Jak rozwinąć $\cos^2 x$ w wielomian Taylora w zerze?
Ze wzoru
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$
dostajemy
$$\cos^2 x = \frac{\cos(2x)+1}{2}. \tag{1}$$
Przypominamy sobie rozwinięcie
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6). \tag{2}$$
Teraz łącząc 1 i 2 dostajemy
$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + o(x^6)\right) + \frac{1}{2}\\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + o(x^6).\end{aligned}$$

Jak rozwinąć $\sin^2 x$ w wielomian Taylora w zerze?
Ze wzoru
$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$
dostajemy
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}. \tag{3}$$
Przypominamy sobie rozwinięcie
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6). \tag{4}$$
Teraz łącząc 3 i 4 dostajemy
$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + o(x^6)\right)\\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^6).\end{aligned}$$

Jak rozwinąć $\mathrm{tg}^2(x)$ w wielomian Taylora w zerze?
Z jedynki tygonometrycznej
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$
dostajemy
$$\mathrm{tg}^2(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1. \tag{5}$$
Przypominamy sobie rozwinięcie (z ćwiczeń - korzystamy z tego, że $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$)
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4). \tag{6}$$
Teraz łącząc 5 i 6 dostajemy
$$\begin{aligned}\mathrm{tg}^2(x) &= 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - 1\\ &= x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$