

「周期的境界条件における量子箱玉系」

東京大学教養学部統合自然科学科
令和元年卒業研究報告書

物質基礎科学コース, 学生証番号:08-183025, 松浦健悟
指導教官：國場敦夫

令和2年3月

目次

第 1 章	crystal と組み合わせ R	2
1.1	crystal	2
1.2	組み合わせ R	3
第 2 章	箱玉系について	5
2.1	箱玉系	5
2.2	周期箱玉系	7
2.3	可解格子模型と箱玉系	9
2.4	量子箱玉系	12
第 3 章	周期量子箱玉系	14
3.1	周期的境界条件の適用	14
参考文献		16

第 1 章

crystal と組み合わせ R

1.0.1 はじめに

箱玉系で使われる crystal と組み合わせ R について概要を説明する。詳細は文献 [3] などに記されている。

1.1 crystal

1.1.1 crystal の定義

$$i = 1, \dots, n, \quad \bar{P} = \oplus \mathbb{Z} \Lambda_i,$$

$\{\Lambda_i\}, \{\alpha_i\}$ は、ともに \mathbb{R}^n の基底であり、 $\alpha_i = 2\Lambda_i - \Lambda_{i-1} - \Lambda_{i+1}$ となる。 $(\Lambda_{n+1} = \Lambda_{-1} = 0 \text{ とする。})$

$\{h_i\}$ を $\langle h_i, \Lambda_j \rangle = \delta_{i,j}$ となる $\{\Lambda_i\}$ の双対空間の基底する。

このとき、量子群 U_q の Crystal とは、集合 B に対して以下の条件を満たす写像が定められているような構造のことである。

$$wt : B \rightarrow \bar{P}$$

$$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \cup 0 \rightarrow B \cup 0$$

$$\varepsilon_i, \varphi_i : B \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$1. \quad b \in B, \tilde{e}_i b \in B \text{ に対して、} wt(\tilde{e}_i b) = wt(b) + \alpha_i$$

$$2. \quad b \in B, \tilde{f}_i b \in B \text{ に対して、} wt(\tilde{f}_i b) = wt(b) - \alpha_i$$

$$3. \quad \varphi_i(b) = \max\{m \geq 0 \mid \tilde{f}_i^m b \in B\}$$

$$4. \quad \varepsilon_i(b) = \max\{m \geq 0 \mid \tilde{e}_i^m b \in B\}$$

$$5. \quad \varphi_i(b) - \varepsilon_i(b) = \langle h_i, wt(b) \rangle$$

$$6. \quad \tilde{e}_i 0 = \tilde{f}_i 0 = 0$$

$$7. \quad b, b' \in B \text{ に対して、} b = \tilde{f}_i b' \Leftrightarrow b' = \tilde{e}_i b$$

$wt(b)$ を b のウェイトといい、 \tilde{e}_i, \tilde{f}_i を柏原作用素という。

また、7 の作用を頂点 b から b' に向かう矢印 $b \xrightarrow{i} b'$ とすることで、 B は色付き有向グラフとして表現でき

る。このグラフのことを crystal グラフとよぶ。

1.1.2 crystal のテンソル積

2 つの crystal B, B' に対して、そのテンソル積 $B \otimes B'$ とは積集合 $B \times B'$ に crystal の構造を入れたものであり、集合 $\{b \otimes b' \mid b \in B, b' \in B'\}$ に以下の演算を定めたものである。

1.

$$wt(b \otimes b') = wt(b) + wt(b')$$

2.

$$\tilde{e}_i(b \otimes b') = \begin{cases} (\tilde{e}_i b) \otimes b' & \varphi_i(b) \geq \varepsilon_i(b) \\ b \otimes (\tilde{e}_i b') & \varphi_i(b) < \varepsilon_i(b) \end{cases}$$

3.

$$\tilde{f}_i(b \otimes b') = \begin{cases} (\tilde{f}_i b) \otimes b' & \varphi_i(b) > \varepsilon_i(b) \\ b \otimes (\tilde{f}_i b') & \varphi_i(b) \leq \varepsilon_i(b) \end{cases}$$

4.

$$0 \otimes b = b \otimes 0 = 0$$

3 つ以上の crystal のテンソル積についても上の定義を繰り返すことで定義できる。その際テンソル積の結合法則より、 $(B \otimes B') \otimes B'' = B \otimes (B' \otimes B'')$ であるのでカッコを省略して単に $B \otimes B' \otimes B''$ のように書く。

1.2 組み合わせ R

量子 R 行列の $q \rightarrow 0$ 極限は、組み合わせ R と呼ばれる全単射になり、これはヤン・バクスター方程式を満たす。

1.2.1 crystal B_l と B^k

crystal B_l と B^k を次のように定義する。

$$B_l = \{b = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{n+1} \mid x_1 + \dots + x_{n+1} = l\}$$

$$B^k = \{b = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1} \mid x_1 + \dots + x_{n+1} = l\}$$

$$\tilde{e}_i b = (\dots, x_i + 1, x_{i+1} - 1, \dots)$$

$$\tilde{f}_i b = (\dots, x_i - 1, x_{i+1} + 1, \dots)$$

$$\epsilon_i(b) = x_{i+1}, \quad \varphi_i(b) = x_i$$

これは単に前節で $i = 1, \dots, n$ としていたラベリングを、 $i \in \mathbb{Z}_{n+1}$ としたものである。

1.2.2 アフィン化

$\text{Crystal} B = B_l$ または $B = B^k$ に対して、アフィン化 $\text{Aff}(B)$ を次のように定義する。
無限集合 $\{b[d] \mid d \in \mathbb{Z}, b \in B\} = B \times \mathbb{Z}$ に柏原作用素を、

$$\begin{aligned}\tilde{e}_i(b[d]) &= (\tilde{e}_i)b[d - \delta i 0] \\ \tilde{f}_i(b[d]) &= (\tilde{f}_i)b[d + \delta i 0]\end{aligned}$$

と作用することにして、ウェイトを $wt(b[d]) = wt(b) - d\delta$ と定めることにより導入される。 δ は null ルートと呼ばれる量で $\delta_{ij} = \langle \alpha_i, \Lambda_j \rangle$ である。 d を $b[d]$ のモードと呼ぶ。形式的にスペクトルパラメータ z を用いて、 $z^d b$ と表す流儀もある。この集合を $B \times \mathbb{Z}$ とそれに定まっている構造のことをアフィン crystal とよび、 $\text{Aff}(B)$ とあらわす。

1.2.3 crystal の同型と組み合わせ R

一般に $\text{crystal} B$ と B' について、全単射 $\psi : B \cup \{0\} \rightarrow B' \cup \{0\}$ で $\psi(0) = 0$ かつ B の全ての柏原作用素 \tilde{e}_i, \tilde{f}_i と可換なものが B' に存在する時、 $\text{crystal} B$ と B' は同型であるといい、 $B \simeq B'$ と書く。このとき B と B' の crystal グラフは ψ で頂点を移せば一致する。

crystal のテンソル積 $B \otimes B'$ に対しても $B \otimes B'$ という crystal グラフは連結であり、 $B \otimes B' \simeq B' \otimes B$ という同型が一意に定まる。

$\text{crystal} B, B'$ が同型 $B \otimes B' \simeq B' \otimes B$ であるなら、アフィン crystal もそれにスペクトルパラメータをつけただけなので、同型であり、 $\text{Aff}(B) \otimes \text{Aff}(B') \simeq \text{Aff}(B') \otimes \text{Aff}(B)$ と表せる。このアフィン crystal の同型写像を組み合わせ R という。

$$\begin{aligned}R : \text{Aff}(B) \otimes \text{Aff}(B') &\rightarrow \text{Aff}(B') \otimes \text{Aff}(B) \\ b[d] \otimes b'[d'] &\mapsto \tilde{b}'[d' - H(b \otimes b')] \otimes \tilde{b}[d + H(b \otimes b')]\end{aligned}$$

ここでスペクトルパラメータ d, d' は任意であり、 $H(b \otimes b')$ は局所エネルギーと呼ばれる量で、以下の漸化式によって定められる。

$$H(\tilde{e}_i(b \otimes b')) = \begin{cases} H(b \otimes b') + 1 & i = 0, \tilde{e}_0(b \otimes b') = (\tilde{e}_0 b) \otimes b', \tilde{e}_0(\tilde{b}' \otimes \tilde{b}) = (\tilde{e}_0 \tilde{b}') \otimes \tilde{b} \\ H(b \otimes b') - 1 & i = 0, \tilde{e}_0(b \otimes b') = b \otimes (\tilde{e}_0 b'), \tilde{e}_0(\tilde{b}' \otimes \tilde{b}) = \tilde{b}' \otimes (\tilde{e}_0 \tilde{b}) \\ H(b \otimes b') & \text{o.w.} \end{cases}$$

1.2.4 ヤン・バクスター方程式

組み合わせ R について、 $\text{Aff}(B) \otimes \text{Aff}(B') \otimes \text{Aff}(B'')$ から $\text{Aff}(B'') \otimes \text{Aff}(B') \otimes \text{Aff}(B)$ への写像として以下の関係式が成立する。

$$(R \otimes 1)(1 \otimes R)(R \otimes 1) = (1 \otimes R)(R \otimes 1)(1 \otimes R)$$

この関係式をヤン・バクスター方程式とよぶ。

第 2 章

箱玉系について

2.1 箱玉系

2.1.1 はじめに

箱玉系とは、玉を一つまで入れることのできる箱の列を考え、その箱に対して時間発展の規則が与えられている離散力学系の一様である。箱玉系ではその単純な時間発展のルールに対して、さまざまな保存量や興味深い物理的なエッセンスが内包されており、これまで盛んに研究がなされた。本章では、箱玉系および量子箱玉系の説明をする。ただし簡単のため、今回扱うのは要素が 0 と 1 だけの 1-color の箱玉系に限る。

2.1.2 時間発展の定義 (高橋・薩摩による定義)

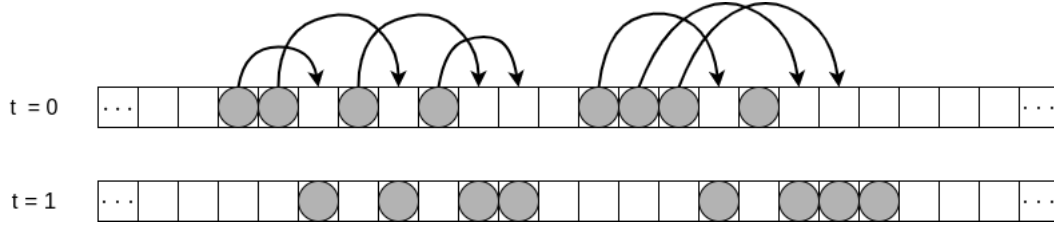
1990 年に高橋と薩摩はある 2 値をとる 1 次元空間のセル・オートマトンを発見した。このセルオートマトンは、1 の数が有限である時、全ての状態がソリトンのような性質を持つ。このセルオートマトンは現在では箱玉系といわれている。本節では、まずはじめにこのセルオートマトンについて説明する。

箱玉系では、系の状態は数字の並びで表すことができ、箱の個数が L で、玉の種類が一つの場合は、 $B_1 = \{0, 1\}$ として、 $B_1^{\otimes L} := \underbrace{B_1 \otimes B_1 \otimes \dots \otimes B_1}_{L \text{ 個}}$ の元をパスと呼び、各 $b_i \in B_1$ に対して $b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_L$

を 0 と 1 からなる数列 $p = b_1 b_2 \dots b_L$ として定義する。 $b_i = 0$ のとき i 番目の箱は空、 $b_i = 1$ のとき i 番目の箱に玉が入っている状態として解釈することができる。

箱玉系の時間発展は離散的な時間ステップで次々と変化する。箱玉系の初期状態を時刻 0 の状態と呼び、以後 1, 2, 3, ... と自然数で状態の時刻を指定できるものとする。この時時刻 t から $t + 1$ への時間発展は次のように表すことができる。

1. 一番左側にある玉をそれより右側でもっとも左側にある空箱に移す。
2. まだ動かしていない玉のうちで、一番左側にある玉をそれより右側でもっとも左側にある空箱に移す。
3. 動かしていない玉がなくなるまで、2 を繰り返す。



これは、箱の個数 (長さ) を L , ボールのある箱を 1、空箱を 0 と表すと、

$$...0011010100011101000000... \rightarrow ...0000101011000010111000...$$

$$B_1 = \{0, 1\}, p \in B_1^{\otimes L}, L \rightarrow \infty$$

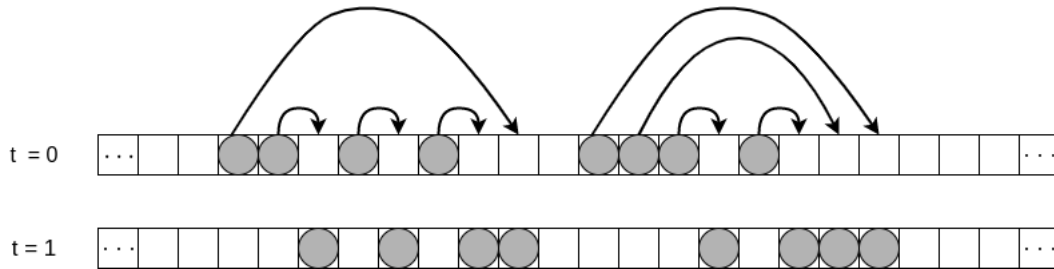
$$T : B_1^{\otimes L} \rightarrow B_1^{\otimes L}$$

と定式化できる。

2.1.3 アーク則による時間発展の定義

薩摩、高橋による時間発展の定義と等価なものとして、次のようなアーク則による時間発展が知られている。

1. 各玉のコピーをそれぞれの存在する箱の位置に作る。
2. コピーのうち任意の一個をその右にある一番近い空箱に移す。
3. 残りのコピーのうち任意の一個をその右にある一番近い空箱に移す。
4. 操作 3 をすべてのコピーした玉を動かし終わるまでくりかえす。
5. もとの玉を消し、コピーを新たな玉とした状態を次の時刻の状態とする。



これは後述する carrier を使うことにより、carrier に積んだボールに対して、新しいボールほど先に出すのか (スタック)、古いボールほど先に出しているのか (キュー) という違いであることがわかる。箱玉系では同じ

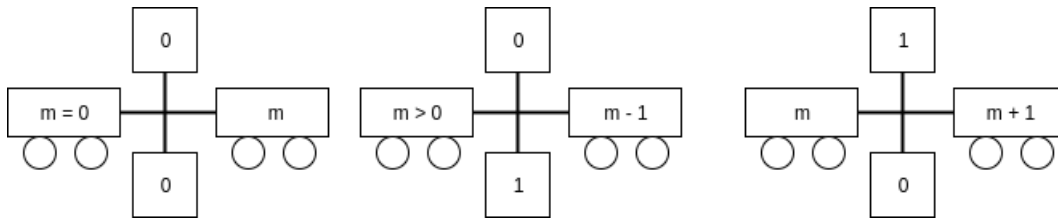
color のボールは区別しないため 2 つの定義は一致している。

2.1.4 箱玉系の crystal による状態と時間発展の定義

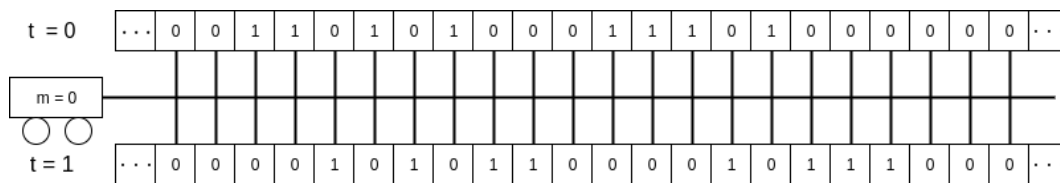
箱玉系の状態 p を $\lim_{L \rightarrow \infty} B_1^{\otimes L}$ の元として定義する。この p のことをパスと呼ぶ。各 B_1 は箱を表しており、 $B_1 = \{0, 1\}$ である。適当に基準となる場所 b_0 を定めて、箱玉系の i 番目のサイトの位置を b_i ($i \in \mathbb{Z}$) で定める。 $b_i \in B_1$ に対して $\dots \otimes b_{-1} \otimes b_0 \otimes b_1 \otimes \dots$ を 0 と 1 からなる数列 $p = \dots b_{-1} b_0 b_1 \dots$ として定義する。ここで $\exists N s.t. b_m = 0 \ \forall |m| > N, \forall p$ であるとする。

2.1.5 carrier

- carrier と呼ばれる変数 $v \in B_\infty$ を用いて、時間発展は組み合わせ R を繰り返し適用したものとなせる。組み合わせ R は $x \otimes b \simeq \tilde{b} \otimes y (x, y \in B_\infty, b, \tilde{b} \in B_1)$ となり、具体的な表式は下図のとおりである。



この組み合わせ R を左から右に逐次的に作用させることにより、箱玉系の時間発展のパターンを得ることができる。



2.2 周期箱玉系

2.2.1 はじめに

本説でも簡単のため、 $U_q(\hat{sl}_2)$ の crystal すなわち、ボールの種類が一種類の場合を扱う。

箱玉系の時間発展の規則 T_∞ は次のようなルールで与えられる。ただし周期箱玉系では、周期的境界条件のため、右端の箱は左端の箱と隣り合っているものとして考える。

周期箱玉系の時間発展は、通常の箱玉系の時間発展に対して、右端と左端がつながるように境界条件を設定する。

2.2.2 周期箱玉系の状態と時間発展の定義

最初に周期箱玉系の状態を定義する。

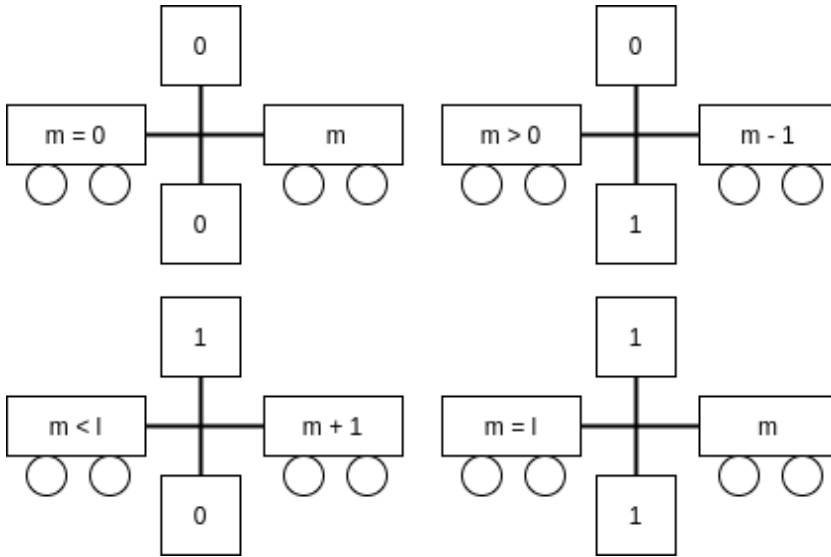
箱の長さを $L \in \mathbb{N}$ とする。そして通常の箱玉系と同じ様に、 $B_1^{\otimes L}$ の元をパスと呼ぶ。各 $b_i \in B_1$ に対して $b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_L$ を 0 と 1 からなる数列 $p = b_1 b_2 \dots b_L$ として定義する。また p のウェイトを $wt(p) = (0 \text{ の個数}) - (1 \text{ の個数})$ とする。ここで、次のようにパスの集合 \mathcal{P} と \mathcal{P}_+ を導入する。

$$\mathcal{P} = \{b_1 \dots b_L \in B_1^{\otimes L} \mid wt(b_1 \dots b_L) \geq 0\}$$

$$\mathcal{P}_+ = \{b_1 \dots b_L \in B_1^{\otimes L} \mid wt(b_1 \dots b_k) \geq 0 \text{ (} 1 \leq k \leq L \text{)}\}$$

\mathcal{P}_+ の元を highest パスという。この \mathcal{P} の元 p が周期箱玉系の各状態を表している。

次に時間発展 $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ を定義する。組み合わせ R を図示すると以下の 4 パターンがある。



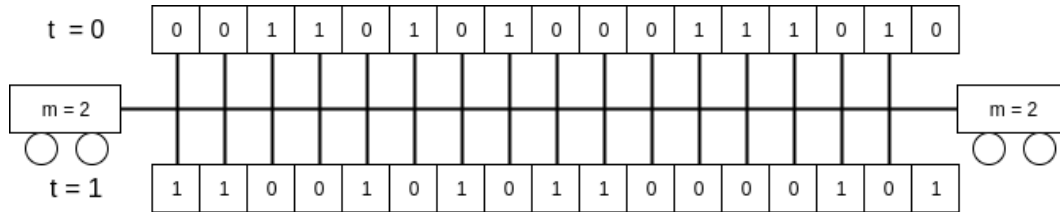
2.2.3 周期箱玉系の基本周期

周期的箱玉系の時間発展 $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ は全単射であり、状態の数が有限であるため、時間発展によって系の状態は周期的に変化する。また、箱の長さが L であり、玉の個数 M である状態の集合を $\Omega_{L,M} \subset \mathcal{P}$ とすると、 $\Omega_{L,M}$ は有限個の周期軌道に一意に分解することができ、周期箱玉系の任意の状態は周期軌道を形成する。ここで、ある状態の属する周期軌道の長さをその状態の基本周期と呼ぶ。

2.2.4 周期的境界条件

実は、周期箱玉系の時間発展は、次のように組み合わせ R を作用させたものと一致していることが知られている。

時間発展は、右端の carrier と左端の carrier の状態が等しくなるように carrier を選んで左から右に通したものである



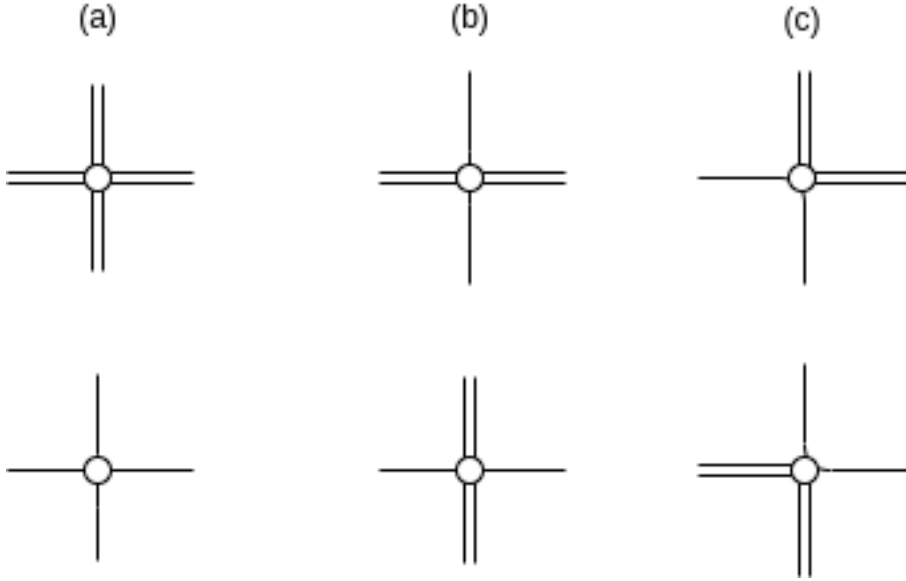
この箱の要素の並び $b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_L$ をパス p という。

周期箱玉系の時間発展は、 $m \otimes p \simeq T(p) \otimes m$ と表すことができる。

2.3 可解格子模型と箱玉系

2.3.1 6 頂点模型

可解格子模型とは、分配関数や相関関数を厳密に計算できる格子模型を指す。ここでは可解格子模型の一つである 6 頂点模型を取り上げる。6 頂点模型では系の状態は、2 種類の辺（図の二重線と一重線）と二次元の正方格子により表される。任意の状態のエネルギーは、6 頂点模型の各頂点の 4 つの辺の配置に応じて決まる局所的なエネルギーの和として定義される。ただし、 2^4 の辺の配置のうち可能なもの（有限なエネルギーを与えるものは）下図の 6 種類の配置のみである。



この6種類を図のように a,b,c の3タイプに分けることができる。同じ頂点に属する2タイプは同じ局所エネルギーを持つものとする。a,b,c のそれぞれの局所エネルギーを E_a, E_b, E_c として、各タイプの頂点の数を N_a, N_b, N_c とすると、全エネルギーは、

$$E = N_a E_a + N_b E_b + N_c E_c$$

となる。

分配関数 $Z(\beta)$ は、系の取りうる全ての集合を P 、状態 $p \in P$ のエネルギーを $E(p)$ とすると、

$$Z(\beta) := \sum_{p \in P} \exp(-\beta E(p))$$

と定義される。

分配関数を具体的に計算するためには、転送行列 $\hat{T}(\beta)$ を用いる方法がある。

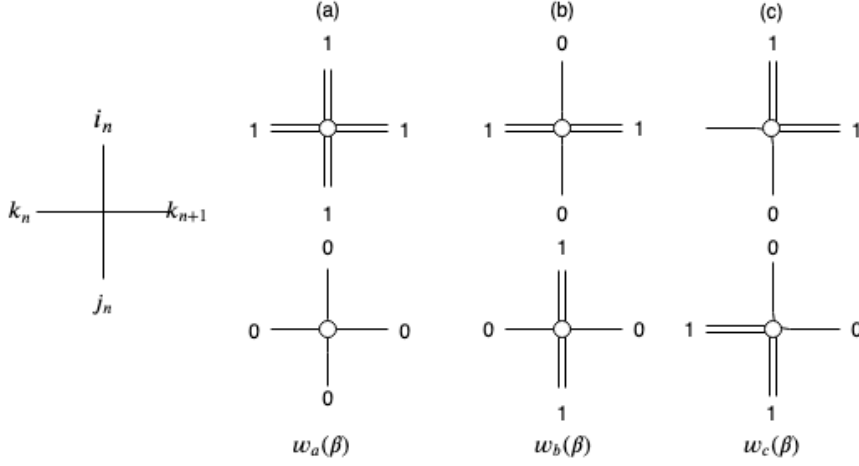
6頂点模型は縦 M 横 L の正方格子状で定義されているものとして、格子には周期的境界条件が課されているものとする。

この時、転送行列 $\hat{T}(\beta)$ は、 L 個の $\text{crystal} B_1$ のテンソル積空間 $B_1^{\otimes L}$ 上の線形変換 $\hat{T}(\beta) : B_1^{\otimes L} \rightarrow B_1^{\otimes L}$ であり、 $B_1^{\otimes L}$ の元を p とすると、 $p = j_1 j_2 \dots j_n, p' = i_1 i_2 \dots i_n$ のもと、

$$\hat{T}(p) = \sum_{p' \in B_1^{\otimes L}} T_p^{p'} p'$$

$$T_p^{p'} := \sum_{\{k_1, k_2, \dots, k_L\} \in \{0,1\}^L} \prod_{n=1}^L R_{k_n, i_n}^{j_n, k_{n+1}}$$

で与えられる。また $R_{k_n, i_n}^{j_n, k_{n+1}}$ の具体的な値は以下の図の通りである。



$$R_{0,0}^{0,0} = R_{1,1}^{1,1} = w_a(\beta)$$

$$R_{0,1}^{1,0} = R_{1,0}^{0,1} = w_b(\beta)$$

$$R_{0,1}^{0,1} = R_{1,0}^{1,0} = w_c(\beta)$$

$$R_{k_n, i_n}^{j_n, k_{n+1}} = 0 \text{ otherwise}$$

転送行列を用いると分配関数 $Z(\beta)$ は、

$$Z(\beta) = \text{Tr}(\hat{T}^M)$$

で与えられる。

\hat{T} は 2^L 次元線形空間の線形変換であるから、その固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2^L}$ とすると、 $\text{Tr}(\hat{T}^M) = \sum_{i=1}^{2^L} \lambda_i^M$ であるから、

$$Z(\beta) = \sum_{i=1}^{2^L} \lambda_i^M$$

となるが、 \hat{T} を行列として表現したときのサイズは指数関数的に増大するため、 L が少しでも大きくなると、 \hat{T} を対角化するのは困難である。

ところが、ボルツマンウェイト w_a, w_b, w_c が 2 つのパラメータ x, q で、

$$w_a : w_b : w_c = 1 - q^2 x^2 : (1 - x^2)q : (1 - q^2)x$$

と表せるとき、ベーテ仮説（ベーテ仮説）と呼ばれる方法で具体的に対角化することができることが知られている。 x をスペクトルパラメータ、 q を変形パラメータという。その結果 $L \rightarrow \infty$ の熱力学極限では、熱力学的諸量の解析的表現を得ることができる。また、この条件のとき、 $\hat{T} = \hat{T}(x; q)$ と表すと、

$$[\hat{T}(x; q), \hat{T}(y; q)] = 0$$

という交換関係が成立している。このような可換性が成り立つことは、 $\hat{R}(B \otimes B') \simeq R_{k_n, i_n}^{j_n, k_{n+1}} B' \otimes B$ として、全ての x, x' に対して、

$$\hat{R}_{23}(x'/x; q) \hat{R}_{13}(x'; q) \hat{R}_{12}(x; q) = \hat{R}_{12}(x; q) \hat{R}_{13}(x'; q) \hat{R}_{23}(x'/x; q)$$

が成立していることから示せる。ただし \hat{R}_{ij} は、 $\hat{R}_{ij}(B_i \otimes B_j \otimes B_k) = \hat{R}(B_i \otimes B_j) \otimes B_k$ のように、 $B_i \otimes B_j$ に作用し、他の部分には高等演算子として作用するものとする。この関係式のことをヤン・バクスター関係式と呼ぶ。

2.3.2 可解格子模型の結晶化と箱玉系

可解格子模型で $q \rightarrow 0$ の極限を取ることは、可解格子模型の温度を絶対零度にすることを意味し、この時、上と左の境界条件を定めれば、可解格子模型が取りうる状態は一意に決まる。この状態において、可解格子模型の縦の辺だけに着目して、二重線を 1, 一重線を 0 と対応付けて、1 と 0 からなる並びを構成すると、この並びを縦に並べたものは、左右の境界を除いて、箱玉系の時間発展パターンと一致する。このように可解格子模型で $q \rightarrow 0$ の極限をとって、箱玉系を構成する手法は結晶化と呼ばれている。これは、箱玉系における組み合わせ R と可解格子模型の R 行列が対応関係にあるためである。

2.4 量子箱玉系

2.4.1 量子箱玉系の状態

量子箱玉系の状態

量子箱玉系の任意の状態 $|\alpha\rangle$ は、 $a_i \in \mathbb{C}$ として通常の箱玉系におけるバスにインデックスをつけた $|p_m\rangle$ の重ね合わせとして表す。

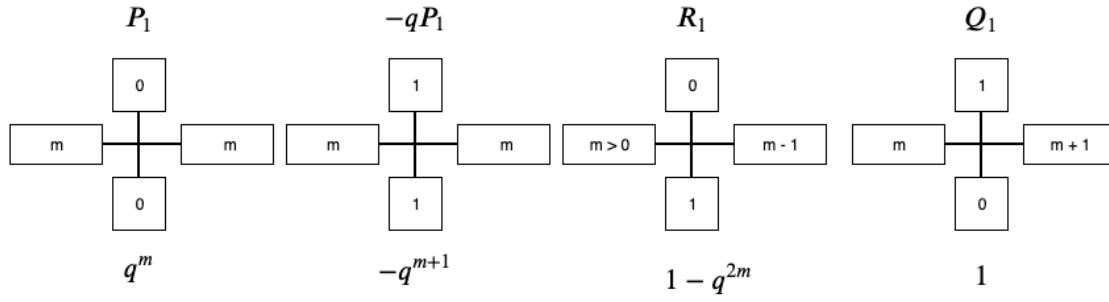
$$|\alpha\rangle = \sum_m a_m |p_m\rangle$$

2.4.2 量子箱玉系の時間発展演算子

量子箱玉系の時間発展は古典系の組み合わせ R に対応して、次のようなローカルな演算子 K を連続して作用させたものとして表せる。

$$K : B_\infty \otimes B_1 \rightarrow B_1 \otimes B_{infty}$$

具体的な表式は、下図を重ね合わせたものとして表すことができる。



例えば、

$$K(m \otimes 1) = -q^{m+1}(\{1\} \otimes \{m\}) + (\{0\} \otimes \{m+1\})$$

の様に表すことができる。

ここで i 番目の B_1 に作用する K 演算子を K_i と表す。これは例えば、 $K_i(\dots B_1^{i-1} \otimes B_1^i \otimes B_1^{i+1} \dots) = \dots B_1^{i-1} \otimes K(B_1^i \otimes B_1^{i+1}) \dots$ のように作用する。ただしここでは B^i は i 番目の要素を表す。

量子箱玉系の時間発展は K 演算子を左から右に作用させていったものとして以下のように定義される。

$$T |p_m\rangle = \dots K_{i+1} K_i K_{i-1} \dots |p_m\rangle$$

ここで十分遠方では、 $b_i = 0$ なので、 K_i は恒等演算子となることに注意。

任意の状態の時間発展に関しても、これらの線型結合で表現できる。

第 3 章

周期量子箱玉系

3.1 周期的境界条件の適用

3.1.1 はじめに

今回の卒業研究では、この量子箱玉系の周期系への拡張を試み、その時間発展演算子の性質を調べた。量子周期箱玉系の時間発展は、通常の周期箱玉系の時間発展を量子箱玉系的な時間発展に置き換えて構成した。この定義を用いると、例えば $|1000\rangle$ という系の時間発展は次のように表せる。

$$T(z)|1000\rangle = \frac{-q}{1-q^4z^4}|1000\rangle - \frac{z(1-q^2)}{(1-q^2z^4)(1-q^4z^4)}|0100\rangle - \frac{qz^2(1-q^2)}{(1-q^2z^4)(1-q^4z^4)}|0010\rangle + \frac{q^2z^3(1-q^2)}{(1-q^2z^4)(1-q^4z^4)}|0001\rangle$$

この時間発展演算子は、周期的でない量子箱玉系の演算子と比べると、単純な自乗和が保存しなくなるなど性質が異なる点がある。

3.1.2 量子周期箱玉系の状態

量子周期箱玉系の任意の状態は、通常の周期箱玉系におけるパスの重ね合わせとして表す。例えば、 $L=4, M=2$ の系の場合、系の任意の状態 $|\alpha\rangle$ は、 $a_i \in \mathbb{C}$ によって

$$|\alpha\rangle = a_0|1100\rangle + a_1|0110\rangle + a_2|0011\rangle + a_3|1001\rangle + a_4|1010\rangle + a_5|0101\rangle$$

と表すことができる。

3.1.3 量子周期箱玉系の時間発展の定義

系の長さ l の量子周期箱玉系の時間発展を次のように定義した。

$$T(z) = \sum_{m,m'} T_{m',m} |p_m\rangle \langle p_{m'}| = \sum_{k=0}^{\infty} z^{kl+\delta} |p'_m\rangle^k$$

ただし、 $\delta, |p_m\rangle^k$ は演算子 L によって次のように表される。

$$L : k \otimes |p_m\rangle \simeq |p'_m\rangle \otimes k$$
$$\delta = \sum_i (l-i)(b_i - b'_i)$$

例えば $|1100\rangle \rightarrow |1001\rangle$ の量子周期箱玉系の時間発展は次の様に計算する。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 1 & & 0 & & 0 \\
 m & \text{---} & m & \text{---} & m+1 & \text{---} & m+1 & \text{---} & m \\
 & 1 & & 0 & & 0 & & 1 \\
 & -q^{m+1} & & 1 & & q^{m+1} & & 1 - q^{2m+2}
 \end{array}$$

3.1.4 量子周期箱玉系の時間発展の性質 1

$T(z)$ は巡回シフトに対して普遍である。すなわち、任意の b_1, b_2, \dots, b_n に対して次が成立。

$$T(z) |b_1 b_2 \dots b_n\rangle = T(z) |b_n b_1 \dots b_{n-1}\rangle$$

3.1.5 量子周期箱玉系の時間発展の性質 2

$T(z), T(y)$ は作用させるの $|p\rangle$ の属する状態空間の基底が全て同じ周期軌道内に属する時に可換である。すなわち、次が成立。

$$[T(z), T(y)] \sum_m a_m |p_m\rangle = 0 \quad (\exists \Omega \text{ s.t. } p_m \in \Omega \text{ for all } m)$$

ただし Ω ある一つの単一周期軌道を表す。

参考文献

- [1] Inoue, R. and Kuniba, A. and Takagi, T., “Integrable structure of box-ball systems: crystal Bethe ansatz, ultradiscretization and tropical geometry” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol 45(2012), 073001(64pp).
- [2] Inoue, R. and Kuniba, A. and Okada, M., “A Quantization of Box-Ball Systems” *Reviews in Mathematical Physics*, vol 16, no.10, pp.1227-1258, 2004.
- [3] 國場 敦夫 (2011), 『ベーテ仮説と組み合わせ論』 朝倉書店.
- [4] 時弘 哲治 (2010), 『箱玉系の数理』 朝倉書店.

謝辞

國場先生ご指導ありがとうございました。