Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Katarzyna Mazowiecka

Nr albumu: 262765

Twierdzenie typu Brezisa–Mironescu i jego zastosowanie do nieliniowych zagadnień własnych

Praca magisterska
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dr hab. Agnieszki Kałamajskiej
Instytut Matematyki

Wrzesień 2012

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data | Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data | Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Podajemy warunki konieczne istnienia funkcji T oraz zbioru X, dla którego zachodzi równoważność $f \in X \Leftrightarrow T(f) \in W^{2,p}$. Następnie prezentujemy wyniki dotyczące regularności nieliniowych zagadnień własnych.

Słowa kluczowe

Nierówności Gagliardo–Nirenberga, nieliniowe zagadnienia własne, twierdzenia o złożeniach w przestrzeniach Sobolewa, przestrzenie Sobolewa

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.0 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

46E35, 26D10, 35J60, 35D10

Tytuł pracy w języku angielskim

Brezis–Mironescu type theorem and its application to nonlinear eigenvalue problems

Spis treści

Wprowadzenie

Celem tej pracy jest prezentacja i dowód nowego twierdzenia typu Brezisa–Mironescu, które podaje własności funkcji T spełniających równoważność

$$f \in L^{2,p}_{\tau,[0,B)} \cap \mathcal{R} \Leftrightarrow T(f) \in W^{2,p},$$

gdzie τ jest pochodną funkcji T, zbiór $L^{2,p}_{\tau,[0,B)}$ jest zdefiniowany w rozdziale 2, $\mathcal{R}$ opisuje warunki brzegowe podane w rozdziale 4.

Praca została podzielona na 5 rozdziałów. W rozdziale 1 piszemy o naszych motywacjach oraz klasycznym twierdzeniu Brezisa i Mironescu o złożeniach w ułamkowych przestrzeniach Sobolewa z 2001 roku, a także podajemy krótko znane fakty dotyczące złożeń funkcji w przestrzeniach Sobolewa.

Rozdział 2 został poświęcony definicjom i podstawowym narzędziom, które posłużą nam w dalszej części pracy. Przytaczamy nierówności typu Gagliardo–Nirenberga, otrzymane niedawno w pracy [AKJP12], na których oparte są rozdziały 4 i 5.

W rozdziale 3 zostały zaprezentowane nowe nielinowe nierówności typu Poincare'go.

W rozdziale 4 zostało przedstawione nowe twierdzenie typu Brezisa–Mironescu, podrozdziały 4.1 i 4.2 osobno traktują o warunku koniecznym i dostatecznym w twierdzeniu. Podrozdział 4.3 przedstawia uogólnienie warunku koniecznego dla funkcji f dowolnego znaku, a następnie postawione zostaje pytanie o uogólnienie warunku dostatecznego. Rozdział 4 zostaje zamknięty podrozdziałem 4.4, w którym zostaje przedstawiona analiza dopuszczalnych wag w twierdzeniach oraz zostają podane przykłady funkcji, które spełniają założenia twierdzeń.

Ostatni rozdział 5 prezentuje wyniki dotyczące regularności nieliniowych zagadnień własnych postaci

$$\begin{cases} \tau(|f(x)|)f''(x) = g(x) & \text{w } (a,b) \cap \{x : f(x) \neq 0\} \\ \qquad f \in \mathcal{R}, \end{cases}$$

gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $\tau : [0,B) \to (0,\infty)$, $0 < B \leqslant \infty$, $g \in L^p((a,b))$, $f \in W^{2,1}_{loc}((a,b))$ i $\mathcal{R}$ definiuje pewne warunki brzegowe. Podrozdział 5.1 jest bezpośrednim wynikiem zastosowania nierówności z rozdziału 3 do zagadnienia, a podrozdział 5.2 stanowi kombinację wyników z rozdziału 4 i podrozdziału 5.1.

Rozdział 1, podrozdział 3.2.1, 4.1, 4.3, 5.2 zostały opracowane przeze mnie samodzielnie. Pozostała część pracy powstała przy współpracy z prof. Agnieszką Kałamajską, między innymi twierdzenia z rozdziałów 3, 5 i podrozdziału 4.2 zostały w szczególnej postaci udowodnione przez panią profesor, a następnie uogólnione przeze mnie. Wyniki z rozdziałów 2, 3, 4 i 5 zostały spisane po angielsku i wkrótce zostaną zgłoszone do publikacji.

Rozdział 1

Motywacje: Praca Brezisa i Mironescu o złożeniach w ułamkowych przestrzeniach Sobolewa

Istnieje wiele pozycji w literaturze poświęconych złożeniom funkcji, nie tylko w przestrzeniach Sobolewa. W 2001 roku w pracy Haïma Brezisa i Petru Mironescu ([BM01]) znajdujemy następujące twierdzenie:

Niech $1 \leqslant s < \infty$, $1 < p < \infty$ i niech

$$m = \begin{cases} s, & \text{jeśli } s \text{ jest liczbą całkowitą} \\ \lfloor s \rfloor + 1, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Połóżmy

$$R = \{f \in C^m(\mathbb{R}) : f(0) = 0, f, f', ..., f^{(m)} \in L^\infty(\mathbb{R})\}.$$

Wówczas, jeśli $f \in R$, to przekształcenie $\psi \mapsto f(\psi)$ jest dobrze określone i ciągłe z przestrzeni $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,sp}(\mathbb{R}^n)$ w przestrzeń $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. *Przez $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ rozumiemy ułamkową przestrzeń Sobolewa–Slobodeckiego (patrz [KUFN77]).*

Motywacjami do powyższej pracy była analiza przestrzeni $X = W^{s,p}(\Omega, S^1) = \{u \in W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^2) : |u| = 1 \text{ p.w.}\}$, dla $0 < s < \infty$, $1 < p < \infty$ i Ω będącej gładkim, jednospójnym obszarem w $\mathbb{R}^n$. W szczególności powyższe twierdzenie miało posłużyć autorom do odpowiedzi na pytanie, czy przestrzeń X jest łukowo spójna i czy przestrzeń $C^\infty(\overline{\Omega}, S^1)$ jest gęsta w zbiorze X. Kolejną motywacją były zastosowania twierdzeń o złożeniach do nieliniowych równań ewolucyjnych (takich jak równanie Schrödingera, patrz [KATO95]).

Brezis i Mironescu podali dosyć skomplikowany dowód wyżej wymienionego twierdzenia oparty na nierówności typu Gagliardo–Nirenberga w przestrzeni Triebela–Lizorkina oraz oszacowaniach na iloczyny funkcji w przestrzeniach Triebela–Lizorkina. Rok później, w 2002 roku Mazja oraz Szaposznikowa podali elementarny dowód, który ponadto dopuszczał przypadek $p = 1$ (patrz [MAZ02]).

Praca Brezisa i Mironescu nie była pierwszą pracą dotyczącą złożeń w przestrzeniach Sobolewa. W oparciu o pracę [BM01] przedstawię kilka faktów dotyczących twierdzeń o złożeniach w przestrzeniach Sobolewa.

- W 1966 roku Moser ([MOSER66]) wskazał klasę funkcji f, dla których złożenie $f(\psi)$ należy do przestrzeni Sobolewa $W^{m,p}$, o ile $\psi \in W^{m,p} \cap L^\infty$ i m jest liczbą całkowitą.
- W 1979 roku Marcus oraz Mizel ([MARC79]) wykazali dla $0 < s < 1$, $1 < p < \infty$, $f(0) = 0$, f - lipschitzowskiej implikację $u \in W^{s,p} \Rightarrow f(u) \in W^{s,p}$
- Znanym jest także fakt ([BREZIS01]), że jeśli $s = n/p$, $1 < p < \infty$, $f \in R$, gdzie $m = \begin{cases} s, & \text{dla } s \text{ całkowitych} \\ \lfloor s \rfloor + 1, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$, wówczas $u \in W^{s,p} \Rightarrow f(u) \in W^{s,p}$.
  W przypadku kiedy $s > n/p$, $1 < p < \infty$ dla $f(0) = 0$, $f \in C^m$ zachodzi $u \in W^{s,p} \Rightarrow f(u) \in Ws, p$. Było to znane już w 1970 roku ([PEET70]).
  Natomiast w 1979 Dahlberg ([DHAL79]) wykazał, że jeśli chcemy mieć podobną implikację dla $1 < s < n/p$, s całkowitego potrzebne są dodatkowe założenia dotyczące u, jego wynik został potem uogólniony do dowolnych $s \in (1, n/p)$ ([RUNST86]). Dahlberg pokazał, że jeśli założyć $1 + 1/p < s < n/p$, jedyne funkcje należące do C^2 określone na $W^{s,p}$ są postaci $f(t) = ct$. Standardowym dodatkowym założeniem na u jest warunek $u \in L^\infty$: jeśli $f(0) = 0$ i $f \in C^m$, wówczas $u \in W^{s,p} \cap L^\infty \Rightarrow f(u) \in W^{s,p}$ ([PEET70]).

Obecnie twierdzenia o złożeniach rozwijają się w kierunku coraz bardziej złożonych przestrzeni- przestrzeni Biesowa (patrz [BOUR08]), przestrzeni Triebela–Lizorkina (patrz [MOUS11]). Nasz główny pomysł polega na zastosowanie nierówności typu Gagliardo–Nirenberga otrzymanej niedawno w pracy [AKJP12].

Powstaje naturalne pytanie z jakiego zbioru wychodząc dostaniemy pełną przestrzeń Sobolewa. W tej pracy podajemy pierwszą odpowiedź, przy pewnych warunkach na funkcje f.

Rozdział 2

Podstawowe pojęcia, definicje i oznaczenia

W pracy będziemy używać standardowych oznaczeń. Przez $W^{m,p}(\Omega)$ i $W^{m,p}_{loc}(\Omega)$ będziemy oznaczać odpowiednio zwykłą i lokalną przestrzeń Sobolewa określoną na zbiorze Ω, a przez $C_0^\infty((a,b))$ przestrzeń funkcji gładkich o zwartym nośniku. Dla $-\infty < a < b < +\infty$, przez $C_p(a,b)$ będziemy oznaczali najlepszą stałą w klasycznej nierówności Poincare'go: $\int_a^b |f(x)|^p dx \leqslant C_p^p(a,b) \int_a^b |f^{'}(x)|^p dx$ dla funkcji znikających co najmniej w jednym z punktów końcowych przedziału (a,b).

Następująca transformata będzie odgrywać istotną rolę w tym i kolejnych rozdziałach.

Definicja 2.0.1 *Niech $0 < B \leqslant \infty$, $h : (0,B) \to (0,\infty)$ będzie ciągłą funkcją i niech H będzie jej daną lokalnie absolutnie ciągłą pierwotną. Definiujemy*

$$\mathcal{T}_h(\lambda) := \frac{H(\lambda)}{h(\lambda)},$$

gdzie $\lambda \in (0,B)$.

Kluczowym narzędziem w naszej pracy będą poniższe nierówności multyplikatywne otrzymane ostatnio w [AKJP12]. Podajemy aż 3 wersje tego twierdzenia, gdyż różnią się one dopuszczalnymi wagami, a także warunkami brzegowymi jakie musi spełniać funkcja f, żeby twierdzenie zachodziło.

Twierdzenie 2.0.2 *Niech $p \geqslant 2$, $0 < B \leqslant \infty$, $h : (0,B) \to (0,\infty)$ będzie funkcją ciągłą, $H, \mathcal{T}_h : (0,B) \to \mathbb{R}$ będą jak w definicji 2.0.1, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Załóżmy ponadto, że funkcja H rozszerza się w sposób ciągły do funkcji $\widetilde{H} : [0,B) \to \mathbb{R}$. Wówczas dla każdej funkcji $f \in \tilde{\mathcal{R}}^0_{[0,B)}(a,b)$, gdzie*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}^0_{[0,B)}(a,b) \quad := \quad & \{f \in W^{2,1}_{loc}((a,b)), f(x) \in [0,B) \ \ p.w. \ na \ \ (a,b) : \\ & \liminf_{R \nearrow b} |f^{'}(R)|^{p-2} f^{'}(R) \widetilde{H}(f(R)) \leqslant 0 \\ & \ i \ \limsup_{r \searrow a} |f^{'}(r)|^{p-2} f^{'}(r) \widetilde{H}(f(r)) \geqslant 0\}, \end{aligned}$$

mamy

$$\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |f^{'}(x)|^p h(f(x)) dx \leqslant \left(\sqrt{p-1}\right)^p \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} \left|f^{''}(x)\mathcal{T}_h(f(x))\right|^{\frac{p}{2}} h(f(x)) dx.$$

Następne twierdzenie dotyczy sytuacji, kiedy h nie koniecznie jest całkowalna w otoczeniu 0. Wymaga to jednak dodatkowych założeń na wagę h.

Twierdzenie 2.0.3 *Niech $p \geqslant 2$, $\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $h : (0,\infty) \to (0,\infty)$ będzie funkcją ciągłą, H, $\mathcal{T}_h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ będą jak w Definicji 2.0.1, $\widetilde{H}(x)$ będzie rozszerzeniem (niekoniecznie ciągłym) funkcji H do 0, $\widetilde{H}(0) = 0$. Załóżmy ponadto, że obie funkcje h i $|\mathcal{T}_h|^{\frac{p}{2}}h$ są albo ograniczone, albo nierosnące w pewnym otoczeniu 0. Wtedy dla wszystkich nieujemnych funkcji $f \in \widetilde{\mathcal{R}}_{\geqslant 0}(a,b)$, gdzie*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{R}}_{\geqslant 0}(a,b) \quad &:= \quad \{f \in W^{2,1}_{loc}((a,b)), f \geqslant 0 \ p.w. \ : \\ &\left(\liminf_{R\nearrow b} |f^{'}(R)|^{p-2}f^{'}(R)\widetilde{H}(f(R)) - \limsup_{r\searrow a} |f^{'}(r)|^{p-2}f^{'}(r)\widetilde{H}(f(r))\right) \leqslant 0\},\end{aligned}$$

mamy

$$\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}} |f^{'}(x)|^p h(f(x))dx \leqslant \left(\sqrt{p-1}\right)^p \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}} \left|f^{''}(x)\mathcal{T}_h(f(x))\right|^{\frac{p}{2}} h(f(x))dx.$$

Następne twierdzenie dopuszcza funkcje dowolnego znaku. Dotyczy przypadku kiedy h jest całkowalna w pewnym otoczeniu 0.

Twierdzenie 2.0.4 *Niech $p \geqslant 2$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $h : (0,\infty) \to (0,\infty)$ będzie funkcją ciągłą, całkowalną w każdym otoczeniu zera, w szczególności jej funkcja pierwotna $H(x) := \int_0^x h(\tau)d\tau$ jest dobrze określona, rozszerza się do 0 oraz jej rozszerzenie $\tilde{H}$ spełnia $\tilde{H}(0) = 0$. Niech $\mathcal{T}_h : (0,\infty) \to (0,\infty)$ będzie jak w Definicji 2.0.1. Wówczas dla każdej funkcji $f \in \tilde{\mathcal{R}}^0(a,b)$, gdzie*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}^0(a,b) \quad &:= \quad \{f \in W^{2,1}_{loc}((a,b)) : \liminf_{R\nearrow b} |f^{'}(R)|^{p-2}f^{'}(R)\mathrm{sign}f(R)\tilde{H}(|f(R)|) \leqslant 0 \\ &\qquad i \ \limsup_{r\searrow a} |f^{'}(r)|^{p-2}f^{'}(r)\mathrm{sign}f(r)\tilde{H}(|f(r)|) \geqslant 0\},\end{aligned}$$

mamy

$$\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}} |f^{'}(x)|^p h(|f(x)|)dx \leqslant \left(\sqrt{p-1}\right)^p \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)0\}} \left|f^{''}(x)\mathcal{T}_h(|f(x)|)\right|^{\frac{p}{2}} h(|f(x)|)dx.$$

W naszej pracy będziemy korzystać z następującego lematu.

Lemat 2.0.5 *Jeżeli $f : [-R,R] \to \mathbb{R}$ jest funkcją absolutnie ciągłą o wartościach w przedziale $[\alpha,\beta]$ i $L : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ jest lipschitzowska, wówczas funkcja $(L\circ f)(x) := L(f(x))$ jest absolutnie ciągła na $[-R,R]$.*

Wprowadzamy nieliniowe przestrzenie Sobolewa oraz Beppo–Levi'ego.

Definicja 2.0.6 *Niech $m \in \mathbb{N}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $0 < B \leqslant \infty$ i $\tau : (0,B) \to (0,\infty)$ będzie ciągłą funkcją.*

i)(rozważane zbiory) *Przez $Y^m_{[0,B)}((a,b))$ będziemy oznaczać zbiór funkcji $f \in W^{m,1}_{loc}((a,b))$ o wartościach w zbiorze $[0,B)$. Przez $f^{(k)}$ będziemy oznaczać ich pochodne dystrybucyjne.*

ii)(nieliniowe przestrzenie Sobolewa) *Przez $W^{m,p}_{\tau,[0,B)}((a,b))$ będziemy oznaczać podzbiór $Y^m_{[0,B)}((a,b))$, do którego należą te funkcje f, dla których*

$$\sum_{k=0}^{m} \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |f^{(k)}(x)|^p \tau^p(f(x))dx < \infty. \tag{2.1}$$

iii)(nieliniowe przestrzenie Beppo–Levi'ego) *Przez* $L^{m,p}_{\tau,[0,B)}((a,b))$ *będziemy oznaczać podzbiór* $Y^m_{[0,B)}((a,b))$*, do którego należą funkcje* f*, dla których*

$$\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |f^{(m)}(x)|^p \tau^p(f(x))dx < \infty. \tag{2.2}$$

Jest jasne, że powyższe zbiory mogą być nieliniowe. W dalszej części pracy funkcje τ będziemy nazywać wagami.

Nasze rozważania będą ograniczone jedynie do przypadku $m \in \{1, 2\}$.

Rozdział 3

Nieliniowe nierówności typu Poincare'go

W tym rozdziale zostaną zaprezentowane nierówności typu Poincare'go. Dowiadujemy się z nich dla jakich funkcji τ, funkcje należące do nieliniowej przestrzeni Beppo-Leviego należą do nieliniowej przestrzeni Sobolewa. Te nierówności będą wykorzystane zarówno w rozdziale 4 jak i 5.

3.1. Nierówności pierwszego rzędu

Definicja 3.1.1 (warunek (P, τ)) *Niech $0 < B \leqslant \infty$, $P : [0, B) \to [0, \infty)$, $\tau : (0, B) \to (0, \infty)$ będą danymi funkcjami ciągłymi, takimi że P jest lokalnie lipschitzowska na $(0, B)$, $P(0) = 0$. Powiemy, że P i τ spełniają warunek (P, τ), jeśli $|P'(\lambda)| \leqslant C\tau(\lambda)$, dla pewnej stałej $C > 0$ niezależnej od $\lambda \in (0, B)$ oraz $\int_0^\lambda \tau(s)ds < \infty$ dla każdego $\lambda > 0$.*

Uwaga 3.1.2 *Zauważmy, że gdy warunek (P, τ) jest spełniony mamy*

$$P(\lambda) \leqslant CT(\lambda), \tag{3.1}$$

gdzie $T(\lambda) = \int_0^\lambda \tau(s)ds$ jest daną funkcją pierwotną τ oraz T jest lokalnie lipschitzowska na $(0, B)$.

Na początku podajemy prosty wniosek z klasycznej nierówności Poincare'go.

Lemat 3.1.3 *Załóżmy, że $1 \leqslant p < \infty$, $-\infty < a < b < +\infty$, $0 < B \leqslant \infty$ i $P : [0, B) \to [0, \infty)$, $\tau : (0, B) \to (0, \infty)$ są funkcjami ciągłymi spełniającymi (P, τ). Wówczas dla dowolnej funkcji $f \in Y^1_{[0,B)}((a, b))$, dla której istnieje ciągłe przedłużenie do jednego z punktów końcowych $z \in \{a, b\}$, w taki sposób, że $f(z) = 0$ zachodzi*

$$\int_a^b (P(f(x)))^p \, dx \leqslant C^p C_p^p(a, b) \int_{(a,b)\cap\{f(x)>0\}} |f'(x)|^p \, (\tau(f(x)))^p \, dx, \tag{3.2}$$

gdzie C jest stałą z warunku (P, τ).

Dowód. Możemy założyć, że prawa strona w (3.2) jest skończona. Z lematu 2.0.5 funkcja dana wzorem $\tilde{f} = P \circ f$ jest lokalnie absolutnie ciągła na (a, b), w szczególności $|\tilde{f}'| = |P'(f) \cdot f'| \leqslant C\tau(f)|f'|$, a ostatni składnik jest całkowalny z p-tą potęgą. Zatem $\tilde{f} \in W^{1,p}((a, b))$ i znika w jednym z punktów końcowych odcinka (a, b). Dowód wynika z klasycznej nierówności Poincare'go zastosowanej do funkcji $\tilde{f}$.

□

Do następnych nierówności będziemy potrzebowali specjalnej formy funkcji P zdefiniowanej za pomocą τ. Z tego powodu wprowadzamy poniższą definicję.

Definicja 3.1.4 (warunek - (τ, p)) *Niech $0 < B \leqslant \infty$, $\tau : (0, B) \to (0, \infty)$ i $1 \leqslant p < \infty$. Powiemy, że warunek (τ, p) jest spełniony jeśli:*

a) τ jest ciągła na $(0, B)$ i $\int_0^\lambda (\tau(s))^p ds < \infty$ dla każdego $\lambda \in (0, B)$,

b) Transformata τ dana wzorem

$$P_{\tau,p}(\lambda) := \begin{cases} \int_0^\lambda (\tau(s))^p ds \cdot (\tau(\lambda))^{1-p} & \text{dla} \quad \lambda > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad \lambda = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

spełnia warunek (P, τ) ze stałą $C = C_{\tau,p}$. Funkcję $P_{\tau,p}$ będziemy nazywać p-tą transformatą τ.

Uwaga 3.1.5 *Gdy $p = 1$ wówczas funkcja $P_{\tau,p}$ jest transformatą Hardy'ego funkcji τ, to jest $P_{\tau,1}(\lambda) = \int_0^\lambda \tau(s)ds$.*

Uwaga 3.1.6 *Gdy spełniony jest warunek (τ, p) wówczas p-ta transformata τ spełnia nierówność $P_{\tau,p} \leqslant C_{\tau,p} T(\lambda)$, gdzie $\lambda \in [0, \infty)$ i $T(\lambda) = \int_0^\lambda \tau(s)ds$. (Patrz Uwaga 3.1.2)*

Jako wniosek z Lematu 3.1.3 dostajemy następujący specjalny wariant nieliniowej nierówności Poincare'go. Prosty dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Stwierdzenie 3.1.7 (specjalne nierówności typu Poincare'go) *Przypuśćmy, że spełnione są warunki: $1 \leqslant p < \infty$, $0 < B \leqslant \infty$, $-\infty < a < b < +\infty$, a także ciągła funkcja $\tau : (0, B) \to (0, \infty)$ spełnia (τ, p). Wówczas dla dowolnej funkcji $f \in Y^1_{[0,B)}((a, b))$, dla której istnieje ciągłe przedłużenie do jednego z punktów końcowych $z \in \{a, b\}$, w taki sposób, że $f(z) = 0$, zachodzi*

$$\int_a^b (P_{\tau,p}(f(x)))^p \, dx \leqslant \bar{C}^p_{\tau,p} \int_{(a,b)\cap\{f(x)>0\}} |f'(x)|^p \, (\tau(f(x)))^p \, dx, \tag{3.4}$$

gdzie $\bar{C}_{\tau,p} = C_{\tau,p} C_p(a, b)$.

Wniosek 3.1.8 *Dla każdego $-\infty < a < b < +\infty$, $p > 1$, $\theta > -\frac{1}{p}$, $B < \infty$ i dowolnej $f \in Y^1_{[0,B)}((a, b))$ takiej, że f ma ciągłe przedłużenie do $z \in \{a, b\}$, $f(z) = 0$, mamy*

$$\int_a^b f(x)^{p(1+\theta)} dx \leqslant C^p_{p,\theta}(a, b) \int_{(a,b)\cap\{f(x)>0\}} \left| f'(x) \right|^p f(x)^{\theta p} dx,$$

gdzie $C_{p,\theta}(a, b) = C_p(a, b)(1 + \theta)$.

Dowód. Stosujemy Twierdzenie 3.1.7. Gdy $\theta > -\frac{1}{p}$, funkcja $\tau(\lambda) = \lambda^\theta$ definiuje $P_{\tau,p}(\lambda) = \frac{1}{\theta p+1} \lambda^{1+\theta}$ i $P_{\tau,p}$ spełnia (P, τ) z $C_{p,\tau} = \frac{1+\theta}{\theta p+1}$. Zatem powyższy wniosek wynika natychmiast z Twierdzenia 3.1.7. □

Uwaga 3.1.9 *Dla $\theta < -\frac{1}{p}$ warunek (τ, p) nie jest spełniony dla $\tau(\lambda) = \lambda^\theta$, gdyż ta funkcja nie jest p-całkowalna.*

3.2. Nierówności drugiego rzędu

Stwierdzenie 3.2.1 *Przypuśćmy, że $p \geqslant 2$, funkcja $\tau : (0, B) \to (0, \infty)$ spełnia (τ, p) z funkcją $P_{\tau,p}$ jak w definicji 3.1.4, $H(\lambda) = \int_0^\lambda (\tau(s))^p ds$*

Jeśli $f \in \mathcal{R}^0_{[0,B)}(a, b)$, gdzie

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^0_{[0,B)}(a,b) \quad := \quad & \{f \in W^{2,1}_{loc}((a,b)), f(x) \in [0,B) \ \ p.w. \ na \ (a,b) : \\ & \liminf_{R \nearrow b} |f^{'}(R)|^{p-2} f^{'}(R) H(f(R)) \leqslant 0 \\ & i \ \limsup_{r \searrow a} |f^{'}(r)|^{p-2} f^{'}(r) H(f(r)) \geqslant 0\}, \end{aligned}$$

Wówczas mamy

$$\int_a^b (P_{\tau,p}(f))^p dx \quad \leqslant \quad \widetilde{A} \int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} |f^{''}|^p \tau(f)^p dx \tag{3.5}$$

$$\int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} |f^{'}|^p \tau(f)^p dx \quad \leqslant \quad \widetilde{B} \int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} |f^{''}|^p \tau(f)^p dx \tag{3.6}$$

gdzie $\widetilde{A} = (p-1)^p C^{2p}_{\tau,p} C^{2p}_p(a,b)$, $\widetilde{B} = (p-1)^p C^p_{\tau,p} C^p_p(a,b)$.

Dowód. Dla uproszczenia przyjmujemy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} \alpha \quad &:= \quad \int_a^b (P_{\tau,p}(f))^p dx \\ \beta \quad &:= \quad \int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} |f^{'}|^p \tau(f)^p dx \\ \gamma \quad &:= \quad \int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} |f^{''}|^p \tau(f)^p dx. \end{aligned}$$

Aby przekonać się, że zachodzi (3.5) zastosujemy twierdzenie 2.0.2 z $h(\lambda) = \tau^p(\lambda)$, które w połączeniu z nierównością Schwartza daje nam

$$\begin{aligned} \beta \quad &\leqslant \quad \left(\sqrt{p-1}\right)^p \int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} |f^{''} \mathcal{T}_{\tau^p}(f)|^{p/2} \tau(f)^p dx \\ &\leqslant \quad \left(\sqrt{p-1}\right)^p \left(\int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} |f^{''}|^p \tau(f)^p dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} (\mathcal{T}_{\tau^p}(f)\tau(f))^p \, dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Jako funkcję pierwotną τ^p możemy wybrać $\int_0^\lambda \tau^p(s) ds$, aby $\mathcal{T}_{\tau^p}(\lambda) \cdot \tau(\lambda)$ było równe dokładnie $P_{\tau,p}(\lambda)$. To implikuje

$$\beta \leqslant (\sqrt{p-1})^p \gamma^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \tag{3.7}$$

Następnie stosujemy Stwierdzenie 3.1.7 i otrzymujemy

$$\alpha \leqslant \bar{C}^p_{\tau,p} \beta, \tag{3.8}$$

gdzie $\bar{C}_{\tau,p} = C_{\tau,p} C_p(a,b)$. To w połączeniu z (3.7) daje nam $\alpha \leqslant \bar{C}^p_{\tau,p} (\sqrt{p-1})^p \gamma^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}}$. W rezultacie

$$\alpha^{\frac{1}{2}} \leqslant \bar{C}^p_{\tau,p} (\sqrt{p-1})^p \gamma^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

daje (3.5). Teraz (3.6) wynika z (3.7), a także (3.9). □

Stwierdzenie 3.2.2 *Niech $p, \tau, P_{\tau,p}, f$ będą takie same jak w Stwierdzeniu 3.2.1. Ponadto niech τ spełnia następujący warunek:*

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \tau(s)^p ds \geqslant D\tau(\lambda)^p, \text{ dla każdego } 0<\lambda<B. \tag{3.10}$$

z pewną stałą $D>0$ niezależną od λ. Wówczas następujące nierówności są spełnione

$$\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} f^p\tau(f)^p dx \leqslant \widetilde{D}\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |f^{''}|^p\tau(f)^p dx, \tag{3.11}$$

$$\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |f^{'}|^p\tau(f)^p dx \leqslant \widetilde{B}\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |f^{''}|^p\tau(f)^p dx, \tag{3.12}$$

gdzie $\widetilde{D}=\frac{1}{D^p}(p-1)^pC_{\tau,p}^{2p}C_p^{2p}(a,b)$, $\widetilde{B}=(p-1)^pC_{\tau,p}^pC_p^p(a,b)$.

Dowód. Po krótkich przekształceniach przekonujemy się, że przy założeniu (3.10) mamy też $D\lambda\tau(\lambda)\leqslant P_{\tau,p}(\lambda)$, zatem z Twierdzenia 3.2.1 dostajemy (3.11) z $\widetilde{D}=\frac{1}{D^p}\widetilde{A}$. Druga stała pozostaje niezmieniona. □

3.2.1. Uogólnienie do funkcji dowolnego znaku

Stwierdzenie 3.2.3 *Przypuśćmy, że p, a, b, τ, H będą jak w Stwierdzeniu 3.2.1. Jeśli $f\in\tilde{\mathcal{R}}^0(a,b)$, gdzie*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}^0(a,b) &:= \{f\in W^{2,1}_{loc}((a,b)) : \liminf_{R\nearrow b}|f^{'}(R)|^{p-2}f^{'}(R)\mathrm{sign}f(R)\tilde{H}(|f(R)|)\leqslant 0\\ &\quad i \limsup_{r\searrow a}|f^{'}(r)|^{p-2}f^{'}(r)\mathrm{sign}f(r)\tilde{H}(|f(r)|)\geqslant 0\},\end{aligned}$$

to

$$\begin{aligned}\int_a^b (P_{\tau,p}(|f|))^p dx &\leqslant \widetilde{A}\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}}|f^{''}|^p\tau(|f|)^p dx\\ \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}}|f^{'}|^p\tau(|f|)^p dx &\leqslant \widetilde{B}\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}}|f^{''}|^p\tau(|f|)^p dx\end{aligned}$$

gdzie $\widetilde{A}=(p-1)^pC_{\tau,p}^{2p}C_p^{2p}(a,b)$, $\widetilde{B}=(p-1)^pC_{\tau,p}^pC_p^p(a,b)$.

Dowód. Prowadzimy podobny dowód jak w Stwierdzeniu 3.2.1 tylko dla funkcji $|f|$ zamiast f. Jedyna różnica polega na tym, że tym razem nie możemy stosować Twierdzenia 2.0.2 tylko 2.0.4. □

Poniższe Stwierdzenie jest także prostą konsekwencją Stwierdzenia 3.2.2 oraz Twierdzenia 2.0.4.

Stwierdzenie 3.2.4 *Niech $p, \tau, P_{\tau,p}, a, b$ będą takie same jak w Stwierdzeniu 3.2.2. Ponadto załóżmy, że funkcja f jest taka sama jak w Stwierdzeniu 3.2.3. Wówczas spełnione są następujące nierówności*

$$\begin{aligned}\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}}|f|^p\tau(|f|)^p dx &\leqslant \widetilde{D}\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}}|f^{''}|^p\tau(|f|)^p dx,\\ \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}}|f^{'}|^p\tau(|f|)^p dx &\leqslant \widetilde{B}\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}}|f^{''}|^p\tau(|f|)^p dx,\end{aligned}$$

gdzie $\widetilde{D}=\frac{1}{D^p}(p-1)^pC_{\tau,p}^{2p}C_p^{2p}(a,b)$, $\widetilde{B}=(p-1)^pC_{\tau,p}^pC_p^p(a,b)$.

Rozdział 4

Twierdzenie typu Brezisa–Mironescu

Naszym celem jest podanie klasy funkcji τ, dla których zachodzi równoważność

$$f \in L^{2,p}_{\tau,[0,B)} \cap \mathcal{R} \Leftrightarrow T(f) \in W^{2,p} \cap \widetilde{\mathcal{R}},$$

gdzie T jest absolutnie ciągłą funkcją pierwotną τ, $0 < B \leqslant \infty$, a $\mathcal{R}$ i $\widetilde{\mathcal{R}}$ definiują pewne warunki brzegowe.

Osobno rozpatrzymy warunek konieczny i dostateczny powyższej implikacji.

4.1. Warunek konieczny

4.1.1. Przykład z wagami jednorodnymi

Stwierdzenie 4.1.1 *Przypuśćmy, że* $p \geqslant 2, \theta > -\frac{1}{p}$, $B < \infty$, $\tau(\lambda) = \lambda^\theta$ *i funkcja* $T(\lambda) = \frac{1}{\theta+1}\lambda^{\theta+1}$ *będzie pierwotną* τ. *Jeśli* $f \in L^{2,p}_{\tau,[0,B)} \cap \widetilde{\mathcal{R}}_{\geqslant 0}((a,b))$, *to* $T(f) \in W^{2,p}((a,b))$, *gdzie*

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{R}}_{\geqslant 0}(a,b) \quad := \quad & \{f \in W^{2,1}_{loc}((a,b)), f \geqslant 0 \ p.w. \ : \\ & \left(\liminf_{R \nearrow b} |f'(R)|^{p-2} f'(R) \widetilde{H}(f(R)) - \limsup_{r \searrow a} |f'(r)|^{p-2} f'(r) \widetilde{H}(f(r)) \right) \leqslant 0 \\ & i\ g = \begin{cases} \tau(f) \cdot f' & gdy\ f > 0 \\ 0 & gdy\ f = 0 \end{cases} \ jest\ ciągła\}. \end{aligned}$$

Dowód. Z definicji słabych pochodnych pokazujemy

$$\begin{aligned} (T(f))' &= \tau(f) f' \cdot \chi_{\{x: f(x) > 0\}} \\ (T(f))'' &= \left(\tau'(f)(f')^2 + \tau(f) f'' \right) \cdot \chi_{\{x: f(x) > 0\}}. \end{aligned}$$

Najpierw wykazujemy $T(f) \in W^{1,1}_{loc}(a,b)$ i obliczamy słabą pochodną. Oczywiście $T(f) \in$

$L^1_{loc}(a,b)$. Niech $\phi \in C_0^\infty((a,b))$ wówczas

$$\begin{aligned} <(T(f))', \phi> &:= -\int_a^b T(f)\phi' dx \\ &= -\int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} T(f)\phi' dx \\ &= -\sum_k \int_{I_k} T(f)\phi' dx, \end{aligned}$$

gdzie I_k są rozłącznymi, otwartymi odcinkami takimi, że $\bigcup_k I_k = (a,b) \cap \{x : f(x) > 0\}$. Dowolny odcinek I_k jest postaci $I_k = (\alpha, \beta)$ dla pewnych $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, niech $I_{k_\epsilon} = [\alpha+\epsilon, \beta-\epsilon]$. Wówczas mamy

$$\int_{I_k} T(f)\phi' dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{I_{k_\epsilon}} T(f)\phi' dx.$$

Na odcinku $[\alpha+\epsilon, \beta-\epsilon]$ funkcja $T(f)$ należy do przestrzeni $W^{1,1}(I_{k_\epsilon})$ (korzystamy z Lematu 2.0.5)zatem możemy całkować przez części i mamy

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{I_{k_\epsilon}} T(f)\phi' dx &= \lim_{\epsilon\to 0} \left(T(f)\phi\Big|_{\alpha+\epsilon}^{\beta-\epsilon} - \int_{I_{k_\epsilon}} (\tau(f)f')\,\phi dx \right) \\ &= -\int_{I_k} (\tau(f)f')\,\phi dx. \end{aligned}$$

Zatem

$$<(T(f))', \phi> = \int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} (\tau(f)f')\,\phi dx.$$

Podobnie, dzięki założeniu o ciągłości funkcji $g = \begin{cases} \tau(f)\cdot f' & \text{gdy } f>0 \\ 0 & \text{gdy } f=0 \end{cases}$ przekonujemy się o słuszności wzoru na drugą pochodną $T(f)$.

Po prostych rachunkach przekonujemy się, że założenia Stwierdzenia 3.2.2 są spełnione, stąd $f \in W^{2,p}_{\tau,[0,B)}((a,b))$. Teraz jest jasne, że

$$\begin{aligned} \int_a^b (T(f))^p\, dx &= \left(\frac{1}{\theta+1}\right)^p \int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} f^{\theta p} \cdot f^p dx \\ &= \left(\frac{1}{\theta+1}\right)^p \int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} (f\tau(f))^p\, dx < \infty. \end{aligned}$$

Mamy też

$$\int_a^b \left|(T(f(x)))'\right|^p dx = \int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} \left|f'\tau(f)\right|^p dx < \infty.$$

Wreszcie obliczamy

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b \left|(T(f(x)))''\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} \left|\theta f^{\theta-1}(f')^2 + f^\theta f''\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \left(\int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} \left|\theta f^{\theta-1}(f')^2\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_{(a,b)\cap\{x: f(x)>0\}} \left|f^\theta f''\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Drugi składnik ostatniej sumy jest skończony z założenia. Ograniczoność pierwszego wynika ze Twierdzenia 2.0.3. Faktycznie, stosujemy Twierdzenie dla $h(\lambda) = \lambda^{(\theta-1)p}$, wówczas obie funkcje h i $|\mathcal{T}_h(\lambda)|^p \cdot\ h(\lambda) = \frac{1}{(\theta-1)p+1}\lambda^{\theta p}$ są albo ograniczone albo nierosnące w otoczeniu 0 i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} \left(f'\right)^{2p} f^{(\theta-1)p}dx &\leqslant \left(\frac{2p-1}{|(\theta-1)p+1|}\right)^p \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} \left|f''f\right|^p f^{(\theta-1)p}dx \\
&= \left(\frac{2p-1}{|(\theta-1)p+1|}\right)^p \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} \left|f''\tau(f)\right|^p dx \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

To kończy dowód. □

4.1.2. Warunki konieczne dla ogólnych wag

W tym podrozdziale zostaną zaprezentowane dwa stwierdzenia. Jednak dowód ich będzie przebiegał prawie tak samo. W obu przypadkach chodzi o to, żeby móc stosować odpowiednią wersję nierówności multyplikatywnej z rozdziału 2. Zatem Stwierdzenia są dwa ze względu na drobne różnice w założeniach brzegowych, które zachodzą dla różnych wag w nierówności.

Stwierdzenie 4.1.2 *Niech $p \geqslant 2$, $0 < B \leqslant \infty$, funkcja τ będzie taka sama jak w Stwierdzeniu 3.2.2, ponadto niech τ będzie albo rosnąca, albo malejąca, funkcja T niech będzie dana wzorem $T(\lambda) = \int_0^\lambda \tau(s)ds$ dla $0 \leqslant \lambda \leqslant B$. Ponadto niech $H(\lambda) := \int_0^\lambda |\tau'(s)|^p ds < \infty$ dla każdego $0 < \lambda \leqslant B$ i istnieją stałe $C_1, C_2, C_3 > 0$ niezależne od λ, takie że*

$$\begin{aligned}
|T(\lambda)| &\leqslant C_1\lambda\tau(\lambda) && (4.1)\\
\lambda\left|\tau'(\lambda)\right| &\leqslant C_2\tau(\lambda) && (4.2)\\
\int_0^\lambda |\tau'(s)|^p ds &\leqslant C_3\lambda\,|\tau'(\lambda)|^p. && (4.3)
\end{aligned}$$

Jeśli $f \in L^{2,p}_{[0,B)} \cap \tilde{\mathcal{R}}^0_{[0,B)}((a,b))$ wówczas $T(f) \in W^{2,p}((a,b))$, gdzie

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}}^0_{[0,B)}(a,b) \ := \ &\{f \in W^{2,1}_{loc}((a,b)), f(x) \in [0,B) \ \ p.w.\ na\ \ (a,b) :\\
&\liminf_{R\nearrow b} |f'(R)|^{p-2}f'(R)H(f(R)) \leqslant 0\\
&\ i\ \limsup_{r\searrow a} |f'(r)|^{p-2}f'(r)H(f(r)) \geqslant 0\}.
\end{aligned}$$

Dowód. Podamy dowód tylko w przypadku, kiedy τ jest rosnąca, dowód drugiego przypadku przebiega analogicznie.

Spełnione są założenia Stwierdzenia 3.2.2, dlatego $f \in W^{2,p}_{\tau,[0,B)}((a,b))$. Własność $\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |T(f)|^p dx < \infty$ jest wnioskiem z (4.1) oraz (3.11). Nierówność $\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} \left|(T(f))'\right|^p dx < \infty$ wynika bezpośrednio z (3.12). Tymczasem aby przekonać się o tym, że $\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} \left|(T(f))''\right|^p dx$ jest ograniczona potrzebujemy poczynić więcej założeń na funkcję τ.

$$\begin{aligned}\left(\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}\left|(T(f))^{''}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}\left|\tau^{'}(f)(f^{'})^2+\tau(f)f^{''}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \left(\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}\left|\tau^{'}(f)(f^{'})^2\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad+\left(\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}\left|\tau(f)f^{''}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (I)^{\frac{1}{p}}+(II)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Z założeń $II<\infty$. Stosując Twierdzenie 2.0.2 z funkcją $h(\lambda)=\left|\tau^{'}(\lambda)\right|^p$ dostajemy

$$I=\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}\left|f^{'}\right|^{2p}\left|\tau^{'}(f)\right|^p dx\leqslant(2p-1)^p\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}\left|f^{''}\mathcal{T}_h(f)\tau^{'}(f)\right|^p dx.$$

Dlatego wystarczy pokazać

$$\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}\left|f^{''}\mathcal{T}_h(f)\tau^{'}(f)\right|^p dx\leqslant C\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}\left|f^{''}\right|^p|\tau(f)|^p dx$$

dla pewnej stałej $C>0$. Zatem przekonując się o prawdziwości nierówności

$$\mathcal{T}_h(\lambda)\tau^{'}(\lambda)\leqslant C^{\frac{1}{p}}\tau(\lambda)$$

dla $0<\lambda\leqslant B$ dostaniemy tezę. Wybierając $H(\lambda)$ dane jak w założeniach Stwierdzenia jako funkcję pierwotną h i po krótkich uproszczeniach otrzymujemy do pokazania

$$C^{-\frac{1}{p}}\frac{\tau^{'}(\lambda)}{\tau(\lambda)}\leqslant\frac{\left(\tau^{'}(\lambda)\right)^p}{\int_0^\lambda(\tau^{'}(s))^p\,ds}.$$

A to z kolei równoważne poniższej nierówności

$$\left(\log\left(\tau(\lambda)\right)^{C^{-\frac{1}{p}}}\right)^{'}\quad\leqslant\quad\left(\log\left(\int_0^\lambda\left(\tau^{'}(s)\right)^p ds\right)\right)^{'},$$

która zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$0\quad\leqslant\quad\left(\log\left(\frac{\int_0^\lambda\left(\tau^{'}(s)\right)^p ds}{(\tau(\lambda))^{C^{-\frac{1}{p}}}}\right)\right)^{'}.$$

Dlatego też pozostaje nam wykazać, że funkcja $\frac{\int_0^\lambda\left(\tau^{'}(s)\right)^p ds}{(\tau(\lambda))^{C^{-\frac{1}{p}}}}$ jest rosnąca. Czyli przekonać się o prawdziwości poniższej nierówności

$$\left(\frac{\int_0^\lambda\left(\tau^{'}(s)\right)^p ds}{(\tau(\lambda))^{C^{-\frac{1}{p}}}}\right)^{'}\geqslant 0.$$

Ta z kolei jest równoważna

$$\begin{aligned}\left(\tau^{'}(\lambda)\right)^{p}(\tau(\lambda))^{C^{-\frac{1}{p}}}-C^{-\frac{1}{p}}\int_{0}^{\lambda}\left(\tau^{'}(s)\right)^{p}ds\,(\tau(\lambda))^{C^{\frac{1}{p}}-1}\tau^{'}(\lambda) &\geqslant 0\\ \left(\tau^{'}(\lambda)\right)^{p-1}\tau(\lambda) &\geqslant C^{-\frac{1}{p}}\int_{0}^{\lambda}\left(\tau^{'}(s)\right)^{p}ds.\end{aligned}$$

Ponieważ założyliśmy (4.3) wystarczy wykazać

$$C_3C^{-\frac{1}{p}}\lambda\left(\tau^{'}(\lambda)\right)^{p}\leqslant\tau(\lambda)\left(\tau^{'}(\lambda)\right)^{p-1}$$

Ale jednym z naszych założeń było $\lambda\tau^{'}(\lambda)\leqslant C_2\tau(\lambda)$, stąd $I<\infty$, Co kończy dowód.

□

Stwierdzenie 4.1.3 *Niech $p\geqslant 2$, $0<B\leqslant\infty$, funkcja τ będzie taka sama jak w Stwierdzeniu 3.2.2, ponadto niech τ będzie albo malejąca i wypukła w pewnym otoczeniu 0, albo rosnąca i wklęsła w pewnym otoczeniu 0, funkcja h niech będzie dana wzorem $h(\lambda):=|\tau'(\lambda)|^p$ i niech H będzie jej pierwotną spełniającą*

$$\frac{h(\lambda)}{H(\lambda)}\leqslant\frac{p-1}{p}\cdot\frac{h'(\lambda)}{h(\lambda)},\tag{4.4}$$

dla wszystkich λ z pewnego otoczenia 0. Dalej niech $\widetilde{H}$ będzie (niekoniecznie ciągłym) rozszerzeniem do 0 funkcji H, spełniającym $\widetilde{H}(0)=0$. Niech funkcja $T:[0,B)\to[0,\infty)$ będzie zdefiniowana wzorem $T(\lambda)=\int_0^\lambda\tau(s)ds$. Ponadto istnieją stałe $C_1,C_2,C_3>0$ niezależne od λ, takie że

$$\begin{aligned}|T(\lambda)| &\leqslant C_1\lambda\tau(\lambda) &(4.5)\\ \lambda\left|\tau^{'}(\lambda)\right| &\leqslant C_2\tau(\lambda) &(4.6)\\ |H(\lambda)| &\leqslant C_3\lambda h(\lambda) &(4.7)\end{aligned}$$

Jeśli $f\in L^{2,p}_{[0,B)}\cap\widetilde{\mathcal{R}}_{\geqslant 0}((a,b))$ wówczas $T(f)\in W^{2,p}((a,b))$, gdzie

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{R}}_{\geqslant 0}(a,b) &:= \{f\in W^{2,1}_{loc}((a,b)),f\geqslant 0\ p.w.\ :\\ &\left(\liminf_{R\nearrow b}|f^{'}(R)|^{p-2}f^{'}(R)\widetilde{H}(f(R))-\limsup_{r\searrow a}|f^{'}(r)|^{p-2}f^{'}(r)\widetilde{H}(f(r))\right)\leqslant 0\\ &i\ g=\begin{cases}\tau(f)\cdot f' & gdy\ f>0\\ 0 & gdy\ f=0\end{cases}\ jest\ ciągła\}.\end{aligned}$$

Dowód. Podobnie jak poprzednio dowód przeprowadzimy tylko w jednym przypadku – gdy funkcja τ jest rosnąca i wklęsła w pewnym otoczeniu 0. Dowód drugiego przypadku przebiega podobnie.

Jedyna różnica między dowodem tego stwierdzenia, a Stwierdzenia 4.1.2 polega na wykazaniu nierówności

$$\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}\left|f^{'}\right|^{2p}\left|\tau^{'}(f)\right|^{p}dx\leqslant(2p-1)^p\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}\left|f^{''}\right|^{p}|\mathcal{T}_h(f)|^p\left|\tau^{'}\right|^{p}dx.$$

Nie możemy, jak w poprzednim przypadku stosować Twierdzenia 2.0.2, gdyż tym razem funkcja h może nie być całkowalna w otoczeniu 0. Dlatego też zamierzamy posłużyć się Twierdzeniem 2.0.3 – musimy sprawdzić, czy założenia tego twierdzenia są spełnione.

Na początku przekonujemy się, że z założeń o monotoniczności – funkcja τ jest nierosnąca i założenia o wklęsłości w otoczeniu 0 wynika

$$(h(\lambda))' = p\left(\tau'(\lambda)\right)^{p-1}\tau''(\lambda) \leqslant 0,$$

dla λ w pewnym otoczeniu 0. Stąd h jest malejąca w pewnym otoczeniu 0. Teraz pozostaje nam przekonać się, że funkcja $|\mathcal{T}_h|^p\, h(\lambda)$ jest także malejąca w pewnym otoczeniu 0. Obliczamy

$$|\mathcal{T}_h|^p\, h(\lambda) = |H(\lambda)|^p\,(h(\lambda))^{1-p},$$

a następnie jej słabą pochodną

$$\left(|\mathcal{T}_h|^p\, h(\lambda)\right)' = \frac{|H(\lambda)|^{p-1}}{|h(\lambda)|^{p-1}}\left(p\cdot \operatorname{sign}(H(\lambda))h(\lambda) + (1-p)\operatorname{sign}(H(\lambda))\frac{H(\lambda)}{h(\lambda)}h'(\lambda)\right).$$

Pierwszy czynnik jest nieujemny, więc musimy jedynie sprawdzić, czy

$$p\cdot \operatorname{sign}(H(\lambda))h(\lambda) + (1-p)\operatorname{sign}(H(\lambda))\frac{H(\lambda)}{h(\lambda)}h'(\lambda) \leqslant 0.$$

w pewnym otoczeniu 0. Ta nierówność, po krótkich przekształceniach, przybiera równoważną postać

$$p\cdot\frac{h(\lambda)}{H(\lambda)} \leqslant (p-1)\frac{h'(\lambda)}{h(\lambda)},$$

co było naszym założeniem.

Pozostała część dowodu przebiega analogicznie jak w Stwierdzeniu 4.1.2. □

4.2. Warunek dostateczny

4.2.1. Przykład z wagami jednorodnymi

Twierdzenie 4.2.1 *Przypuśćmy, że* $p \geqslant 2, 0 < B \leqslant \infty$, $\theta > 0$, *ciągła funkcja* $\tau : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *jest dana wzorem* $\tau(\lambda) = \lambda^\theta$ *i* $T(\lambda) = \frac{1}{\theta+1}\lambda^{\theta+1}$ *będzie absolutnie ciągłą funkcją pierwotną* τ. *Ponadto niech* $h(\lambda) = \lambda^{-p}$, $H(\lambda) = \frac{1}{-p+1}\lambda^{-p+1}$, *a* $\widetilde{H}$ *będzie rozszerzeniem funkcji* H *do* 0, *takim że* $\widetilde{H}(0) = 0$. *Jeśli* $T(f) \in W^{2,p} \cap \widetilde{\mathcal{R}}_{\geqslant 0}((a,b))$ *wtedy* $f \in L^{2,p}_{\tau,[0,B)}((a,b))$, *gdzie*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{R}}_{\geqslant 0}(a,b) \;:=\; &\{u \in W^{2,1}_{loc}((a,b)), u \geqslant 0 \ p.w. \ : \\ &\left(\liminf_{R\nearrow b}|u'(R)|^{p-2}u'(R)\widetilde{H}(u(R)) - \limsup_{r\searrow a}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\widetilde{H}(u(r))\right) \leqslant 0\}.\end{aligned}$$

Dowód. Ponieważ $\left(\frac{1}{\theta+1}f^{\theta+1}\right)^{''} = \left(f^{''}f^{\theta} + \theta f^{\theta-1}(f^{'})^2\right) \cdot \chi_{\{x:f(x)>0\}}$ p.w. musimy jedynie pokazać $\left(\theta f^{\theta-1}(f^{'})^2\right) \cdot \chi_{\{x:f(x)>0\}} \in L^p$. Zauważmy, że w zbiorze $\{x : f(x) > 0\}$

$$\theta f^{\theta-1}(f^{'})^2 = \frac{\theta}{(\theta+1)^2}\frac{1}{f^{\theta+1}}\left((f^{\theta+1})^{'}\right)^2$$

Funkcja h jest nierosnąca, a funkcja $|\mathcal{T}_h(\lambda)|^p\, h(\lambda) = \left(\frac{1}{p-1}\right)^p$ jest stała, więc w szczególności jest też nierosnąca. Zatem możemy zastosować Twierdzenie 2.0.3 do funkcji $g = f^{\theta+1}$ z wagą $h(\lambda) = \lambda^{-p}$.

$$\begin{aligned}
\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} \frac{\left((f^{\theta+1})^{'}\right)^{2p}}{(f^{\theta+1})^p} &\leqslant \left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{-p} \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} \left|\left(f^{\theta+1}\right)^{''}\right|^p dx \\
&= \left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{p} \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |T(f)|^p\, dx.
\end{aligned}$$

□

4.2.2. Warunki dostateczne dla ogólnych wag

Twierdzenie 4.2.2 *Niech $p \geqslant 2$, $0 < B \leqslant \infty$, $\tau : (0,B) \to (0,\infty)$ będzie ciągłą, ściśle monotoniczną, całkowalną na przedziale $(0,B)$ funkcją. Niech $T : [0,B) \to [0,\infty)$ będzie dane wzorem $T(\lambda) = \int_0^\lambda \tau(s)ds$, dalej niech $h(\lambda) = \lambda^{-p}$, $H(\lambda) = \frac{1}{-p+1}\lambda^{-p+1}$, a $\widetilde{H}$ będzie rozszerzeniem funkcji H do 0, takim że $\widetilde{H}(0) = 0$. Ponadto załóżmy*

$$T(\lambda) \leqslant C_1 \lambda \tau(\lambda), \tag{4.8}$$

$$\lambda \left|\tau^{'}(\lambda)\right| \leqslant C_2 \tau(\lambda), \tag{4.9}$$

gdzie C_1 i C_2 są pewnymi stałymi niezależnymi od λ. Wówczas $T(f) \in W^{2,p} \cap \widetilde{\mathcal{R}}_{\geqslant 0}((a,b))$ implikuje $f \in L^{2,p}_{\tau,[0,B)}((a,b))$, gdzie

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{R}}_{\geqslant 0}(a,b) \;:=\; &\{u \in W^{2,1}_{loc}((a,b)), u \geqslant 0 \text{ p.w. } : \\
&\left(\liminf_{R\nearrow b} |u^{'}(R)|^{p-2}u^{'}(R)\widetilde{H}(u(R)) - \limsup_{r\searrow a} |u^{'}(r)|^{p-2}u^{'}(r)\widetilde{H}(u(r))\right) \leqslant 0\}.
\end{aligned}$$

Dowód. Niech $g \in W^{2,p}$ będzie $g = T(f)$. Wówczas w zbiorze $\{x : f(x) > 0\}$ zachodzi

$$\begin{aligned}
g^{'} &= \tau(f)f^{'} \\
f^{'} &= \frac{g^{'}}{\tau(f)} \\
f^{''} &= \frac{g^{''}}{\tau(f)} - \frac{g^{'}\tau(f)f^{'}}{(\tau(f))^{'}} \\
f^{''}\tau(f) &= g^{''} - \frac{(g^{'})^2\tau^{'}(f)}{(\tau(f))^2}
\end{aligned}$$

Funkcja $g^{''} \in L^p$, więc wystarczy pokazać $\left|\frac{(g^{'})^2\tau^{'}(f)}{(\tau(f))^2}\right| \in L^p$. Z (4.8) oraz (4.9)

$$\left|\frac{\tau^{'}(\lambda)}{(\tau(\lambda))^2}\right| \leqslant C_2\left|\frac{1}{\lambda\tau(\lambda)}\right| \leqslant \frac{C_1}{C_2}\left|\frac{1}{T(\lambda)}\right|$$

Dlatego też

$$\begin{aligned}\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}\left|\frac{(g^{'})^2\tau^{'}(f)}{(\tau(f))^2}\right|^p dx &\leqslant \frac{C_1}{C_2}\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}\left|\frac{(g^{'})^2}{T(f)}\right|^p dx\\ &\leqslant \frac{C_1}{C_2}\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}\left|\frac{(g^{'})^2}{g}\right|^p dx\\ &\leqslant \frac{C_1}{C_2}\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^p\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}}|g^{''}|^p dx\end{aligned}$$

Gdzie ostatnia nierówność wynika bezpośrednio z Twierdzenia 2.0.3 z $h(\lambda) = \lambda^{-p}$. To kończy dowód. □

4.3. Uogólnienia do funkcji dowolnego znaku

Twierdzenie 4.3.1 *Niech p, B, τ, H będą takie same jak w Stwierdzeniu 4.1.2. Ponadto niech funkcja τ rozszerza się w sposób ciągły do 0, tak że $\tau(0) = 0$ oraz niech T będzie taką pierwotną funkcji τ, że $T(0) = 0$. Jeśli $f \in \tilde{\mathcal{R}}^0(a,b)$ i $|f| \in L^{2,p}_{[0,B)}((a,b))$ wówczas $T(|f|) \in W^{2,p}((a,b))$, gdzie*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}^0(a,b) \;:=\; &\{f \in W^{2,1}_{loc}((a,b)) : \liminf_{R\nearrow b}|f^{'}(R)|^{p-2}f^{'}(R)\mathrm{sign}f(R)\tilde{H}(|f(R)|) \leqslant 0\\ &i\ \limsup_{r\searrow a}|f^{'}(r)|^{p-2}f^{'}(r)\mathrm{sign}f(r)\tilde{H}(|f(r)|) \geqslant 0\}.\end{aligned}$$

Dowód. Obliczamy drugą pochodną dystrybucyjną funkcji $T(|f|)$

$$\begin{aligned}(T(|f|))^{''} &= ((\tau(|f|))f'\mathrm{sign}(f))^{'}\\ &= \tau^{'}(|f|)\left(f^{'}\right)^2(\mathrm{sign}(f))^2 + \tau(|f|)f^{''}\mathrm{sign}(f) + \tau(|f|)f^{'}(\mathrm{sign}(f))^{'}.\end{aligned}$$

Ostatni składnik powyższej sumy jest zerowy – funkcja $\mathrm{sign}(f)$ ma skok w 0, ale założyliśmy wcześniej $\tau(0) = 0$.

Dalsza część dowodu przebiega tak samo jak w dowodzie Stwierdzenia 4.1.2. □

Warunek dostateczny w uogólnieniu twierdzenia typu Brezisa–Mironescu do funkcji dowolnego znaku pozostawiamy jako problem otwarty. Trudność polega na braku odpowiedniej nierówności multyplikatywnej, nawet w obrębie funkcji jednorodnych (patrz [AKJP12], rozdział 6, Proposition 6.1).

Problem 4.3.2 *Czy istnieją funkcję τ, dla których $T(f) \in W^{2,p}((a,b))$ i $T(f)$ spełniające odpowiednie warunki brzegowe implikowałoby $f \in L^{2,p}_{\tau,[0,B)}((a,b))$?*

4.4. Analiza przykładów dopuszczalnych wag

Na początku podajemy analizę, kiedy warunek (τ, p) jest spełniony.

Lemat 4.4.1 *Przypuśćmy, że $1 \leqslant p < \infty$ i ciągła funkcja $\tau : (0, \infty) \to [0, \infty)$ spełniają:*

a) *τ jest przedziałami monotoniczna i różniczkowalna na przedziale $(0, \infty)$*

b) *istnieje stała $D_\tau > 0$ taka, że $\lambda \left|\tau'(\lambda)\right| \leqslant D_\tau \tau(\lambda)$, dla $\lambda > 0$*

c) *τ spełnia $\int_0^\lambda (\tau(s))^p \, ds \leqslant C (\tau(\lambda))^p \lambda$.*

Wówczas τ spełnia warunek (τ, p).

Dowód. Obliczamy pierwszą pochodną dystrybucyjną funkcji $P_{\tau,p}$

$$P'_{\tau,p}(\lambda) = \tau(\lambda) + \int_0^\lambda (\tau(s))^p ds \cdot (1-p)(\tau(\lambda))^{-p} \tau'(\lambda).$$

Następnie dzielimy przedział $(0, \infty)$ na trzy podzbiory $(0, \infty) = U \cup W \cup V$ w taki sposób, że τ jest rosnąca na U, malejąca na W i $\tau'(\lambda) = 0$ dla każdego $\lambda \in V$. Wówczas dla $\lambda \in U$ mamy

$$\begin{aligned}
(1-p) \int_0^\lambda (\tau(s))^p \, ds \, (\tau(\lambda))^{-p} \, \tau'(\lambda) &= (1-p) \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda (\tau(s))^p \, ds \, (\tau(\lambda))^{-p} \, \lambda \left|\tau'(\lambda)\right| \\
&\geqslant (1-p) C \, (\tau(\lambda))^p \, (\tau(\lambda))^{-p} \, D_\tau \tau(\lambda) \\
&= \tau(\lambda)(1-p) D_\tau C.
\end{aligned}$$

Zatem dla tych λ dostaliśmy $\left|P'_{\tau,p}(\lambda)\right| \in (\tau(\lambda)(1-(p-1)D_\tau C), \tau(\lambda))$. Natomiast dla $\lambda \in W$ mamy

$$\begin{aligned}
(1-p) \int_0^\lambda (\tau(s))^p \, ds \, (\tau(\lambda))^{-p} \, \tau'(\lambda) &= (p-1) \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda (\tau(s))^p \, ds \, (\tau(\lambda))^{-p} \, \lambda \left|\tau'(\lambda)\right| \\
&\leqslant (p-1) C D_\tau,
\end{aligned}$$

więc $\left|P'_{\tau,p}(\lambda)\right| \in (\tau(\lambda), \tau(\lambda)(1 + (p-1)D_\tau C))$ dla $\lambda \in W$.
Dla $\lambda \in V$ mamy oczywiście $P'_{\tau,p}(\lambda) = \tau(\lambda)$.

Zatem funkcja $P_{\tau,p}$ spełnia (P, τ) i $|P'_{\tau,p}(\lambda)| \leqslant C_{\tau,p} \tau(\lambda)$ dla każdego $\lambda > 0$, gdzie $C_{\tau,p} = \max(1, 1 + (p-1)CD_\tau, |1 - (p-1)CD_\tau|)$. □

Uwaga 4.4.2 *Oczywiście, jeśli τ jest rosnąca, różniczkowalna na $(0, \infty)$ i istnieje stała $D_\tau > 0$ taka, że $\lambda\tau'(\lambda) \leqslant D_\tau \tau(\lambda)$ gdy tylko $\lambda > 0$, wówczas warunki* **a)**, **b)**, **c)** *są spełnione.*

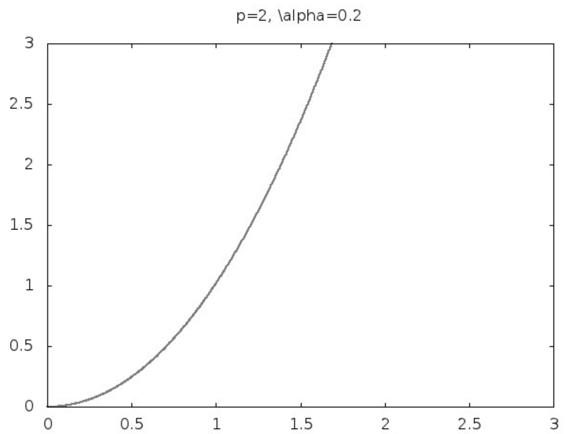
Poniższe przykłady pokazują jak skonstruować funkcje τ spełniające warunek (τ, p).

Przykład 4.4.3 Niech $\tau : [0, \infty) \to [0, \infty)$ będzie różniczkowalną N-funkcją, to znaczy τ jest wypukła i $\lim_{\lambda \to 0} \frac{\tau(\lambda)}{\lambda} = 0$, $\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\tau(\lambda)}{\lambda} = \infty$. Wiadomo, że warunek $\lambda\tau'(\lambda) \leqslant D_\tau \tau(\lambda)$ dla C^1- gładkich N- funkcji (wówczas $D_\tau > 1$) jest równoznaczny temu, że τ spełnia warunek Δ_2: $\tau(2\lambda) \leqslant C\tau(\lambda)$, z pewną stałą $C > 0$ niezależną od λ, patrz [KR61], Theorem 4.1, Section I.4. Zatem z Lematu 4.4.1, jeśli dodatkowo założymy o takiej funkcji, że spełnia ona warunki **a)** oraz **c)** spełnia ona warunek (τ, p). Przykłady dopuszczalnych wypukłych funkcji τ można znaleźć w [KR61], Section I.4 i I.5.

Przykład 4.4.4 Niech
$\mathcal{K} := \{\tau : [0,\infty) \to [0,\infty) : \tau \in C^1,\ \text{rosnąca},\ \tau(0) = 0 : \sup\{\frac{\lambda\tau'(\lambda)}{\tau(\lambda)} : \lambda \in (0,\infty)\} < \infty\}$.
Możemy zauważyć, że zbiór $\mathcal{K}$ jest niezmienniczy ze względu na operacje dodawania, mnożenia i składania:
gdy funkcje $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{K}$ wówczas także $\tau_1 + \tau_2 \in \mathcal{K}$;
gdy $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{K}$ wtedy też $\tau_1 \cdot \tau_2 \in \mathcal{K}$;
gdy $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{K}$ wtedy $\tau_1 \circ \tau_2 \in \mathcal{K}$.
Co więcej, zbiór jest także dodatnio jednorodny: gdy $\tau \in \mathcal{K}$ wówczas także $t\tau \in \mathcal{K}$, dla $t > 0$.

Zatem z Lematu 4.4.1 i 4.4.3, wiele przykładów funkcji τ spełniających warunek (τ, p) może być znalezionych wśród dodatnich potęg rosnących, C^1-gładkich wypukłych funkcji spełniających warunek Δ_2, wśród złożeń elementów zbioru $\mathcal{K}$, a także wśród ich pozytywnych potęg.

Przykład 4.4.5 *Niech funkcja* $\tau : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *będzie dana wzorem* $\tau(\lambda) = \lambda^p(\log(2+\lambda))^\alpha$, $\alpha > 0$, $1 \leqslant p < \infty$. *Wówczas funkcja* $P_{\tau,p}$ *spełnia* (P, τ).



Faktycznie. Sprawdzamy czy spełnione są warunki w Lemacie 4.4.1.

$$\tau'(\lambda) = p\lambda^{p-1}\left(\log(2+\lambda)\right)^\alpha + \lambda^p \alpha \log(2+\lambda)^{\alpha-1}\frac{1}{2+\lambda} \tag{4.10}$$

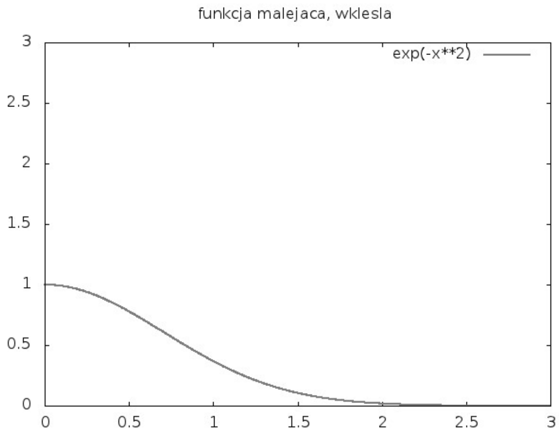
$$\lambda\tau'(\lambda) = \lambda^p(\log(2+\lambda))^\alpha \left(p + \alpha\frac{\lambda}{(2+\lambda)\log(2+\lambda)}\right). \tag{4.11}$$

Widzimy, że $\tau'(\lambda) \geqslant 0$ *stąd warunek* **a)** *jest spełniony. Ponieważ wyrażenie* $\frac{\lambda}{(2+\lambda)\log(2+\lambda)}$ *jest ograniczone przez* 1 *dostajemy* $\lambda\tau'(\lambda) \leqslant \tau(\lambda)(p+\alpha)$ *i warunek* **b)**. *Z Uwagi 4.4.2 mamy także warunek* **c)**.

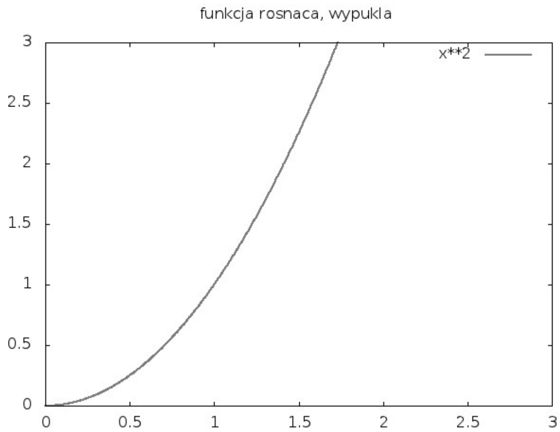
Przykłady funkcji spełniających Twierdzenie typu Brezisa–Mironescu

Ilustracje Stwierdzenia 4.1.2

$\tau(\lambda) = e^{-\lambda^2}$, dla $\lambda \in (0,3)$

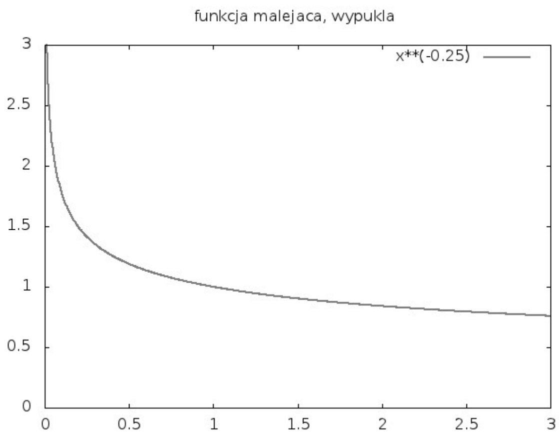


$\tau(\lambda) = \lambda^2$, dla $\lambda \in (0,3)$

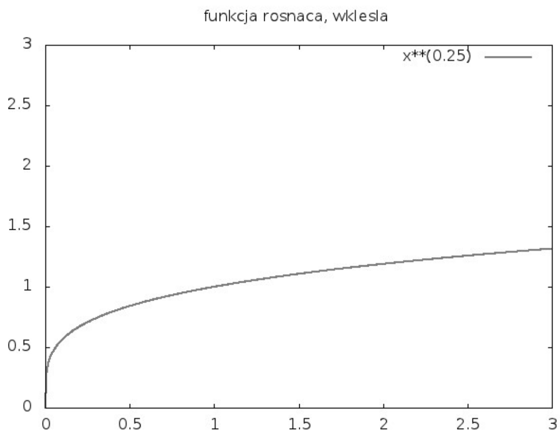


Ilustracje Stwierdzenia 4.1.3

$\tau(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{4}}$, dla $\lambda \in (0,3)$ i $2 \leqslant p < 4$



$\tau(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{4}}$, dla $\lambda \in (0,3)$



Rozdział 5

Zastosowanie do nieliniowych równań własnych

W tym rozdziale zajmiemy się zastosowaniem wyników z rozdziałów 3 i 4 do nieliniowych zagadnień własnych.

Definicja 5.0.6 (zagadnienie własne) *Załóżmy, że* $-\infty < a < b < \infty$, $g \in L^p((a,b))$ *z* $p \geqslant 2$, $\tau : (0,B) \to (0,\infty)$ *oraz* $f \in W^{2,1}_{loc}((a,b))$, *takie że* $|f(x)| \in [0,B)$ *dla* $x \in (a,b)$ *spełnia następujące równanie różniczkowe zwyczajne:*

$$\begin{cases} \tau(|f(x)|)f^{''}(x) = g(x) & w\ (a,b) \cap \{x : f(x) \neq 0\} \\ f \in \mathcal{R}, & \end{cases} \tag{5.1}$$

gdzie zbiór $\mathcal{R}$ *posłuży do określenia warunków brzegowych, zostanie sprecyzowany później.*

5.1. Oszacowania a priori

Łatwa obserwacja pokazuje, że jeżeli funkcja $g \in L^p$ w zagadnieniu własnym, wówczas z postaci równania wynika natychmiast, że jeśli tylko zbiór wartości funkcji f należy do zbioru $[0,B)$, to $f \in L^{2,p}_{\tau,[0,B)}$. Następnie dla wykazania wyższej regularności funkcji f postępujemy podobnie jak w stwierdzeniach z rozdziału 3.

Stwierdzenie 5.1.1 *Przypuśćmy, że* $p \geqslant 2$ *i funkcja* $\tau : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *spełnia warunek* (τ, p) *z funkcją* $P_{\tau,p}$ *daną jak w Definicji 3.1.4, niech* $H(\lambda) = \int_0^\lambda (\tau(s))^p ds$ *będzie absolutnie ciągłą pierwotną funkcji* τ^p.

Jeśli $f \in \mathcal{R}^0_{[0,B)}$ *jest rozwiązaniem równania (5.1), gdzie*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^0_{[0,B)}(a,b) \quad := \quad & \{f \in W^{2,1}_{loc}((a,b)), f(x) \in [0,B) \ \ p.w.\ na\ (a,b) : \\ & \liminf_{R \nearrow b} |f^{'}(R)|^{p-2} f^{'}(R) \widetilde{H}(f(R)) \leqslant 0 \\ & i\ \limsup_{r \searrow a} |f^{'}(r)|^{p-2} f^{'}(r) \widetilde{H}(f(r)) \geqslant 0\} \end{aligned}$$

oraz $\int_a^b |g(x)|^p dx < \infty$, *wówczas zachodzą oszacowania*

$$\begin{aligned} \int_a^b (P_{\tau,p}(f))^p dx &\leqslant A_g, & (5.2)\\ \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |f^{'}|^p \tau(f)^p dx &\leqslant B_g, & (5.3)\\ \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |f^{''}|^p \tau(f)^p dx &= C_g, & (5.4)\end{aligned}$$

ze stałymi $A_g = (p-1)^p C_{\tau,p}^{2p} C_p^{2p}(a,b)\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |g(x)|^p\, dx$, $B_g = (p-1)^p C_{\tau,p}^{p} C_p^{p}(a,b)\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |g(x)|^p\, dx$, $C_g = \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |g(x)|^p dx$.

Dowód. Równość (5.4) jest oczywista. Ponieważ $C_g = \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |g(x)| dx = \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |f^{''}(x)|^p \tau(f)^p dx$, zatem (5.2) i (5.3) wynikają natychmiast ze Stwierdzenia 3.2.1. □

Następne stwierdzenie jest bezpośrednim wnioskiem ze Stwierdzenia 3.2.2

Stwierdzenie 5.1.2 *Przypuśćmy, że* $p \geqslant 2$, *i funkcje* $\tau : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *oraz* $P_{\tau,p}$ *będą takie same jak w Stwierdzeniu 3.1.7. Ponadto niech* τ *spełnia warunek:*

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \tau(s)^p ds \geqslant D\tau(\lambda)^p, \tag{5.5}$$

dla pewnej stałej $D > 0$ *niezależnej od* λ. *Jeśli* $f \in \mathcal{R}^0_{[0,B)}(a,b)$ *jest rozwiązaniem równania (5.1), to zachodzą oszacowania*

$$\begin{aligned} \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} f^p \tau(f)^p dx &\leqslant \bar{A}_g, & (5.6)\\ \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |f^{'}|^p \tau(f)^p dx &\leqslant B_g, & (5.7)\\ \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |f^{''}|^p \tau(f)^p dx &= C_g, & (5.8)\end{aligned}$$

gdzie $\bar{A}_g = \frac{1}{D^p}(p-1)^p C_{\tau,p}^{2p} C_p^{2p}(a,b)\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |g(x)|^p\, dx$, $B_g = (p-1)^p C_{\tau,p}^{p} C_p^{p}(a,b)\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |g(x)|^p\, dx$, $C_g = \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)>0\}} |g(x)|^p dx$.

Podobne wnioski można wysnuć stosując nierówności otrzymane w podrozdziale 3.2.1.

Stwierdzenie 5.1.3 *Przypuśćmy, że* p, a, b, τ, H *będą jak w Stwierdzeniu 3.2.3. Wówczas jeśli funkcja* $f \in \tilde{\mathcal{R}}^0(a,b)$ *jest rozwiązaniem równania (5.1), gdzie*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}^0(a,b) \;:=\; &\{f \in W^{2,1}_{loc}((a,b)) : \liminf_{R\nearrow b} |f^{'}(R)|^{p-2} f^{'}(R)\mathrm{sign} f(R)\tilde{H}(|f(R)|) \leqslant 0\\ &i\ \limsup_{r\searrow a} |f^{'}(r)|^{p-2} f^{'}(r)\mathrm{sign} f(r)\tilde{H}(|f(r)|) \geqslant 0\},\end{aligned}$$

to zachodzą następujące nierówności

$$\begin{aligned} \int_a^b (P_{\tau,p}(|f|))^p dx &\leqslant A_g,\\ \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}} |f^{'}|^p \tau(|f|)^p dx &\leqslant B_g,\\ \int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}} |f^{''}|^p \tau(|f|)^p dx &= C_g,\end{aligned}$$

gdzie stałe A_g, B_g, C_g *są jak w Stwierdzeniu 5.1.1.*

Stwierdzenie 5.1.4 *Przypuśćmy, że p, a, b, τ, H będą jak w Stwierdzeniu 3.2.4. Wówczas jeśli funkcja $f \in \tilde{\mathcal{R}}^0(a,b)$ jest rozwiązaniem równania (5.1), to zachodzi*

$$\begin{aligned}
\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}} |f|^p \tau(|f|)^p dx &\leqslant \bar{A}_g, \\
\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}} |f'|^p \tau(|f|)^p dx &\leqslant B_g, \\
\int_{(a,b)\cap\{x:f(x)\neq 0\}} |f''|^p \tau(|f|)^p dx &= C_g,
\end{aligned}$$

stałe $\bar{A}_g$, B_g, C_g są jak w Stwierdzeniu 5.1.2.

5.2. Równoważne sformułowanie

Twierdzenia z rozdziału 4 i podrozdziału 5.1 pozwalają dla funkcji nieujemnych sprowadzić problem (5.1) do problemu w standardowej przestrzeni Sobolewa.

Problem przeformułowania zagadnienia dla funkcji dowolnego znaku wynika z braku odpowiedniego twierdzenia typu Brezisa–Mironescu, o czym była mowa pod koniec podrozdziału 4.3.

Przypuśćmy, że funkcje f oraz τ spełniają warunki dostateczne i konieczne w twierdzeniu typu Brezisa–Mironescu z rozdziału 4. Z podrozdziału 5.1 wiemy, że jeśli równanie (5.1) dopuszcza funkcję f jako rozwiązanie, wówczas funkcja ta należy do przestrzeni $W^{2,p}_{\tau,[0,B)}((a,b))$. Z twierdzenia typu Brezisa–Mironescu wiemy, że funkcja f należy do $W^{2,p}_{\tau,[0,B)}((a,b))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T(f)$ należy do $W^{2,p}((a,b))$. Zatem istnienie rozwiązania problemu (5.1) jest równoznaczne istnieniu rozwiązania poniższego zagadnienia

Równoważne sformułowanie

$$\begin{cases} h''(x) = G(T^{-1}(h(x)))\left(h'(x)\right)^2 + g(x) \quad \text{dla} \quad x \in (a,b), T^{-1}(h) \geqslant 0 \\ T^{-1}(h) \in \mathcal{R}, \end{cases} \tag{5.9}$$

gdzie $G(\lambda) = \frac{\tau'(\lambda)}{\tau^2(\lambda)}$ i T jest absolutnie ciągłą pierwotną funkcji τ.

Pytaniem otwartym pozostaje wciąż problem istnienia rozwiązania równania (5.1). Wydaje się, że otrzymanie podobnego wyniku jak w rozdziale 4 dla funkcji dowolnego znaku mogłoby ułatwić badanie istnienia tego zagadnienia.

Problem 5.2.1 *Czy istnieje rozwiązanie problemu (5.1)? Jakie warunki powinny spełniać funkcje τ oraz f, żeby rozwiązanie istniało.*

Bibliografia

[BOUR08] Bourdaud, G., Moussai, M., Sickel, W.,*Towards sharp superposition theorems in Besov and Lizorkin–Triebel spaces*, Nonlinear Anal. 68 (2008), no. 10, 2889–2912.

[BREZIS01] Brezis, H., Mironescu, P., *Composition in fractional Sobolev spaces*, Discrete and Continuous Dynamical Systems 7 (2001), 241-246.

[BM01] Brezis, H., Mironescu, P., *Gagliardo-Nirenberg, composition and products in fractional Sobolev spaces. Dedicated to the memory of Tosio Kato*, J. Evol. Equ. 1 (2001), no. 4, 387–404.

[DHAL79] Dahlberg, B.E.J., *A note on Sobolev spaces, in Harmonic Analysis*, in Harmonic Analysis in Euclidean Spaces, Proc. Symp. in Pure Mathematics Part I, American Math. Soc. 35 (1979), 183-185.

[EVANS98] Evans L. C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society (1998).

[AKJP12] Kałamajska, A., Peszek, J., *On some nonlinear extensions of the Gagliardo- Nirenberg inequality with applications to nonlinear eigenvalue problems* , Asymptotic Analysis, IOS Press, Volume 77, Number 3-4 / 2012, p. 169-196.

[KATO95] Kato, T., *On nonlinear Schrödingers equations. II.* H^s *solutions and unconditional well-posedness*, J.d'Analyse Mathématique 67 (1995), 281-306.é

[KR61] M. A. Krasnoselskii and Ya. B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff Ltd. Groningen 1961.

[KUFN77] Kufner, A., John, O., Fučík, S., *Function spaces*, Noordhoff International Publishing, 1977.

[MARC79] Marcus, M., Mizel, V. J., *Complete characterization of functions which act via superposition on Sobolev spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 187-218.

[MOSER66] , Moser, J., *A rapidly convergent iteration method and nonlinear differential equations*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 20 (1966), 265-315.

[MOUS11] Moussai, M., *The composition in multidimensional Triebel-Lizorkin spaces*, Math. Nachr. 284 (2011), no. 317-331.1522-2616.

[MAZ02] Maz'ya, V., Shaposhnikova, T., *An elementary proof of the Brezis and Mironescu theorem on the composition operator in fractional Sobolev spaces*, J. Evol. Equ. 2 (2002), 113-125.

[PEET70] Peetre, J., *Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces*, Mathematica (Cluj) 12 (1970), 1-20.

[RUNST86] Runst, T., *Mapping properties of nonlinear operators in spaces of Triebel–Lizorkin and Besov type*, Analysis Mathematica 12 (1986), 313-346.