ПМИ. Группа 1. Домашнее задание №1. Часть 1. (Дедлайн: 19 сентября)

Оцениваются полные решения с подробностями.

1. (1) Подберите такой предикат $P(x, y)$, чтобы высказывания

$$\forall x\, \exists y:\ P(x, y) \quad \text{и} \quad \exists x\, \forall y:\ P(x, y)$$

были истинными, а высказывание $\exists y : \forall x\, P(x, y)$ — ложным.

2. (1) Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — некоторые функции, заданные на натуральных числах. Рассмотрим три суждения:
(a) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N f(n) > g(n)$;
(b) $f(10) > g(10)$
(c) $\forall n \geq 10 f(n) > g(n)$;.

Какие из импликаций (следований) верные? (a) $\Rightarrow$ (c)? (c) $\Rightarrow$ (a)? (b) $\Rightarrow$ (c)? *Если импликация справедлива всегда, то объясните. Если нет, то приведите контрпример.*

Замечание: следование верно, если в предположении, что утверждение слева истинно, следует, что утверждение справа истинно.

3. (1) С помощью ММИ докажите неравенства:
$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad n > 1, n \in \mathbb{N}.$

4. (1) С помощью ММИ докажите тождество:
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$

ПМИ. Группа 1. Домашнее задание №1. Часть 2. (Дедлайн: 19 сентября)

Для графиков/эскизов указывайте отмеченные точки, расположение исходных графиков относительно вспомогательных, используйте словестные описания, если из графика не ясно поведение функции и пр. Исследовать с помощью производной не нужно.

5. Построить графики функций

$$a.\,(0.75)\ y = \arccos(\cos x^2); \qquad b.\,(0.75)\ y = \log_2 |x^3 - x^2|$$

6. (1) (творческая) Доказать (необязательно строгую) монотонность функции $y = x + \sin x$. Без производных. Построить эскиз графика.

7. Постройте в полярной системе координат:
а) (0.5) $\rho = 2 + \cos 2\phi$; b) (1) $\rho = \frac{\phi}{\phi+1}$;

8. (2) Пусть X и Y — непустые множества вещественных чисел такие, что:

а) для любого $x \in X$ и для любого $y \in Y$ справедливо неравенство $x \leqslant y$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существуют $x_\varepsilon \in X$ и $y_\varepsilon \in Y$ такие, что $y_\varepsilon - x_\varepsilon < \varepsilon$.

Докажите, что $\sup X = \inf Y$.

9. (1) Пусть $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — монотонно убывающая функция. Может ли при всех $t \in \phi(\mathbb{R}_+)$ выполняться неравенство $\phi(t) > \phi^{-1}(t)$?

10. (1) Используя ММИ, докажите неравенство

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$