

## PRACA DOMOWA 2

*Z poniższych zadań należy rozwiązać pierwsze dwa zadania. Następnie z zadań 3-7 należy wybrać trzy zadania i je rozwiązać. W przypadku rozwiązania większej liczby zadań sprawdzone i ocenione będzie tylko pierwszych 5 zadań.*

### Zadania obowiązkowe:

**Zadanie 1.** Niech  $f(x) = \frac{(x+1)(x+7)}{x-1}$ .

- (1) Znaleźć dziedzinę  $f$ .
- (2) Znaleźć te przedziały, na których  $f$  jest rosnąca i te, na których jest malejąca.
- (3) Znaleźć te przedziały, na których  $f$  jest wypukła i te, na których jest wklęsła, znaleźć punkty przegięcia funkcji  $f$ .
- (4) Znaleźć asymptoty funkcji  $f$ .
- (5) Narysować wykres funkcji.

**Zadanie 2.** Niech  $g(x) = \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+7)}{x-1}}$ . Wiadomo, że dla  $x \notin \{-1, 1, 5, -7\}$  zachodzą wzory

$$g'(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-5)\sqrt[3]{(x-1)^{-4}(x+1)^{-2}(x+7)^{-2}},$$
$$g''(x) = \frac{2}{9}(111 + 324x + 74x^2 + 4x^3 - x^4)\sqrt[3]{(x-1)^{-7}(x+1)^{-5}(x+7)^{-5}}$$

przy czym  $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \approx -0,3738$  lub  $x = x_2 \approx 12,2555$ ,  $g^{(3)}(x_1) \neq 0 \neq g^{(3)}(x_2)$ .

- (1) Znaleźć  $g'(-1)$  i  $g'(-7)$  lub wykazać, że te pochodne nie istnieją.
- (2) Znaleźć te przedziały, na których  $g$  rośnie i te, na których maleje.
- (3) Znaleźć te przedziały, na których  $g$  jest wypukła i te, na których jest wklęsła, znaleźć punkty przegięcia  $g$ .
- (4) Naskicować wykres funkcji  $g$ .

### Z poniższych zadań należy wybrać i rozwiązać trzy:

**Zadanie 3.** Wykazać, że poniższe równanie

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

**Zadanie 4.** Wykaż, że dla  $x, y > 0$  zachodzi nierówność  $x^x y^y \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}$ .

**Zadanie 5.** Niech  $n \geq 1$  i niech  $x_1, \dots, x_n$  będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi warunek  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Udowodnij nierówności

$$n \leq x_1^{-x_1 + \dots + x_n^{-x_n}} \leq n \sqrt[n]{n}.$$

Czy stałe  $n$  i  $\sqrt[n]{n}$  są w powyższym oszacowaniu są optymalne?

**Zadanie 6.** Zbadać ekstrema i wypukłość funkcji  $f(x) = \frac{2}{2-\ln x}$  dla  $x \in (0, e^2)$ . Czy istnieje  $n \in \mathbb{N}$  takie, że  $g_n(x) = (f(x))^n$  jest wypukła na  $(0, e^2)$ ?

**Zadanie 7.** Załóżmy, że  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  są dodatnie, ciągłe i różniczkowalne na  $(a, b)$ . Załóżmy, że  $\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{g(a)}{g(b)}$ . Wykazać, że istnieje  $x \in (a, b)$ , dla którego  $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)}$ .