

ПМИ. Группа 1. Домашнее задание №2. Часть 1. (Дедлайн: 3 октября)

Найдите супремумы и инфимумы множеств (везде нужны доказательства):

1. (1) Множество состоит из десятичных дробей из $(0; 1)$, в записи которых (после запятой) не содержатся нечетные цифры.
2. (1) $\left\{ \frac{nm}{m^2+n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
3. (1) $\left\{ \frac{(n+1)^2}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
4. (1) $\left\{ 2 \cdot (-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(2 + \frac{3}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$.
5. (1) $\left\{ \frac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^{10}+n+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
6. (1) $\{ \sqrt{n} - [\sqrt{n}] : \mathbb{N} \}$.

ПМИ. Группа 1. Домашнее задание №2. Часть 2. (Дедлайн: 3 октября)

7. Найдите предел последовательности, укажите N_ε .

7.1. (1) $y_n = \frac{99^n}{n!}$;

Hint: в качестве подсказки можете разобратся с примером $\frac{2^n}{n!}$.

7.2. (1) $x_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+10)}{(n-1)(n-2)\dots(n-10)}$.

8. Вычислить предел:

8.1. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n + \frac{n}{3} + \dots + \frac{n}{3^n} \right) (n-3)(n+5)(n-1)}{(1+3+5+\dots+(2n+1))(2n^2+5)}$.

8.2. (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right)$.

Комментарий к задаче 8.1: что такое геометрический ряд Вы не знаете (бесконечная сумма q^n). Не обманывайте ни себя, ни меня.

9. (1) Пусть последовательность x_n имеет предел. Докажите, что множество $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ достигает хотя бы одной своей точной грани — верхней или нижней.
10. (1) Известно, что $\lim x_n y_n = 0$. Следует ли отсюда, что:
а) $\lim x_n = \lim y_n = 0$; б) хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ стремится к нулю?
11. (1) Пусть $x_n > 0$ и $x_n \rightarrow a$. Докажите, что $\sqrt{x_n} \rightarrow \sqrt{a}$. Выразите $\tilde{N}(\varepsilon)$ из определения предела для $\sqrt{x_n}$ через $N(\varepsilon)$ для x_n .