Zadanie. Wskazać jakąkolwiek liczbę naturalną k taką, że jeśli $n \geq k$, to zachodzi nierówność

$$\frac{n^2+5n}{1,2^n} < \frac{1}{10}$$

Rozwiązanie. Każdą liczbę naturala można przedstawić w postaci

$$n = 3k \vee n = 3k+1 \vee n = 3k+2.$$

Na mocy nierówności Bernoulliego mamy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$1,2^n = (1+0,2)^n \geq 1+0,2n.$$

Zatem jeśli $n = 3k$

$$\begin{aligned} 1,2^n =& 1,2^{3k} = (1+0,2)^{3k} = (1+0,2)^k(1+0,2)^k(1+0,2)^k \\ \geq& (1+0,2k)(1+0,2k)(1+0,2k) = (1+0,2k)^3 \geq (0,2k)^3 = \left(0,2 \cdot \frac{n}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

Jeśli $n = 3k+1$

$$\begin{aligned} 1,2^n =& 1,2^{3k+1} = (1+0,2)^{3k}(1+0,2) = (1+0,2)^k(1+0,2)^k(1+0,2)^k(1+0,2) \\ \geq& (1+0,2k)(1+0,2k)(1+0,2k)(1+0,2) = (1+0,2k)^3(1+0,2) \\ \geq& (0,2k)^3(1+0,2) \geq (0,2k)^3 \geq \left(0,2 \cdot \frac{n}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

Jeśli natomiast $n = 3k+2$

$$\begin{aligned} 1,2^n =& 1,2^{3k+2} = (1+0,2)^{3k}(1+0,2)^2 = (1+0,2)^k(1+0,2)^k(1+0,2)^k(1+0,2)^2 \\ \geq& (1+0,2k)(1+0,2k)(1+0,2k)(1+0,2)^2 = (1+0,2k)^3(1+0,2)^2 \qquad (1) \\ \geq& (0,2k)^3(1+0,2)^2 \geq (0,2k)^3 \geq \left(0,2 \cdot \frac{n}{3}\right)^3. \end{aligned}$$

Zatem w każdym z trzech możliwych przypadków uzyskujemy nierówność:

$$1,2^n \geq \left(\frac{0,2}{3}n\right)^3.$$

Wracając do naszego zadania. Szacujemy licznik

$$n^2 + 5n \leq 6n^2. \qquad (2)$$

Łącząc nierówności 1 oraz 2 dostajemy

$$\frac{n^2+5n}{1,2^n} \leq \frac{6n^2}{\left(\frac{0,2}{3}n\right)^3}.$$

Nierówność

$$\begin{aligned} \frac{6n^2}{\left(\frac{0,2}{3}n\right)^3} <& \frac{1}{10} \Leftrightarrow \\ \frac{6 \cdot 10}{\left(\frac{0,2}{3}\right)^3} <& n \Leftrightarrow \\ n >& 3^3 \cdot 60 \cdot 5^3. \end{aligned}$$

Odpowiedź. Można wybrać $k = 3^3 \cdot 60 \cdot 5^3 + 1$.