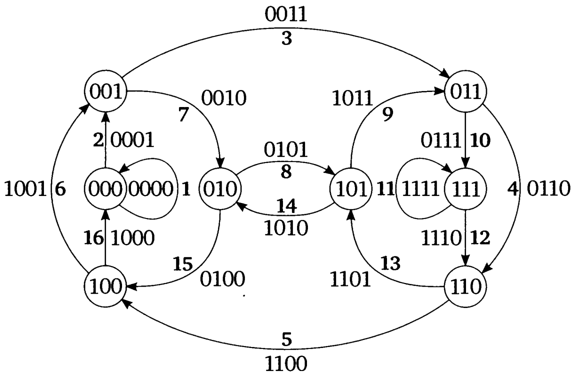
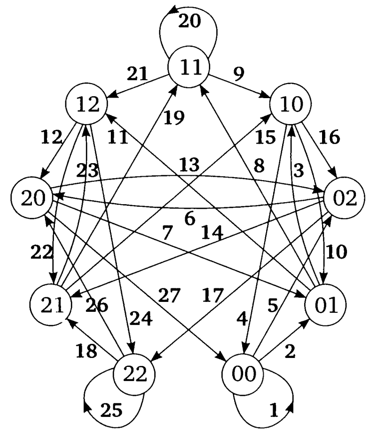


(a)



(b)

Рис. 3.8

§ 2. Гамильтоновы циклы

1. Во многих практических задачах наряду с эйлеровыми циклами часто встречаются и так называемые *гамильтоновы циклы* — простые циклы, проходящие через каждую вершину графа.

a. Пожалуй, наиболее известная из таких задач — это так называемая *задача о коммивояжере.* В этой задаче торговец должен обойти все города из некоторого списка, заходя в каждый город только один раз, и вернуться в исходный город, с которого он начал свое путешествие. Обычно при этом указывается некоторый критерий оптимальности маршрута (кратчайший, самый дешевый и прочее). В случае, когда дополнительные критерии не указаны, задача сводится к поиску гамильтонова цикла в графе, вершинами которого являются города, а ребрами — соединяющие их дороги.

Еще одна задача, собственно, и дала имя гамильтонову циклу — она была описана в письме Гамильтона своему другу в форме математической игры на додекаэдре (рис. 3.9). В этой игре один из игроков должен был вставить палочки в любые пять последовательно идущих вершин додэкаэдра, а второй — продолжить этот путь на все оставшиеся вершины. Иными словами, игроки должны были найти простой цикл, проходящий через все вершины додекаэдра. Одно из возможных решений показано на рис. 3.9 (сплошные линии на рисунке).

b. Сразу заметим, что наличие петель и мультиребер на существование гамильтонова цикла в графе G никак не влияет. Поэтому далее мы будем полагать, что любые рассматриваемые в этом параграфе графы являются простыми.

c. Как и в случае эйлерова цикла, первый вопрос, который возникает при анализе подобного рода задач, связан с существованием гамильтонова цикла в заданном графе. Очевидными необходимыми условиями существования

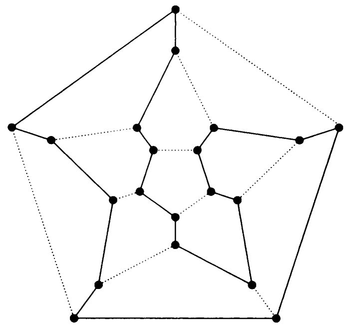


Рис. 3.9. Гамильтонов цикл в додекаэдре

гамильтонова цикла в графе G являются связность этого графа, а также отсутствие в нем вершин степени $\deg(x) = 1$, то есть листьев. Чуть менее тривиальным является следующее необходимое условие существования гамильтонова цикла в графе.

Утверждение 1. *Пусть в графе G имеется гамильтонов цикл. Тогда количество $k := c(G - S)$ компонент связности $U_1, \ldots, U_k$, получающихся в результате удаления вершин некоторого непустого подмножества $S \subset V(G)$ графа G, не превосходит количества удаленных вершин*:

$$c(G - S) \leqslant |S|. \tag{3.1}$$

Доказательство. Начнем обход графа G по гамильтонову циклу C с произвольной вершины y компоненты U_1 (рис. 3.10). Выйти из этой компоненты

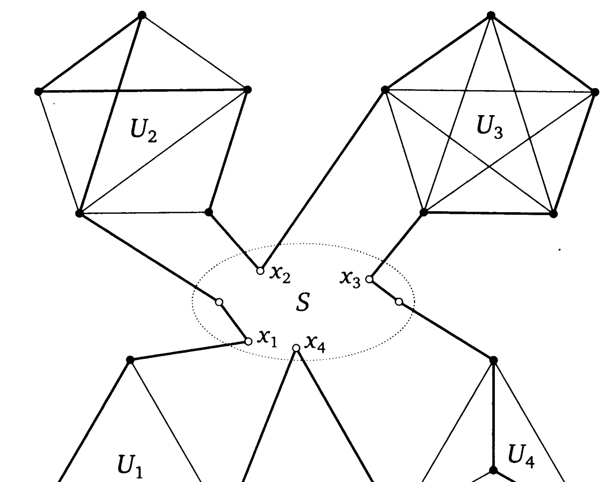


Рис. 3.10

U_1 в другие компоненты U_i, $i \neq 1$, мы не можем, поэтому, выходя из U_1, мы должны прийти в какую-то вершину $x_1 \in S$. Аналогично, выходя из оставшихся компонент U_i, мы должны прийти в какие-то вершины $x_i \in S$. Так как мы обходим граф G по гамильтонову циклу C, то все вершины $x_i \in S$ должны быть различными. Как следствие, количество вершин в множестве S должно быть больше или равно k. □

d. Основная проблема со всеми известными на сегодняшний момент необходимыми условиями существования гамильтонова цикла в графе состоит в том, что ни одно из них не является одновременно и достаточным. Конечно же, существуют графы, для которых вопрос о существовании гамильтонова цикла очевиден. Так, в любом циклическом графе C_n, построенном на $n > 2$ вершинах, существует ровно один гамильтонов цикл. В графе K_2 гамильтонова цикла не существует (хотя существует *гамильтонов путь* — простой путь, проходящий через все вершины графа). В случае полного графа K_n, $n > 2$, имеется $(n-1)!/2$ гамильтоновых циклов (см. упражнение 4).

В общем же случае ответ на вопрос, существует ли в данном графе гамильтонов цикл, совершенно нетривиален. В частности, на настоящий момент нет никаких простых критериев существования гамильтонова цикла, подобных тому, что мы сформулировали выше для, казалось бы, очень похожего понятия эйлерова цикла. Более того, в 1972 году Ричард Карп доказал, что задача определения того, существует ли в произвольном графе гамильтонов цикл, является NP-полной задачей.

Несмотря на это печальное обстоятельство, в теории графов все же имеется целый ряд достаточных условий существования гамильтонова пути или цикла в графе. Так, интуитивно понятно, что чем больше у простого связного графа, построенного на n вершинах, ребер, тем больше вероятность того, что в нем существует гамильтонов цикл. Это видно хотя бы из того, что в полном графе K_n, количество ребер в котором максимально, гамильтонов цикл гарантированно существует. Ниже мы сформулируем несколько результатов, которые формализуют это интуитивное наблюдение.

e. Предположим вначале, что мы смогли каким-то образом построить в простом графе G гамильтонов путь $P = x_1, \ldots, x_n$, $n > 2$, то есть простой путь, проходящий через каждую из вершин графа G. Возникает вопрос, когда мы этот путь можем достроить до гамильтонова цикла C. Ответ очевиден в том случае, когда концы построенного пути — вершины x_1 и x_n — оказываются смежными. В этом случае мы всегда можем достроить путь P до гамильтонова цикла C, добавив к нему ребро $\{x_1, x_n\}$. Случай несмежных вершин x_1 и x_n является уже не столь очевидным.

Лемма 2. *Пусть в простом графе G имеется гамильтонов путь $P = x_1$, $\ldots, x_n$, $n > 2$, соединяющий пару несмежных вершин x_1 и x_n. Достаточным условием существования гамильтонова цикла в таком графе является выполнение следующего неравенства:*

$$\deg(x_1) + \deg(x_n) \geqslant n. \tag{3.2}$$

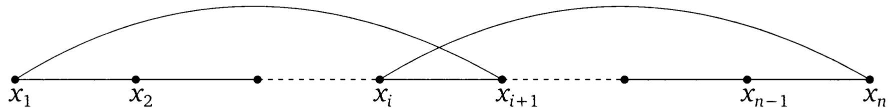


Рис. 3.11. Построение гамильтонова цикла в графе

Доказательство. Основная идея доказательства этого утверждения довольно проста. Пусть в графе G существует гамильтонов путь

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

соединяющий несмежные между собой вершины x_1 и x_n. Нам нужно показать, что в G обязательно существует такое принадлежащее этому пути ребро $e = \{x_i, x_{i+1}\}$, что вершина x_{i+1} смежна с x_1, а вершина x_i смежна с x_n (рис. 3.11). Тогда мы всегда сможем заменить путь P на гамильтонов цикл

$$C = (x_1, x_2, \dots, x_i, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i+1}, x_1).$$

Покажем, что такое ребро e обязательно найдется. Для этого заметим прежде всего, что так как путь P гамильтонов, то он проходит через все вершины этого графа, а значит, всего в графе G имеется n вершин. Вершины x_1 и x_n несмежны между собой. Помимо них, в графе существует еще $n-2$ вершины. Так как суммарная степень вершин x_1 и x_n больше или равна n, то из этих двух вершин в оставшиеся $n-2$ вершины исходят по меньшей мере n ребер, а это, согласно принципу Дирихле, означает, что среди вершин $x_2, \dots, x_{n-1}$ обязательно найдется хотя бы одна вершина, смежная как с x_1, так и с x_n.

Нам же понадобится чуть более сильное утверждение. Именно, предположим, что степень вершины x_1 равна l. Мы только что отметили, что среди l смежных с x_1 вершин найдется хотя бы одна вершина, смежная с x_n. Покажем теперь, что среди *любых* l отличных от x_n вершин графа G найдется хотя бы одна вершина, смежная с x_n. Действительно, если бы это было не так, то степень вершины x_n была бы меньше или равна $(n-1-l)$: $n-1$ — это максимальная степень вершины в графе с $|V(G)| = n$, а кроме того, из вершины x_n в l вершин ребра идти не могут. Это, в свою очередь, противоречит неравенству (3.2).

Теперь возьмем l смежных с x_1 вершин графа G и отступим от этих вершин на одно ребро назад вдоль гамильтонова пути P. Получим набор из l вершин, одна из которых — какая-то вершина x_i — обязательно смежна с x_n. Тогда ребро $\{x_i, x_{i+1}\}$ и будет нужным нам ребром e. □

f. Заметим, что на самом деле мы доказали следующий чуть более общий результат.

> **Следствие 3.** *Пусть $P = x_1, \dots, x_k$, $k > 2$, есть наибольший по включению простой путь в графе G. Тогда этот путь можно превратить в простой цикл C либо в случае, когда концы пути P — вершины x_1 и x_k — являются смежными, либо в случае, когда сумма степеней этих вершин больше или равна k:*

$$\deg(x_1) + \deg(x_k) \geqslant k. \tag{3.3}$$

Доказательство. Действительно, в случае, когда вершины x_1 и x_k являются смежными, искомый цикл C получается добавлением к пути P ребра $\{x_1, x_k\}$.

Предположим, что вершины x_1 и x_k оказались несмежными. Заметим, что эти вершины соединены ребрами только с какими-то другими вершинами того же пути — в противном случае мы смогли бы продолжить путь P на какие-то другие вершины.

Рассмотрим подграф H, индуцируемый всеми вершинами пути P. Согласно сделанному выше замечанию степени вершин x_1 и x_k в этом подграфе останутся прежними. Как следствие, неравенство (3.3) для этих вершин окажется верным и в подграфе H. Но в этом подграфе путь P является гамильтоновым. Следовательно, его можно превратить в гамильтонов цикл C способом, описанным при доказательстве леммы 2. □

g. Следующая теорема дает нам достаточные условия существования гамильтонова пути в графе.

Теорема 4 (Оре). *Пусть G — простой граф, построенный на $n > 2$ вершинах. Если для любых двух несмежных вершин x, y графа G выполняется условие*

$$\deg(x) + \deg(y) \geqslant n - 1, \tag{3.4}$$

то граф G имеет гамильтонов путь.

Доказательство. Заметим прежде всего, что любой граф G, удовлетворяющий условиям (3.4), является связным. Более того, длина кратчайшего пути, соединяющего произвольную пару несмежных вершин, равна двум. Действительно, рассмотрим произвольную пару несмежных вершин x и y. Условие (3.4) вместе с принципом Дирихле гарантирует нам, что среди оставшихся $n-2$ вершин обязательно найдется хотя бы одна вершина z, смежная как с x, так и с y, то есть в графе существует путь $\{x, z, y\}$.

Теперь предположим, что выполнено условие (3.4), а гамильтонова пути в графе G не существует. Это означает, что максимальный простой путь P в таком графе содержит $k < n$ вершин. Ясно также, что длина такого пути больше или равна двум — если в графе существует пара несмежных вершин, то она соединена путем длины два, а если все вершины графа смежны между собой, то граф полный и там длина максимального пути равна $n-1$. Наконец, если концевые вершины пути P несмежны, то в силу условия (3.4) сумма их степеней больше или равна $n-1$, то есть больше или равна k. Все это дает нам основание воспользоваться следствием 3 и утверждать, что в графе G существует простой цикл длины k.

Так как $k < n$ и граф G связен, то в G обязана существовать вершина y, не входящая в цикл C и смежная хотя бы с одной из вершин $x \equiv x_1$ этого цикла $C = (x_1, \ldots, x_k)$. Но в таком случае мы всегда можем построить в графе G простой путь $y, x_1, x_2, \ldots, x_k$ длины больше чем k, что противоречит предположению о том, что P есть путь максимальной длины. Полученное противоречие доказывает теорему. □

h. Сформулируем теперь несколько очевидных следствий из теоремы Оре.

Следствие 5. *Пусть G — граф, построенный на $n > 2$ вершинах. Если для любой пары несмежных вершин выполняется условие*

$$\deg(x) + \deg(y) \geqslant n, \tag{3.5}$$

то в графе G имеется гамильтонов цикл.

Доказательство. Действительно, в силу теоремы Оре, в таком графе обязан существовать гамильтонов путь $P = x_1, \ldots, x_n$. Согласно следствию 3, его всегда можно превратить в гамильтонов цикл. □

Следствие 6 (Дирак). *Пусть G — простой граф на $n > 2$ вершинах. Если степень каждой из его вершин больше или равна $(n-1)/2$, то в графе существует гамильтонов путь, а если больше или равна $n/2$, то в нем существует и гамильтонов цикл.*

2. Исторически первым достаточным условием существования гамильтонова цикла в графе была теорема Дирака, доказанная им в 1952 году. Эта теорема явилась отправной точкой для получения целого ряда все более и более слабых условий на степени вершин графа, достаточных для существования гамильтонова цикла в нем. Теорема Оре, доказанная в 1960 году, была одним из наиболее важных результатов на этом пути. В 1972 году Вацлав Хватал получил достаточное условие, охватывающее все полученные ранее результаты. Для того чтобы его сформулировать, нам понадобятся некоторые дополнительные понятия и факты.

a. Прежде всего, докажем несложное следствие теоремы Оре.

Лемма 7. *Пусть G — простой граф, в котором существует пара несмежных между собой вершин x, y, суммарная степень которых больше или равна n. Тогда в G существует гамильтонов цикл в том и только в том случае, если он существует в графе $G + \{x, y\}$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно — если в графе G существует гамильтонов цикл, то уж тем более он существует и в графе $G + \{x, y\}$. Обратно, предположим, что в $G + \{x, y\}$ существует гамильтонов цикл. Тогда в графе G существует гамильтонов путь с концами в вершинах x и y, который мы всегда можем трансформировать в гамильтонов цикл способом, описанным при доказательстве леммы 2. □

b. Теперь сформулируем следующее полезное понятие.

Определение 8. *Замыканием* $C(G)$ графа G называется граф, полученный из G последовательным соединением в нем ребрами пар несмежных между собой вершин, суммарные степени которых больше или равны n, до тех пор пока ни одной такой пары в графе не останется.

В качестве примера на рис. 3.12 показано замыкание графа G, представляющее собой полный граф K_6.

Утверждение 9. *Граф $C(G)$, полученный в результате процедуры замыкания графа G, не зависит от порядка выбора ребер, соединяющих несмежные вершины в графе G.*

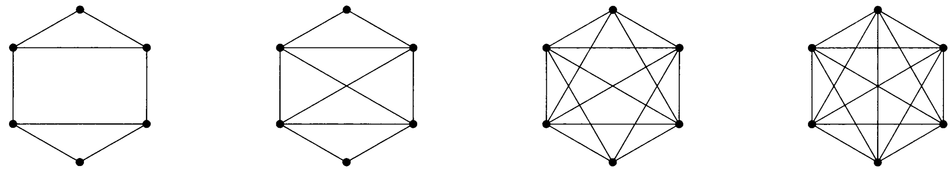


Рис. 3.12. Построение замыкания графа G

Доказательство. Обозначим через $e_1, \ldots, e_r$ и $f_1, \ldots, f_s$ последовательности ребер, добавляемых в процессе получения замыканий G_1 и G_2 графа G. Покажем, что любое ребро e_i присутствует в графе G_2, а каждое ребро f_j появляется в графе G_1. Действительно, предположим обратное. Пусть тогда $e_k = \{x, y\}$ — первое ребро в последовательности e_i, которое не вошло в граф G_2. Рассмотрим граф $H = G + \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$. Из определения графа G_1 следует, что

$$\deg_H(x) + \deg_H(y) \geqslant n.$$

Но так как все e_i, $i < k$, принадлежат G_2, то граф H является также и подграфом графа G_2, а потому

$$\deg_{G_2}(x) + \deg_{G_2}(y) \geqslant n.$$

Кроме того, так как в G_2 ребро $\{x, y\}$ отсутствует, то в графе G_2 вершины x и y несмежны. А это, в свою очередь, противоречит алгоритму построения графа G_2. Следовательно, $G_1 = G_2$, так что граф $C(G)$ определен однозначно.

c. Следствием сформулированной выше леммы 7 является такое утверждение.

Теорема 10 (Бонди—Хватал, 1976). *Простой граф G является гамильтоновым тогда и только тогда, когда его замыкание $C(G)$ является гамильтоновым графом.*

Следствие 11. *Если $C(G) = K_n$, то граф G является гамильтоновым.*

Так, в случае $\delta(G) \geqslant n/2$ каждая пара несмежных вершин графа G должна быть соединена ребром, так что $C(G) = K_n$. Поэтому теорема Дирака есть частный случай теоремы 10.

d. Теперь мы готовы доказать наилучшую из известных оценок на степени вершин, гарантирующую существование гамильтонова цикла в графе.

Теорема 12 (Хватал, 1972). *Пусть G — простой граф, построенный на $n > 2$ вершинах, последовательность*

$$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$$

степеней вершин которого удовлетворяет следующему условию:

$$\forall\ i < n/2 \text{ либо } d_i > i, \text{ либо } d_{n-i} \geqslant n - i. \tag{3.6}$$

Тогда в G существует гамильтонов цикл.

Доказательство. Мы покажем, что замыкание $C(G)$ графа G является полным графом K_n. Будем доказывать это от противного. Именно, предположим, что $C(G) \neq K_n$. Выберем тогда в графе $C(G)$ пару таких несмежных между собой вершин x, y, для которых сумма s степеней максимальна. Мы знаем, что эта сумма ограничена сверху величиной n:

$$s = \deg(x) + \deg(y) < n.$$

Положим для определенности $i := \deg(x) \leqslant \deg(y)$. В силу последнего неравенства $\deg(y) < n - i$. Кроме того, из этого же неравенства следует, что $i < n/2$, а значит, и $\deg(x) < n - i$.

Мы выбрали несмежную пару вершин с наибольшей суммой s степеней вершин. Поэтому любая несмежная с y вершина имеет степень, меньшую или равную $\deg(x) = i$. Так как $\deg(y) \leqslant n - 1 - i$, то в графе $C(G)$ гарантированно имеется i несмежных с y вершин, то есть вершин, степени которых меньше или равны i.

Далее, любая несмежная с x вершина имеет степень, меньшую или равную $\deg(y) < n - i$. Так как степень вершины x равна i, то в графе существует $n - 1 - i$ несмежных с x вершин, степень которых меньше $n - i$. Кроме того, сама вершина x имеет степень, меньшую $n - i$. Таким образом, мы нашли по меньшей мере $n - i$ вершин в графе $C(G)$, степень которых меньше $n - i$.

Теперь заметим, что G есть остовный подграф графа $C(G)$. Поэтому если в $C(G)$ какая-то вершина имеет степень, меньшую некоторого числа, то и в G степень этой вершины не превосходит того же числа. Следовательно, мы нашли такое $i < n/2$, для которого в графе G нашлись как минимум i вершин степени, меньшей или равной i, и $n - i$ вершин, степень которых меньше $n - i$, а это противоречит условиям (3.6). Действительно, последовательность $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ степеней вершин упорядочена по неубыванию. Значит, первые i из этих чисел меньше или равны i, а следовательно, и i-е число этой последовательности, а именно d_i, меньше или равно i. Аналогично показывается, что $d_{n-i} < n - i$. □

3. В заключение данного параграфа поговорим о гамильтоновых циклах в орграфах.

a. Оказывается, любое обобщение описанных выше достаточных условий существования гамильтоновых путей и циклов в неориентированных графах на ориентированный случай дается довольно тяжело. В частности, существует следующее обобщение теоремы Дирака на случай орграфов.

Теорема 13. *Пусть D — сильно связный орграф, исходящая и входящая степени любой вершины x в котором больше или равны $n/2$. Тогда в D существует гамильтонов цикл.*

Доказательство этой теоремы значительно сложнее доказательства теоремы Дирака для неориентированных графов и здесь приводиться не будет.

b. Вместо этого мы рассмотрим частный случай орграфов — турниры, для которых вопрос существования гамильтонова пути или цикла решается значительно проще.

Теорема 14 (Редеи, 1934). *В любом турнире T существует ориентированный гамильтонов путь.*

Доказательство проведем индукцией по количеству n вершин в турнире D. Очевидно, что тривиальный гамильтонов путь, состоящий из одной вершины, существует в тривиальном же турнире, построенном на одной вершине. Предположим теперь, что при любом фиксированном $n \geqslant 2$ любой турнир, построенный на $n-1$ вершине, имеет гамильтонов путь. Рассмотрим тогда в турнире T, построенном на n вершинах, произвольную вершину x. Орграф $T' = T - x$ является турниром на $n-1$ вершине, так что в нем существует гамильтонов путь $P' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. В этом случае возможно всего три варианта.

1. В орграфе T существует ребро (x, x_1). Тогда в T существует и ориентированный гамильтонов путь $(x, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

2. В орграфе T существует ребро (x_1, x), и, кроме того, в T существует ребро (x, x_i) для некоторого $i > 1$, $i < n$ (см. вершину x_i на рис. 3.13). Тогда в T имеется гамильтонов путь, а именно путь

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_i, \ldots, x_{n-1})$$

(ребра, помеченные жирными линиями на рисунке).

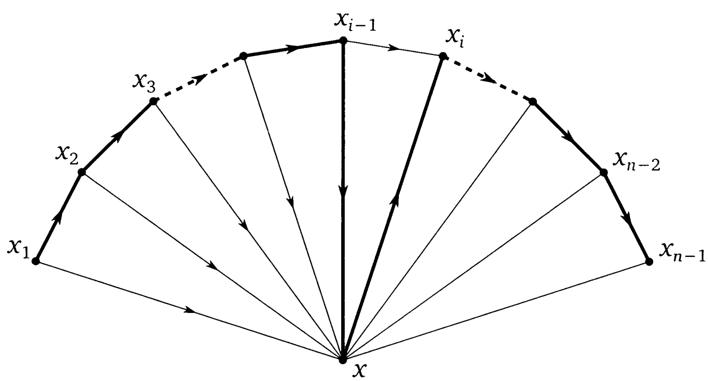


Рис. 3.13

3. Наконец, в орграфе T не существует ребра (x, x_i) ни для какого $i = 1, \ldots, n-1$. Но тогда в T существует ребро (x_{n-1}, x), а значит, и гамильтонов путь $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$.

Теорема доказана. □

Упражнения

1 (0,25 балла). Верно ли, что если в простом графе G существует эйлеров цикл, то в нем существует и гамильтонов цикл? Верно ли обратное утверждение, а именно, верно ли, что если в простом графе существует гамильтонов цикл, то в нем существует и эйлеров цикл?