14. X. 2013

„Lectures on elliptic boundary value problems"
Shmuel Agmon

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{w } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{w } \Omega \\ u = g & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

Tw: $f \in L_2(\Omega)$, $g \in H^{3/2}(\Omega)$ $\Rightarrow$ $\nabla^2 u \in L_2(\Omega)$, $\nabla p \in L_2(\Omega)$.

Istnienie słabych rozwiązań:

Problem 1: dane brzegowe, $g \in H^{3/2}(\partial\Omega) = \{ f|_{\partial\Omega} : Ef \in H^2(\Omega) : Ef|_{\partial\Omega} = f \}$

$$\|g\|_{H^{3/2}(\Omega)} = \inf \|Ef\|_{H^2(\Omega)}$$

$v = u - G$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta v + \nabla p = f + \Delta G =: f \\ \operatorname{div} v = \operatorname{div} G \quad \in L_2 \\ v = 0 \end{cases}$$

Szukamy słabego sformułowania: $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$(\nabla v, \nabla \varphi) - (p, \operatorname{div} \varphi) = (f, \varphi)$$

Gdyby $\operatorname{div} \varphi = 0$ nie byłoby kłopotu

Operator Bogowskiego: ~~div~~ $\operatorname{div} v = f$, $v = 0$ $\rightarrow$ przyporządkowuje $B(f) = v$.

Chcemy, żeby $f = f_0 + f_1$ t.że $f_0 = \nabla q$ i f_1 t.że $\operatorname{div} f_1 = 0$.

(Gdy $v \in L_2$, $\operatorname{div} v = 0$ w $\mathcal{D}'(\Omega)$, to $v \cdot n|_{\partial\Omega} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \nabla q = \operatorname{div} f \\ \frac{\partial q}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

Warunek zgodności: $\int_\Omega \operatorname{div} f \, dx = 0$ – to nie musi mieć sensu. UPS

W jaki sposób rozbić f?

Można pokazać, że jest bez sensu:

$$\begin{cases} \Delta u = \operatorname{div} f & \text{na } \mathbb{R}^n_+, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^n_+) \\ u_{x_n}\big|_{x_n = 0} = 0 & \text{na } \mathbb{R}^{n-2} \end{cases}$$

$f: \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\dim \Omega = n$

$Ef: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Ef|_\Omega = f$, $f \in L_2(\Omega)$, $\|Ef\|_{L_2(\Omega)} \le \|f\|_{L_2(\Omega)}$

$\operatorname{div} \nabla k = \operatorname{div} Ef$ w $\mathbb{R}^n$

$k = (-\Delta)^{-1} \operatorname{div} Ef$

$\|\nabla k\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le \|Ef\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$

$f = f_2 + \nabla k$, $\nabla k \in L_2(\Omega)$, $\operatorname{div} \nabla k = \operatorname{div} f$ w $\mathcal{D}'(\Omega)$

$f \in L_2(\Omega)$

$\operatorname{div} f_2 = 0$ w $\mathcal{D}'(\Omega)$

$\Rightarrow f_2 \cdot n \in H^{-1/2}(\Omega)$

Dowód: $\int_{\partial\Omega} g \cdot n \cdot \varphi \, d\sigma \overset{\text{div}}{=} \int_\Omega \operatorname{div}(g \cdot \varphi) dx = \int_\Omega \overset{\overset{0}{\parallel}}{\operatorname{div} g} \cdot \varphi + g \nabla\varphi \, dx$

$\varphi \in H^1(\Omega)$ $\quad = \int_\Omega \underset{L_2}{\underset{\Uparrow}{g}} \underset{L_2}{\underset{\Uparrow}{\nabla\varphi}} \, dx$

$\varphi|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, φ skalar $\square$

$$\begin{cases} \Delta q = 0 \\ \dfrac{\partial q}{\partial n} = f_2 \cdot n \end{cases}$$

war. zgodności jest spełniony

$\int q = 0$

$(\nabla q, \nabla\varphi) = \int_{\partial\Omega} \underset{H^{1/2}}{\underset{\Uparrow}{\underline{f_2 \cdot n}}} \cdot \underset{H^{1/2}}{\underset{\Uparrow}{\varphi}} \, d\sigma$

Udało nam się udowodnić, że istnieje rozkład (Helmholza)

$f = f_1 + \nabla k$ o takiej własności, że

$f_1, \nabla k \in L_2$

$\operatorname{div} f_1 = 0$

$f_1 \cdot n = 0$ (wszystko co złe wkładamy do gradientu)

Wracamy do naszego równania

$$\begin{cases} -\Delta v + \nabla p = f_1 \\ \operatorname{div} v = \operatorname{div} G \\ v = 0 \end{cases}$$

(∇k został wrzucony do ∇p)

Czy da się coś zrobić z ciśnieniem?

Bierzemy dywergencję:

$$\begin{cases} \Delta p = \Delta \operatorname{div} G \\ n \cdot \nabla p = n \cdot \Delta v \end{cases}$$

Czy umiemy to rozwiązać?

Testujemy (modulo znak)

$$(\nabla p, \nabla \varphi) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \varphi \, d\sigma + (\nabla \operatorname{div} G, \nabla \varphi)$$

problem

$$\int_{\partial\Omega} n \Delta v \cdot \varphi \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} ((\Delta v) \varphi) \, dx = \int_{\Omega} (\Delta \operatorname{div} G) \varphi + \Delta v \cdot \nabla \varphi \, dx$$

$$\| \nabla p \|_{L_2}^2 \leq \left| \int_{\Omega} \Delta \operatorname{div} G \cdot p \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} \Delta v \cdot \nabla p \, dx \right|$$

Zróbmy to w 2 wymiarach

Operator Bogowskiego dla ubogich:

⌂ Rozwiąż bez używania Bogowskiego

$$\begin{cases} \operatorname{div} \Phi = p \in L_2(\Omega), \quad \int p = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$$