz funkcję liczącą iloczyn skalarny `skal(double*, double*, int)` i oblicz  $\alpha$  z powyższego wzoru. Sprawdź zbieżność przy takim  $\alpha$ .

## Wycinamy nadmiary

Przez  $q$  oznaczmy poprawkę z poprzedniej iteracji. Można powiedzieć, że w następnej iteracji nie chcemy „stracić” tego co „zyskailiśmy” w poprzedniej. Dlatego za nową poprawkę weźmiemy  $p - \beta q$ . Teraz wzór na nowy residual będzie:

$$\hat{r} = r - \alpha A(p - \beta q)$$

### Zadanie

Wypisz wzór na  $\hat{r}^T \hat{r}$  i zróżniczkuj go po  $\beta$ . Wylicz  $\beta$  przyjmując, że  $r^T Aq = 0$  (to wynika z poprzedniej iteracji).

### Zadanie

Zmodyfikuj iterację wg. schematu: - oblicz residual - oblicz  $p = M^{-1}r$  - jeżeli to nie pierwsza iteracja: oblicz  $\beta$  i nową poprawkę:  $p = p - \beta q$  - oblicz  $\alpha$  - wylicz nowe rozwiązanie  $x = x + \alpha p$  - zachowaj poprawkę  $q = p$  (opłaca się też zachować  $Ap$ )

## A jeśli $A$ jest symetryczna i dodatnio określona ...

W naszym przypadku możemy wykorzystać fakt, że macierz  $A$  jest symetryczna i dodatnio określona. Wtedy zamiast minimalizować  $r^T r$  możemy minimalizować pewien specjalny funkcjonal:

$$\frac{1}{2} x^T A x - b^T x$$

**Pytanie:** Jakie fizyczne wyjaśnienie mają następujące rzeczy w naszym przypadku: - Czym jest powyższy funkcjonal? - Dlaczego  $A$  jest symetryczna? - Dlaczego  $A$  jest dodatnio określona?

### Zadanie

Podstaw w powyższym wzorze  $x = x^{(n)} + \alpha p$ , zróżniczkuj i wylicz  $\alpha$ . Zauważ, że  $\frac{1}{2} x^T A x - b^T x = \text{const} + \frac{1}{2} (\alpha p)^T A (\alpha p) - r^T (\alpha p)$ .

### Zadanie

Analogicznie jak poprzednio, podstaw  $x = x^{(n)} + \alpha(p - \beta q)$ , zróżniczkuj i wylicz  $\beta$ . (tym razem  $q^T r = 0$ )

### Zadanie

Zastosuj dokładnie identyczną iterację zamieniając jedynie  $\alpha$  i  $\beta$  i zbadaj zbieżność.

Schemat taki nazywamy metodą **gradientu sprzężonego** — Conjugate Gradient Method (**CG**).

**Uwaga:** Aktualnie zbieżność jest bardzo słaba. Wynika to z faktu, że choć  $A$  jest symetryczna to preconditioner z metody Gaussa-Seidla  $M^{-1}$  już nie jest.

### Zadanie

Zbadaj zbieżność z preconditionerem diagonalnym, lub wyrażeniem  $p = r$  (brakiem preconditionera).

**Uwaga:** Metodę Conjugate Gradient można zaimplementować w bardziej „zwartej” formie. Taki schemat można znaleźć na wikipedii, bądź w notatkach z wykładu.