

Контрольная работа

Задача 1. (1.5 балла) Пусть есть m шаров которые случайно размещают по n ящикам и A_k — событие " k -ый ящик оказался пуст". Являются ли события \bar{A}_i , \bar{A}_j , и \bar{A}_ℓ независимыми в совокупности при $i \neq j \neq \ell$?

Задача 2. Миша строит случайный граф G_n следующим образом. Он берет n вершин и каждую пару вершин он независимо от других соединяет ребром с вероятностью p .

- (0.5 балла) Напишите математическое ожидание и дисперсию для числа ребер в этом графе.
- (0.5 балла) Вычислите математическое ожидание числа простых циклов.
- (1 балл) Пусть $p = p_n$, $n \rightarrow +\infty$, $np_n \rightarrow 0$. Оцените асимптотику роста математического ожидания числа компонент связности такого графа.

Задача 3. (1 балл) Пусть есть m шаров которые случайно размещают по n ящикам и B_k — событие "ровно k ящиков оказались пустыми". Найдите условную вероятность события B_k при условии, что какие-то ℓ из ящиков точно оказались пустыми (про остальные ничего не известно). Найдите вероятность события что все ящики окажутся непустыми.

Задача 4. (0.5 балла) Запишите в общем виде матрицу смежности графа гиперкуба Q_n — для этого выберите любую удобную подходящую нумерацию вершин графа.

Задача 5. (1 балл) Постройте кубический граф без мостов, такой, что его вершины нельзя покрасить в 4 цвета, так, чтобы никакие две вершины одного цвета, не были смежны.

Задача 6. (1 балл) В Чикаго орудует 36 преступных банд, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причём любые два гангстера состоят в разных наборах банд. Известно, что ни один гангстер не состоит в двух бандах, враждующих между собой. Кроме того, оказалось, что каждая банда, в которой не состоит некоторый гангстер, враждует с какой-то бандой, в которой данный гангстер состоит. Какое наибольшее количество гангстеров может быть в Чикаго?

Задача 7. Автоморфизмом графа называется биективное отображение вершин $\varphi: V_G \rightarrow V_G$, такое что $(v, u) \in E_G$ тогда и только тогда, когда $(\varphi(u); \varphi(v)) \in E_G$. Иначе говоря это перенумерация вершин, такая, что смежные вершины переходят в смежные вершины, а несмежные — в несмежные.

- (1 балл) Покажите что автоморфизмы графа формируют группу относительно композиции.
- (1 балл) Приведите пример графа, группа автоморфизмов которого состоит из трёх элементов.