PRACA DOMOWA 4

Zadanie 1. Oblicz granicę
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{n})}{2+\cos(\frac{k}{n})}.$$

Zadanie 2. Wyznacz $x>1$, dla którego wyrażenie
$$f(x)=\int_{x}^{x^2}\frac{1}{t}\ln\left(\frac{t-1}{32}\right)\,\mathrm{d}t$$
przyjmuje najmniejszą wartość.

Zadanie 3. 1. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$
2. Załóżmy, że $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągła. Znaleźć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 4. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na przedziale $[a,b]$ i taką, że f' jest całkowalna na tym przedziale. Niech
$$\Delta_n=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right).$$
Znaleźć $\lim_{n\to\infty}n\Delta_n$.

Zadanie 5. 1. Załóżmy, że funkcje f,g,f^2,g^2 są całkowalne na przedziale $[a,b]$. Pokazać, że wówczas spełniona jest następująca nierówność:
$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$
2. Pokazać, że
$$1\leqslant\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{1,2}.$$