PRACA DOMOWA 2

Z poniższych zadań należy rozwiązać pierwsze dwa zadania. Następnie z zadań 3-8 należy wybrać trzy zadania i je rozwiązać. W przypadku rozwiązania większej liczby zadań sprawdzone i ocenione będzie tylko pierwszych 5 zadań.

Zadania obowiązkowe:

Zadanie 1. Niech $f(x) = \frac{(x+1)(x+7)}{x-1}$.

(1) Znaleźć dziedzinę f.
(2) Znaleźc te przedziały, na których f jest rosnąca i te, na których jest malejąca.
(3) Znaleźc te przedziały, na których f jest wypukła i te, na których jest wklęsła, znaleźć punkty przegięcia funkcji f.
(4) Znaleźć asymptoty funkcji f.
(5) Narysować wykres funkcji.

Zadanie 2. Niech $g(x) = \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+7)}{x-1}}$. Wiadomo, że dla $x \notin \{-1, 1, 5, -7\}$ zachodzą wzory

$$g'(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-5)\sqrt[3]{(x-1)^{-4}(x+1)^{-2}(x+7)^{-2}},$$
$$g''(x) = \frac{2}{9}(111 + 324x + 74x^2 + 4x^3 - x^4)\sqrt[3]{(x-1)^{-7}(x+1)^{-5}(x+7)^{-5}}$$

przy czym $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \approx -0,3738$ lub $x = x_2 \approx 12,2555$, $g^{(3)}(x_1) \neq 0 \neq g^{(3)}(x_2)$.

(1) Znaleźć $g'(-1)$ i $g'(-7)$ lub wykazać, że te pochodne nie istnieją.
(2) Znaleźć te przedziały, na których g rośnie i te, na których maleje.
(3) Znaleźć te przedziały, na których g jest wypukła i te, na których jest wklęsła, znaleźć punkty przegięcia g.
(4) Naszkicować wykres funkcji g.

Z poniższych zadań należy wybrać i rozwiązać trzy:

Zadanie 3. Wykazać, że poniższe równanie

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 4. Wykaż, że dla $x, y > 0$ zachodzi nierówność $x^x y^y \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}$.

Zadanie 5. Niech $n \geqslant 1$ i niech $x_1, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi warunek $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Udowodnij nierówności

$$n \leqslant x_1^{-x_1} + \ldots + x_n^{-x_n} \leqslant n\sqrt[n]{n}.$$

Czy stałe n i $\sqrt[n]{n}$ są w powyższym oszacowaniu są optymalne?

Zadanie 6. Zbadać ekstrema i wypukłość funkcji $f(x) = \frac{2}{2-\ln x}$ dla $x \in (0, e^2)$. Czy istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $g_n(x) = (f(x))^n$ jest wypukła na $(0, e^2)$?

Zadanie 7. Załóżmy, że $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ są dodatnie, ciągłe i różniczkowalne na (a, b). Załóżmy, że $\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{g(a)}{g(b)}$. Wykazać, że istnieje $x \in (a, b)$, dla którego $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{x(x)}$.

Zadanie 8. Znaleźć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2+\operatorname{tg} x)(1+x^2+\cos(x\sqrt{2}) - 2\cos(x^{44}))\sqrt{1+\operatorname{tg}(\sin x)}}{\ln(1+\operatorname{tg}(x))2^{\sin(3x)-\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x + \sin x - 2\ln(1+x) - x^2)}.$$