# O tym, że kryterium asymptotyczne nie istnieje dla szeregów o dowolnych wyrazach

Rozpatrzmy dwa szeregi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest oczywiście zbieżny. Tymczasem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, co zaraz pokażemy. Przyjrzyjmy się następującemu szeregowi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + (-1)^n)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + (-1)^n)}$$

jest on rozbieżny. Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ również musi być rozbieżny.
Tymczasem

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n} \xrightarrow{n \to \infty} 1.$$

Powyższy przykład pokazuje, że założenie o nieujemności wyrazów w kryterium asymtotycznym jest konieczne. Pokazuje też delikatność jaką jest zbieżność warunkowa, gdyż ciąg $b_n$ zdaje się być "małym" zaburzeniem ciągu $a_n$, który nie powinien wpłynąć na zbieżność.