Algebruh AMI(нь) четыре

Содержание

1 Лекция 1. Нильпотентный Жордан

Задача: классифицировать линейные операторы, т.е. выделить по одному(простому) представителю в каждом классе сопряженности: $A \sim CAC^{-1}$. Другими словами найти хороший базис, в котором $[\mathcal{A}]$ *как можно проще*.

Что такое оператор с диагональной матрицей?

$$[\mathcal{A}]_{v_i} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \iff \exists v_1, \dots, v_n \text{— базис, что } \mathcal{A}(v_i) = a_i v_i$$

Definition 1.1. Собственное число и вектор

Пусть $\mathcal{A} \in Lin(V, V), v \in V, v \neq 0, \lambda \in K \ : \ \mathcal{A}(v) = \lambda v$.
λ — собственное число оператора, а v - собственный вектор.
То есть λ - с.ч. $\iff$ $\exists v \in V \setminus 0$: $\mathcal{A}(v) = \lambda v$.

Definition 1.2. Диагонализуемая матрица

Матрица A — диагонализуема, если $\exists C : \ CAC^{-1}$ — диагональная $\iff$ у опертора есть базис из собственных векторов.

Как искать собственные числа или вектора? Знаем $\lambda \Rightarrow Av = \lambda v$ — СЛУ, т.е. решаем ОСЛУ $(\mathcal{A} - \lambda E)x = 0$.

Как найти собственное число оператора?

Theorem 1.1. Характеризация собственных чисел

λ — собственное число оператора $\iff$ λ — корень многочлена степени $n = dimV$: $\chi_A(t) = det(A - tE) \in K[t]$.

Доказательство. Пусть λ — собств. число оператора $\iff \exists v \neq 0 : \ \mathcal{A}(v) = \lambda v \iff$
$\exists c_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0 : \ Ac_1 = \lambda Id(c_1) \iff (A - \lambda E) \cdot c_1 = 0 \iff \exists v \in ker(A - \lambda E) \neq 0 \iff$
$A - \lambda E$ — необратима $\iff det(A - \lambda E) = 0$ ∎

Corollary. *Собственных чисел не больше* $dimV$.

Definition 1.3. Характеристический многочлен

$\chi_A(t) = det(A - tE)$ — характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$.

В текущих терминах некорректное определение.

Lemma 1.1.

$\chi_A(t)$ — не зависит от базиса оператора.

Доказательство. Хотим $det(A - tE) = det(CAC^{-1} - tE)$.

$$det(A - tE) = det(C(A - tE)C^{-1}) = det(CAC^{-1} - tE)$$

НЮАНС: мы знаем факт про произведение определителей для матриц над полем, но у нас тут многочлены $K[t]$, но $K[t] \subset K(t)$ которое поле. □

Lemma 1.2. ЛНЗ собственных векторов

$\mathcal{A} \in Lin(V, V)$. Собственные вектора, соотвествующие попарно различным собственным числам ЛНЗ.

Доказательство. $Av_i = \lambda_i v_i,\ v_i \neq 0, \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_k$ — ЛНЗ.

Делаем индукцию по количеству:

База: $k = 1$, $v_1 \neq 0 \Rightarrow$ ЛНЗ по определению.

Переход: $k \to k + 1$. Для k знаем. Пусть $k + 1$ ЛЗ. Значит $\exists a_i \sum_{i=1}^{k+1} a_i v_i = 0$.

С одной стороны — $A(\sum_{i=1}^{k+1} a_i v_i) = 0$, с другой — $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_{k+1} a_i v_i = 0$.

$A(\sum_{i=1}^{k+1} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i a_i v_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_{k+1}) a_i v_i = 0$ (сумма до k т.к. последнее слагаемое $= 0$).

Но все лямбды разные($\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$), поэтому по индукции все $a_i = 0$. □

Theorem 1.2. Достаточное условие диагонализуемости

$\mathcal{A} \in Lin(V, V)$. Пусть $\chi_A(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (t - \lambda_i),\ \lambda_i \neq \lambda_j$. Тогда оператор диагонализуем: есть базис из собственных векторов.

Доказательство. $\lambda_1, \ \dots\ \lambda_n$ — корни $\chi \Rightarrow$ это собственные числа $\exists v_i \neq 0 :\ Av_i = \lambda_i v_i \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_n$ — ЛНЗ по лемме, а тогда и базис. □

Remark. *Над $\mathbb{C}$ почти все матрицы диагонализуемы (у большинства многочленов нет кратных корней)*

Возникают некие проблемы:

1. Кратные корни.
2. Мы не всегда над $\mathbb{C}$
3. χ_A — может быть трудно посчитать (или лень).
4. (Не будем это делать) V может быть бесконечномерным.

Remark 1.1.

V — бесконечномерно $\Rightarrow$ может не быть собственного вектора (даже над комплами). $V = \mathbb{C}[x]$. $\mathcal{A} = f \cdot x$. Очев у такого оператора нет собственных векторов, т.к. он повышает степень.

Что за проблема с кратными корнями?

Definition 1.4. Алгебраическая и геометрическая кратность

$\mathcal{A} \in Lin(V,V)$, λ — корень χ_A. Алгебраическая кратность $m_{alg}(\lambda)$ — его кратность в χ_A.
Геометрическая кратность $m_{geom}(\lambda)$ — $\dim V_\lambda$, где $V_\lambda = \{x \in V \mid Ax = \lambda x\} = ker(A - \lambda E)$ — собственное подпространство. Другими словами это макс. количество ЛНЗ собственных векторов, отвечающих λ.

Lemma 1.3.

$m_{geom} \leq m_{alg}$

Доказательство. $m_{geom} = k \Rightarrow \exists v_1, v_2, \dots, v_k$ — ЛНЗ из собственных векторов отвечающих λ. Дополним до базиса: $v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, v_n$. В этом базисе $[\mathcal{A}] = A = \begin{pmatrix} \lambda E_k & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Значит

$$\chi_A = det(A - tE) = \chi_B \cdot (\lambda - t)^k \Rightarrow m_{alg} \geq m_{geom}$$

□

Theorem 1.3. Критерий диагонализуемости

$\mathcal{A} \in Lin(V,V)$, тогда следующие условия равносильны.

1. $\mathcal{A}$ – диагонализуем
2. $\chi_A = \prod(t - \lambda_i)$, и $\forall i \; m_{alg}(\lambda_i) = m_{geom}(\lambda_i)$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$

Возьмем базис $v_1, \dots, v_n: \;\; A(v_i) = \lambda_i v_i \Rightarrow [A] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A = \prod(\lambda_i - t)$, тогда

$m_{alg}(\lambda_i)$ — количество λ_i в наборе, пусть k.
НУО $\lambda_1, \; \lambda_2, \; \dots \lambda_k = \lambda$, и $A(v_i) = \lambda v_i$. Но они ЛНЗ, а значит геом. кратность $\geq k$. Но по лемме $\leq k$. Значит равны!

$2 \Rightarrow 1$.

Пусть $\mu_1, \dots \; \mu_k$ — все различные лямбды. Мы знаем, что $m_{alg}(\mu_i) = m_{geom}(\mu_i)$. Тогда $\sum m_{geom}(\mu_i) = \sum m_{alg}(\mu_i) = n \Rightarrow \exists v_1^j, \dots, v_{m_{alg}(\mu_j)}^j$ — ЛНЗ собсвтенные вектора для μ_j (а всего n по всем j).
Теперь докажем, что все такие вектора ЛНЗ:
$\sum a_{ij} v_i^j = 0 \iff \sum_j \sum_i a_{ij} v_i^j = 0 = \sum_j v^j$, где $v^j = \sum a_{ij} v_i^j$ — тоже с.в. для μ_j. По лемме v^j ЛНЗ, значит все равны 0, значит и a_{ij} равны, потому что в каждой сумме слагаемые ЛНЗ по условию. Нашли n ЛНЗ векторов — базис. А тогда матрица диагонализуема. □

1.1 Нильпотентные операторы

Definition 1.5. Нильпотентный оператор

$\mathcal{A}$ — нильпотентный, если $\exists n \in \mathbb{N}: \;\; \mathcal{A}^n = 0$.

Мы знаем, что если матрица строго верхнетреугольна, то она нильпотента.

Proposition 1.1. С.ч. нильпотентного оператора

$\mathcal{A}$ — нильпотентный $\mathcal{A}^k = 0$. λ — собственное число $\mathcal{A} \Rightarrow \lambda = 0$.
$\mathcal{A}(v) = \lambda v \Rightarrow \mathcal{A}^k(v) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\ldots \mathcal{A}(v))) = \lambda^k v$, но $\mathcal{A}^k = 0,\ \mathcal{A}^k(v) = 0 \Rightarrow \lambda^k v = 0,\ v \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Exercise 1.1.

$\mathcal{A}$ — нильпотентный $\iff \chi_A = (-1)^n t^n$

Remark. *A — диагонализуема, а также нильпотента, тогда $A = 0$*

Definition 1.6. Жорданова цепочка

Жорданова цепочка — это $v_1,\ \ldots,\ v_k \in V,\ A(v_i) = v_{i+1},\ A(v_k) = 0$
$v_1 \overset{A}{\to} v_2 \overset{A}{\to} \ldots \overset{A}{\to} v_k \overset{A}{\to} 0.$

Remark. *A — нильпотентна, тогда $\forall v \in V$ — начало цепочки*

Definition 1.7. Жорданов базис

Жорданов базис — базис из непересекающихся жордановых цепочек.

Пусть есть Жорд. базис: $\begin{cases} v_1^1 \to v_1^2 \to \cdots \to 0 \\ \ldots \\ v_k^1 \to v_k^2 \to \cdots \to 0 \end{cases}$

Тогда $[\mathcal{A}]$ в этом базисе - блочно-диагональная с блоками $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_k$ (единицы под главной диагональю и 0 иначе).

Такой блок называется **жордановой матрицей**.

Вся матрица $[\mathcal{A}]$ состоит из единичек под диагональю и иногда нулями(под последним столбцом каждого блока). Такая формула называется **Жорданова форма нильпотентого оператора**.

Theorem 1.4. Канонический вид нильпотентного оператора

У любого нильпотентого оператора есть Жорданов базис, т.е. нильпотентная матрица приводится к жордановой форме.

Доказательство. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — базис V. Положим $v_1 = v_1^1,\ v_2 = v_2^1, \ldots,\ v_n = v_n^1$ и построим для них Жордановы цепочки, т.е. $v_i^l = A(v_i^{l-1})$, пока не получим 0.

Получили набор $\{v_j^i\}$ жордановых цепочек. Он порождающий (т.к. содержит базис).

Будем перестраивать такой набор, чтобы получился ЛНЗ и остался порождающим.

Шаг: покажем, что если текущая система ЛЗ, то количество векторов в ней можно уменьшить с сохранением порождаемости.

Дано: $\begin{cases} v_1^1 \to v_1^2 \to \dots \to v_1^{j_1} \to 0 \\ \dots \\ v_k^1 \to v_k^2 \to \dots \to v_k^{j_k} \to 0 \end{cases}$

Пусть они ЛЗ, т.е. $\sum_{i,j} a_{ij} v_j^i = 0$ (не все a_{ij} равны 0).

Упростим, применив A столько раз к равенству, чтобы остались только последние вектора из цепочек:

Получим такую, выбросив нули: $\sum a_{j_j,j} v_j^{j_j} = 0$

Новые обозначения: $a_{j_j,j} = a_{j_m,m}^m$, т.е. $\sum a_{j_m}^m v_m^{j_m} = 0$.

Рассмотрим самую короткую из цепочек — первую н.у.о.

$$0 = \sum a_{j_m}^m v_m^{j_m} = \sum a_{j_m}^m A^{j_1-1}(v_m^{j_m-j_1+1}) = A^{j_1-1}(\sum a_{j_m}^m v_m^{j_m-j_1+1}) = A^{j_1-1}(a_{j_1}^1 v_1^1 + \sum_{m>1} a_{j_m}^m v_m^{j_m-j_1+1})$$

Можем поделить на $a_{j_1}^1$ для простоты.

Была цепочка, начинающаяся с v_1^1 длины j_1. Выполним замену: $v_1^1 \to v_1^1 + \sum_{m>1} a_{j_m}^m v_m^{j_m-j_1+1}$ и построим новую цепочку. Её длина по равенству выше будет не больше $j_1 - 1$.

Надо проверить, что новая система всё ещё порождающая — очев (нет):

Новая оболочка: $\langle v_1^1 + \sum_{m>1} a_{j_m}^m v_m^{j_m-j_1+1}, v_1^2 + \sum_{m>1} a_{j_m}^m v_m^{j_m-j_1+1}, \dots \rangle$. Она получилась многократной заменой вида: $\langle v_1 + \sum a_i v_i, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, т.е. у нас ничего не меняется.

Получили порождающий набор цепочек меньшего размера. Делаем много таких шагов, пока не получим ЛНЗ, т.е. придём в базис

□

Example 1.1. Пример вычисления жорданова базиса

$v_1 \to v_2 \to v_3 \to 0$
$v_5 \to v_4 \to v_3 \to 0$
$v_6 \to v_3 \to 0$
$A(v_4) - A(v_6) = 0 \Rightarrow A(v_4 - v_6) = 0 \Rightarrow v_6 \mapsto v_4 - v_6$, т.е. уменьшили длину на 1.
$v_5 \mapsto v_5 - v_1 \to v_4 - v_2 \to 0$, и ура победа, мы молодцы

2 Лекция 2. Жордановы приколы и не только

Definition 2.1. Инвариантное подпространство

$\mathcal{A}$ — лин оператор на V, $U \le V$. U — инвариантно, если $\mathcal{A}(U) \subset U \iff \forall u \in U\ \mathcal{A}(u) \in U$

Example 2.1.

1. $\langle u\rangle$ — инвариантно($\mathcal{A}$-инвариантно) $\iff A(u) = ku \iff u$ — собсвтенный вектор.
2. $v_1, ..., v_k$ — жорданова цепочка, тогда её лин оболочка — инвариантна.
3. $Ker\mathcal{A},\ Im\mathcal{A}$ — инв. пространства

Remark. *U — $\mathcal{A}$-инвариантно, т.е. $Im(\mathcal{A}|_U) \subset U$. Таким образом определен оператор $\mathcal{A}|_U \in Lin(U, U)$*

Lemma 2.1. Матрица оператора с инвариантным подпространством

Пусть $\mathcal{A} \in Lin(V, V)$, U — инвариатное подпространство размерности k.
И взяли базис u_i V, первые k которого являеются базисом U, тогда матрица оператора в этом базисе имеет блочно верхнетреугольный вид: $\begin{pmatrix} [\mathcal{A}_{|U}] & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$

Доказательство. U — инв. тогда $\forall u_i,\ i \in [1, k]:\ \mathcal{A}(u_i) = \sum_{j=1}^k a_j u_j = a_1u_1 + ... + 0u_n \Rightarrow i$ -й столбец (до k) нашей матрицы будет иметь вид: $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ □

Proposition 2.1.

Пусть в условиях утверждения лин оболочка оставшихся векторов — тоже инвариатное подпространство. То есть $V = U \oplus U'$. Тогда матрица оператора также имеет блочно-диагональный вид $\begin{pmatrix} [\mathcal{A}_{|U}] & 0 \\ 0 & [\mathcal{A}_{|U'}] \end{pmatrix}$
Аналогично для $V = \bigoplus U_i$
Если таких пространств будет ровно n одномерных, тогда матрица будет диагональной.

В общем случае, если матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \overbrace{A}^{k} & 0 \\ 0 & [\mathcal{A}_{|U'}] \end{pmatrix}$, тогда лин оболочка $u_1, ..., u_k$ — инв. подпространство и $A = [\mathcal{A}|_{\langle u_1, ..., u_k\rangle}]$. А какой смысл матрицы C?

Рассмотрим $[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. $\mathcal{A}v_1 = v_1$
2. $\mathcal{A}v_2 = 5v_1 + v_2 + 3v_3$.

Матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ получим, если "вычеркнем слагаемые с v_1". Другими словами $\mathcal{A}v_2 = v_2 + 3v_3$ с точностью до слагаемого из $U = \langle v_1\rangle$. Формализуем это.

Definition 2.2. Факторпространство

V — пространство, $U \leq V$ — подпространство, в частности подгруппа по сложению, тогда рассматриваем V/U, а это факторгруппа, мы всегда её можем рассмотреть, т.к. у нас любая подгруппа нормальная(сложение коммутативно).
Определим. $k\overline{v} = \overline{kv},\ \forall v \in V,\ k \in K$ — умножение на константу.

Доказательство. Проверим корректность.
$\overline{v_1} = \overline{v_2} \Rightarrow v_1 - v_2 \in U \Rightarrow k(v_1 - v_2) \in U \Rightarrow \overline{kv_1} = \overline{kv_2}$
Отсюда получилось векторное пространство V/U. ☐

Example 2.2.

$V = \mathbb{R}^2,\ U = \langle u \rangle$ — прямая.
$\overline{v} = v + U$ — прямая, параллельная U.
Тогда V/U — пространство всех таких прямых, параллельных U.

Пусть теперь $\mathcal{A} \in Lin(V, V),\ U$ — инвариантное подпространство, тогда возникает оператор $\overline{\mathcal{A}} : V/U \to V/U$: $\overline{\mathcal{A}}(\overline{v}) = \overline{\mathcal{A}(v)}$

Доказательство. Провреяем корректность. $\overline{v_1} = \overline{v_2} \Rightarrow \overline{\mathcal{A}(v_1)} = \overline{\mathcal{A}(v_2)}$, но это просто переформулировка инвариантности: $v_1 - v_2 \in U \Rightarrow \mathcal{A}(v_1 - v_2) \in U \Rightarrow \mathcal{A}(v_1) - \mathcal{A}(v_2) \in U \Rightarrow \overline{\mathcal{A}(v_1)} = \overline{\mathcal{A}(v_2)}$
$\overline{\mathcal{A}}$ линеен очев. ☐

Очев пишем всегда, кроме случаев, когда не очев (ну или когда надо в доказательстве только черточки проставить) (c)

Example 2.3.

Пусть у $\mathcal{A}$ есть базис из одной жордановой цепочки длины k: $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_k \to 0$.
Какое здесь есть норм инв. подпространство? Например $\langle v_{k-1}, v_k \rangle = U$.
Рассмотрим V/U: $\overline{v_1} \to \overline{v_2} \to \dots \to \dots \overline{v_{k-2}} \to 0$
У него будет такой базис: взяли эти 2 вектора, дополнили до базиса и поставили чёрточки.

Lemma 2.2. Базис фактор пространства

$v_1, ..., v_n$ — базис V, $v_1, ..., v_k$ — базис U.
Тогда $\overline{v_{k+1}}, ..., \overline{v_n}$ — базис V/U

Доказательство. Lem $\overline{v_{k+1}}, ..., \overline{v_n}$ —- порождающий набор:
$\forall \overline{v} \in V/U = \overline{\sum_{i=1}^n a_i v_i} = \overline{0} + \overline{\sum_{k+1}^n a_i v_i} = \sum_{k+1}^n a_i \overline{v_i}$
Линейнонезависимость:
Пусть $\sum_{k+1}^n a_i \overline{v_i} = 0 \Rightarrow \overline{\sum_{k+1}^n a_i v_i} = 0 \Rightarrow \sum_{k+1}^n a_i v_i \in \langle v_1, ..., v_k \rangle$, но у нас базис, такого не может быть $\Rightarrow a_i = 0$ ☐

Proposition 2.2.

$\mathcal{A} \in Lin(V, V)$, U — инвариантное пространство, $u_1, ..., u_k$ — базис U, $u_1, ..., u_n$ — базис V, тогда
$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} [\mathcal{A}_U]_{u_1,...,u_k} & * \\ 0 & [\overline{\mathcal{A}}_{V/U}]_{\overline{u_{k+1}},...,\overline{u_n}} \end{pmatrix}$

Доказательство. $k+1$-й столбец матрицы:
$\mathcal{A}(u_{k+1}) = \sum_{i=1}^n a_{i,k+1}u_i \Rightarrow \overline{A}(\overline{u_{k+1}}) = \overline{\sum_{i=1}^k a_{i,k+1}u_i + \sum_{i=k+1}^n a_{i,k+1}u_i} = \sum_{i=k+1}^n a_{i,k+1}\overline{u_i}$ — ровно первый столбец $[\overline{\mathcal{A}}_{V/U}]_{\overline{u_{k+1}},...,\overline{u_n}}$ □

Theorem 2.1. Гамильтона-Кэли

$\mathcal{A} \in Lin(V, V) \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0 \in Lin(V, V)$

Доказательство. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = det(A - tE) \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = det0 = 0$.

Увы, это все обман. Надо доказывать нормально.

Example 2.4. Тут не будет доказательства

$A \in M_2(K) \Rightarrow A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - (a+d)t + ad - bc$, тогда наша (недоказанная) теорема говорит, что $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0 \Rightarrow A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E$

Definition 2.3. След

$tr(A)$ — $\pm$ коэффициент при t^{n-1} — сумма корней $\chi(t)$(сумма с.ч.), но с другой стороны мы знаем, что $\chi_A = \chi_{CAC^{-1}} \Rightarrow tr(A) = tr(CAC^{-1}) \Rightarrow$ он будет равен сумме элементов на диагонали(прямое вычисление определителя $A - tE$).

А теперь реальное доказательство.

Достаточно доказать для матриц. Будем считать, нуо, что K — алг. замкнуто(ничего не изменится, если мы будем думать что мы в большем поле). Делаем индукцию по $dimV$.

$\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. $\chi_A(t) = (t - \lambda) \cdot \chi_1(t)$. Значит $\exists v \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{A}(v) = \lambda v$, и пусть $v, v_2, ..., v_n$ — базис $\mathbb{C}^n$.

Тогда мы знаем, что $[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots \\ 0 & [\overline{A}|_{V/\langle v \rangle}] \end{pmatrix}$. Отсюда видим, что $\chi_A(t) = (\lambda - t) \cdot \chi_{\overline{A}|_{V/\langle v \rangle}}(t) \Rightarrow$ $\chi_{\overline{A}|_{V/\langle v \rangle}}(t) = -\chi_1(t)$

По индукционному предположению $\chi_{\overline{A}}(\overline{A}) = 0$. Это значит

$$\forall \overline{u} \in V/\langle v \rangle \Rightarrow \chi_{\overline{A}}(\overline{A})(\overline{u}) = 0 \iff \chi_{\overline{A}}(A)(u) \in \langle v \rangle$$

То есть $\forall u \in V : \chi_{\overline{A}}(A)(u) = kv$

$$\chi_A(A)(u) = ((t - \lambda)\chi_1(t))(A)(u) = (A - \lambda Id)\chi_{\overline{A}}(A)(u) = k(A(v) - \lambda v) = k(\lambda v - \lambda v) = 0$$

□

Example 2.5. Проверяем теоерму ручками

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. $\chi(t) = (t-a)(t-c)$. Хотим $(A - aId)\cdot(A - cId) = 0$.
Имеем: $\mathcal{A}v_2 = bv_1 + cv_2$ и $\mathcal{A}v_1 = av_1$. Поэтому $(A-c)v_2 = bv_1$, $(A-c)v_1 = (a-c)v_1$. В любом случае $(A - cId)(V) \subset \langle v_1 \rangle$. А $(A - aId)(v_1) = 0$.

Вообще говоря χ_A раскладывается на неприводимые множители. И это разложение дает разложение пространства на инвариантные!

Lemma 2.3.

$\mathcal{A} \in Lin(V,V),\ f \in K(t),\ f(\mathcal{A}) = 0,\ f = f_1 \cdot f_2,\ gcd(f_1, f_2) = 1$, тогда $V = V_1 \oplus V_2,\ V_i$ — инвариантно и $V_i = Ker(f_i(A))$.

Доказательство. $(f_1, f_2) = 1 \Rightarrow \exists g_1, g_2 :\ g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ Подставим $A:$
$f_1(A)g_1(A) + f_2(A)g_2(A) = Id$

Подставим произвольный вектор: $v \in V:\ f_1(A)g_1(A)(v) + f_2(A)g_2(A)(v) = v$, первое слагаемое назовём v_2, а второе v_1. Мы получили $v_2 + v_1 = v$.

Заметим, что $f_2(A)(v_2) = f_2(A)(f_1(A)g_1(A)(v)) = f(A)g_1(A)(v) = 0$ т.к. $f(A) = 0$. То есть $v_2 \in Ker(f_2(A)) = V_2$. Аналогично $v_1 \in Ker(f_1(A))$.

Итак, $\forall v \in V\ v = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Осталось проверить, что $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ Пусть $w \in V_1 \cap V_2$. Тогда по равенству в начале:

$w = g_1(A)f_1(A)(w) + g_2(A)f_2(A)(w)$, каждое из таких слагаемых равно 0, т.к. $w \in Ker(f_i(A)) \Rightarrow w = 0$ ☐

Corollary. *Пусть* $f = f_1 \cdot \ldots f_k$, *они все попарно взаимнопросты и* $f(A) = 0$, *тогда* $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$, *где* $V_i = Ker(f_i(A))$

Доказательство. $(f_1, f_2 \ldots f_k) = 1 \Rightarrow V = Ker f_1(A) \oplus Ker f_2 \ldots f_n(A)$. Возникает $A' = \mathcal{A}_| Ker f_2 \ldots f_n(A)$, причем $(f_2 \ldots f_n)(A') = 0$ Дальше по индукции. ☐

Example 2.6.

Пусть у нас оператор диагонализуем и $f(t) = (t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)$ с с.в. v_1, v_2, v_3. Тогда что такое V_i? $V_i = Ker((t - a_i)\mathcal{A}) = Ker(\mathcal{A} - a_i Id) = \langle v_i \rangle$.
Тогда $V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle$

Proposition 2.3. Итог

$\mathcal{A} \in Lin(V,V),\ \chi_A(t) = \prod p_i^{a_i},\ p_i$ — неприводимый. $V = \bigoplus Ker(p_i^{a_i}(\mathcal{A})) = \bigoplus V_i$ все инвариантные и $p_i^{a_i}(\mathcal{A}|_{V_i}) = 0$

Пусть теперь $K = \mathbb{C} \Rightarrow p_i = t - \lambda_i$

Definition 2.4. Корневое подпространство

$Ker(t-\lambda_i)^{a_i}(\mathcal{A}) = W_{\lambda_i} = Ker(\mathcal{A}-\lambda_i Id)^{a_i}$ — корневое подпространство
Тогда $V = \bigoplus\limits_{\lambda - \text{с.ч.}} W_\lambda$

Выберем базис в каждом W_λ, тогда их объединение базис V.

В этом базисе $[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} A_{W_{\lambda_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_{W_{\lambda_k}} \end{pmatrix}$

Рассмотрим $W_\lambda = ker(\mathcal{A}-\lambda_i Id)^{a_i}$. $B_i = (\mathcal{A}-\lambda_i Id)\big|_{W_\lambda}$. Тогда $B_i^{a_i} = 0$. То есть B_i — нильпотентный. Знаем, что там есть базис из жордановых цепочек. В нем B состоит из 1 под диагональю почти везде. А $[\mathcal{A}]\big|_{W_\lambda} = \lambda_i Id + B_i$.

Итого: существует базис т.ч. Из таких матрица имеет вид бочно-диагональный с блоками $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$ Это называется жорданова форма оператора $\mathcal{A}$.

Theorem 2.2. Жорданова форма оператора

Любой оператор над $\mathbb{C}$ имеет жорданову форму.
Переформулировка: $\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \exists C \in GL_n(\mathbb{C}) :\ CAC^{-1}$ в жордановой форме.
Примечание: Жорданова форма единственна с точностью до перестановки.

Proposition 2.4.

Новые жордановы цепочки:
$v_1 \overset{\mathcal{A}-\lambda E}{\to} v_2 \overset{\mathcal{A}-\lambda E}{\to} \dots \overset{\mathcal{A}-\lambda E}{\to} v_k \overset{\mathcal{A}-\lambda E}{\to} 0$
То есть $A(v_k) = \lambda v_k$, $A(v_{k-1}) = \lambda v_{k-1} + v_k$ и так далее

3 Лекция 3. Не смотрела(не читал(не писал))

Example 3.1. Возведение в степень

Хотим A^n. Приведем к жордановой форме $J = CAC^{-1} \Rightarrow A^n = CJ^nC^{-1}$. Достаточно научиться считать J^n. $J^n = diag(J_1^n, \dots, J_k^n)$

Пусть $J_i = J(k, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + J(k, 0)$

$$J^n = (\lambda E + J_0)^n = \sum_l \binom{n}{l} \lambda^{n-l} \cdot E \cdot J_0^l$$

Что такое J_0^k? $J_0(e_i) = e_{i+1}$ и $J_0(e_k) = 0$. То есть $J^l(e_i) = e_{i+l}$ — матрица выглядит так: единички опустилась на l диагоналей вниз.

Подставляем в бином $J(\lambda, k)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \lambda^n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \binom{n}{n-2}\lambda^2 & \binom{n}{n-3}\lambda^3 & \dots & \lambda^n & 0 \\ \binom{n}{n-1}\lambda^1 & \binom{n}{n-2}\lambda^2 & \dots & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$

Отсюда можно оценить, как растут коэффициенты A^n при $n \to \infty$. Примерно так же, как коэф-ты J^n. То есть $\lambda^n p(n)$, где $|\lambda|$ - максимален.

При каких условиях $A^n \to \infty$? Ответ: если $max|\lambda| > 1$ или $max|\lambda| = 1$ и есть жорданова клетка размера > 1 с $|\lambda| = 1$.

3.1 Единственность жордановой формы

Знаем: $A \in M_n(\mathbb{C})$, то $\exists C\ : C^{-1}AC = diag(J(k_1, \lambda_1), \dots, J(k_s, \lambda_s))$

То есть A соответствует неупорядоченный набор(не множество! пары могут совпадать) $\{(k_i, \lambda_i)\}$.

Вопрос: могут ли два набора соответствовать одному оператору?

Ответ: нет! Этот набор однозначно выражается через исходный оператор $\mathcal{A}$.

Доказательство. Рассмотрим $f(k, \lambda) = \dim Im(\mathcal{A} - \lambda Id)^k - \dim Im(\mathcal{A} - \lambda Id)^{k+1}$(какие-то ранги каких-то матриц).

Как она связана с жордановой формой?

Блочно-диагональная структура J соответствует разбиению на инвариантные пространства. Пусть это $V_1, \dots V_s$. То есть $[\mathcal{A}_{|v_i}] = J(k_i, \lambda_i)$ и $V = \bigoplus V_i$.

V_i инвариантны относительно $(\mathcal{A} - \lambda Id)^m$ тоже(V_i инвариантно относительно $\mathcal{A}$ по условию и относительно Id всегда). Поэтому $dim(Im(\mathcal{A} - \lambda Id)^m) = \sum dim(Im(\mathcal{A} - \lambda Id)^m_{|V_i})$(т.к. $Im(\mathcal{A} - \lambda Id)^m = \bigoplus Im(\mathcal{A} - \lambda Id)^m_{|V_i}$).

Поэтому $f(k, \lambda) = \sum_i dim(Im(\mathcal{A} - \lambda Id)^k_{|V_i}) - dim(Im(\mathcal{A} - \lambda Id)^{k+1}_{|V_i})$

Посчитаем каждое слагаемое.

$$J(k_i,\lambda_i)-\lambda E_{k_i}=\begin{pmatrix}\lambda_i-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & \lambda_i-\lambda & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i-\lambda\end{pmatrix}$$

Случай 1. $\lambda_i \neq \lambda$ - невырожденная матрица, значит у любой её степени ранг k_i и соответствующая разность 0.

Случай 2. Тогда это просто нильпотентный блок (1 под диагональю). Её ранг $k_i - 1$ и при каждом умножении ранг уменьшается на 1. Значит

$$rk(J(k_i,\lambda_i)-\lambda_i E_{k_i})^k = dimIm(J(k_i,\lambda_i)-\lambda_i E_{k_i})^k = k_i - k$$

Значит $dim(Im(\mathcal{A}-\lambda Id)^k_{|V_i}) - dim(Im(\mathcal{A}-\lambda Id)^{k+1}_{|V_i}) = \begin{cases}1, \text{ при } k<k_i\\ 0, \text{ иначе}\end{cases}$

Итак, разность $=1$ при $\lambda_i=\lambda$ и $k_i>k$, 0 иначе.

Значит $f(k,\lambda)=|\{(k_i,\lambda_i)|\ k_i>k\ \lambda_i=\lambda\}|$, то есть $|\{i\mid (k_i,\lambda_i)=(k,\lambda)\}| = f(k-1,\lambda)-f(k,\lambda)$. Значит набор восстанавливается однозначно по $\mathcal{A}$. □

Что делать, если K не алгебраически замкнуто?

Идея: $\mathcal{A}\in Lin(V,V)$. Рассмотрим $v\in V$ - произвольный. Рассмотрим $v_0=v$, $v_1=\mathcal{A}v$, $v_2=\mathcal{A}^2v,\dots$. Пространство конечномерное, поэтому найдется такое k, что набор $v_0,\dots,v_k$ станет линейнозависимой. То есть $v_k=\sum a_iv_i=\sum a_i\mathcal{A}^i(v)$.

Lemma 3.1.

$\langle v_0,\dots,v_{k-1}\rangle$ - k-мерное инвариантное подпространство с матрицей $\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & a_0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1\\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2\\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{k-1}\end{pmatrix}$

Definition 3.1. Циклическое подпространство

$\langle v_0,\dots,v_{k-1}\rangle$ называется циклическим подпространством порожденным v. Обозначаем $\langle v\rangle_{\mathcal{A}}$. Соответствующая матрица называется Фробениусовой клеткой.

Exercise 3.1.

$\chi_{\mathcal{A}_{|\langle v\rangle_{\mathcal{A}}}}(t)=(-1)^n\left(t^k-\sum_{i=0}^{k-1}a_it^i\right)$

Remark 3.1.

Случайный выбор v даст скорее всего $\langle v\rangle_{\mathcal{A}}=V$. В этом случае не нашли мы никакого инвариантного подпространства, зато нашли характеристический многочлен.
Иначе нашли нетривиальное инвариантное подпространство и характеристический многочлен на нем — какой-то множитель $\chi_{\mathcal{A}}(t)$

Theorem 3.1. Фробениусова форма

Пусть $\chi_{\mathcal{A}}(t) = p_1 \dots p_k$, где p_i — неразложимые и все различны.
Тогда у $\mathcal{A}$ существует базис т.ч. $[\mathcal{A}] = diag(F_1, \dots, F_k)$, где F_i - фробениусова клетка, соответствующая многочлену p_i.
То есть $p_i = \sum b_i t^i$, то последний столбец F_i — $-b_i$

Доказательство. Знаем, что если $\chi_A = \prod p_i$ и $(p_i, p_j) = 1$, то $V = \bigoplus V_i$, где $V_i = ker(p_i(\mathcal{A}))$. В соответствующем базисе, составленном из базисов V_i матрица $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид $diag(\mathcal{A}_{|V_i})$. Осталось доказать, что можно выбрать базисы V_i так, чтобы сужение на V_i имело вид фробениусовой клетки для многочлена p_i.

Возьмем вектор $v \in V_i$ и построим его циклическое пространство $= \langle v_0, \dots, v_{s-1} \rangle$.
$v_s = \mathcal{A}^s(v) = \sum a_j \mathcal{A}^j(v)$, то есть $\mathcal{A}^s - \sum a_j \mathcal{A}^j(v) = 0$. То есть $\underset{(t^s - \sum a_j t^j)}{f(t)} (\mathcal{A})(v) = 0$

Знаем, что $f(\mathcal{A})(v) = 0$ и знаем, что $p_i(\mathcal{A})(v) = 0$, т.к. $v \in V_i = ker(p_i(\mathcal{A}))$.

Докажем, что $f = p_i$.

Поделим p_i на f с остатком. $p_i = fq + r$, где $deg(r) = t < s = deg(f)$.

Мы знаем, что $r(\mathcal{A})(v) = p_i(\mathcal{A})(v) - q(\mathcal{A}) \circ f(\mathcal{A})(v) = 0$.

Итак, $r(\mathcal{A})(v) = 0 = \sum c_i A^i(v)$. То есть $v, \mathcal{A}(v), \dots, A^r(v)$ - линейнозависимы - противоречие с выбором s. Значит $r = 0$. То есть $p_i \vdots f$, но p_i неприводим, поэтому $f = p_i$.

$v \in V_i$ — инвариантно, значит и $W_i = \langle v \rangle_{\mathcal{A}} \subset V_i$.

Осталось понять, что $W_i = V_i$.

$$V = \bigoplus V_i \Rightarrow dim(V) = \sum dimV_i \geq \sum dimW_i = \sum deg(p_i) = deg(\prod p_i) = deg\chi_{\mathcal{A}} = dimV$$

Значит везде равенства! То есть W_i — все V_i, а значит фробениусовы клетки те самые матрицы сужения.

Здесь есть липа: мы брали $v^i \in V_i$. Важно, что мы брали не нулевой вектор. А почему мы уверены, что $V_i \neq \{0\}$?

Пусть $\chi_{\mathcal{A}} = p_i q$. Мы знаем, что $p_i(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = 0$. Значит $\forall v\ p_i(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = 0 \Rightarrow ker(p_i(\mathcal{A})) \supset Im(q(\mathcal{A}))$. Если $q(\mathcal{A}) \neq 0 \Rightarrow ker(p_i(\mathcal{A})) \neq 0$.

А почему $q(\mathcal{A}) \neq 0$? Перейдем в алгебраическое замыкание и рассмотрим λ — корень $p_i(\mathcal{A})$. $q(\lambda) \neq 0$ т.к. они взаимнопросты. То есть $q(\mathcal{A}) = \prod(t - \lambda_i)$ и $\lambda_i \neq \lambda$.

Значит есть $v\ : A(v) = \lambda v$. Но $q(\mathcal{A})(v) = \prod(\lambda - \lambda_i)(v) \neq 0$. $\square$

3.2 Линейные и билинейные функции

Definition 3.2. Двойственное пространство

Пусть V — в.п. над K. Назовем $V^* = Lin(V, K)$ — двойственным к V пространством.

Example 3.2.

Пусть $V = K^n$. И мы знаем, что $\forall f \in Lin(V, K)$ это умножение на матрицу. В данном случае $A_f = (a_1, \dots, a_n)$. То есть $f(x) = \sum a_i x_i$ — линейная функция от n переменных. $(K^n)^* = {}^nK$. Понятно, что они изоморфны, но есть нюансы...

Считаем, что $dimV < \infty$. Зафиксируем базис e_i.

Definition 3.3. Двойственный базис

Двойственный базис это набор элементов $e^i \in V^*$ т.ч. $e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Такие существуют и единственны. И это действительно базис V^*

Доказательство. Линейная независимость: пусть $\sum a_i e^i = 0$. Применим это к $e_j : \sum a_i e^i(e_j) = a_j = 0 \Rightarrow \forall j \; a_j = 0$

Это n векторов в n-мерном пространстве $\Rightarrow$ базис. □

Remark 3.2.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис V. $v \in V$ и a_i его координаты.
Тогда $a_i = e^i(v)$.
Ясно, что соответствие $e_i \mapsto e^i$ задает изоморфизм V и V^*. Но он неканонический: если выберем другой базис, то изоморфизм изменится.

Факт: канонического изоморфизма нет...

Example 3.3.

Рассмотрим $(V^*)^* = Lin(Lin(V, K), K)$ - второе двойственное протсранство. Оно уже канонически изоморфно V.
$i : V \to V^{**}$. $v \in V \mapsto f_v : V^* \to K$. Т.ч. $f_v(g) = g(v)$. Это дейсвительно изоморфизм(упр).

Definition 3.4. Билинейное отображение

V — в.п. над K. Билинейное отображение $f : V \times V \to W$ — отображение линейное по каждому аргументу.
В случае, когда $W = K$, f называется билинейной функцией(формой).

Definition 3.5. Матрица Грамма

Пусть v_i — базис V. Пусть $a_{ij} = f(v_i, v_j)$. Возьмем $v, w \in V$, $v = \sum x_i v_i$, $w = \sum y_i v_i$.
Тогда $f(v, w) = f(\sum x_i v_i, \sum y_j v_j) = \sum_{i,j} x_i y_j f(v_i, v_j) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$.
Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей билинейной формы или матрицей Грама.
В матричной записи $f(v, w) = \sum a_{ij} x_i y_j = x^T A y$, где x, y - столбцы координат v, w.

Definition 3.6. Симметричная билинейная форма

Симметричная билинейная форма: $f : V \times V \to K$ билинейная, т.ч. $f(x,y) = f(y,x)$.

Lemma 3.2. Восстановление билинейной по квадратичной

f — сим $\iff f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i) \iff A_f = A_f^T$.

Доказательство. Понятно, что если $A = A^T$, то $f(y,x) = y^T A x = y^T A^T (x^T)^T = (x^T A y)^T = x^T A y$, так как последнее это просто число... □

Definition 3.7. Квадратичная форма

Пусть f — сим. билинейная форма. Рассмотрим $q : V \to K$, $q(v) = f(v,v)$. Это называется квадратичная форма, ассоциированная с f.

Lemma 3.3.

Пусть характеристика поля не 2, тогда f однозначно восстанавливается по q.

Доказательство.

$$f(u+v, u+v) = f(u,u) + 2f(u,v) + f(v,v) \Rightarrow f(u,v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}$$

В координатах $f(x,y) = \sum a_{ij} x_i y_j$. $q(x) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = \sum a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$. □

Example 3.4.

$f \to q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_3$. Матрица Грама: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а $f = x_1y_1 + 2x_2y_2 + \frac{3}{2}x_1y_3 + \frac{3}{2}x_3y_1$.
В матричном виде $q(x) = x^T A x$.

Пусть f — билинейная форма. Заметим, что если зафиксируем один аргумент, то получим линейную функцию. Поэтому $\forall v \in V \mapsto f_v(x) = f(v,x) \in V^*$. Таким образом построили отображение $i : V \to V^*$. Это линейное отображение(трив,очев,упр).

Верно ли, что это изоморфизм? Не всегда! $f(x,y) = 0$ билинейная функция...

Definition 3.8. Невырожденная функция

f называется невырожденной, если $i_f : V \to V^*$ изоморфизм.

Lemma 3.4. Равносильные условия невырожденности

Следующие условия расносильны:
1. f невырождена
2. A_f невырождена
3. Не существует $x \in V$, $x \neq 0$, т.ч. $f(x,y) = 0$

Доказательство. $1 \iff 3$.

i_f - изоморфизм $\iff$ инъекция $\iff$ $Ker(i_f) = 0$ $\iff$ $\{v \mid f(v,y) = 0\} = \{0\}$. Ровно условние 3.

Если A_f вырождена, существует $x\ :\ x^T A_f = 0 \Rightarrow \forall y\, x^T A_f y = 0$.

Если невырожден, и $x\ : x^T Ay = 0\ \forall y$. То $x^T A = 0 \Rightarrow A$ вырождена. □

4 Лекция 4. Геометрия 9 класс

Definition 4.1. Ядро билинейной формы

$f(x,y) = 0\, \forall y \in V \iff x^T Ay = 0\, \forall y \iff x^T A = 0$.
Если f — симметричная, то условие выше значит, что $Ax = 0 \iff x \in Ker(A)$.
Такие x называются ядром билинейной формы.
То есть f невырождена $\iff$ ядро $\{0\}$.

Example 4.1.

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

Она очевидно вырождена: например её матрица имеет не полный ранг. Тождественный 0 получается при $x_1 = -x_2$.

4.1 Замена базиса в билинейной форме

Если есть пространство размерности n, то оператор на V задает при выборе базиса $A \in M_n$. Точно таким же образом билинейная форма при выборе базиса задается $B \in M_n$. А существует ли соответствие между операторами и формами?? Мы получили по оператору матрицу, а по матрице форму. Можем обойтись без шага с матрицами?

Есть ли естественное соответствие между операторами и билинейными формами? Ответ: НЕТ. *Это тензоры разных типов(no comments)*

Заменим базим у оператора: $A \rightsquigarrow C^{-1}AC$, а билинейная форма преобразуется по другой формуле:

Пусть f — билинейная форма, v_i, v'_i — базисы V. A — матрица f в v_i. И пусть $C = C_{v' \to v}$(если x координаты в v', то Cx — координаты в v, другими словами $(v'_1, \dots v'_n) = (v_1, \dots, v_n)C$).

Как изменится A? Пусть $\widetilde{A}$ — матрица в базисе v'_i. Тогда должно выполняться $f(x,y) = (Cx)^T A(Cy)$. С другой стороны $f(x,y) = x^T \widetilde{A} y$. Итого $x^T \widetilde{A} y = x^T C^T ACy$ для любых x, y. Отсюда следует $\widetilde{A} = C^T AC$(**CTAC**)(следует потому что можем подставлять e_i, e_j и получать компоненты матрицы)

4.2 Пространства со скалярным произведением

Definition 4.2. Евклидово пространство

Евклидовым пространством называется пара $(V, (-,-))$, где V —- векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $(-,-)$ — билинейная форма симметричная и положительно определенная:

1. $(x,y) = (y,x)$ — симметричность
2. $(x_1 + bx_2, y) = (x_1, y) + b(x_2, y)$ — билинейность
3. $(x,x) \geq 0, \forall x \in V$ причем $(x,x) = 0 \iff x = 0$ — положительная определенность

Example 4.2.

Возьмем $\mathbb{R}^n$. Знаем $f(x,y)$ — сим и билинейна $\iff f = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$, где $a_{ij} = a_{ji} (A = A^T)$.
Что означает в терминах A условие 3? Будет потом...
Отдельный пример $f(x,y) = \sum_i x_i y_i$ — **стандартное скалярное произведение**.
$f(x,x) = \sum x_i^2$ — очевидно выполняется положительная определенность.
$f(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ тоже скалярное произведение для $\mathbb{R}^2$.

Definition 4.3. Норма

Пусть V — евклидово. Положим $\forall v \in V \; \|x\| = \sqrt{(x,x)}$
Положим $\forall u, v \in V \;\; d(u,v) = \|u - v\|$ задает метрическое пространство на V

Lemma 4.1. КБШ

V — евклидово. Тогда $\forall u, v \; |(u,v)| \leq \|u\| \|v\|$. А если достигается равенство, то u, v - линейно зависимы.

Доказательство. В случае если какой-то вектор равен 0, то все очевидно...
Иначе заметим, что $\forall t \in \mathbb{R} \; (u - tv, u - tv) \geq 0$.

$$(u,u) - 2t(u,v) + t^2(v,v) \geq 0$$

Значит это квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом: дискриминант ≤ 0.

$$D = 4(u,v)^2 - 4(u,u)(v,v) \leq 0 \iff (u,v) \leq \|u\| \|v\|$$

В случае равенства $D = 0$, а значит есть $t \, : \, (u - tv, u - tv) = 0 \iff u = tv$.

□

Proposition 4.1. Угол между векторами и ортогональность

Из КБШ следует неравенство треугольника для норм:

$$\|u-v\|+\|v-w\| \geq \|u-w\| \iff \|p\|+\|q\| \geq \|p+q\|$$

Возведем в квадрат, сократим и получим КБШ.
КБШ также говорит, что $|\frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}| \leq 1$ для не нулевых u, v.
Значит $\exists \alpha \in [0, \pi]$: $\cos(\alpha) = \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}$. Будем называть это **углом между векторами.**
Частные случаи: $|\cos\alpha| = 1 \iff$ в КБШ равенство. То есть угол равен 0 или $\pi \iff$ коллинеарны. А если $\cos\alpha = 0$, то u, v **называются ортогональными**.

Definition 4.4. Ортогональный и ортонормированный базис

V — евклидово. Базис $v_1, \ldots, v_n$ называется ортогональным, если $(v_i, v_j) = 0$ при $i \neq j$ и называется ортонормированным, если $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ т.е. $\|v_i\| = 1$

Remark 4.1. Ван

Любой вектор можно отнормировать: пусть $v \neq 0 \in V$. Рассмотрим $e = \frac{v}{\|v\|}$, тогда $(e, e) = (\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}) = \frac{1}{\|v\|^2}(v, v) = 1$.
При этом $\forall u$ $(v, u) = 0 \iff (e, u) = 0$ очев.
Мораль такая: ортогональный базис легко превратим в ортонормированный.

Remark 4.2. Ту

Если есть ОНБ - e_i и $v = \sum_i a_i e_i$, то

$$(v, e_i) = (\sum a_j e_j, e_i) = \sum a_j (e_j, e_i) = a_i$$

Умеем быстро считать скалярное произведение = умеем быстро раскладывать по базису

Remark 4.3. Фри

e_i - ОНБ $\iff ((e_i, e_j))_{ij} = E$ — матрица Грамма единичная.

Remark 4.4. Фор

Если $x, y \in V$ и выбран ортонормированный базис, то $(x, y) = x^T E y = x^T y$ — стандартное скалярное произведение.
В частности $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$ — "n-мерный Пифагор"

Remark 4.5. Т. Пифагора

Пусть $u, v \in V$, и $(u, v) = 0$. Тогда $\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
Доказательство очев: раскроем скобочки.

В любом ли евклидовом пространстве есть ортонормированный базис? Ответ: **ДА**.

Theorem 4.1. Ортогонализация Грамма-Шмидта

Пусть V — евклидово. $v_1, \dots, v_n$ - базис. Тогда $\exists$ ОНБ $e_1, \dots, e_n$ т.ч. $\langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \; \forall k$.

Exercise 4.1.

Если потребовать дополнительно $(e_i, v_i) > 0$, то такой $e_1, \dots, e_n$ единственный

Доказательство. Строим $e_1, e_2, \dots$ последовательно.
Шаг 1. $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$. Очевидно $\|e_1\| = 1$ и $\langle e_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$.
Пусть построены $e_1, \dots, e_k$ с нужными свойствами. Хотим e_{k+1} т.ч. $\|e_{k+1}\| = 1$, $(e_i, e_{k+1}) = 0$ и $\langle e_1, \dots, e_{k+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle$
Уже знаем, что $\langle e_1, \dots, e_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Значит $\langle e_1, \dots, e_k, v_{k+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_k, v_{k+1} \rangle$.
Рассмотрим $\widetilde{v}_{k+1} = v_{k+1} + \sum_{i=1}^k a_i e_i$. При этом $\langle e_1, \dots, e_k, v_{k+1} \rangle = \langle e_1, \dots, e_k, \widetilde{v}_{k+1} \rangle$.
$(\widetilde{v}_{k+1}, e_j) = (v_{k+1}, e_j) + a_j$. Положим $a_j = -(v_{k+1}, e_j)$. Тогда $(\widetilde{v}_{k+1}, e_j) = 0$.
Положим $e_{k+1} = \frac{\widetilde{v}_{k+1}}{\|\widetilde{v}_{k+1}\|}$. □

Proposition 4.2.

Любые два n-мерных Евклидовых пространства изометричны. То есть $\exists f : V_1 \to V_2$ т.ч. f — изомофризм в.п. и $(u, v) = (f(u), f(v))$(а значит сохраняет и расстояния и углы и все все все, что определяется через скалярное произведение)

Доказательство. В любых двух есть ОНБ. Пусть e_i — в V_1, а f_i — в V_2. Рассмотрим $\varphi(e_i) = f_i$ — изоморфизм в.п.(базис переходит в базис) и при этом $\forall u, v \in V_1$

$$(u, v) = \sum_i u_i v_i = (f(u), f(v))$$

Т.к. $u = \sum u_i e_i \Rightarrow f(u) = \sum u_i f_i$ — константы не поменялись, скалярное произведение стандартное. □

4.3 Ортогональное дополнение

Definition 4.5. Ортогональное дополнение

Пусть f — сим. билинейная форма на V над K. $U \leq V$. Тогда ортогональное дополнение к U это $U^\perp = \{w \in V \mid f(w, u) = 0, \; \forall u \in U\}$

Remark 4.6.

Ясно, что $U^\perp$ это тоже подпространство(даже если U не подпространство): $(w_1, u) = 0$, $(w_2, u) = 0 \Rightarrow (w_1 + a w_2, u) = 0$ по билинейности.

Theorem 4.2.

f — сим. билинейная форма на V. $U \leq V$, $dimV = n$, $dimU = k$. Тогда

1. $dimU^{\perp} \geq n - k$, $(U^{\perp})^{\perp} \supset U$
2. Пусть f невырождена, тогда $dimU^{\perp} = n - k$ и $(U^{\perp})^{\perp} = U$
3. V — евклидово, а f его скалярное, тогда $V = U \oplus U^{\perp}$

Доказательство. 3) Зафиксируем ОНБ $U = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$. Как-то дополним до базиса всего V и ортогонализуем по т. Г-Ш(не меняя первые k). Получили e_i — ОНБ V. Тогда $U^{\perp} = \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle \Rightarrow dimU^{\perp} = n - k$ и V разбито в прямую сумму.

Доказываем $U^{\perp} = \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$: пусть $v = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i + \sum_{k+1}^{n} a_i e_i$. Тогда $v \in \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle \iff$ первой суммы нет $\iff (v, e_i) = 0$, где $i \leq k \iff (v, \sum_{i=1}^{k} b_i e_i) = 0 \iff v \in U^{\perp}$

1) $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$ по определению т.к. $f(u, w) = 0$, для $u \in U$ и $w \in U^T \Rightarrow u \in (U^{\perp})^{\perp}$.

Пусть $U = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ дополним до базиса V и рассмотрим линейную $\phi : V \to K^k$ т.ч. $v \mapsto \begin{pmatrix} f(v, u_1) \\ \vdots \\ f(v, u_k) \end{pmatrix}$

То есть $dimIm(\phi) \leq k \Rightarrow dim(Ker(\phi)) \geq n - k$, а $Ker(\phi) = U^{\perp}$

2) Пусть f невырождена. Ищем $v = \sum x_i u_i$ т.ч. $f(\sum x_i u_i, u_j) = 0$ для $j \leq k$.

Имеем СЛУ $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = 0$ для $j = 1, \ldots, k$. k уравнений, а коэффициенты — первые k строк матрицы Грамма. A невырождена $\Rightarrow$ первые k строк линейно независимы $\Rightarrow$ пространство решений $n - k$ мерно.

Размерность $(U^{\perp})^{\perp} = n - dim(U^{\perp}) = n - (n - k) = k$ и содержит k мерное подпространство - U. Значит они равны.

Заметим, что в Евклидовом случае $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ т.к. если $u \in U^{\perp}, u \in U \Rightarrow (u, u) = 0$. □

Remark 4.7. очевупр

Пусть V — евклидово пространство. $V_1, V_2 \leq V$. Тогда

$$(V_1 \oplus V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$$

$$(V_1 \cap V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \oplus V_2^{\perp}$$

Доказательство. $v \in V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp} \Rightarrow (v, v_1) = 0 \wedge (v, v_2) = 0 \Rightarrow (v, v_1 + v_2) = 0 \Rightarrow v \in (V_1 \oplus V_2)^{\perp}$

Аналогично $V_1^{\perp} \oplus V_2^{\perp} \subset (V_1 \cap V_2)^{\perp}$

Очев замечание $X \leq Y \Rightarrow X^{\perp} \geq Y^{\perp}$.

Мы поняли, что $(V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}) \subset (V_1 \oplus V_2)^{\perp}$. Применим ещё раз ортогональность: $(V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp})^{\perp} \supset (V_1 \oplus V_2)$

Получили каку, далее упр □

Definition 4.6. Расстояние от точки до пространства

Пусть V — евклидово, $U \le V$, $v \in V$. По определению положим $d(v,U) = \inf_{u\in U} d(v,u)$
Пусть $v = v_u + v_\perp (\exists!$ т.к. $V = U \oplus U^\perp)$, где $v_u \in U$, а $v_\perp \in U^\perp$. Тогда $d(v, v_u) = \min_{u\in U}(d(v,u)) = d(v,U)$
v_u называется проекцией на U, а $v_\perp$ ортогональной составляющей.

Доказательство. inf достигается.

$$|d(v,u)|^2 = \|v-u\|^2 = \left\|\underset{\in U^\perp}{(v-v_u)} + \underset{\in U}{(v_u-u)}\right\|^2 \underset{\text{пифагор}}{=} \|(v-v_u)\|^2 + \|(v_u-u)\|^2 \ge \|(v-v_u)\|^2$$

□

4.4 Положительная определенность

Пусть $f : V \to V$ — симм. билинейная форма, V — в.п. над $\mathbb{R}$. $f = \sum a_{ij}x_iy_j$

Как понять, является ли f скалярным произведением. Конкретнее: является ли f положительно определенной.

Понимаем f – скалярное произведение $\iff$ $\exists$ матрица перехода C: $C^TAC = E$. т.к. есть ОНБ в котором матрица E.

Если есть ОНБ $\Rightarrow f(x,y) = \sum x_iy_i$ в этом базисе $\Rightarrow f$ – положительно определена.

Заметим, что у матрицы есть определитель

$$1 = det(E) = det(C^TAC) = det(C)^2det(A)$$

То есть если f положительно определена, то $det(A) > 0$

Более того: рассмотрим любую симметричную подматрицу A(выбираем строки и столбцы с одинаковыми номерами). Тогда это матрица просто сужение $f|_{\langle e_{i_1},\dots,e_{i_k}\rangle}$ — все ещё положительно определена. Значит определитель такой подматрицы тоже > 0.

Theorem 4.3. Критерий Сильвестра

f положительно определена $\iff$ $\forall k = 1,\dots,n$ $det(A_k) > 0$, где A_k — подматрица из первых k строчек и столбцов — угловой минор.

5 Лекция 5. Комплексифицируемся

Theorem 5.1. Критерий Сильвестра

f — симметричная билинейная форма, A — матрица Грама.
Тогда f — положительно определена $\iff$ $\forall\ k = 1..n$ $detA_k > 0$, A_k — матрица из первых k столбцов и строк.

Доказательство. $\Rightarrow$. Уже доказали.

$\Leftarrow$: Пусть q — соответствующая квадратичная. Индукция по размерности V:

База: $n = 1$ — очев. $q(x) = ax^2$ — положительно определена $\iff a > 0$

Переход: $n \to n + 1$.

$v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ — базис.

Рассмотрим $f_{|\langle v_1, \ldots, v_n \rangle}$ — имеет матрицу Грама A_n (в базисе $v_1, \ldots v_n$)

Угл. миноры: $det(A_1), \ldots, det(A_n) > 0 \Rightarrow$ по индукции $f_{|\langle v_1, .. v_n \rangle}$ — положительно определена $\Rightarrow f_{|\langle v_1, .. v_n \rangle}$ — скалярное произведение $\Rightarrow \exists\, e_1, \ldots e_n$ — ОНБ для $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ относительно f.

Рассмотрим: $e_1, \ldots, e_n, v_{n+1}$ — базис V. В нём f имеет матрицу Грама вида: $\begin{pmatrix} E & x^T \\ x & a \end{pmatrix}$ — единичная матрица + какой-то последний столбец($x = (a_1, \ldots, a_n)$).

Рассмотрим $\widetilde{e}_{n+1} = v_{n+1} - \sum a_i e_i$

Теперь $\forall\, j = 1 \ldots n$ $(\widetilde{e}_{n+1}, e_j) = (v_{n+1}, e_j) - \sum a_i (e_i, e_j) = a_j - a_j = 0$. Ясно, что $e_1, \ldots, e_n, \widetilde{e}_{n+1}$ — базис V. Т.е. матрица Грама в новом базисе будет равна: $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \widetilde{a} \end{pmatrix} = \widetilde{A}$

Заметим, что $\widetilde{a} = det(\widetilde{A}) = det(C^T A C) = (det C)^2 \cdot det A_{n+1} > 0$

Т.е. в базисе $e_1, \ldots, e_n, \widetilde{e}_{n+1}$: $q(x) = 1 \cdot x_1^2 + \cdots + 1 \cdot x_n^2 + \widetilde{a} \cdot x_{n+1}^2 > 0$ $\square$

Proposition 5.1. Разложение Холецкого

f — сим. билинейная форма с матрицей A, тогда
f — положительно определена $\iff \exists\, C$ — невырожденная, т.ч. $A = C^T C$.
Замечание: $C^T C$ — всегда симметрична.

Доказательство. f – положительно определена $\iff \exists$ базис, в котором матрица Грама единична $\iff \exists C$ — невыр., т.ч. $A = C^T E C = C^T C$

Первая равносильность: $\Rightarrow$ – ортогонализация Г-Ш. Обратно очев. $\square$

Lemma 5.1.

$f : V \times V \to K$ — билинейная форма, V — в.п. над $K(char K \neq 2)$, симметричная, невырожденная.
Тогда существует ортогональный базис $v_1, \ldots, v_n$, т.ч. что матрица Грама имеет вид:
$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ и все $a_i \neq 0$.

Доказательство. Потом(наверное) $\square$

Lemma 5.2. Теорема Лагранжа

Любая симметричная билинейная форма имеет ортогональный базис.

Доказательство. $Ker f = Ker A = \{v \in V \mid f(u, v) = 0,\ \forall u \in V\}$

Возьмём базис $v_1, ..., v_k$ $Ker f$. Дополним его до базиса V.

Поймем, что $f_{|\langle v_{k+1},\ldots,v_n\rangle}$ — невырождена.

Пусть $v \in Ker(f_{|\langle v_{k+1},\ldots,v_n\rangle}) \Rightarrow f(v, v_i) = 0,\ i = k+1,..,n$, а также $f(v, v_i) = 0,\ i = 1..k$ т.к. $v_i \in Ker\ f \Rightarrow f(v, u) = 0,\ \forall\ u \in V \Rightarrow v \in Ker\ f = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle \Rightarrow v = 0$ т.к. $v \in \langle v_{k+1}, \ldots, v_n\rangle$ изначально.

Тогда в $\langle v_{k+1}, \ldots,\ v_n\rangle$ есть базис $u_{k+1}, \ldots, u_n$ ортогональны относительно $f \Rightarrow v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$ — ортогональный базис. □

Example 5.1. Контрпример

$q(x_1, x_2) = x_1 x_2$ нет ортогонального базиса над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$(упр).
Были бы над $\mathbb{R}$ сделали бы замену: $x_1x_2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = y_1^2 - y_2^2$.

Lemma 5.3.

Если $K = \mathbb{R}$, то для любой билинейно симметричной f существует базис т.ч. матрица грамма имеет вид диагональной, где сначала идут сколько то 1, потом сколько-то -1 и несколько 0. То есть $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum x_i^2 - \sum x_j^2$.
Если $K = \mathbb{C}$, то без -1, только $\sum x_i^2$.

Доказательство. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — ортогональный базис(есть по т. Лагранжа). Отнормируем его. Если $f(v_i, v_i) = 0$, то $e_i = v_i$. Если $f(v_i, v_i) = a^2$, то $e_i = \frac{v_i}{a}$. Если $f(v_i, v_i) = -a^2$, то $e_i = \frac{v_i}{a}$. В любом случае будет $f(e_i, e_i) = \operatorname{sign}(f(v_i, v_i))$. Значит матрица будет иметь на диагонали 1, -1 и 0.

Если $K = \mathbb{C}$, то любое не нулевое число это квадрат какого-то числа, поэтому везде единички(и нули). □

Proposition 5.2.

В $\mathbb{C}$ матрица имеет вид $\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = A_k$. $k = rk(A_k) = rk(C^T A_k C)$. Следовательно k однозначно определено.

Над $\mathbb{R}$. A имеет вид $\begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ 0 & -E_l & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Понятно, что $k + l = rk(A)$ тоже однозначно определено.

Theorem 5.2. Закон инерции квадратичных форм

Пара чисел k, l единственны для A.

Доказательство. Это следует из того, что

$$k = \max(\dim U \mid U \leq V, f_{|U} - -\text{положительно определена})$$

Значит и l определяется точно как $rk(A) - k$.

Рассмотрим $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_l, \ldots, v_n$ – соответствующий базис, в котором форма так выглядит. Рассмотрим $f_{|\langle v_1,\ldots,v_k\rangle}$ имеет матрицу E_k. Значит искомый максимум $\geq k$.

Рассмотрим $U = \langle v_{k+1}, \ldots, v_n\rangle$. $dimU = n - k$. Пусть $max > k$. То есть $\exists W \leq V$ т.ч. $\dim W > k$ и $f_{|W}$ – положительно определена.

Заметим, что $\dim(W \cap U) = -\dim(W+U) + \dim W + \dim U \geq -n + n - k + k + 1 = 1$. То есть существует $v \neq 0 \in W \cap U$. Тогда $f(v,v) > 0$ т.к $v \in W$. Но $v = \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i$ и $f(v,v) = \sum_{i=k+1}^{n} -a_i^2 \leq 0$. Противоречие. $\square$

Не возвращаемся к лемме. Опять...

5.1 Полуторалинейные формы

Хотим что-то типа Евклидовой структуры над $\mathbb{C}$. Проблема в том, что в $\mathbb{C}^n$ $f(x,y) = \sum x_i y_i$ – симметрическая билинейная форма. Нет положительной определенности($f(x,x)$ может быть чем угодно). $f(ix, ix) = -f(x,x)$ для любой билинейной формы...

Правильное скалярное произведение $f(x,y) = \sum x_i \overline{y_i}$.

Definition 5.1. Полуторалинейная форма

Пусть $f : V \times V \to \mathbb{C}$,где V -в.п. над $\mathbb{C}$. f называется полуторалинейной, если

1. $f(x+y, z) = f(x,z) + f(y,z)$
2. $f(z, x+y) = f(z,x) + f(z,y)$
3. $f(ax, y) = af(x,y)$
4. $f(x, ay) = \overline{a} f(x,y)$ – полулинейность по 2 аргументу

Аналогично в $\mathbb{C}^n$ f - полуторалинейна $\iff$ $f = \sum a_{ij} x_i \overline{y_j}$.
Положительноопределенной, если $f(x,x) \in \mathbb{R}_+$ для $x \neq 0$.
Эрмитова, если $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$

Definition 5.2. Унитарное пространство

Унитарным называется пара (V, f), где V – в.п. над $\mathbb{C}$, а f – (полутора)линейная, эрмитова, положительноопределенная форма на нем(скалярное произведение).

Аналогично определяем $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. $d(x,y) = \|x - y\|$ – метрика.

V над $\mathbb{C}$, f – полуторалинейная, $v_1, \ldots, v_n$ – базис. $A = ((v_i, v_j))_{ij}$ — матрица Грамма. В координатах $f(x,y) = x^T A \overline{y}$. А формула перехода к другому базису $\widetilde{A} = C^T A \overline{C}$.

Ортогонализация Г-Ш, существование ОНБ, ортогональное дополнение — все как в Евклидовых пространствах.

Definition 5.3. Эрмитовость

Было $A^T = A$. А сейчас $(e_i, e_j) = \overline{(e_j, e_i)}$. То есть $A^T = \overline{A}$ — эрмитова матрица

Возвращаемся к старой лемме:

Доказательство. f — невырожденная симметричная билинейная форма на V, $charK \neq 2 \Rightarrow$ $\exists$ ортогональный базис.

Индукция по $dimV$. База очев.

Переход $n \to n+1$. f невырождена $\Rightarrow f \neq 0$. То есть $\exists x, y : f(x,y) \neq 0$.

$f(x,y) = \frac{f(x+y,x+y) - f(x,x) - f(y,y)}{2} \neq 0$. Значит хотя бы одно слагаемое не 0. То есть $\exists v_1 \, f(v_1, v_1) \neq 0$.

Мы знаем,что если f невырождена, то $dimU^{\perp} = dimV - \dim U$. В качестве U берем $\langle v_1 \rangle$. Тогда $\dim U^{\perp} = n + 1 - 1 = n$. При этом $v_1 \notin U^{\perp}$ т.к. $f(v_1, v_1) \neq 0$.

$v_2, \ldots, v_{n+1}$ — базис $U^{\perp} \Rightarrow v_1, \ldots, v_{n+1}$ — базис V.

Заметим, что $f_{|U^{\perp}}$ — невырожденная. Если $\exists u \in U^{\perp}$ т.ч. $f(u, v) = 0$ для $v \in U^{\perp}$, то $f(u, v_i) = 0$ для всех v_i, а значит $f(u, V) = 0$ — противоречие с невырожденностью.

В $U^{\perp}$ существует ортогональный базис. Добавим к нему v_1. Получим ортогональный базис V. □

5.2 Операторы в евклидовых и унитарных постранствах

5.2.1 Сопряженный оператор

Definition 5.4. Сопряженный оператор

V — евклидово или унитарно, $A \in Lin(V, V)$. Тогда сопряженый к $\mathcal{A}$ оператор это такой $\mathcal{B} \in Lin(V, V)$, что $\forall x, y \in V \ (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{B}y)$.
Обозначается $\mathcal{A}^*$.

Почему он существует и единственен?

Напоминание: Если V евклидово(в комплексном аналогично с точностью до знака сопряженности где-то), $(-,-)$ — невырожденная форма задает изоморфизм между V и V^*. $y \mapsto f_y(x) = (x, y)$. Это изоморфизм. То есть $\forall f \in V^* \ \exists! y \ f = f_y$.

Теперь рассмотрим $g_y(x) = (Ax, y) \in V^*$. Значит $\exists! z \ : g_y = f_z$ то есть $\forall x \ (Ax, y) = (x, z)$. $z = B(y)$. Это соответствие линейный оператор. Доказали существование и единственность.

Proposition 5.3. Явная формула для $\mathcal{A}^*$

$K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$. Пусть e_i — ОНБ. A матрица $\mathcal{A}$ в этом базисе. Ясно, что $\forall x, y \ (Ax, y) = (x, A^*y) \iff (Ae_i, e_j) = (e_i, A^*e_j)$ для базисных.

$$(Ae_i, e_j) = (\sum_k a_{ki} e_k, e_j) = a_{ji} = (e_i, A^*e_j)$$

Пусть $A^*e_j = (b_{ij})$. Тогда

$$(e_i, A^*e_j) = (e_i, \sum b_{kj} e_k) = \overline{b_{ij}}$$

То есть $A^* = \overline{A}^T$ — сопряженная матрица
Итого: сопряженные матрицы это матрицы сопряженных операторов **в ортонормированных базисах**. Упр написать в общем базисе.

Definition 5.5. Самосопряженный оператор

Оператор называется самосопряженным, если $A^* = A$ то есть $(Ax, y) = (x, Ay)$.
В ОНБ это $A = \overline{A}^T \iff A^T = \overline{A}$ — эрмитова матрица.
Над $\mathbb{R}$ просто симметричная матрица, то есть симметричной билинейной формы.

Lemma 5.4. Собственные числа самосопряженного оператора

Пусть V — унитарное пространство. $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор. λ — с.ч. $\mathcal{A} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $v\ :\ \mathcal{A}(v) = \lambda v$

$$\lambda(v,v) = (\mathcal{A}(v), v) = (v, \mathcal{A}(v)) = \overline{\lambda}(v,v)$$

Т.к. $(v,v) \neq 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$. □

Lemma 5.5.

Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный в евклидовом пространстве, тогда $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod(t - \lambda_i)$. $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть A — матрица в ОНБ. Тогда $A = A^T$. Рассмотрим A как матрицу в $M_n(\mathbb{C})$. Тогда $\overline{A} = A = A^T$. Значит $\mathcal{A}$ самосопряженная в унитарном. А там все вещественные. □

Lemma 5.6.

Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный. $U \leq V$ — инвариантное, тогда $U^\perp$ тоже инвариантно.

Доказательство. Пусть $x \in U^\perp$. $\forall y \in U$ $(A(x), y) = (x, A(y)) = 0$ т.к. $A(y) \in U$. Значит $A(x) \in U^\perp$. □

6 Лекция 6. 24 личности линейного оператора

Theorem 6.1.

$\mathcal{A}$ — самосопряжен $\iff$ $\exists$ ОНБ из собственных векторов с вещественными собственными числами.
Матричная переформулировка: $[\mathcal{A}]$ диагональная в некотором ОНБ.

Доказательство. Индукция по $\dim V = n$. $n = 1$ очев. (в унитарном случае $c = \overline{c} \Rightarrow c \in \mathbb{R}$).

Замечание: если V — евкл. или унитарно и $U \leq V$ — инвариантное, а $\mathcal{A}$ самосопряженный, то U тоже евклидово или унитарно и $\mathcal{A}|_U$ самосопряженный.

Переход $n \to n+1$: пусть $dimV = n+1$. По леммам сусществует вещественное с.ч. λ_1. Пусть e_1 — с.в. для λ_1 единичной длины.

$\langle e_1 \rangle \leq V$ — инвариантно $\Rightarrow \langle e_1 \rangle^\perp$ тоже инвариантно $\dim = n + 1 - 1 = n$. По индукционному предположению в $\langle e_1 \rangle^\perp$ существует ОНБ из с.в. $e_2, \ldots, e_{n+1}$. Добавим туда e_1 и победим!

Обратно очев. □

Remark. *U — инвариантно $\Rightarrow U^\perp$ — инвариантно.*

Если для $\mathcal{A}$ такое верно, то он диагонализуем.

6.1 Оценка квадратичной формы

Пусть есть $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$. И есть стандартная $q_0(x) = \sum_i x_i^2 = \|x\|^2$.
Хотим $c : q(x) \leq c q_0(x)$.

Example 6.1.

Пусть $q(x) = x_1 x_2 \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ и это лучшая константа!

Theorem 6.2.

Выполнено $q(x) \leq c \cdot q_0(x) \iff c \geq \lambda_n$, где λ_n — максимальное с.ч.

Доказательство. Пусть A — матрица Грамма q, $A = A^T$. То есть это также матрица самосопряженного оператора в $\mathbb{R}^n$.
Заметим, что $(Ax, x) = \sum_{i=1}^n (Ax)_i x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j x_i = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = q(x)$.
Пусть e_i — ОНБ из с.в. с с.ч. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Все вещественные, поэтому упорядочим по возрастанию.
$x = \sum_i b_i e_i$. Получим, что $(Ax, x) = (A(\sum_i b_i e_i), \sum_i b_i e_i) = \sum_i \lambda_i b_i^2 \leq \lambda_n \sum_i b_i^2 = \lambda_n \|x\|^2$.
Итого $q(x) \leq \lambda_n \|x\|^2$. При этом равнество достигается при $x = e_n$, поэтому константы меньше нет. □

Remark 6.1. Тривочев

Аналогично:
$|q(x)| \leq |\lambda_k| \|x\|^2$, где λ_k — максимальное по модулю.
Если q — положительно определена, тогда с.ч. > 0.
Если q — полоижтельно определенная форма, тогда $q(x) \geq \lambda_0 \|x\|^2$, где λ_0 — минимальное с.ч.

6.2 Ортогональные и унитарные операторы

Definition 6.1. Ортогональный/унитарный оператор

Пусть $\mathcal{A}$ оператор на V — евклидвово/унитарно. $\mathcal{A}$ называется ортогональным/унитарным, если выполнено одно из равносильных утверждений

1. Сохраняет скалярное произведение: $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$
2. Сохраняет длины $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, x)$
3. $\mathcal{A}$ — обратим и $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$
4. $A * A^* = E$, $A\overline{A}^T = E$, где A — матрица $\mathcal{A}$ в ОНБ.
5. $\mathcal{A}$ переводит ОНБ в ОНБ
6. $\exists$ ОНБ который $\mathcal{A}$ переводит в ОНБ

Доказательство. Равносильности утверждений:
$1 \to 2$ трив $2 \to 1$ следует т.к. $(x, y) = \frac{1}{2}((x + y, x + y) - (x, x) - (y, y)) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y)$
$1 \to 3$ Если $Ax = 0 \Rightarrow (Ax, Ax) = 0 \Rightarrow (x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$. То есть ядро $\{0\}$, значит обратима.
$(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}y) = (x, \mathcal{A}^{-1}y)$.

$3 \to 1$: $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}y) = (x, y)$.

$3 \to 4$ т.к. $A^* = \overline{A}^T$ в ОНБ.

$5 \to 6$ очев. $1 \to 5$: $(\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij} \Rightarrow \mathcal{A}e_i$ — ОНБ.

$6 \to 1$: $(\mathcal{A}(\sum a_i e_i), \mathcal{A}(\sum b_i e_i)) = \sum_{ij} a_i b_j (\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_j) = \sum_i a_i b_i = (\sum a_i e_i, \sum b_i e_i)$ □

Вернемся к теореме о самосопряженных операторах в $\mathbb{R}$. $\mathcal{A}$ — с.с, значит $[\mathcal{A}]$ — симметричная в некотором ОНБ. Теорема говорит, что $\mathcal{A}$ диагональна в некотором ОНБ. То есть $C^{-1}AC$ — диагональная. При этом C не просто матрица перехода, а матрица перехода между ОНБ, поэтому она ортогональна $C^{-1} = C^T$. Поэтому $C^T A C$.

Доказали, что любая квадратичная форма приводится к каноническому(диагональному) виду ортогональным преобразованием(грубо говоря поворотом системы координат).

$\sum a_{ij} x_i x_j \rightsquigarrow \sum c_i x_i^2$, где c_i — с.ч. матрицы (a_{ij}).

Но у квадратичной формы неоднозначно определены с.ч. так как при замене у матрицы Грамма меняется определитель... Но если зафиксировать ОНБ то все хорошо.

Remark 6.2.

$O_n = \{A \in M_n(K) \mid AA^T = E\}$ — группа ортогональных матриц(а ещё столбцы A образуют ОНБ).

$U_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A\overline{A}^T = E\}$ — группа унитарных матриц.

То есть композиция орт/унит это матрица того же типа!

Самосопряженные — группа по сложению, но не умножению, да и почти не обратимы...

$SO_n = \{A \in O_n \mid \det(A) = 1\}$, SU_n аналогично.

Заметим, что если $A \in O_n$, то $\det(AA^T) = \det(E) = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$. То есть $O_n = SO_n \cup SO_n * E'$(по факту SO_n — индекса 2), где E' единичная, но $e_{11} = -1$.

SO_n — отображения, сохраняющие ориентацию, а второе слагаемое — меняюище ориентацию.

Remark 6.3. Ориентация

Зададим на множестве базисов в $\mathbb{R}^n$ отношение эквивалентности: $(e_1, \ldots, e_n) \sim (f_1, \ldots, f_n) \iff (f_1, \ldots, f_n)^T = C \cdot (e_1, \ldots, e_n)^T$, где $\det C > 0$.

У него ровно два класса эквивалентности. Т.к. $f \not\sim g \not\sim h \Rightarrow f \sim h$(произведение матриц с отрицательными определителями). Первый класс — правильно ориентированные базисы, второй — неправильные.

Понятно, что $\det(A) > 0$, тогда она сохраняет ориентацию любого базиса. Если < 0, то меняет.

Если $e_1, \ldots, e_n$ — правильный базис и применим к нему(переставим местами) транспозицию(или любую нечетную перестановку), то получим неправильный.

А ещё любые два ориентированных базиса можно непрерывно перевести друг в друга!

Lemma 6.1. С.ч. ортогональных/унитарных операторов

Пусть V — евкл/унит, $\mathcal{A}$ — ортог/унит. λ — с.ч. $\mathcal{A}$. Тогда $|\lambda| = 1$.

В частности $\mathcal{A}$ — ортог, тогда с.ч. ± 1.

Доказательство. Пусть v — с.в.

$$(\mathcal{A}v, \mathcal{A}v) = (v, v) \Rightarrow \lambda * \overline{\lambda}(v, v) = (v, v) \Rightarrow \lambda * \overline{\lambda} = 1$$

То есть $|\lambda|^2 = 1$. $\square$

Lemma 6.2.

Пуст $U \leq V$ — инвариантно относительно $\mathcal{A}$ — ортог/унит. Тогда $U^\perp$ тоже инвариантно

Доказательство. Пусть $v \in U^\perp$. $\forall u \in U \ : (\mathcal{A}v, u) = (v, \mathcal{A}^{-1}u) = 0$ т.к. $\mathcal{A}^{-1}(u) \in u$.
(если $\mathcal{A} \ : \ V \to V$ обратим и U инвариантно, значит $\mathcal{A}(U) = U$ и $\mathcal{A}^{-1}(U) = U$) $\square$

Theorem 6.3.

$\mathcal{A}$ — унитарный, V — унитарный $\Rightarrow$ существует базис из с.в.
Матричная форма: $\mathcal{A}$ унитарный $\iff$ $\exists$ ОНБ в котором матрица имеет вид диагональной с элементами $e^{i\alpha_i}$

Доказательство. Точно также как для самосопряженных
Матричная форма $\Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\alpha_i}$.
$\Leftarrow c = \overline{c}^{-1}$ для $c = e^{i\varphi}$. $\square$

Theorem 6.4.

V — евклидово, $\mathcal{A}$ — ортог $\iff$ существует ОНБ в котором матрица имеет диагональный вид: сначала идут ± 1 — с.ч, а потом блоки 2 на 2 $\begin{pmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{pmatrix}$, соответствующий матрице поворота.

Proposition 6.1. Геометрический смысл

Если все 1, но в i-м месте -1. Тогда это зеркальная симметрия относительно $\langle e_i \rangle^\perp$.
Если есть один блок 2 на 2 в позициях $i, i+1$, а остальное 1, то это матрица поворота в плоскости $\langle e_i, e_{i+1} \rangle$ относительно "n-2 мерной оси".
Итого: любое ортогональное преобразование это композиция двумерных поворотов в попарно ортогональных плоскостях и зеркальной симметрии.

Доказательство. Выберем ОНБ и в нем $A = [\mathcal{A}] \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$ т.ч. $A^T = A^{-1}$.
Рассмотрим её как $A \ : \ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \ x \to Ax$ — унитарный оператор. Существует базис из с.в.
У A есть $\chi_A(t) = (t-1)^k(t+1)^l(t-\mu_1)^{k_1}(t-\overline{\mu})^{k_1} \dots$ (крастности μ и $\overline{\mu}$ совпадают т.к. $\chi_A(t) \in \mathbb{R}[t]$).
Что значит, что ОНБ из с.в? $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_{-1} \oplus V_{\mu_1} \oplus V_{\overline{\mu}_1} \dots$ где $V_a = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = ax\}$. При этом эти пространства попарно ортогональны.

Будем искать вещественный базис $e_1, e_2 \in \mathbb{C}^n$ т.ч. $e_i \in \mathbb{R}^n$.

$V_1 = Ker(A - E)$ — множество решений СЛУ с вещественными коэффициентами. Ясно, что можно выбрать вещественный базис(а так как размерности над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ равны(ранг матрицы не поменялся от увеличения поля), то он же будет базисом ядра и в $\mathbb{C}^n$). С V_{-1} то же самое.

Заметим, что $u \in V_{\mu_i}$ то $u = v + iw$, где $v, w \in \mathbb{R}^n$. Поэтому $\overline{u} \in V_{\overline{\mu}_i}$.

Действительно: пусть $\mu_1 = a + bi$. Тогда $A(v + iw) = (a + bi)(v + iw) = A(v) + A(iw)$.

$$av - bw + i(aw + bv) = A(v) + iA(w)$$

При этом $A(v), A(w) \in \mathbb{R}^n$, поэтому можем приравнять Im, Re. Получим $(*)$: $\begin{cases} av - bw = A(v) \\ aw + bv = A(w) \end{cases}$

В частности $A(v - iw) = av - bw - i(aw + bv) = (a - bi)(v - iw)$ – что и хотели заметить.

Пусть $v_1 + iw_1, \dots, v_k + iw_k$ — базис V_{μ_i}. Тогда $v_1 - iw_1, \dots, v_k - iw_k$ — базис $V_{\overline{\mu}_i}$.

Т.к. при сопряженнии сохраняется линейная зависимость $\sum z_k(v_k - iw_k) = 0 \iff \sum \overline{z}(v_k + iw_k) = 0$.

Тогда набор $v_1, \dots, v_k \Rightarrow w_1, \dots, w_k$ — базис $V_{\mu_i} \oplus V_{\overline{\mu_i}}$. Они очевидно порождают каждый элемент базиса и их ровно $2k$ как и размерность $V_{\mu_i} \oplus V_{\overline{\mu_i}}$.

В итоге получили новый вещественный базис $1 \rightsquigarrow v_1, \dots, v_r$, $-1 \rightsquigarrow v_{r+1}, \dots, v_s$ и $\mu_i, \overline{\mu}_i \rightsquigarrow v_1^{\mu_i}, \dots, v_{k_i}^{\mu_i}, w_1^{\mu_i}, \dots, w_{k_i}^{\mu_i}$. И все вместе это базис $\mathbb{C}^n$(заменили базис в каждом слагаемом) $\Rightarrow$ базис $\mathbb{R}^n$.

Мы знаем, что $V_1, V_{-1}, V_{\mu_i} \oplus V_{\overline{\mu_i}}$ попарно ортогональны. Значит вектора из разных групп ортогональны.

Вектора внутри группы: пусть $v_k + iw_k$ был ортогональный базис V_{μ_i}. Тогда $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k$ — ортогональны.

$(v_k \pm iw_k, v_l \pm iw_l) = 0$ Если сложим, то получим $(2v_k, v_l \pm iw_l) = 0$ и $(2w_k, v_l \pm iw_l) = 0 \Rightarrow (v_k, v_l) = 0, (v_k, w_l) = 0$. При $k \neq l$.

Вспомним про систему $(*)$. Посмотрим на $\langle w_k, v_k \rangle$ — очев инвариантное подпространство. с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Значит $a = \cos(\alpha)$ и $b = \sin(\alpha)$ т.к. $\mu_k = a + bi$ и $|\mu_k| = 1$. Значит в новом базисе $\mathcal{A}$ приводится ровно к описанному виду.

Осталось понять, что w_k, v_k ортогональны и $|v_k| = |w_k|$. Тогда можем их одновременно отнормировать и матрица сохранится.

$(v_k + iw_k, v_k - iw_k) = (v_k, v_k) - (w_k, w_k) + i(v_k, w_k) + i(w_k, v_k) = 0$.

0 т.к. $v_k + iw_k \in V_\mu$, $v_k - iw_k \in V_\mu$ и они ортогональны.

То есть $\begin{cases} (v_k, w_k) = 0 \\ (v_k, v_k) - (w_k, w_k) = 0 \end{cases}$ $\square$

Example 6.2. Частные случаи

$\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – Id, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — осевая симметрия, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — центральная симметрия, $\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$ — поворот.
SO_2 — только повороты(включая тождественый), она же группа углов, она же единичная окружность в $\mathbb{C}$, она же $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^3$:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) \\ 0 & \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) \\ 0 & \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$ — O_3.
$SO_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) \\ 0 & \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$
Следствие: в нечетномерном пространстве у движения всегда есть неподвижная ось!

7 Лекция 7. Разложи меня полностью

Резюме: $\mathcal{A} \in Lin(V, V)$, V над $\mathbb{R}$.

Классы операторов:

1. $A = A^*$. Тогда есть ОНБ из с.в.
2. $A^* = A^{-1}$. Тогда есть ОНБ т.ч. матрица диагональная из 1, -1 и блоков 2 на 2 матриц поворотов

7.1 Полярное разложение

Есть $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Рассмотрим $A_z(x) = zx$ — линейный оператор $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 (z \neq 0)$ (преобразование подобия). Знаем, что $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ ($r > 0$, $\alpha \in (0, 2\pi)$). Значит A можно представить как композицию поворота и растяжения(гомотетии).

Хотим перенести в $\mathbb{R}^n$ что-то такое.

Definition 7.1. Положительный самосопряженный оператор

$\mathcal{A} \in Lin(V, V)$, V над $\mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. И $(\mathcal{A}x, x) > 0$ $\forall x \neq 0$(любой вектор отклоняется не более чем на $\frac{\pi}{2}$).
Обозначаем $\mathcal{A} > 0$

Lemma 7.1.

Пусть $A = A^*$. Тогда $\mathcal{A} > 0 \iff$ все $\lambda_i > 0$.

Доказательство. Есть $q(x) = (Ax, x)$ — квадратичная форма на V с матрицей $[\mathcal{A}]$ (в ОНБ). Таким образом $\mathcal{A} > 0 \iff q(x)$ — положительно определена.

С другой стороны существует ОНБ т.ч. $[\mathcal{A}]$ — диагональная с с.ч.

Критерий Сильвестра: $q(x)$ — положительно определена $\iff$ все угловые миноры матрицы > 0, а они равны $\lambda_1, \lambda_1\lambda_2$ и т.д. $\square$

Theorem 7.1.

$\mathcal{A}$ — положительный, самосопряженный. Тогда $\exists! \mathcal{B}$, положительный и самосопряженный т.ч. $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис из с.в. $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$, где $\lambda_i > 0$.

Определим $\mathcal{B}e_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$. Понятно, что тогда $\mathcal{B}^2 e_i = \lambda e_i = \mathcal{A}e_i$.

Пусть $\widehat{\mathcal{B}}$ т.ч. $\widehat{\mathcal{B}}^2 = \mathcal{A}$. Существует f_i — базис т.ч. $\widehat{\mathcal{B}}(f_i) = \mu_i f_i$. Но $\widehat{\mathcal{B}}^2(f_i) = \mu_i^2 f_i = \mathcal{A}f_i$. Значит f_i — с.в. $\mathcal{A}$ и $\mu_i^2 = \lambda_j \Rightarrow \mu_i = \sqrt{\lambda_j}$.

Более формально:

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — различные с.ч. Тогда знаем, что $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$.

На V_{λ_i}: $\mathcal{B}(x) = \sqrt{\lambda_i} x$, а $\mathcal{A}(x) = \lambda_i x$.

С другой стороны $V = W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_k}$. И $\widehat{\mathcal{B}}(x) = \sqrt{\lambda_i}(x)$.

Отсюда $W_{\lambda_i} \le V_{\lambda_i}$, но раз у нас разложение в прямую сумму, то везде равенство и на каждом $\mathcal{B} = \widehat{\mathcal{B}}$. $\square$

Lemma 7.2.

$(ABx, y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y) \Rightarrow B^*A^* = (AB)^*$

Theorem 7.2. Полярное разложение

Пусть $\mathcal{A}$ — невырожденный оператор над V. Тогда $\exists!$ S — положительный, самосопряженный, U — ортогональный т.ч. $\mathcal{A} = S \circ U$. И $\exists!$ S' — положительный, самосопряженный, U' — ортогональный т.ч. $\mathcal{A} = U' \circ S'$.

Доказательство. Единственность:

Пусть $\mathcal{A} = S \circ U$. Рассмотрим $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^* = S \circ U \circ (S \circ U)^* = S \circ U \circ U^* \circ S^* = S \circ S^* = S^2$.

$\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$ положительный и самосопряженный:

$(\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$. $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*x, x) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) > 0$ т.к. $\mathcal{A}^*(x) \neq 0$($\mathcal{A}^*$ невырождена т.к. такая $\mathcal{A}$).

То есть S определяется однозначно как корень из $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$. Но тогда и $U = S^{-1} \circ \mathcal{A}$.

Существование: пусть $S^2 = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$ и $U = S^{-1}\mathcal{A}$. Тогда понятно, что $\mathcal{A} = S \circ U$. S— положительный и с.с. по построению.

$U^* \circ U = (S^{-1} \circ \mathcal{A})^* \circ S^{-1} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \circ S^{-1^*} \circ S^{-1} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}^* S^{-2} \mathcal{A} = \mathcal{A}^*(\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*)^{-1} \circ \mathcal{A} = Id$

$\mathcal{A} = U' \circ S'$ аналогично упр(рассмотреть $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}$).

Пользовались: $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$:

$$(S^*(S^{-1})^*u, v) = ((S^{-1})^*u, Sv) = (u, v) \Rightarrow S^*(S^{-1})^* = E$$

$\square$

Remark 7.1.

Для произвольного $\mathcal{A}$ $\exists S, U$: $\mathcal{A} = SU$, где U ортогональна, а S — с.с. и неотрицательна($(Ax, x) \geq 0 \iff \lambda_i \geq 0$). И разложение не единственно.
Пример: $0 = 0 \circ U$, U где у U любая ортогональная, 0 — с.с. неотрицательная.

Proposition 7.1. Геометрический смысл доказанного

Любое линейное преобразование это копмозиция 2-мерных поворотов, зеркальных симметрий и растяжения вдоль перпендикулярных осей.

7.2 Сингулярное разложение

Пусть $\mathcal{A} : U \to V$ — линейное. Тогда $[\mathcal{A}]_{u_i, v_i}$ — матрица линеного отображения. Мы знаем, что $\exists u_i, v_i$ — базисы, что $[\mathcal{A}]$ полуединичная.

Definition 7.2. Сопряженное отображение

$\mathcal{A} : U \to V$ — линейное, тогда сопряженное отображение $\mathcal{A}^*$, если $(Au, v) = (u, A^* v)$ $\forall u \in U, v \in V$. Оно существует и $[A^*] = [A]^T$ в ОНБ. Проверяется также, как и для $U = V$.
Элитное пояснение: $U \to V$ и есть оператор. Тогда возникает отображение $\mathcal{A}'$: $V^* \to U^*$ $f \mapsto f \circ A$. Так как U, V евклидово, то есть изоморфизм $U \cong U^*$, $V \cong V^*$.
$\mathcal{B} = i_U^{-1} \circ \mathcal{A}' \circ i_V$. Тогда $\mathcal{B} = A^*$. (очень полезное упр)

Theorem 7.3.

Пусть U, V — евклидовы. Тогда $\exists$ ОНБ u_i, v_i т.ч. $[\mathcal{A}]_{u_i, v_i}$ диагональная с элементами ≥ 0.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} : U \to U$ и он неотрицательный и самосопряженный. $(\mathcal{A}^* \mathcal{A} x, x) = (\mathcal{A} x, \mathcal{A}^{**} x) = (\mathcal{A} x, \mathcal{A} x) \geq 0$. Значит существует ОНБ в U т.ч. $e_1, \ldots, e_n$ т.ч. $\mathcal{A}^* \mathcal{A} e_i = \mu_i^2 e_i$, где $\mu_i \geq 0$.

Пусть $\mathcal{A} e_i = f_i \in V$ для $\mu_i \neq 0$. Если $\mu_i = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} e_i = 0 \iff (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} e_i, e_i) = 0 \iff (\mathcal{A} e_i, \mathcal{A} e_i) = 0 \Rightarrow \mathcal{A} e_i = 0$. Н.у.о. $e_1 \to f_1, \ldots, e_k \to f_k$ а остальные в 0.

$f_1, \ldots, f_k$ попарно ортогональны: $(f_i, f_j) = (\mathcal{A} e_i, \mathcal{A} e_j) = (e_i, \mu_j^2 e_j) = 0$. Отнормируем их и дополним до ОНБ всего пространства. $(f_i, f_i) = \mu_i^2$. То есть новый ОНБ это $\widehat{f_i} = \frac{f_i}{\mu_i}$. Или же $\mathcal{A}(e_i) = f_i = \mu_i \widehat{f_i}$ ☐

Definition 7.3. Сингулярные числа

μ_i — корни из с.ч. $\mathcal{A}^* \circ A$ — называются сингулярными числами оператора $\mathcal{A}$.

Remark 7.2. Матричная переформулировка

Пусть $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
1. Полярное разложение: Пусть $m = n$. Тогда $\exists$ $S = S^T$, $U^{-1} = U^T$ т.ч. $A = SU$.
2. Сингулярное разложение: $\exists$ $U \in O_n(\mathbb{R}), V \in O_m(\mathbb{R})$ ортогональные матрицы т.ч. $A = UDV$, где D — диагональная.

Доказательство. 2. Пусть A матрица линейного отображения в двух ОНБ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Существуют $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$ из доказанной теоремы. Причем $A \mapsto D$ — диагональная с сингулярными числами. $A = CD\widehat{C}$, где $C, \widehat{C}$ — матрицы перехода между ОНБ — ортогональные. ☐

7.3 Афинные пространства

Definition 7.4. Аффинное пространство

Пусть V — в.п. над K. Тогда аффинное пространство над V это множество A + отображение $A \times V \to A$: $(a, b) \to a + v$(откладывание вектора от точки) т.ч.

1. $(a + v_1) + v_2 = a + (v_1 + v_2)$
2. $a + 0 = a$
3. $\forall a, b \in A\ \exists! v \in V\ :\ a + v = b$ Обозначается он $b - a$.

Первые две аксиомы задают действие $(V, +)$ на A. А 3 задает регулярность действия.

Definition 7.5. Векторизация

Пусть A — аффинное пространство над V, $a \in A$. Векторизация A это отображение(биективное) $A \to V$: $b \to b - a$.
По факту мы лишь фиксируем точку как начало координат a и сопоставляем точкам радиус-вектор $b - a$...
Обозначение $b \mapsto \overrightarrow{b}_a$

Lemma 7.3. Формула замены

Пусть $c \in A$. Ясно, что $\forall b\ b - c = (b - a) + (a - c)$. То есть $\overrightarrow{b}_c = \overrightarrow{b}_a + (a - c) = \overrightarrow{b}_a + \overrightarrow{ac}$ — фиксированный вектор.

Таким образом аффинное пространство снабжено множеством векторизаций.

Lemma 7.4.

Пусть $x_1, \ldots, x_n \in K$ т.ч. $\sum x_i = 1$ и $a_1, \ldots, a_n \in A$. Тогда $\sum x_i a_i$ — точка т.е. $a + \sum x_i \overrightarrow{a_i}_a$ — не зависит от a.
Если $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $x_1, \ldots, x_n \in K$ и $\sum x_i = 0$. То $\sum x_i a_i$ — вектор. То есть $\sum x_i \overrightarrow{a_i}_a$ — не зависит от a.
Т.о. $\exists \frac{a+b}{2}$ — середина отрезка ab. $\exists\ a + b - c$ — точка, $a + b - 2c$ — вектор. $a + b$???

Доказательство. Пусть $a \mapsto c$. Тогда $c + \sum x_i \overrightarrow{a_i}_c = c + \sum x_i(\overrightarrow{a_i}_a + \overrightarrow{ca}) = c + \sum x_i \overrightarrow{ca} + \sum x_i \overrightarrow{a_i}_a = c + \overrightarrow{ca} + \sum x_i \overrightarrow{a_i}_a = a + \sum x_i \overrightarrow{a_i}_a$
$\sum x_i \overrightarrow{a_i}_c = \sum x_i(\overrightarrow{a_i}_a + \overrightarrow{ca}) = 0 \cdot \overrightarrow{ca} + \sum x_i \overrightarrow{a_i}_a = \sum x_i \overrightarrow{a_i}_a$ ☐

Definition 7.6. Аффинное отображение

Пусть $f\ :\ A \to A$ — отображение. f называется аффинным, если отображение Df: $\overrightarrow{ab} \mapsto \overrightarrow{f(a)f(b)}$ — линейно и в частности $\exists$.

Example 7.1.

Пусть $v \in V$. $t_v : A \to A$: $t_v(a) = a + v$. Тогда $\overrightarrow{a+v, b+v} = \overrightarrow{ab}$. То есть $D(f) = Id$ — параллельный перенос.
Пусть $c \in A$. B — какой-то линейный оператор на V. Векторизуем $A \underset{vect_c}{\to} V \underset{B}{\to} V \underset{vect_c^{-1}}{\to} A$ — аффинное. Тогда $Df = B$.

$$\overrightarrow{f(a)f(b)} = f(b) - f(a) = B(b-c) - B(a-c) = B(a-b) = B(\overrightarrow{ab})$$

Remark 7.3.

То же самое для $f : A \to B$, где A, B — аффинные.

Definition 7.7. Аффинное подпространство

Пусть A — аффинное. $B \subset A$ — аффинное подпространство, если B — линейное подпространство A при некоторой векторизации. То есть $\exists b \in A$ т.ч. $\{\overrightarrow{bx} \mid x \in B\} = U \leq$ — подпространство V.
Заменим b на c. Тогда $\{\overrightarrow{bx}\} \mapsto \{\overrightarrow{bx} + \overrightarrow{cb}\}$. Если $\overrightarrow{cb} \in U$, то получили то же самое подпространство. Иначе $\{u + r \mid u \in U\}$ — элемент V/U. В любом случае $U = \{\overrightarrow{xy} : x, y \in B\}$. То есть U однозначно определено по B.

Example 7.2. Аффинная оболочка

Пусть $a_1, \dots, a_{k+1} \in A$. Рассмотрим $\{\sum x_i a_i \mid \sum x_i = 1\}$ — аффинная оболочка $Aff(a_1, \dots, a_{k+1})$. Это аффинное подпространство: векторизуем относительно a_1.
$\sum x_i a_i = a_1 + \sum x_i \overrightarrow{a_i}_{a_1} = a_1 + \sum x_i \overrightarrow{(a_i - a_1)}$ соответствует $\langle a_1 - a_1, \dots, a_{k+1} - a_1 \rangle$ не более чем k мерное подпространство.

Definition 7.8. Аффинно независимые

$a_1, \dots, a_{n+1}$ аффинно независимые, если они порождают n-мерное пространство $\iff$ $\overrightarrow{(a_i - a_1)}$ ЛНЗ.

8 Лекция 8. Элвин и проективные преобразования

Пусть $(U, \overrightarrow{U}), (V, \overrightarrow{V})$ — аффинные пространства.

$A : U \to V$ — аффинно, если $\exists \overrightarrow{A} : \overrightarrow{U} \to \overrightarrow{V}$ т.ч. $\overrightarrow{A}$ — линейно.

$A(b) = A(a) + \overrightarrow{A}(\overrightarrow{ab})(\Rightarrow \forall c\, A(c) + \overrightarrow{A}(\overrightarrow{cb}) = A(a) + \overrightarrow{A}(\overrightarrow{ac}) + \overrightarrow{A}(\overrightarrow{cb}) = A(a) + \overrightarrow{A}(\overrightarrow{ab}))$ — не зависим от начала координат.

Если векторизовать U, V: $a \to 0$ $A(a) \to 0$ то $A \mapsto \overrightarrow{A}$.

В координатах $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m$. $A(0) = (a_1, \dots, a_n)^T = a$. Тогда $A(x) = a + \overrightarrow{A}(x)$ т.е. аффинное это отображение вида $x \mapsto Ax + b$.

Proposition 8.1.

$\mathcal{A} : U \to V$ — аффинно, тогда $l \subset U$ прямая $\mathcal{A}(l)$ — прямая или точка.

Доказательство. Выберем начало координат на l, тогда l становится одномерным векторным подпространством $\overrightarrow{U}$. 1-мерное пространство при линейном переходит либо в одномерное либо в 0.

При параллелльном переносе прямая переходит в прямую, а 0 в точку. □

Proposition 8.2.

$f\ : U \to U$ — аффинное и биективное $\Rightarrow$ сохраняет прямые. Кроме того, если есть две точки $A, C,\ B \in AB$ на одной прямой и их образы на другой прямой $A' = f(A), C' = f(C), B' = f(B)$.

Если $AB = \overrightarrow{x},\ AC = k\overrightarrow{x},\ A'B' = \overrightarrow{y},\ A'C' = k\overrightarrow{y}$. Условно, $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{A'B'}}$ — сохраняет отношения отрезков на прямой а также на параллельных прямых.

Theorem 8.1.

Если $K = \mathbb{R}$, $dimV \geq 2$ и $A : V \to U$ сохраняет прямые. Тогда A — аффинно.
Без доказательства.

Theorem 8.2.

Пусть U, V — аффинные пространства. $dimU = n$. $u_1, \dots, u_{n+1} \in U$, $v_1, \dots, v_{n+1} \in V$ и они аффинно независимы. Тогда $\exists!\ f : U \to V$ — аффинное т.ч. $f(u_i) = v_i$.

Доказательство. Хотим, чтобы $f(u_1) = v_1$. Скажем, что u_1, v_1 — начала координат U, V. Тогда необходимо и достаточно, чтобы f — линейно и $f(\overrightarrow{u_1u_k}) = \overrightarrow{v_1v_k}$.

Но из аффинной независимости следует, что $\overrightarrow{u_1u_i}$ — базис U. $\exists! f$ линейный мы уже знаем. □

Definition 8.1. Аффинная эквивалентность

U — аффинное подпространство. $V_1, V_2 \subset U$ — аффинно эквивалентны, если $\exists f$ — биекция т.ч. $f(V_1) = V_2$. И это очевидно отношение эквивалентности(композиция аффинных — аффинна, Id — аффинно, f — аффинно $\Rightarrow$ f^{-1} тоже)

Example 8.1.

Любые два треугольника в $\mathbb{R}^2$ аффинно эквивалентны.
Вершины треугольника аффинно независимы(не лежат на 1 прямой). Значит по теореме $\exists f$ переводящая вершины одного в вершины другого. А если точки переходят, то и остальные части треугольника тоже.

Exercise 8.1.

А с четырехугольниками? Нет! Трапеция и параллелограмм не эквивалентны(пересекающиеся противоположные стороны)
Более точно: $ABCD \sim A'B'C'D' \iff \frac{AO}{OC} = \frac{A'O'}{O'C'}$ и $\frac{BO}{OD} = \frac{B'O'}{O'D'}$, где O — пересечение диагоналей. $\Rightarrow$ очев.
$\Leftarrow$ Точно $ABC \sim A'B'C'$ и если сохраняются расстояния выше, то $O \to O'$ и $D \to D'$ автоматически.

Definition 8.2. Квадрика

Квадрика в K^n это $K = \{x \in K^n | \sum a_{ij}x_ix_j + \sum b_ix_i + c = 0\}$
Уравнение $x^TQx + Bx + c = 0$, где Q — квадратная матрица, B — строка

Насколько уравнение упрощается аффинным преобразованием? Можем преобразовать $x \mapsto Cx + D$ и подставить:

$$(Cx+D)^TQ(Cx+D) + B(Cx+D) + c = 0$$
$$\underbrace{x^TC^TQCx}_{\text{квадратичная форма}} + (D^TQC + D^TQC + BC)x + \underbrace{\dots}_{\text{константы}} = 0$$

Если Q невырождена, то QC тоже. Поэтому можем подобрать D т.ч. $2D^TQC + BC = 0$.

Вывод: пусть у квадрики квадратичная часть Q невырождена, тогда линейная часть убивается аффинным преобразованием. И тогда квадритка задается $\sum a_{ij}x_ix_j + c = 0$. А это можем превартить в сумму квадратов, как кадратичную форму.

В $\mathbb{R}$ любая невырожденная квадрика аффинно эквивалентна $\sum x_i^2 - \sum x_j^2 = c$.

Proposition 8.3. Классификация кривых 2 порядка в $\mathbb{R}^2$ с невырожденной кв. формой

1. $x_1^2 + x_2^2 = c > 0$ — окружность
2. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ – точка
3. $x_1^2 + x_2^2 = c < 0$ — $\varnothing$
4. $x_1^2 - x_2^2 = c \neq 0$ — гипербола
5. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ — пара прямых

Пусть Q вырождена. $dim = n$. $k < n$. Уравнение моежм привести к $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i x_i + c = 0$.

Если $\mu_i = 0$, значит можем считать что форма невырожденная, но в меньшем пространстве.

Иначе координатные функции $x_1, \dots, x_k, \sum \mu_i x_i$ — ЛНЗ элементы V^*. Его можно дополнить до базиса V^* и взять двойственный к нему. Тогда уравнение превратится $\sum^k \lambda_i x_i^2 + x_{k+1} + c = 0$.

То есть любая вырожденная квадрика эквивалентна $x_{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 + c$ и можем избавиться от константы заменив $x_{k+1} = x_{k+1} - c$.

В $\mathbb{R}^2$ и $rkQ = 1$: $x_2 = x_1^2 + c$ — парабола. Либо $rkQ = 0$ и тогда $x_2 = c$ — прямая.

Пропущен случай $x_1^2 = c$ — либо пустое множество($c < 0$), либо две параллельных прямых($c > 0$), либо двойная прямая($c = 0$).

Итого квадрики в $\mathbb{R}$ бывают такие $\sum_{i=1}^{l} x_i^2 - \sum_{i=l+1}^{k} x_i^2 = c$ либо $\sum_{i=1}^{l} x_i^2 - \sum_{i=l+1}^{k} x_j^2 =$

x_{k+1}. Геометрически они отличаются тем, что в первом случае если $x_1, \dots, x_n \in K \iff -x_1, \dots, -x_n \in K$ — есть центр симметрии(центральные квадрики).

Proposition 8.4. Квадрики в $\mathbb{C}$

В $\mathbb{C}$ квадрики:

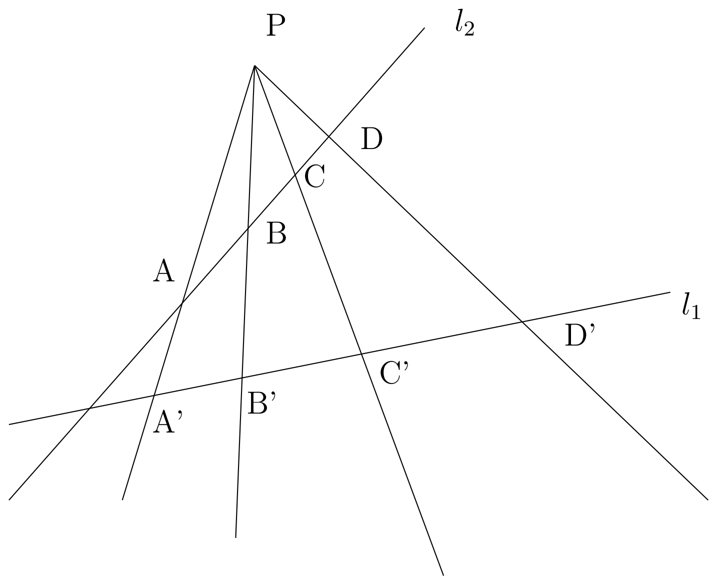
1. $x_1^2 + x_2^2 = 1$
2. $x_1^2 - x_2^2 = -1$
3. $x_1^2 - x_2^2 = 0$
4. $x_1^2 = x_2$

В $\mathbb{C}$ элипсы эквивалентны гиперболам(1,2) (3,4 отдельные типы: у параболы нет центра симметрии, а 3 — два линейных пространства).

8.1 Проективные пространства

Зачем: аффинное(евклидово) пространство очень сложное. Две прямые пересекаются в одной точке(или нет), две окружности пересекаются по 0,1,2,∞. Два элипса — 0,1,2,3,4, ∞. Хотим упростить мир возможных конфигураций.

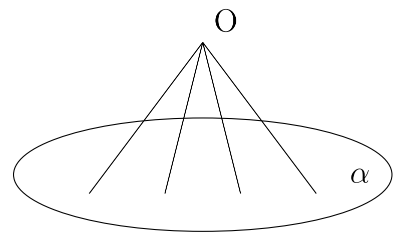
Мотивация 2: Хотим расширить группу преобразований. Рассмотрим центральную проекцию:



Посмотрим на преобразование $A \mapsto A'$ и так для всех точек на l_1 — центральная проекция из P.

Оно не аффинно — не сохраняет отношения на прямой. $\frac{AB}{BC} \neq \frac{A'B'}{B'C'}$. При этом сохраняется двойное отношение: $\frac{|AB||CD|}{|AC||BD|} = \frac{|A'B'||C'D'|}{|A'C'||B'D'|}$.

Но есть нюанс… $E \in l_1$, $PE || l_2 \Rightarrow f(E) = E'$ не определено. $F \in l_2, PF || l_1 \Rightarrow f^{-1}(F)$ не определено. Но если устремить A к бесконечности, то $f(A) \to F$. Причем без разницы в какую бесконечность... Надо пополнить l_1, l_2 точкой ∞. Тогда проекция становится биекцией.



Возьмем прямую через точку $O \in l$. Если $l \nparallel \alpha$, то l пересекает α в единственной точке. Получили биекцию между прямыми $O \in l, l \nparallel \alpha$ с точками α.

Если параллельна, то она соответствует какому-то направлению α. Будем говорить, что она соответствует бесконечно удаленной точке, соответствующая классу эквивалентных прямых.

Definition 8.3. Проективное пространство

Пусть K — поле. $n \in \mathbb{N}$. n-мерное проективное пространство $K\mathbb{P}^n = \{$множество одномерных подпространств в $K^{n+1}\} = (K^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, где $\sim$ — лежат на одной прямой: $a \sim b \iff \exists \lambda \neq 0 : \lambda a_i = b_i$. Обозначаем $\overline{(x_0, x_1, \dots, x_n)} = [x_0 : \dots : x_n]$ — однородные координаты.

Remark. $[1 : 2 : 0 : 2] = [2 : 4 : 0 : 4]$ — *одна точка* $K\mathbb{P}^3$

Выберем какуют-то координату, например x_0: $A_0 = \{[x_0 : \dots : x_n] \in KP^n | x_0 \neq 0\}$. Построим биекцию $A_0 \to K^n$:

$[x_0 : \dots : x_n] = [1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}] \mapsto (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) = y$. y_i — аффинные координаты в т. $[x_0 : \dots : x_n]$.

Можем сказать, что $K\mathbb{P}^n = K^n \cup \{[0 : x_1 : \dots : x_n]\}$, где второе назовем бесконечно удаленной точкой в направлении $(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 8.5. Прямая в проективном пространстве

Прямая в $\mathbb{RP}^2$ — $l_{a,b,c} = \{[x : y : z] \mid ax + by + cz = 0\}$(не все коэф. равны 0)
Она соответствует плоскости в $\mathbb{R}^3$. При этом $l_{a,b,c} \cap \{[1 : y : z]\} = \{[1 : y : z] | a + by + cz = 0\}$ — прямая $l'_{a,b,c} \in \mathbb{R}^2$. По факту $l_{a,b,c} = l'_{a,b,c} \cup \{[0 : y : z] | by + cz = 0\} = l'_{a,b,c} \cup \{[0 : -c : b]\}$.
То есть прямая в $\mathbb{RP}^2$ — прямая + бесконечно удаленная точка $[0 : -c : b]$.

В $\mathbb{RP}^2$ если есть система $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ ex + fy + gz = 0 \end{cases}$ имеет одномерное решение $\Rightarrow$ пересечение двух прямых — одна точка $[x_0 : y_0 : z_0]$
Значит любые две(различные) прямые пересекаются в единственной точке.

Definition 8.4. Проективное преобразование

Проективное преобразование $A : K\mathbb{P}^n \to K\mathbb{P}^n$ задается $A([x_0 : \dots : x_n]) = A(\overline{x}) = \overline{\mathcal{A}(x)}$, где $\mathcal{A} \in Lin(K^{n+1}, K^{n+1})$ и невырожденное.
Вырожденное преобразование какой-то вектор переводит в 0, но точки $[0 : \dots : 0]$ не существует по определению.

Example 8.2.

$n = 1$. Есть $\mathcal{A} : K^2 \to K^2$ — линейное $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

Тогда на $R\mathbb{P}^1$ $[x : y] \mapsto [ax + by : cx + dy]$.
А на $\mathbb{R}^1$: $[1 : y] \mapsto [a + by : c + dy] = [1 : \frac{c+dy}{a+by}]$ — дробнолинейное преобразование. То есть в аффинных координатах $y \mapsto \frac{c+dy}{a+by}$

Theorem 8.3.

Следующие условия равносильны:
1. $f : l_1 \to l_2$ — проективно
2. В координатах $f(y) = \frac{k+ly}{m+ny}$
3. f сохраняет двойные отношения

$1 \iff 2$ почти упражнение выше. Остальное следует из того, что и те и те однозначно задаются значением в трех точках. Если f сохраняет двойные отношения, то значение в 4 точке можем узнать через фиксированные 3. (точнее упр)
В общем случае $\forall n + 2$ точек общего положения задает проективное преобразование т.ч. $x_i \mapsto y_i$.

Проективная эквивалентность менее жесткая. В $\mathbb{R}^2$ имеем $x^2 + y^2 = 1/0$, $x^2 - y^2 = -1$, $x^2 = y$. Вложим $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{RP}^2$ в том смысле, что $(x, y) \mapsto [1 : x : y]$. Обратное отображение $[x : y : z] \mapsto (\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$, если $x \neq 0$.

Перепишем в однородных координатах: $x_1 = \frac{y}{x}$, $x_2 = \frac{z}{x}$. Получим
1. $y^2 + z^2 = x^2$
2. $y^2 - z^2 = x^2$
3. $y^2 = zx$

Видим, что первые два теперь одно и то же(просто перестановка координат). В 3 можно сделать замену $y^2 = u^2 - v^2$, $z = (u + v), x = (u - v)$ — то же самое.

$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{[x : y : z] \mid x = 0\}$, где второе это бесконечно удаленная прямая L_∞.

Итак, элипс $\cap L_\infty$ — пусто, гипербола $\cap L_\infty$ —две точки(две асимптоты), а парабола касается(вертикальная асимптота).

В скольки точках пересекаются два элипса? Или две кривые 2 порядка?

Две непересекающиеся окружности задают систему уравнений без решений в $\mathbb{R}$, но имеет решение в $\mathbb{C}$.

Если окружности концентрические, то они не пересекаются и в $\mathbb{C}$. А в проективном...

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 = 2z^2 \end{cases}$ имеет решение $[1 : \pm i : 0]$ — две комплексные бесконечно удаленные точки.

На самом деле нет непересекающихся прямых...

Theorem 8.4. Недотеорема Безу

Кривая m-го порядка и кривая n-го порядка пересекаются в $n * m$ точках.

Theorem 8.5. Теорема Безу

Пусть $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ — однородные многочлены степени m и n соответственно(т.е.$F(x,y,z) = \sum k_{a,b}x^a y^b z^{m-a-b}$, степени мономов равны) от 3 переменных. $F(x,y,z) = 0$ это уравнение кривой m-го порядка в $\mathbb{CP}^2$: $\sum k_{a,b}x^a y^b z^{m-a-b}$.
В аффинных координатах $\sum k_{a,b}(\frac{x}{z})^a(\frac{y}{z})^b$ — многочлен от 2 переменных степени $\leq m$
Кривая m-го порядка это $\{(x,y) : f(x,y) = 0, deg(f) = m\}$ в K^2 или
$\{[x : y : z]|F(x,y,z) = 0, deg(F) = m, F—$ однородный$\}$.
В $\mathbb{CP}^2$ кривые порядка m, n без общих компонент пересекаются ровно в $m * n$ точках с учетом кратности. То есть система $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ имеет ровно mn решений с точностью до пропорциональности($F(x,y,z) = 0 \Rightarrow F(kx,ky,kz) = 0$). Что значит кратность пересечения? Пока не знаем в общем случае...
Важно, что $gcd(F,G) = 1$(нет общих компонент).

Theorem 8.6. Слабая аффинная версия

$f, g \in K[x,y]$, $(f,g) = 1$. Тогда $\begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \end{cases}$ имеет не более чем $deg(f) \cdot deg(g)$ решений.

9 Все

Всем бб :(