Список вопросов к коллоквиуму по математическому анализу
ВШЭ, первый модуль, осень 2024 года

Глава I. Введение

1. Множества: упорядоченная пара, декартово произведение, операции над множествами. Правила де Моргана.

2. Отношения: область определения, область значений, обратное отношение, композиция отношений, свойства, примеры.

3. Аксиомы вещественных чисел. Математическая индукция. Существование наибольшего и наименьшего элемента в конечном множестве.

4. Принцип Архимеда. Следствие.

5. Наибольший элемент в множестве целых чисел. Существование целой части числа. Существование рациональных и иррациональных чисел в непустом интервале.

6. ! Супремум и инфимум. Определение и теорема существования. Следствие. Характеристика супремума.

7. ! Теорема о вложенных отрезках. Существенность условий.

Глава II. Последовательности вещественных чисел

8. ! Монотонные и ограниченные последовательности. Два определения предела и их равносильность. Примеры.

9. ! Простейшие свойства пределов последовательностей (единственность, ограниченность, добавление и выкидывание членов, перестановка и т.д.).

10. ! Предельный переход в неравенстве. Теорема о стабилизации знака и теорема о двух милиционерах. Следствия.

11. ! Предел монотонной последовательности.

12. Бесконечно малые последовательности. Арифметические свойства пределов последовательности.

13. ! Бесконечные пределы. Определения и свойства. Аналоги теорем для бесконечных пределов.

14. Арифметические действия в $\overline{\mathbb{R}}$. Примеры.

15. Бесконечно большие и неограниченные последовательности. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими.

16. Неравенство Бернулли. Предел $\lim a^n$.

17. ! Определение экспоненты и числа e.

18. Свойства экспоненты.

19. Формула для экспоненты суммы (с леммой).

20. Сравнение скорости возрастания последовательностей n^k, a^n, $n!$ и n^n.

21. Теорема Штольца (для неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$). Сумма m-ых степеней натуральных чисел.

22. Теорема Штольца (для неопределенности $\frac{0}{0}$).

23. Подпоследовательности (определение и простейшие свойства). Теорема о стягивающихся отрезках.

24. ! Теорема Больцано–Вейерштрасса (в том числе и случай неограниченной последовательности).

25. ! Фундаментальные последовательности. Свойства. Критерий Коши.

26. Верхний и нижний пределы. Частичные пределы. Связь между ними и обычным пределом.

27. Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и ε. Сохранение неравенств для верхних и нижних пределов.

28. ! Сходимость рядов. Необходимое условие сходимости рядов. Примеры.

29. Простейшие свойства сходящихся рядов.

Глава III. Пределы и непрерывность функций

30. Окрестности и проколотые окрестности. Предельные точки множества.

31. ! Определения предела функций в точке. Равносильность определений по Коши и с окрестностями. Простейшие свойства пределов.

32. ! Равносильность определения предела по Коши и по Гейне.

33. ! Свойства функций, имеющих предел. Арифметические действия с пределами.

34. ! Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.

35. ! Критерий Коши для предела функций.

36. Левый и правый пределы. Связь с двусторонним пределом. Предел монотонной функции.

37. ! Определения непрерывных функций и их равносильность. Примеры. Арифметические действия с непрерывными функциями.

38. Непрерывность многочленов и рациональных функций. Непрерывность экспоненты.

39. Теорема о пределе композиции. Теорема о непрерывности композиции. Пример, показывающий важность непрерывности.

Примечания

Особо важные вопросы помечены восклицательным знаком.

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: супремум и инфимум; предел последовательности и функции (в разных ситуациях и на разных языках); определение числа e и экспоненты; определение фундаментальной последовательности; критерий Коши для последовательностей и для функций; определение подпоследовательности и теорема Больцано–Вейерштрасса; теорема о двух милиционерах для последовательностей и для функций; определение непрерывности (в разных терминах).

Список вопросов к экзамену по математическому анализу
ВШЭ, второй модуль, осень 2024 года

40. Неравенства между синусом и аргументом. Непрерывность тригонометрических функций. Предел $\lim \frac{\sin x}{x}$.

41. ! Теорема Вейерштрасса. Существенность условий.

42. ! Теорема Больцано–Коши. Существенность условий. Непрерывный образ отрезка.

42. Теоремы о непрерывных образах отрезка и промежутка.

43. Непрерывность обратной функции. Непрерывность обратных тригонометрических функций.

44. Определение натурального логарифма, свойства, определение a^b, пределы $\lim \frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ и $\lim (1+x)^{1/x}$.

45. Определение показательной и степенной функций. Пределы $\lim \frac{a^x-1}{x}$ и $\lim \frac{(1+x)^p-1}{x}$.

46. Сравнение функций: отношение эквивалентности, символы Ландау, свойства, примеры.

Глава IV. Дифференциальное исчисление

47. ! Определение производной и дифференцируемости функции в точке. Критерий дифференцируемости. Левая и правая производные. Примеры.

48. Геометрический смысл производной. Непрерывность дифференцируемой функции.

49. Арифметические действия с дифференцируемыми функциями.

50. ! Теорема о дифференцируемости композиции.

51. Теорема о дифференцируемости обратной функции.

52. Производные элементарных функций.

53. ! Теоремы Ферма и Ролля. Их геометрический смысл.

54. ! Теорема Лагранжа и Коши. Их геометрический смысл.

55. ! Следствия теоремы Лагранжа. Характеристика монотонности дифференцируемых функций.

56. Теорема Дарбу. Следствие.

57. Правило Лопиталя (для $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$). Примеры.

58. Определение производной n-го порядка. Классы $C^n(E)$. Несовпадение классов $C^n(E)$.

59. Арифметические свойства производных n-го порядка. Производные n-го порядка элементарных функций.

60. Формула Тейлора для многочленов (с леммами).

61. ! Формулы Тейлора с остатком в форме Пеано (с леммой).

62. ! Формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

63. Следствия формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Разложения $\sin x$, $\cos x$ и e^x в ряд.

64. ! Формулы Тейлора для e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$.

65. Иррациональность числа e.

66. ! Локальные максимумы и минимумы. Необходимое условие экстремума.

67. ! Достаточные условия экстремума для дифференцируемых функций.

68. Выпуклые и вогнутые функции. Переформулировки определения выпуклости. Геометрический смысл. Лемма о трех хордах.

69. Непрерывность и дифференцируемость выпуклой функции. Характеристика выпуклых функций с помощью касательных.

70. Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных. Примеры.

71. Неравенство Йенсена. Неравенство о средних.

72. Неравенство между средними степенными.

73. Неравенства Гёльдера и Коши–Буняковского.

74. Неравенство Минковского.

Глава V. Интегральное исчисление

75. ! Определение первообразной и неопределенного интеграла. Общий вид первообразной. Примеры функций не имеющих первообразную.

76. Таблица интегралов. Линейность интеграла.

77. Теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле. Формула интегрирования по частям.

Примечания

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: теоремы Вейерштрасса и Больцано–Коши о непрерывных функциях, замечательные пределы, O-символика; определение производной и дифференцируемости функции в точке; производные элементарных функций; теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа; формула Тейлора, формулы Тейлора для e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$; условия монотонности функции; определение и необходимое условие экстремума; выпуклые функции и условия выпуклости в терминах производных; определение первообразной и неопределенного интеграла.

Существенную часть вопросов примерно в таком же изложении можно найти в книге Виноградова и Громова “Курс математического анализа”, часть I.

Видеозаписи лекций, очень близких к курсу можно найти тут:
`https://stepik.org/course/716/` (I–III главы) и
`https://stepik.org/course/711/` (IV–V главы).