А.В. Омельченко

ОСНОВЫ ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНОЙ КОМБИНАТОРИКИ

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

А.В.Омельченко

ОСНОВЫ ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНОЙ КОМБИНАТОРИКИ

Учебное издание для вузов

Санкт-Петербург, 2020

УДК 519.101
ББК 22.176
О57

Александр Владимирович Омельченко
ОСНОВЫ ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНОЙ КОМБИНАТОРИКИ
Учебное издание для вузов

Омельченко А.В.

О57 Основы перечислительной комбинаторики - СПб: Изд-во ..., 2020. — 104 с.

ISBN 978-5-7937-1865-3

В основу данного учебного пособия легли материалы семестрового курса лекций, читающегося автором в течение нескольких лет бакалаврам первого курса, обучающимся в национальном исследовательском университете ``Высшая школа экономики'', Санкт-Петербург, по специальности «Прикладная математика и информатика». В учебное пособие вошли базовые разделы элементарной комбинаторики и дискретной теории вероятности. В конце каждого параграфа приводятся задачи, сопровождающие и дополняющие изложенные в учебнике теоретический материал.

Учебное пособие рассчитано на студентов младших курсов, изучающих математику и информатику, школьников, готовящихся к олимпиадам по математике, а также на специалистов из смежных областей, желающих самостоятельно изучить элементарные основы комбинаторики и дискретной теории вероятности. Большая часть материала не предполагает специальных предварительных знаний и может быть использована школьниками, изучающими программирование и дискретную математику. Наконец, этот учебник может быть полезным преподавателям, читающим соответствующие разделы дискретной математики.

УДК 519.101
ББК 22.176

ISBN 978-5-7937-1865-3

Содержание

Предисловие

В основу данного учебного пособия легли материалы семестрового курса лекций, читающегося автором в течение нескольких лет бакалаврам первого курса, обучающимся в национальном исследовательском университете “Высшая школа экономики”, Санкт-Петербург, по специальности "Прикладная математика и информатика". Представленный в пособии материал содержит самые базовые основы комбинаторики и дискретной теории вероятностей, которые необходимо знать и четко понимать любому студенту или специалисту, работающему в области программирования или прикладной математики.

В учебном пособии собрано большое количество задач, дополняющих и закрепляющих теоретические разделы курса. Все задачи разделены на две группы — основные и дополнительные. Все задачи из основного блока снабжены подробными решениями. Приведенные в пособии задачи достаточно часто встречаются в различного рода математических олимпиадах для школьников. Поэтому данное пособие может быть также полезно и школьникам старших курсов, готовящихся к олимпиадам или к ЕГЭ.

Отдельно следует сказать о литературе. Так как данный курс является вводным и довольно элементарным, то ссылок на литературу в основной части данного пособия нет — те факты, которые мы описываем, настолько базовые, что встречаются, по сути, в любой книге по соответствующему предмету. Здесь же хочется отметить несколько избранных учебников, которые позволят расширить материал, представленный в данном пособии.

Прекрасным введением в элементарную комбинаторику является книжка [1]. Написанная, в основном, для школьников, она, тем не менее, крайне полезна любому, кто хочет изучить современную комбинаторику. Для более серьезного введения в предмет перечислительной комбинаторики можно порекомендовать учебное пособие С.К.Ландо [2]. На английском языке хочется отметить очень неплохой и недавно написанный учебник [3], на понятном и доступном языке объясняющий достаточно нетривиальные факты перечислительной комбинаторики, а также более продвинутый учебник [4]. Наконец, основы дискретной вероятности прекрасно изложены в книге [5], которая, помимо этого материала, содержит и другие разделы дискретной математики. В качестве же университетского курса по теории вероятностей (не только дискретной) можно порекомендовать классический учебник [6].

В заключение мне хотелось бы поблагодарить всех тех, кто помогал в подготовке этой книги, а также всех тех, с кем мне довелось общаться при ее написании. Отдельную благодарность мне бы хотелось выразить всем студентам, которые на протяжении последних нескольких лет слушали соответствующий лекционный курс и своим неравнодушным отношением к предмету, безусловно, способствовали улучшению излагаемого материала.

1 Принцип Дирихле

1.1. Начнем мы с изложения очень простого принципа, который, однако, является весьма эффективным способом решения многих комбинаторных задач — принципа Дирихле (или в английском варианте — Pigeon-Hole Principle).

1.1.1. В своей простейшей формулировке он гласит следующее:

Утверждение 1.1. *Если в n ящиков положить $k > n$ предметов (в n клеток посадить $k > n$ голубей), то хотя бы в одном ящике будут лежать по крайней мере два предмета (будут сидеть по крайней мере два голубя).*

Доказательство. Несмотря на всю очевидность данного утверждения, все же дадим его формальное доказательство. Предположим, что утверждение неверно, то есть в каждом ящике находится не более одного предмета. Обозначим через m количество ящиков, в котором ничего не лежит. Очевидно, что $m \geqslant 0$. Тогда ровно по одному предмету лежит в $(n-m)$ ящиках. Это означает, собственно, что общее количество предметов равно $n - m \leqslant n < k$, что противоречит условию нашего утверждения. □

1.1.2. На первый взгляд совершенно непонятно, как такой настолько простой принцип может использоваться при решении каких-либо серьезных задач, ведь он кажется совершенно очевидным. Однако оказывается, что в конкретных задачах, использующих в своих решениях данный принцип, зачастую очень нелегко понять, где предметы, где ящики, и почему предметов больше, чем ящиков. Далее, далеко не всегда по формулировке самой задачи можно догадаться, что для ее решения следует воспользоваться данным принципом. И наконец, данный принцип дает нам неконструктивное доказательство какого-то факта — используя его, мы не можем сказать, в каком конкретно ящике находятся два предмета, мы знаем лишь, что такой ящик существует. Попытка же дать конструктивное доказательство, то есть попытка нахождения данного ящика, часто связана с очень большими трудностями. Тем не менее, данный принцип очень полезен, и с его помощью можно доказывать совершенно неочевидные на первый взгляд результаты.

1.1.3. Приведем вначале простейший пример на применение данного принципа.

Пример 1.2. Докажите, что в наборе из любого $(n+1)$-го положительного целого числа найдутся по крайней мере два числа, имеющих один и тот же остаток от деления на n.

Доказательство. Действительно, рассмотрим произвольный набор $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ положительных целых чисел. Поделив их с остатком на n, мы получим набор $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}\}$ из $(n+1)$-го остатка от этого деления — набор неотрицательных целых чисел, каждое из которых меньше n. Но мы знаем, что имеется только лишь n неотрицательных целых чисел, меньших n. Следовательно, по принципу Дирихле, хотя бы два остатка из полученного набора должны совпадать. □

1.1.4. Обычно в качестве примера применения принципа Дирихле дается чуть более сложная формулировка того же самого утверждения.

Пример 1.3. Докажите, что в последовательности чисел

$$7,\ 77,\ 777\ \ldots$$

один из первых 2014 членов данной последовательности делится на 2013.

Решение. Вначале ход рассуждений полностью повторяет рассуждения предыдущего примера. Именно, поделив с остатком первые 2014 членов выбранной числовой последовательности на 2013, мы получим 2014 остатков, значение каждого из которых меньше 2013. Следовательно, согласно принципу Дирихле существуют хотя бы два различных числа с одинаковыми остатками. Обозначим эти числа через a_i и a_j, и пусть для определенности $i < j$. Тогда

$$a_i = 2013 \cdot q_i + r, \qquad a_j = 2013 \cdot q_j + r,$$

а число $(a_j - a_i)$ делится без остатка на число 2013. Покажем теперь, что число a_{j-i} делится без остатка на 2013.

Действительно,

$$\begin{array}{rc} 77777777777777777777777777 & j \text{ цифр} \\ -77777777777777777 & i \text{ цифр} \\ = 77777777700000000000000000 & \begin{array}{c} j-i \text{ цифр, равных } 7, \\ i \text{ цифр, равных } 0, \end{array} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i.$$

Но 10^i и 2013 взаимно просты, поэтому a_{j-i} делится на 2013.

1.1.5. Рассмотрим еще один характерный пример.

Пример 1.4. Докажите, что среди нескольких находящихся в одной комнате человек хотя бы двое имеют одинаковое количество знакомых среди присутствующих в комнате.

Доказательство. Пусть в комнате находится n человек. Тогда для любого из них количество k с ним знакомых может принимать значения от нуля (ни с кем не знаком) до $n-1$ (со всеми знаком). Но отношение знакомства является взаимным: если a знаком с b, то и b знаком с a. Поэтому, к примеру, невозможен случай, когда в одной комнате имеются одновременно человек, у которого $(n-1)$ знакомых, и человек, у которого 0 знакомых: в первом случае у второго человека не может быть 0 знакомых, а во втором — у первого не может быть $(n-1)$ знакомый. Тем самым мы исключили вариант, когда у каждого находящегося в комнате свое, отличное от других, число знакомых. Иными словами, хотя бы для одного значения $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ в комнате нет человека с k знакомыми, и количество различных значений для k меньше числа n. Следовательно, согласно принципу Дирихле, хотя бы для двух из n находящихся в комнате человек значение k одно и то же. □

Данная задача имеет многочисленные переформулировки. Например, если в комнату заходят n человек, и кто-то с кем-то здоровается за руку, то существует по крайней мере два человека, которые пожали одинаковое количество рук. Или если в шахматном турнире участвуют n человек, и любые два участника играют только по одной партии друг против друга, то в любой момент времени существует по меньшей мере два игрока, которые завершили одинаковое количество партий. Легче же всего эта задача формулируется на языке теории графов. Именно, с точки зрения теории графов все эти задачи равносильны утверждению о том, что в графе на n вершинах хотя бы две вершины имеют одинаковую степень.

1.1.6. Большое количество примеров на применение принципа Дирихле можно найти в разного рода геометрических задачах [7]. Приведем достаточно характерный пример такого рода задач.

Пример 1.5. В прямоугольнике со сторонами 6×8 сантиметров помещены пять точек. Докажите, что существуют хотя бы две точки, расстояние между которыми меньше или равно пяти сантиметрам.

Доказательство. Действительно, поделим исходный прямоугольник на четыре равные части размерами 3×4 сантиметра. Так как пять точек должны находиться либо внутри, либо на границах этих четырех прямоугольников, то, согласно принципу Дирихле, хотя бы две из них должны лежать либо внутри, либо на границах одного и того же прямоугольника. Осталось заметить, что расстояние между любыми такими точками меньше или равно пяти сантиметрам. $\square$

1.1.7. В заключение данного пункта приведем еще один интересный пример на принцип Дирихле, который предложили венгерские математики Эрдеш и Секереш.

Пример 1.6. Выделим в множестве $[2n]$ первых $2n$ целых положительных чисел подмножество $S \subset [2n]$ мощности $(n+1)$. Докажите, что в этом подмножестве существуют хотя бы два числа, одно из которых делит другое.

Решение. Для применения принципа Дирихле нам нужно каким-то образом связать голубей с элементами $(n+1)$-элементного подмножества S, а клетки — с элементами какого-то n-элементного множества N. Оказывается, что в рассматриваемом примере нам в качестве множества N нужно выбрать n-элементное подмножество всех нечетных чисел.

Действительно, ключевое для решения данной задачи наблюдение состоит в том, что любое число $s \in S$ может быть представлено в виде

$$s = 2^r \cdot q,$$

где q есть нечетное число, $1 \leqslant q \leqslant 2n-1$. Так как таких чисел s ровно $n+1$ штук, то, согласно принципу Дирихле, у нас обязательно найдутся среди них два числа с одинаковым нечетным делителем q. Как следствие, одно из этих чисел обязательно делит второе.

Данная задача допускает еще несколько решений. Одно из них базируется на построении дерева с корнем в вершине 1 по следующему правилу. Соединим все простые числа ребрами с единицей. Для любого другого числа соединим его ребром с наибольшим делителем этого числа. Заметим, что листьев в таком дереве не более n — это следует из того, что любое число i в диапазоне от 1 до n является делителем по крайней мере одного числа из диапазона от 1 до $2n$, а именно, числа $2i$. Так как нам задано $n+1$ число, то хотя бы два из них будут принадлежать ветке, имеющей общий лист, а значит, будут делиться одно на другое.

Еще одно решение является некоторой комбинацией двух предыдущих. Именно, разобъем множество чисел на цепочки

$$1, 2, 4, 8, \ldots, \qquad 3, 6, 12, 24, \ldots, \qquad 5, 10, 20, 40, \ldots, \qquad 7, 14, 28, \ldots$$

в каждой из которых любое число делится на предыдущее. Заметим, что любая такая цепочка может начинаться только лишь с нечетного числа — любое четное число $2a$ мы можем поделить на два и получить число a, делящее $2a$. Следовательно, количество таких цепочек совпадает с количеством нечетных чисел и равно n. Тогда какие-то два из $(n+1)$-го числа обязательно попадут в одну цепочку, а значит, одно из них будет делиться на второе.

1.2. Часто в задачах нужно определить минимальное количество k предметов, гарантированно обеспечивающих наличие хотя бы r предметов в одном из n ящиков.

1.2.1. Очевидно, что в случае $r = 2$ мы должны взять $n+1$ предмет — действительно, согласно принципу Дирихле, в этом случае хотя бы в одном ящике гарантированно окажется по крайней мере два предмета.

В более общем случае нам достаточно взять

$$k = n \cdot (r-1) + 1 \tag{1}$$

предметов. Действительно, $n \cdot (r-1)$ предмет мы еще можем распределить по n ящикам так, чтобы в каждом ящике находилось не более $(r-1)$-го предмета, а вот в случае $k = n \cdot (r-1) + 1$ у нас хотя бы в одном ящике гарантированно окажется хотя бы r предметов.

Последнее утверждение часто называют обобщенным принципом Дирихле и формулируют его так. Пусть у нас имеются k предметов, которые мы должны распределить по $n < k$ ящикам. Тогда существует по крайней мере один ящик, в котором содержится не менее чем

$$\lceil k/n \rceil$$

предметов, где $\lceil k/n \rceil$ — ближайшее целое число, большее или равное k/n.

1.2.2. В качестве примера на использование обобщенного принципа Дирихле рассмотрим следующую задачу.

Пример 1.7 (Эрдеш, Секереш)**.** Докажите, что любая последовательность из $n^2 + 1$ целых чисел содержит либо убывающую, либо возрастающую подпоследовательность, состоящую из не менее чем $(n+1)$-го числа.

Для доказательства данного утверждения введем количество s_i чисел в самой длинной возрастающей подпоследовательности, начинающейся с a_i. Например, для последовательности чисел

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, 5, 3, 2, 4\} \qquad s_1 = 3,\ s_2 = 1,\ s_3 = 2,\ s_4 = 2,\ s_5 = 1.$$

Сразу заметим, что если существует такое i, что $s_i \geqslant (n+1)$, то процесс завершен. В нашем случае $s_1 = 3 = (2+1)$, и поэтому в нашем случае все в порядке — эта последовательность содержит возрастающую подпоследовательность $\{1, 3, 4\}$ длины три. Для подпоследовательности же

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, 5, 4, 3, 2\} \qquad s_1 = 2,\ s_2 = 1,\ s_3 = 1,\ s_4 = 1,\ s_5 = 1,$$

и такого i не существует. Иными словами, в этом случае все (n^2+1) штук s_i принимают значения из диапазона $[1, n]$. Тогда, согласно обобщенному принципу Дирихле, существует по крайней мере

$$\left\lceil \frac{n^2+1}{n} \right\rceil = n + 1$$

чисел s_i, значения которых одинаковы и равны s. Все, что нам осталось понять — это то, что соответствующая этим значениям $s_i = s$ подпоследовательность $\{a_i\}$, состоящая из $(n+1)$-го числа, является убывающей.

Действительно, предположим, что в этой подпоследовательности существует такая пара индексов (i, j), что $j > i$ и $a_j > a_i$. Напомним, что по определению числа s_j, возрастающая подпоследовательность чисел, начинающаяся с a_j имеет длину $s_j = s$. Добавляя a_i в начало этой подпоследовательности, мы получим возрастающую последовательность длины $s+1$, начинающуюся с a_i. Это, в свою очередь, противоречит тому, что наибольшая числовая возрастающая последовательность, начинающаяся с a_i, имеет длину, равную $s_i = s$.

Упражнения

1.1 (0,5 балла)**.** В ящике лежат десять белых и двенадцать черных носков. Какое минимальное количество носков нужно вытащить, чтобы на выходе гарантированно получить пару носков одинакового цвета?

1.2 (1 балл)**.** Сколько людей нужно выбрать из группы, состоящей из двадцати супружеских пар, чтобы в выборку гарантированно вошла хотя бы одна супружеская пара?

1.3 (1 балл)**.** Сколько чисел нужно выбрать из последовательности

$$\{1, 2, 3, \dots, 2n\},$$

чтобы среди них гарантированно нашлась хотя бы одна пара чисел, сумма которых была бы равна $2n + 1$?

1.4 (1,5 балла)**.** Докажите, что в любом $(n + 1)$-элементном подмножестве множества первых $2n$ чисел обязательно найдутся по крайней мере два взаимно-простых числа.

1.5 (1,5 балла)**.** Имеется девять положительных целых чисел, ни одно из которых не имеет простого делителя, большего, чем 5. Докажите, что среди этих чисел найдутся по крайней мере два числа, произведение которых представляет собой квадрат некоторого целого числа.

1.6 (1 балл)**.** Сколько человек должно находиться в комнате, чтобы по крайней мере у троих из них день рождения был в одном месяце?

1.7 (1,5 балла)**.** Десять студентов за одно занятие решили 35 задач. Известно, что среди студентов есть те, кто решил ровно одну задачу, ровно две задачи и ровно три задачи. Докажите, что среди десяти студентов найдется хотя бы один студент, решивший как минимум пять задач.

1.8 (1 балл)**.** В ресторане имеется 14 столов и 170 стульев. Мы как-то расставляем стулья вокруг столов, а затем выбираем стол с максимальным количеством стульев за ним. Каково минимально возможное значение этого максимума?

1.9 (1 балл)**.** Внутри равностороннего треугольника со стороной в один сантиметр расположено пять точек. Докажите, что расстояние между хотя бы двумя из них не больше 0.5 сантиметров.

1.10 (1 балл)**.** На плоскости нарисовано n попарно непараллельных прямых. Докажите, что угол между по крайней мере двумя из этих прямых меньше или равен величине π/n.

Дополнительные упражнения

1.11 (1,5 балла)**.** Какое максимальное количество королей можно поместить на шахматную доску (стандартного размера, 8×8) так, чтобы эти короли не били друг друга?

1.12 (2 балла)**.** Докажите, что в любой выборке из 52 положительных целых чисел найдутся хотя бы два, у которых либо их сумма, либо их разность делится на 100.

1.13 (2 балла)**.** Имеется произвольная последовательность $a_1, \dots, a_n$ целых чисел, не обязательно различных. Докажите, что в такой последовательности обязательно найдется отрезок $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_l$, сумма элементов которого $\sum_{i=k+1}^{l}$ делится на n.

1.14 (2,5 балла)**.** Футбольная команда за сезон отыграла 30 матчей и забила соперникам в совокупности 53 гола. Известно, что в каждой игре команда забивала хотя бы один гол. Докажите, что существует непрерывная последовательность игр, в течение которой команда забила ровно шесть голов. Останется ли утверждение верным в случае, если команда забьет не 53, а 60 голов?

1.15 (2 балла)**.** Докажите, что в произвольном $(n+2)$-м подмножестве множества $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ чисел обязательно найдутся хотя бы два числа, разность которых строго больше n и строго меньше $2n$.

1.16 (2 балла)**.** Имеется 8 различных положительных целых чисел, меньших или равных 15. Докажите, что среди положительных попарных разностей этих чисел найдутся по крайней мере три одинаковых. Является ли верным похожее утверждение о том, что среди всех положительных попарных разностей четырех положительных целых чисел, меньших или равных 7, найдутся по крайней мере две одинаковых?

1.17 (2 балла)**.** Узлы бесконечной клетчатой бумаги покрашены в два цвета. Докажите, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечениях которых лежат точки, покрашенные в один и тот же цвет.

Указание. Рассмотрите произвольные три вертикальные и девять горизонтальных прямых и докажите, что среди них обязательно найдутся искомые прямые.

1.18 (1 балл)**.** Внутри единичного квадрата разбросано десять точек. Докажите, что существуют хотя бы две из них, которые расположены ближе, чем 0.48, и хотя бы три из них, которые покрываются кругом, радиус которого равен 0.5.

1.19 (1 балл)**.** Внутри единичного куба расположены 100 точек. Докажите, что найдётся 4 точки, таких, что объём порождённого ими тетраэдра не превосходит 1/99.

Решение упражнений

1.1. В этой задаче в роли “ящиков”, фигурирующих в формулировке принципа Дирихле, выступают два цвета — белый и черный. Для того, чтобы хотя бы в одном из этих “ящиков” гарантированно оказалось двое носков, нам, согласно принципу Дирихле, достаточно вытащить трое носков.

1.2. В данной задаче мы каждую супружескую пару можем рассматривать как один из двадцати ящиков. Нам нужно, чтобы хотя бы в одном ящике находилось два человека. Для этого нам достаточно взять количество людей, на единицу большее, чем количество ящиков, то есть нам достаточно взять 21 человека.

1.3. Для решения этой задачи мы можем в качестве n ящиков выбрать n пар чисел, сумма которых дает $2n + 1$:

$$1 + 2n = 2 + (2n - 1) = \ldots = n + (n + 1).$$

Для того, чтобы хотя бы в одном из ящиков гарантированно находилось хотя бы два предмета, достаточно взять $n + 1$ предмет, то есть выбрать $n + 1$ число.

1.4. В качестве n ящиков выберем в этой задаче пары чисел $\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2n-1,2n\}$. Ключевое наблюдение состоит в том, что любые два идущих подряд числа (а следовательно, и любые из описанных выше пар чисел) являются взаимно-простыми числами.

Действительно, рассмотрим два числа n и $n+1$, $n \geqslant 1$. Любое число $d \neq 1$, такое, что $d \mid n$ и $d \mid (n+1)$, должно также делить и число $(n+1)-n$, то есть должно делить 1, что невозможно. Раскладывая теперь $n+1$ число по n ящикам $\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2n-1,2n\}$, мы обязательно получим хотя бы два числа в одном ящике, то есть хотя бы два взаимно-простых числа.

1.5. Любое из девяти описанных в задании чисел имеет вид $2^i3^j5^k$. Среди всех троек (i,j,k) имеется $2^3 = 8$ вариантов различной четности чисел i, j и k. Следовательно, среди девяти чисел вида $2^i3^j5^k$ обязательно найдутся хотя бы два числа, у которых четность каждого из элементов тройки чисел (i,j,k) совпадает. Так как сумма двух чисел с одинаковой четностью есть четное число, то произведение этих чисел будет представлять собой элемент вида $2^{2a}3^{2b}5^{2c}$, представляющего собой квадрат числа $2^a3^b5^c$.

1.6. В данной задаче у нас в роли ящиков выступают $n = 12$ месяцев. Нам нужно, чтобы в одном "ящике" оказалось по крайней мере $r = 3$ "предмета". Это возможно в случае, когда у нас $n\cdot(r-1)+1 = 25$ человек. Действительно, 24 из них мы еще можем распределить так, чтобы в каждом "ящике" находилось не более двух человек, а уже 25 человек мы так распределить не сможем.

1.7. В качестве ящиков в этой задаче у нас выступают студенты, а в роли предметов — задачи. По крайней мере в одном из этих ящиков размещен ровно один предмет, по крайней мере в одном из них — ровно два предмета, и по крайней мере в одном из ящиков — ровно три предмета. Остаются как минимум $35-6 = 29$ предметов, которые нам нужно разместить по $10-3 = 7$ ящикам. Так как $29 = 7\cdot4+1$, то, на основании обобщенного принципа Дирихле, среди этих ящиков найдется хотя бы один, в котором размещено по меньшей мере пять предметов.

1.8. Для решения данной задачи воспользуемся обобщенным принципом Дирихле. Столы в количестве $n = 14$ штук можно трактовать как ящики, а стулья в количестве $k = 170$ штук — как предметы. В этом случае, согласно обобщенному принципу Дирихле, будет обязательно существовать стол, вокруг которого расставлено $\lceil 170/14\rceil = 13$ стульев.

1.9. Соединяя между собой середины соседних сторон, мы разбиваем треугольник на четыре равные части. Для доказательства приведенного в упражнении утверждения осталось понять, что в случае попадания двух точек на границу или внутрь одного из таких треугольников расстояние между этими точками окажется меньше 0.5 сантиметров.

1.10. Возьмем на плоскости произвольную точку A и проведем через нее прямые, параллельные указанным в условии задачи. Эти прямые разделяют плоскость на $2n$ секторов, сумма углов которых равна 360°. Поэтому вариант, когда все углы больше $360^\circ/2n = 180^\circ/n$, невозможен — величина одного из них обязательно должна быть меньше $180^\circ/n$.

2 Основные правила перечислительной комбинаторики

2.1. Перейдем теперь к описанию простейших фактов, лежащих в основе перечислительной комбинаторики. Начнем с очень краткого напоминания основных понятий теории множеств.

Определение 2.1. Множеством $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называется совокупность различимых объектов x_i, $i = 1, \ldots, n$, объединенных по некоторому признаку.

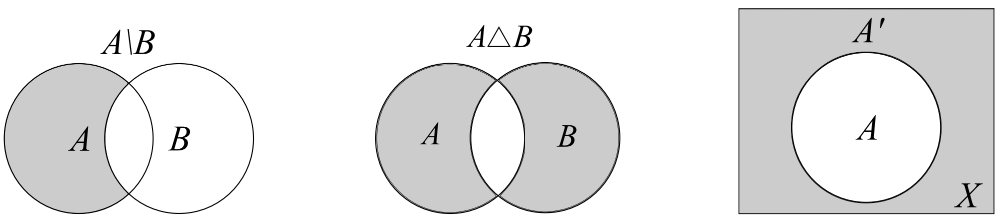
В качестве характерного примера можно рассмотреть, например, множество X всех студентов, находящихся в данной аудитории. Действительно, все студенты различимы, отличны друг от друга и объединены по признаку “собрались в данной аудитории”.

Определение 2.2. Мощностью $|X|$ множества X называется количество элементов в нем. Как правило, мы будем рассматривать конечные множества, в которых $|X| = n$, $n \in \mathbb{N}$, и называть их n-множествами.

2.1.1. Основные операции над множествами — это объединение $A \cup B$ (рис.1,a), пересечение $A \cap B$ (рис.1,b), разность $A \setminus B$ (рис.2,a) и симметрическая разность (рис.2,b) двух множеств A и B. В случае, если множество A является подмножеством некоторого более широкого множества X, удобно также рассматривать операцию дополнения $A' := X \setminus A$ множества A (рис.2,c).

(a) Объединение (b) Пересечение

Рис. 1



(a) Разность (b) Симметрическая разность (c) Дополнение

Рис. 2

Свойства операций над множествами удобно изучать графически, с использованием так называемых *диаграмм Эйлера-Венна* (смотри рисунки 1 и 2). Например, с их помощью достаточно просто проиллюстрировать справедливость законов де Моргана

$$A' \cap B' = (A \cup B)', \qquad A' \cup B' = (A \cap B)' \tag{2}$$

(смотри рис.3).

2.1.2. В дальнейшем мы достаточно часто будем использовать понятие покрытия множества X семейством $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ множеств, а также всевозможные частные случаи этого понятия.

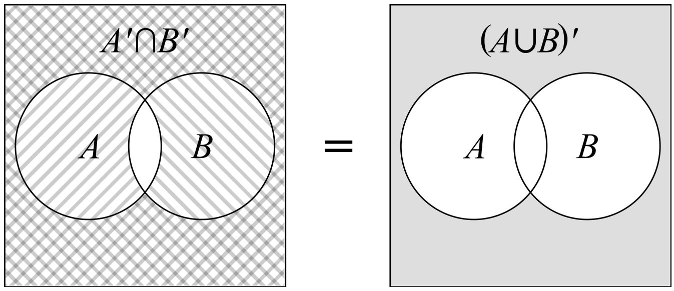


Рис. 3: Графическое доказательство закона де Моргана

Определение 2.3. Семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ называется *покрытием* множества X, если их объединение дает нам все множество X:

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = X.$$

Важным частным случаем покрытия является понятие разбиения множества.

Определение 2.4. Говорят, что семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ образует *разбиение* множества X, если

1. множества $X_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$;
2. $X_i \cap X_j = \varnothing \ \forall i \neq j$;
3. $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = X$.

Элементы X_i этого семейства называются *блоками* разбиения.

В качестве характерного примера можно рассмотреть разбиение студентов данного курса на группы. Студенческие группы являются при этом блоками данного разбиения.

Если по каким-то причинам оказывается важным порядок следования блоков, то говорят об *упорядоченном разбиении* $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ множества X. Например, если мы выводим группы на сцену для вручения им дипломов, то важен порядок, в котором они туда выходят. Следовательно, в данном случае мы получаем упорядоченное разбиение студентов данного курса.

Наконец, еще одним частным случаем покрытия X семейством множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ является понятие *разделения* множества X. Разделение есть аналог упорядоченного разбиения, в котором допускаются пустые блоки. Точное определение таково:

Определение 2.5. Разделением множества X называется упорядоченная последовательность $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ возможно пустых, попарно непересекающихся множеств, объединение которых дает все множество X.

2.1.3. Еще одной часто использующейся в комбинаторике операцией над множествами является операция декартова произведения множеств.

Определение 2.6. Декартовым произведением множеств A и B называется множество

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

всех упорядоченных пар (a, b), таких, что $a \in A$, $b \in B$.

В качестве простейшего примера декартова произведения множеств обычно приводят шахматную доску. Любая клетка шахматной доски имеет координаты "буква-цифра", например, $e5$ или $h4$. Иными словами, координаты клеток шахматной доски являются элементами декартова произведения множеств $A = \{a, b, \ldots, h\}$ и $B = \{1, 2, \ldots, 8\}$.

В частном случае множества A и B могут совпадать. В этом случае декартово произведение $A \times A$ обозначается через A^2.

Определение 2.7. Декартовым произведением k множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$ называется множество

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k := \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \,|\, x_i \in X_i,\ \forall\ i = 1, \ldots, k\}$$

всевозможных упорядоченных k-элементных последовательностей вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

В частном случае $X_1 = X_2 = \ldots = X_k = X$ имеем декартову степень $X \times X \times \ldots \times X =: X^k$.

2.1.4. Любой элемент X^k есть упорядоченный набор из k элементов множества X, в котором некоторые элементы могут повторяться. Если же в таком k-множестве порядок элементов не важен, говорят о *мультимножестве над множеством* X. Формальное определение мультимножества таково.

Определение 2.8. Мультимножеством над n-элементным множеством X называется пара (X, φ), где $\varphi\colon X \to \mathbb{Z}_+$ есть функция, сопоставляющая любому элементу $x \in X$ количество $\varphi(x)$ его вхождений в мультимножество.

Любую функцию φ такого рода можно определить с помощью множества Ξ упорядоченных пар

$$\Xi := \{(x, \varphi(x)) \mid x \in X\}.$$

Поэтому, например, мультимножество над множеством $X = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов x и одного элемента y, можно формально записывать в виде $(X, \{(x, 2), (y, 1)\})$. Однако чаще вместо такой формальной записи используют более наглядную форму записи вида $\{x, x, y\}$.

Самый простой и понятный пример мультимножества — это монеты в кошельке. В этом примере в качестве множества X выступает множество из девяти монет разного достоинства:

$$X = \{1 \text{ копейка}, 5 \text{ копеек}, 10 \text{ копеек}, 50 \text{ копеек}, 1 \text{ рубль}, 2 \text{ рубля}, 5 \text{ рублей}, 10 \text{ рублей}\}.$$

Любой набор из этих монет в количестве k штук образует k-мультимножество над множеством X.

2.1.5. Теория множеств как раздел математики создавалась значительно позже комбинаторики. Поэтому некоторые наиболее важные понятия теории множеств исторически получили в комбинаторике свои, специфические названия. Именно,

1. k-сочетанием без повторений называется любое k-элементное подмножество n-элементного множества;
2. k-сочетанием с повторениями называется любое k-мультимножество над n-множеством;
3. k-перестановкой без повторений называется упорядоченное k-подмножество n-элементного множества;
4. k-перестановкой с повторениями называется любой элемент декартовой степени X^k.

2.2. Теперь перейдем к двум самым простым, но в то же время достаточно важным правилам перечислительной комбинаторики — правилу суммы и правилу произведения.

2.2.1. Начнем с простейшего примера: пусть на одном блюде лежат три яблока, а на втором — две груши; сколькими способами можно выбрать один фрукт? Ответ очевиден: пятью способами.

Обобщающее этот пример простейшее *правило суммы* можно сформулировать так: если некоторый объект из множества A можно выбрать k способами, и, вне зависимости от выбора этого объекта, можно n способами выбрать некоторый элемент множества B, то выбор объекта из множества A *или* из множества B можно осуществить $k+n$ способами.

Очевидна переформулировка этого правила на языке теории множеств: пусть пересечение двух множеств A и B пусто; тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

В частности, если $A \subset X$ и A' — дополнение множества A, то

$$|A| + |A'| = |X|. \tag{3}$$

В более общем случае, рассматривая произвольное разбиение множества X на блоки, имеем равенство вида

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_k|,$$

которое также называется правилом суммы в комбинаторике.

2.2.2. Под правилом произведения в комбинаторике понимается равенство

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_k|.$$

Приведем простейший пример на применение этого правила в комбинаторике. Пусть в аудитории находятся 32 студента одной группы, 24 студента другой группы и 17 студентов третьей группы. В этом случае тройку, состоящую из представителей каждой группы, можно выбрать $32 \cdot 24 \cdot 17$ способами.

2.3. Наряду с правилом суммы, в элементарной комбинаторике также достаточно часто используется и несложное его обобщение — так называемый *принцип включения-исключения*. Если правило суммы связано с разбиением множества X, то принцип включения-исключения связан с некоторым произвольным покрытием этого n-множества семейством $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$. Сформулируем его для самого простого случая двух множеств.

2.3.1. Рассмотрим два конечных множества A и B, пересечение которых может быть и непусто. Тогда количество элементов в объединении этих множеств, очевидно, равно

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{4}$$

Действительно, когда мы считаем количество $|A|$ элементов в множестве A и складываем его с количеством $|B|$ элементов в множестве B, мы любой элемент, принадлежащий как множеству A, так и множеству B, считаем дважды. Чтобы этот избыток убрать, нам нужно один раз вычесть количество элементов, содержащихся в пересечении этих двух множеств.

Равенство (4) можно называть обобщенным правилом суммы — оно обобщает правило суммы на случай, когда пересечение двух множеств не пусто.

2.3.2. Предположим теперь, что A и B являются подмножествами некоторого более широкого множества X. В этом случае у множества $A \subset X$ и множества $B \subset X$ имеются дополнения к ним — множества A' и B', причем $A \cup A' = B \cup B' = X$.

Рассмотрим теперь пересечение $A' \cap B'$ дополнений множеств A и B. Согласно одной из теорем де Моргана (2), $A' \cap B' = (A \cup B)'$. Следовательно, количество элементов в этом пересечении с учетом равенства (3) и обобщенного правила суммы (4) можно сосчитать так:

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Равенство

$$|A' \cap B'| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|, \tag{5}$$

и называется в комбинаторике принципом включения-исключения.

2.3.3. Приведем простейший пример его использования. Пусть в аудитории находятся 30 человек, 20 человек из которых знают английский, 12 — французский, а 6 человек знают оба языка. Сколько человек не знает ни один из этих иностранных языков? Ответ, согласно принципу включения-исключения (5), следующий:

$$N = 30 - 20 - 12 + 6 = 4.$$

2.3.4. Несложно обобщить равенства (4) и (5) на случай большего количества множеств. Например, для трех множеств A, B, C соответствующие формулы выглядят так:

а) обобщенное правило суммы:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|; \tag{6}$$

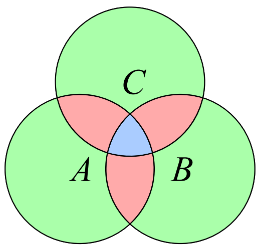


Рис. 4: Диаграмма Эйлера-Венна для трёх множеств

б) принцип включения-исключения:

$$|A' \cap B' \cap C'| = |X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|. \tag{7}$$

Действительно, рассмотрим, к примеру, левую часть равенства (6). Она подсчитывает количество элементов, принадлежащих объединению трех множеств (смотри рис.4). Если элемент x_1, принадлежащий этому объединению, содержится в множестве A, но не содержится в множествах B и C, то он один раз подсчитывается в правой части равенства (6) (слагаемое $|A|$, отвечающее зеленой подобласти на рис.4). Если элемент x_2 принадлежит множествам A и B, но не принадлежит C (красная подобласть на рис.4), то в правой части (6) этот элемент входит в слагаемые $|A|$, $|B|$ и $-|A \cap B|$, то есть также подсчитывается ровно один раз. Наконец, если x_3 принадлежит пересечению всех трех множеств (зеленая подобласть на рис.4), то за этот элемент отвечают все слагаемые в правой части (6). Так как четыре из них входят со знаком плюс, а три — со знаком минус, то этот элемент также считается в правой части (6) лишь однажды.

Упражнения

2.1 (0,5 балла)**.** На глобусе проведены 12 параллелей (окружностей, параллельных экватору) и 24 меридиана (дуги, соединяющие северный полюс с южным). На сколько частей разделена поверхность глобуса?

2.2 (0,5 балла)**.** Назовем число зеркальным, если слева направо оно читается так же, как справа налево. Например, число 12321 — зеркальное. Сколько существует пятизначных зеркальных чисел, которые делятся на 5?

2.3 (1 балл)**.** Вася придумывает 4-значный пароль для кодового замка. Он не любит цифру 2, поэтому не использует ее. Кроме того он не любит, когда две одинаковые цифры стоят рядом. А еще он хочет, чтобы первая цифра совпадала с последней. Сколько вариантов надо перебрать, чтобы гарантированно угадать Васин пароль?

2.4 (1 балл)**.** Сколько чисел в диапазоне от 0 до 999 999 не содержат двух рядом стоящих одинаковых цифр?

2.5 (1 балл)**.** Сколько существует целых чисел между 0 и 999, содержащих ровно одну цифру 7? А хотя бы одну цифру 7?

2.6 (0,5 балла)**.** Сколько различных делителей имеется у числа 720?

2.7 (0,5 балла)**.** На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55, 40)$. Найдите количество таких квадратов.

2.8 (1,5 балла)**.** В числе $2 * 0 * 1 * 6 * 0 *$ нужно заменить каждую из 5 звездочек на любую из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

2.9 (1 балл)**.** Сколько натуральных чисел в диапазоне от 1 до 2019 имеют ровно три различных натуральных делителя?

2.10 (1 балл)**.** Натуральное число x имеет ровно два простых делителя, а его квадрат — 51 различных делителей. Какое наибольшее количество различных натуральных делителей имеет x^3?

2.11 (1,5 балла)**.** Подсчитайте количество различных пар натуральных чисел (x, y), удовлетворяющих равенству

$$\gcd(x, y) + \mathrm{lcm}(x, y) = 113.$$

Здесь $\gcd(x, y)$ — наибольший общий делитель чисел x и y, то есть наибольшее целое число d, делящее числа x и y, а $\mathrm{lcm}(x, y)$ — наименьшее общее кратное чисел x и y, то есть наименьшее натуральное число l, которое делится на x и y без остатка.

2.12 (1 балл)**.** Сколько целых чисел от 1 до 100 не делится ни на два, ни на три, ни на пять?

2.13 (1 балл)**.** Докажите следующую двойственную к (6) формулу:

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|.$$

2.14 (1,5 балла)**.** Переплётчик должен переплести 12 книг в красный, синий и коричневый цвета. Сколько имеется способов это сделать, если в каждый из трех цветов должна быть переплетена хотя бы одна книга?

2.15 (1,5 балла)**.** Сколько существует восьмизначных чисел, произведение цифр которых делится на 15?

2.16 (1 балл)**.** Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два поля, не лежащие на одной горизонтали или вертикали?

Дополнительные упражнения

2.17 (1 балл)**.** Имеется желоб, по которому в обе стороны могут кататься одинаковые шарики с фиксированной скоростью. Если два шарика соударяются, каждый из них меняет направление своего движения на противоположное. С одного конца желоба двигаются пять шариков на равных расстояниях друг от друга, с другого конца — семь шариков (тоже на равных расстояниях друг от друга). Сколько всего будет соударений?

2.18 (0,5 балла)**.** На числовой прямой закрашивают красным и синим цветом точки с целыми координатами по следующим правилам: а) точки, разность координат которых равна 7, должны быть покрашены одним цветом; б) точки с координатами 20 и 14 должны быть покрашены красным, а точки с координатами 71 и 143 — синим. Сколькими способами можно раскрасить все целые числа, соблюдая эти правила?

2.19 (0,5 балла)**.** Сколько натуральных делителей, не являющихся точными квадратами (т.е. квадратами натуральных чисел), имеет число 10^{99}?

2.20 (0,5 балла)**.** Сколько имеется натуральных делителей числа 11!, кратных трем?

2.21 (1 балл)**.** Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих равенству

$$x^2 + xy = 30000000.$$

2.22 (2 балла)**.** Найдите количество четырехзначных чисел, не делящихся на 3 и таких, что в них нет цифр, делящихся на 3. Подсчитайте общую сумму цифр всех таких четырехзначных чисел.

2.23 (1,5 балла)**.** Найдите количество пар натуральных чисел (a, b) таких, что $a \leqslant 80$, $b \leqslant 30$, и таких, что удвоенная площадь фигуры, заданной системой неравенств

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \geqslant 1, \qquad x \leqslant a, \qquad y \leqslant b,$$

делится на 5.

2.24 (2 балла)**.** Дано число $5300\ldots0035$ (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

2.25 (1,5 балла)**.** Назовем натуральное число замечательным, если у него имеется ровно 4 различных натуральных делителя, причем среди них обязательно найдутся два, такие, что ни один не кратен другому. Сколько существует замечательных двузначных чисел?

2.26 (1,5 балла)**.** Определите, сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$x^7 y^2 = 12^{55} \cdot 15^{30}.$$

2.27 (2 балла)**.** Два натуральных числа назовем близкими взаимно простыми, если они взаимно простые и различаются не больше чем на три. Найдите количество пар близких взаимно простых чисел, расположенных между 50 и 150 включительно.

2.28 (2 балла)**.** Сколько существует шестизначных чисел, произведение цифр которых делится на 63?

2.29 (1,5 балла)**.** Сколькими способами можно расставить на шахматной доске белую ладью и черного короля так, чтобы ладья била короля, но король не бил ладью? А если ладью заменить на слона? Способы расстановки, получающиеся друг из друга поворотом доски, считаются различными.

2.30 (1,5 балла)**.** Таблицу размера 3×3 надо заполнить числами $a-1$, a и a так, чтобы сумма чисел в каждой строке была одинаковой. Сколькими различными способами можно это сделать?

2.31 (2 балла)**.** Квадрат разделён на 16 одинаковых квадратов. Сколькими способами можно раскрасить эти квадраты в белый, чёрный, красный и синий цвета так, чтобы в каждом горизонтальном и каждом вертикальном ряду были все четыре цвета?

2.32 (2 балла)**.** На плоскости нарисован круг и три семейства прямых: в одном — a параллельных между собой прямых, в другом — b параллельных между собой прямых, в третьем — c параллельных между собой прямых. На какое наибольшее число частей прямые могут разбить круг? Как изменится ответ в случае, если три семейства разбивают на части не круг, а плоскость?

2.33 (2,5 балла)**.** Каждая вершина выпуклого n-угольника окрашивается либо в черный, либо в белый цвет. Назовем диагональ разноцветной, если ее концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовем правильной, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек, отличных от вершин. Найдите количество правильных раскрасок.

Решение упражнений

2.1. Меридианы делят поверхность глобуса на 24 сектора, а параллели делят каждый из секторов на $12+1=13$ частей. Согласно правилу произведения, $|X| = |X_1| \cdot |X_2| = 24 \cdot 13 = 312$.

2.2. Число делится на 5, если оно оканчивается на 0 или на 5. Зеркальное число на 0 заканчиваться не может, так что остается один вариант для первой и последней цифр — 5. Центральную цифру и вторую с начала цифру можно выбрать 10 способами. Следовательно, всего имеется $10^2 = 100$ вариантов таких зеркальных чисел.

2.3. Первую цифру шифра можно выбрать одним из 9 способов (цифру 2 нужно исключить). Вторую цифру можно выбрать 8 способами (помимо двойки мы должны исключить цифру, стоящую слева). Наконец, третью цифру мы можем выбрать 7 способами (мы должны исключить двойку, цифру, стоящую слева, а также цифру, стоящую справа и совпадающую с первой цифрой). Итого получаем $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ способа.

2.4. Разобъем все множество X этих чисел на блоки X_i, $i = 1, \ldots, 6$ в зависимости от количества цифр в данном числе. Ясно, что $|X_1| = 10$. В остальных блоках на любую позицию мы можем поставить любую из девяти цифр: на первую позицию — любую цифру от 1 до 9, а на каждую последующую — любую из цифр, не совпадающую с предыдущей. Поэтому, согласно правилу суммы и правилу произведения,

$$|X| = 10 + 9^2 + 9^3 + \ldots + 9^6 = \sum_{i=0}^{6} 9^i = \frac{9^7 - 1}{9 - 1} = 597\,871.$$

2.5. Цифра 7 может стоять на одной из трех позиций числа; на оставшихся двух позициях могут стоять любые цифры от 0 до 9, исключая цифру 7. Всего, таким образом, имеется

$$3 \cdot 9 \cdot 9 = 243$$

чисел, содержащих единственную цифру 7.

Для ответа на второй вопрос лучше всего использовать подход, обычно называемый “плохой – хороший”:

$$\text{количество хороших объектов} = \text{количество всех объектов} - \text{количество плохих объектов}. \quad (8)$$

Всего имеется 1000 чисел от 0 до 999. Количество чисел, не содержащих 7, равно $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. Следовательно, согласно принципу “плохой – хороший”, имеем

$$|X| = 1000 - 729 = 271.$$

2.6. Разложение числа 720 на простые множители дает

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Следовательно, любое число вида

$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c, \qquad a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \qquad b \in \{0, 1, 2\}, \qquad c \in \{0, 1\}$$

является делителем числа 720. Упорядоченную тройку (a, b, c) можно выбрать $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ способами. Следовательно, количество различных делителей числа 720 равно 30.

2.7. Вершины квадрата могут располагаться на прямой $y = 40$, а также ниже этой прямой. В первом случае имеется 39 таких квадратов, во втором — 39^2 квадратов. Всего имеем $39 \cdot 40 = 1560$ вариантов.

2.8. Для того, чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось и на 5, и на 9. Для того, чтобы число делилось на 5, на последней позиции числа должна стоять либо цифра 5, либо цифра 0. Для того, чтобы число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма всех его цифр делилась на 9. Выберем теперь три из оставшихся четырех позиций произвольно, 9^3 числом способов. При этом, так как числа от 0 до 8 представляют собой все возможные остатки от деления произвольного числа на 9, мы всегда при выбранных цифрах сможем подобрать последнюю цифру так, чтобы результирующее число делилось на 9. В итоге получаем $2 \cdot 9^3 = 1458$ способов расстановки цифр в числе.

2.9. Ровно три различных натуральных делителя имеют квадраты простых чисел p^2 — их делителями являются числа 1, p и p^2. Заметим, что $47^2 = 2209 > 2019$, поэтому достаточно рассмотреть квадраты простых чисел от 2 до 43. Таковых имеется 14 штук.

2.10. По условию, $x = a^k b^m$, причем $\gcd(a,b) = 1$. Далее, $x^2 = a^{2k}b^{2m}$, причем

$$(2k+1)\cdot(2m+1) = 51 = 3\cdot 17.$$

Следовательно,

$$2k+1 = 3, \qquad 2m+1 = 17 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 1, \qquad m = 8.$$

Тогда $x^3 = a^3b^{24}$, то есть максимальное количество делителей числа x^3 равно $4\cdot 25 = 100$.

2.11. Обозначим через d наибольший общий делитель чисел x и y. Тогда $x = a\cdot d$, $y = b\cdot$ $\cdot\, d$, причем a и b — взаимно-простые числа, то есть такие числа, для которых $\gcd(a,b) = 1$. Действительно, если бы $\gcd(a,b) = c > 1$, то $\gcd(x,y) = c\cdot d$, что противоречит тому, что d — наибольший общий делитель x и y.

Далее, обозначим через z произвольное (не обязательно наименьшее) общее кратное чисел x и y. Тогда

$$z = k\cdot x = k\cdot a\cdot d, \qquad z = m\cdot y = m\cdot b\cdot d \qquad \Longrightarrow \qquad k\cdot a = m\cdot b.$$

Отсюда, в частности, следует, что $k\cdot a$ делится на b. Но a и b — взаимно-просты, так что k делится на b, то есть $k = n\cdot b$. Но тогда

$$z = k\cdot x = n\cdot b\cdot x = n\cdot b\cdot a\cdot d.$$

Отсюда видно, что наименьшее общее кратное при заданных a, b и d получается при $n = 1$:

$$\mathrm{lcm}(x,y) = a\cdot b\cdot d = a\cdot b\cdot \gcd(x,y).$$

Возвращаемся к нашей задаче. С учетом вышесказанного мы получаем, что

$$\gcd(x,y) + \mathrm{lcm}(x,y) = \gcd(x,y)\cdot(1 + a\cdot b) = 113,$$

то есть что 113 делится на число $1 + a\cdot b > 1$. Но 113 является простым числом, поэтому

$$1 + a\cdot b = 113 \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad a\cdot b = 112.$$

Иными словами, мы свели задачу к более простой: сколько пар натуральных чисел (a,b) удовлетворяет равенству $a\cdot b = 112$, или, по-другому, сколько у числа 112 имеется различных делителей a. А эту задачу мы уже решать умеем: раскладывая 112 на простые множители, мы получаем

$$112 = 2^4\cdot 7^1.$$

Следовательно, имеется $5\cdot 2 = 10$ делителей числа 112, а значит, 10 пар (x,y), таких, что

$$\gcd(x,y) + \mathrm{lcm}(x,y) = 113.$$

2.12. Для решения данной задачи воспользуемся принципом включения-исключения (7). Пусть X_2, X_3 и X_5 — множества чисел из заданного диапазона, делящихся на двойку, тройку и пятерку. Ясно, что

$$|X_i| = \lfloor |X|/i \rfloor\,,$$

где $|X| = 100$, $\lfloor p \rfloor$ — целая часть числа p. Поэтому $|X_2| = 50$, $|X_3| = 33$, а $|X_5| = 20$. Далее, $X_2\cup X_3$ — это множество чисел, делящихся на шестерку. Следовательно,

$$|X_2\cup X_3| = \lfloor |X|/6 \rfloor = 16.$$

Аналогично,

$$|X_2 \cup X_5| = \lfloor |X|/10 \rfloor = 10, \qquad |X_3 \cup X_5| = \lfloor |X|/15 \rfloor = 6, \qquad |X_2 \cup X_3 \cup X_5| = \lfloor |X|/15 \rfloor = 3,$$

и поэтому

$$|X_2' \cap X_3' \cap X_5'| = 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26.$$

2.13. Действительно, формулу (6) можно переписать следующим образом:

$$|A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|.$$

Учитывая теперь, что

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|, \qquad |A \cap C| = |A| + |C| - |A \cup C|, \qquad |B \cap C| = |B| + |C| - |B \cup C|,$$

мы и получаем требуемое равенство.

2.14. Вычислить количество способов переплёта, в которых данные цвета присутствуют, не очень просто. Однако достаточно легко получить выражения для количества способов переплёта, в которых данный набор цветов, напротив, отсутствует. Например, если мы знаем, что красный цвет нельзя использовать, то способов переплести книги остаётся, по правилу произведения, 2^{12}. Иными словами, в данной задаче удобно воспользоваться принципом включения-исключения.

Пусть X — все способы переплести книги, A, B, C — те способы, при которых не используется красный, синий, коричневый цвет, соответственно. Искомое количество способов переплёта равно $|A' \cap B' \cap C'|$. По формуле включения-исключения, это количество равно

$$|X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| = 3^{12} - 3 \cdot 2^{12} + 3 \cdot 1^{12} - 0 = 519156.$$

2.15. Всего у нас имеется $|X| = 9 \cdot 10^7$ восьмизначных чисел. Заметим, что все числа, содержащие хотя бы один ноль, делятся на любое число, включая 15, так что нам исключать из X нужно лишь числа, не содержащие нулей. Прежде всего, исключим количество $|A|$ чисел, в которых отсутствует цифра 5; таковых у нас имеется $|A| = 8^8$ штук. Далее, нам нужно исключить все числа, не содержащие 3, 6 или 9, то есть числа, состоящие из цифр $1, 2, 4, 5, 7, 8$. Таковых у нас $|B| = 6^8$ штук. Однако при этом мы удалили все числа, состоящие из цифр $1, 2, 4, 5, 8$, дважды; следовательно, нам нужно добавить $|A \cap B| = 5^8$ чисел. Окончательно получаем, что искомое количество чисел равно

$$|X| - |A| - |B| + |A \cap B| = 9 \cdot 10^7 - 8^8 - 6^8 + 5^8 = 71\,933\,793.$$

2.16. Первое поле можно выбрать 64 способами, а второе — 49. По правилу произведения, общее количество способов равно $64 \cdot 49$, однако для получения окончательного ответа это число нужно разделить на два, так как каждая пара полей была посчитана два раза. Поэтому окончательно количество способов равно $32 \cdot 49 = 1568$.

3 Подсчет k-сочетаний из n элементов. Биномиальные коэффициенты.

3.1. Основная задача данного параграфа состоит в подсчете количества всех k-сочетаний из n элементов. Начнем мы с подсчета количества k-сочетаний из n элементов без повторений.

3.1.1. Число k-сочетаний без повторений известно в литературе под названием биномиальных коэффициентов. Ранее в советской литературе такие числа обозначались через C_n^k. В настоящее время для этих коэффициентов используется обозначение $\binom{n}{k}$ (читается "из n по k").

3.1.2. Обычно на вопрос, чему равны биномиальные коэффициенты, вспоминают формулу

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Эта формула не очень удачна с двух точек зрения — с вычислительной и с идейной. С вычислительной точки зрения ее затруднительно использовать для достаточно больших значений n и k. Например, при $n = 38$ и $k = 19$ числитель и знаменатель могут просто не уместиться в диапазон изменения целых чисел для того или иного языка программирования. С идейной же точки зрения эта формула неудобна потому, что она не позволяет обобщить понятие биномиальных коэффициентов на случай целых, вещественных или комплексных значений n. В следующем параграфе мы получим более удобное выражение для этих коэффициентов, допускающее такое обобщение. Здесь же мы с помощью правила суммы выведем рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов, позволяющее эти биномиальные коэффициенты эффективно вычислять для достаточно больших значений n и k.

3.1.3. Для получения рекуррентного соотношения введем множество Σ_k всех k-элементных подмножеств n-элементного множества X. Например, для $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ множество $\Sigma_2 = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\}$. Заметим, что биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ как раз и описывает мощность такого множества. Разобьем теперь множество Σ_k на два блока — блок $\Sigma_k^{(1)}$, k-элементные подмножества которого содержат элемент x_1, и блок $\Sigma_k^{(2)}$, подмножества которого этот элемент не содержат. Понятно, что это — непустые, непересекающиеся подмножества, объединение которых дает нам все множество Σ_k. Поэтому по правилу суммы мы получаем равенство вида

$$\binom{n}{k} = |\Sigma_k| = |\Sigma_k^{(1)}| + |\Sigma_k^{(2)}|.$$

Осталось выразить через биномиальные коэффициенты количество элементов в каждом из блоков $\Sigma_k^{(1)}$, $\Sigma_k^{(2)}$. А это делается довольно легко.

3.1.4. Действительно, во всех подмножествах первого блока элемент x_1 уже выбран, и нам из оставшегося $(n-1)$-элементного множества $X \setminus x_1$ остается выбрать $(k-1)$-элементные подмножества . Сделать это можно $\binom{n-1}{k-1}$ способами. Во втором блоке содержатся k-элементные подмножества множества $X \setminus x_1$, состоящего из $(n-1)$-го элемента. Их количество, очевидно, равно $\binom{n-1}{k}$. Таким образом окончательно имеем следующее рекуррентное соотношение:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad k \geqslant 1, \quad n \geqslant 1. \tag{9}$$

3.1.5. Соотношение (9) следует дополнить начальными и граничными условиями. Так как k-элементных подмножеств n-элементного множества в случае $k > n$ не существует, то

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{при} \quad k > n.$$

Далее, пустое подмножество можно выбрать всегда и только одним способом; поэтому

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \forall\ n \geqslant 0.$$

Используя эти условия, можно шаг за шагом вычислить коэффициенты $\binom{n}{k}$. Часто их записывают в виде так называемого треугольника Паскаля:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}
$$

3.1.6. Как видно, треугольник Паскаля симметричен, т.е. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Комбинаторное доказательство этого факта очевидно. Действительно, выбирая любое k-элементное множество, мы тем самым однозначно выбираем и дополнение к нему, т.е. $(n-k)$-элементное множество. Следовательно, количество k-элементных и $(n-k)$-элементных подмножеств совпадает.

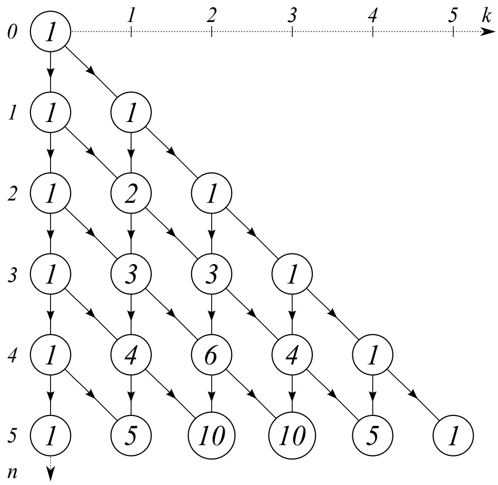


Рис. 5: Графическое представление чисел $\binom{n}{k}$ на координатной плоскости (n, k)

3.2. Наряду с треугольником Паскаля биномиальные коэффициенты допускают и еще одно очень удобное графическое представление — представление на координатной плоскости (n, k)

3.2.1. Данное представление связано со следующей довольно интересной комбинаторной задачей. Рассмотрим плоскость (n, k) и нарисуем на этой плоскости пути, исходящие из начала координат, приходящие в точку с координатами (n, k), $n \geqslant 0$, $k = 0, \dots, n$, и состоящие из диагональных и вертикальных отрезков (рис.5). В самих точках (n, k) отметим количество таких путей, приходящих в эту точку из начала координат. Заметим теперь, что попасть в точку с координатами (n, k) мы можем, пройдя только лишь через точку с координатами $(n-1, k)$ или через точку с координатами $(n-1, k-1)$. С комбинаторной точки зрения это означает, что количество путей $\binom{n}{k}$, приходящих в точку с координатами (n, k), равняется количеству $\binom{n-1}{k}$ путей, приходящих в точку с координатами $(n-1, k)$, плюс количество путей $\binom{n-1}{k-1}$, приходящих в точку с координатами $(n-1, k-1)$. Но равенство

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

есть основное тождество для биномиальных коэффициентов (9). А это означает, что мы получили новую комбинаторную интерпретацию таких коэффициентов. Именно, числа $\binom{n}{k}$ описывают количество путей, состоящих из диагональных $(1, 1)$ и вертикальных $(1, 0)$ отрезков, выходящих из начала координат — точки $(0, 0)$, и оканчивающихся в точке с координатами (n, k).

3.2.2. Графическое представление чисел $\binom{n}{k}$ на плоскости (n, k) очень удобно для получения разного рода тождеств с биномиальными коэффициентами. В качестве первого примера зафиксируем какое-то конкретное значение параметра k и просуммируем биномиальные коэффициенты $\binom{m}{k}$ по m от k до некоторого фиксированного значения n. Например, выберем $k = 1$, $n = 4$. Складывая числа $1, 2, 3, 4$, мы получим число 10, то есть биномиальный коэффициент, стоящий правее и ниже рассмотренной цепочки биномиальных коэффициентов. Есть подозрение, что данный факт, а именно, равенство вида

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{10}$$

выполняется для любых значений параметров n и k.

3.2.3. Для формального доказательства тождества

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \underbrace{\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \ldots + \binom{k-1}{k}}_{=0} + \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1},$$

называемого формулой суммирования биномиальных коэффициентов по верхнему индексу, применим рекуррентное соотношение (9) к коэффициенту $\binom{m+1}{k+1}$:

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}.$$

Просуммируем теперь полученное равенство по m от k до n:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} &= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{m=k}^{n-1} \binom{m+1}{k+1} - \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k+1} = \\
&= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{m=k}^{n-1} \binom{m+1}{k+1} - \sum_{m=k+1}^{n} \binom{m}{k+1} = \\
&= \binom{n+1}{k+1} + \sum_{m'=k+1}^{n} \binom{m'}{k+1} - \sum_{m=k+1}^{n} \binom{m}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

3.2.4. Комбинаторное доказательство тождества (10) основано на следующем общем подходе: мы разбиваем множество Σ_{k+1} всех $(k+1)$-элементных подмножеств $(n+1)$-элементного множества X на блоки, подсчитываем количество элементов в каждом блоке, а затем пользуемся правилом суммы для подсчета числа $|\Sigma_{k+1}| = \binom{n+1}{k+1}$.

Для реализации этого подхода возьмем $(n+1)$-элементное множество

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}$$

и будем разбивать множество всех $(k+1)$-элементных подмножеств множества X следующим образом. В первый блок поместим все $(k+1)$-элементные подмножества, содержащие элемент

x_{n+1}. Такие подмножества элемент x_{n+1} гарантированно содержат. Нам из оставшихся элементов $x_1, \ldots, x_n$ множества $X \setminus x_{n+1}$ нужно выбрать недостающие k элементов. По определению биномиального коэффициента, сделать мы это можем $\binom{n}{k}$ способами.

Теперь мы рассмотрим все $(k+1)$-элементные подмножества, которые не содержат элемент x_{n+1}, но обязательно содержат элемент x_n. Для того, чтобы любое такое подмножество сформировать, нам нужно из множества элементов $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ выбрать недостающие k элементов. Это можно сделать $\binom{n-1}{k}$ количеством способов.

Затем рассмотрим все $(k+1)$-элементные подмножества, которые содержат в обязательном порядке элемент x_{n-1} и не содержат элементов x_{n+1} и x_n. Эти подмножества получаются выбором недостающих k элементов из множества элементов $\{x_1, \ldots, x_{n-2}\}$, и выбрать такие подмножества можно $\binom{n-2}{k}$ способами.

Продолжая далее, мы дойдем когда-то до ситуации, в которой нам нужно выбрать все $(k+$ $+\,1)$-элементные подмножества, которые содержат элемент x_{k+1} и не содержат элементы со старшими индексами. Так как элемент x_{k+1} у нас уже выбран, то нам остается из множества $\{x_1, \ldots, x_k\}$ выбрать k-элементное подмножество. Сделать мы это можем, очевидно, $\binom{k}{k} = 1$ способом.

Складывая теперь количество элементов в каждом блоке, мы и получаем тождество (10).

Пример 3.1. Пусть $n = 4$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $k = 2$, $k + 1 = 3$. Приведем список всех трехэлементных подмножеств этого множества:

$$\{x_1, x_2, x_3\}, \qquad \{x_1, x_2, x_4\}, \qquad \{x_1, x_2, x_5\}, \qquad \{x_1, x_3, x_4\}, \qquad \{x_1, x_3, x_5\},$$

$$\{x_1, x_4, x_5\}, \qquad \{x_2, x_3, x_4\}, \qquad \{x_2, x_3, x_5\}, \qquad \{x_2, x_4, x_5\}, \qquad \{x_3, x_4, x_5\}.$$

В первый блок разбиения этого множества подмножеств включим подмножества, содержащие элемент x_5; таковых имеется $\binom{4}{2} = 6$ штук. Из *оставшегося* списка выберем все подмножества, содержащие x_4; их $\binom{3}{2} = 3$ штуки. Наконец, у нас остается единственное подмножество элементов, не содержащих ни x_4, ни x_5, т.е. подмножество $\{x_1, x_2, x_3, \}$.

3.2.5. В заключение данного пункта докажем комбинаторно еще одно важное тождество для биномиальных коэффициентов — так называемое тождество Вандермонта

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}. \tag{11}$$

Рассмотрим для этого группу, состоящую из n мужчин и m женщин. По определению, количество способов выбрать из нее команду, состоящую из k человек, равно биномиальному коэффициенту $\binom{n+m}{k}$. С другой стороны, мы можем выбирать эту команду так, чтобы в ней было ровно i мужчин и $(k-i)$ женщин. При фиксированном i количество способов подбора такой команды, согласно правилу произведения, равно $\binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}$. Меняя теперь i от нуля до k, мы вновь получим общее количество способов образовать требуемую команду.

Замечание 3.2. Приведенные выше рассуждения очень часто используются в комбинаторике. Они даже имеют специальное название — *принцип double counting* или правило подсчета двумя способами. Основная идея такого рода рассуждений состоит в следующем: если две формулы подсчитывают количество одних и тех же элементов, то эти формулы равны.

3.3. Название “биномиальные коэффициенты” связано с тем, что они, помимо всего прочего, встречаются в формуле бинома Ньютона

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}. \tag{12}$$

3.3.1. Комбинаторное доказательство этой формулы довольно элементарно: нужно просто расписать $(x+y)^n$ в виде произведения n сомножителей

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)}_{1} \cdot \underbrace{(x+y)}_{2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x+y)}_{n}$$

и пометить каждый из таких сомножителей числом в диапазоне от единицы до n. В результате мы имеем множество X, состоящее из n *различных* экземпляров сомножителей вида $(x+y)$.

После перемножения этих n скобок получается определенный набор слагаемых вида $x^k y^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Для подсчета количества этих слагаемых при фиксированном значении параметра k заметим, что любое слагаемое $x^k y^{n-k}$ можно получить так: выбрать в n-элементном множестве X k-элементное подмножество, взять в этом подмножестве в качестве сомножителей переменные x, а в оставшемся $(n-k)$-элементном подмножестве выбрать в качестве сомножителей переменные y. Как следствие, количество слагаемых $x^k y^{n-k}$ совпадает с количеством способов выбрать k-элементное подмножество n-элементного множества X и равно $\binom{n}{k}$.

3.3.2. Формула (12) оказывается чрезвычайно полезной для вывода разного рода соотношений, связанных с биномиальными коэффициентами. Например, полагая в ней $x = y = 1$, получаем тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{13}$$

Заметим теперь, что, суммируя биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$ по k, мы подсчитываем *все* подмножества n-элементного множества. Иными словами, мы формально доказали тот факт, что количество всех подмножеств данного n-множества равно 2^n.

3.3.3. Для комбинаторного доказательства равенства (13) воспользуемся чрезвычайно полезным и часто использующимся в комбинаторике *принципом биекции.* Формально этот принцип можно сформулировать следующим образом: пусть X, Y — пара конечных множеств, и пусть существует биекция $f\colon X \to Y$, т.е. такое отображение, что

$$\forall\, y \in Y \qquad \exists!\, x \in X : \qquad y = f(x).$$

Тогда количество элементов в множествах X и Y совпадают: $|X| = |Y| = n$.

Неформально использование принципа биекции можно проиллюстрировать на следующем примере. Предположим, что вы устраиваете вечеринку и приглашаете на нее довольно много друзей. Как гостеприимный хозяин, вы встречаете всех своих друзей на входе в дом, но запоминаете только пришедших к вам девушек. В какой-то момент вы решаете подсчитать, сколько парней пришло к вам на вечеринку. Вы знаете количество пришедших к вам девушек, и вам кажется, что количество девушек и парней одинаково. Как вам быстро проверить это предположение? Ответ достаточно очевиден: попросить каждую девушку взять ровно одного парня за руку. Если в результате этой процедуры все множество гостей разбилось на пары, то ваше предположение окажется верным. Тем самым вы сильно упростили себе жизнь — вам не пришлось проделывать довольно утомительную работу по пересчету пришедших к вам парней, вы просто воспользовались для их подсчета результатом уже проделанной работы по пересчету пришедших к вам девушек.

Вернемся теперь к равенству (13). Заметим, что любое подмножество A множества X мы можем закодировать бинарной строкой $f(A)$ длины n, то есть строкой над алфавитом $\{0,1\}$. Единице на i-м месте строки будет при этом отвечать ситуация, при которой $x_i \in A$, а нулю — вариант, при котором $x_i \notin A$. Так, если множество X имеет вид $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а подмножество A записывается в виде $A = \{x_2, x_4\}$, то соответствующая этому подмножеству строка длины 4 равна

$$f(A) = (0,1,0,1).$$

Очевидно, что построенное отображение f взаимно-однозначно. Следовательно, количество подмножеств данного n-множества X совпадает с количеством бинарных строк длины n. А таких строк у нас имеется ровно 2^n штук — действительно, на любое из n мест мы двумя способами можем поставить либо ноль, либо единицу.

3.3.4. Полагая в (12) $x = -1$, $y = 1$, мы получаем еще одно важное тождество

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \qquad n > 0. \tag{14}$$

Для того, чтобы понять комбинаторный смысл равенства (14), перепишем его в следующем виде:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots$$

В левой части последнего равенства стоит количество всех подмножеств, в которых содержится четное количество элементов, а в правой — число подмножеств, содержащих нечетное количество элементов. Иными словами, следствием равенства (14) является тот факт, что количество четных подмножеств любого множества, отличного от $\varnothing$, равняется количеству его нечетных подмножеств.

Наконец, из (14) мы также можем заключить, что количество, например, всех нечетных подмножеств ровно в два раза меньше общего количества всех подмножеств. С учетом (13) это означает, что количество всех нечетных подмножеств равно 2^{n-1}.

3.3.5. Наконец, продифференцируем (12) по x:

$$n\,(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}\, y^{n-k}. \tag{15}$$

Подставляя в это равенство $x = y = 1$, получим еще одно полезное равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}. \tag{16}$$

3.4. Перейдем теперь к задачам, связанным с подсчетом k-сочетаний с повторениями.

3.4.1. Начнем с примера. Пусть множество X состоит из двух чисел 1 и 2. Выпишем все 3-сочетания с повторениями из 2-множества X:

$$\{1,1,1\}, \qquad \{1,1,2\}, \qquad \{1,2,2\}, \qquad \{2,2,2\}.$$

Как видно, таковых оказалось 4 штуки. Для подсчета количества $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ таких мультимножеств в общем случае нам будет удобнее вначале конкретизировать n-множество X, а именно, взять в качестве X множество $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ первых n натуральных чисел. Любое k-мультимножество такого множества можно записать, очевидно, в следующем виде:

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant n.$$

Например, 3-мультимножество $\{1, 1, 2\}$ над 2-множеством $X = \{1, 2\}$ можно записать так:

$$1 \leqslant (a_1 = 1) \leqslant (a_2 = 1) \leqslant (a_3 = 2) \leqslant (n = 2).$$

Теперь превратим в этой цепочке все нестрогие неравенства в строгие. Для этого мы к a_2 прибавим единицу, к a_3 — двойку, к a_4 — тройку, и так далее. К последнему числу a_n мы, таким образом, добавим число $(k - 1)$. В результате получим цепочку строгих неравенств вида

$$1 \leqslant a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < a_4 + 3 < \ldots < a_k + (k-1) \leqslant n + (k-1).$$

В нашем примере

$$1 \leqslant (a_1 = 1) < (a_2 + 1 = 2) < (a_3 + 2 = 4) \leqslant (n + (3-1) = 4).$$

Заметим, что в результате этой операции мы получили некоторое k-элементное подмножество *различных* чисел вида $a_i + (i-1)$ множества $\widetilde{X} = [n+k-1]$ всех чисел от единицы до $n+k-1$. Иными словами, мы сопоставили любому k-мультимножеству над множеством $X = [n]$ вполне определенное k-подмножество множества $\widetilde{X} = [n + k - 1]$. Очевидно, что это сопоставление взаимно-однозначно. Но количество всех k-подмножеств данного множества мы знаем — оно равно $\binom{n+k-1}{k}$. Следовательно, этому числу равно, по принципу биекции, и количество $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ всех k-мультимножеств над множеством $X = [n]$:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Справедливость этого равенства для произвольного n-элементного множества X вновь следует из принципа биекции.

Упражнения

3.1 (1 балл). Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} + k(n-k) = \binom{n}{2} \qquad \forall\ k \leqslant n. \tag{17}$$

3.2 (1,5 балла). Дайте комбинаторное доказательство равенства

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}\binom{n}{m} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

3.3 (1,5 балла). Дайте комбинаторное доказательство тождества

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

3.4 (2 балла). Докажите комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}. \tag{18}$$

3.5 (1 балл). Докажите комбинаторно следующее рекуррентное соотношение для количества k-сочетаний с повторениями:

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right), \qquad n, k = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

$$\left(\!\binom{n}{1}\!\right) = \binom{n}{1} = n; \qquad \left(\!\binom{1}{k}\!\right) = \binom{k}{k} = 1.$$

3.6 (0,5 балла). Просуммируйте выражения

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k} \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^k} \binom{n}{k}.$$

3.7 (1 балл). Дайте комбинаторную интерпретацию равенства (16).

3.8 (1,5 балла). Используя формулу (10) суммирования по верхнему индексу, получите замкнутые выражения для сумм вида

$$\sum_{i=0}^{k} i, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^2, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^3.$$

3.9 (1 балл). Рота состоит из трех офицеров, шести сержантов и шестидесяти рядовых. Сколько существует различных способов сформировать отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и двадцати рядовых?

3.10 (0,5 балла). На одной из сторон треугольника выбираются 10 точек, на второй — 11, на третьей — 12, причем так, что ни одна из этих точек не совпадают с вершинами исходного треугольника. Сколько имеется вариантов построить треугольник на выбранных точках?

3.11 (1,5 балла). Сколько существует бинарных (т.е. состоящих из цифр 0 и 1) строк длины n, содержащих k единиц? А бинарных строк длины n, содержащих k единиц и таких, в которых никакие две единицы не стоят рядом?

3.12 (1 балл). Сколько существует треугольников, у которых длина каждой стороны принимает одно из значений 4, 5, 6, 7?

3.13 (1,5 балла). Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?

Дополнительные упражнения

3.14 (1,5 балла)**.** Докажите, используя комбинаторные рассуждения, что для всех целых $n \geqslant m \geqslant k \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}.$$

С его помощью докажите справедливость равенства

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}.$$

3.15 (1,5 балла)**.** Докажите комбинаторно, что для любых натуральных n, p и q, таких, что $p \leqslant n$ и $q \leqslant n$, имеет место следующее равенство:

$$\binom{n}{p}\binom{n}{q} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}\binom{n-p}{q-k}.$$

3.16 (1,5 балла)**.** Докажите равенство

$$n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^k} \binom{n+1}{k+1}.$$

3.17 (1,5 балла)**.** Докажите равенство

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}.$$

3.18 (1,5 балла)**.** С помощью правила суммы докажите тождество

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (n-i) = \binom{n+1}{3}.$$

3.19 (2 балла)**.** Докажите комбинаторно следующее тождество:

$$\left(\!\binom{n+1}{k}\!\right) = \sum_{i=0}^{k} \left(\!\binom{n}{k-i}\!\right).$$

С его помощью докажите справедливость равенства

$$\binom{n+k}{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+k-i-1}{n}.$$

3.20 (2 балла)**.** Докажите обобщенное правило суммы для произвольного количества n множеств:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|. \tag{20}$$

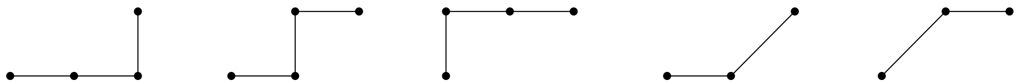


Рис. 6: Пути Деланноя для $m = 2$, $n = 1$.

3.21 (1,5 балла)**.** На доску размерами 9×9 поставили 15 одинаковых шашек. Сколько существует вариантов расстановки 15 одинаковых шашек на доске размерами 9×9? А сколько из них не являются центрально-симметричными (центрально-симметричная конфигурация — такая, при которой для любой шашки, стоящей в клетке с координатами (i, j), соответствует шашка, расположенная симметрично относительно центральной клетке доски)?

3.22 (1,5 балла)**.** Рассмотрим решетку $m \times n$ на плоскости $\mathbb{Z}^2$. Путем Деланноя называется путь, соединяющий точку $(0, 0)$ с точкой (m, n) и состоящий из вертикальных, горизонтальных и диагональных отрезков. Количество $D_{m,n}$ таких путей называется числами Деланноя. На рис.6 показаны $D_{2,1} = 5$ путей, отвечающих значениям параметров $m = 2$, $n = 1$. Докажите, что в общем случае количество $D_{m,n}$ всех таких путей для заданных m и n рассчитывается по формуле

$$D_{m,n} = \sum_k \binom{m}{k} \cdot \binom{m+n-k}{m}.$$

3.23 (1,5 балла)**.** Подсчитайте количество четверок вершин правильного 16-угольника, являющихся вершинами выпуклого четырехугольника, у которого имеется хотя бы одна пара параллельных вершин.

3.24 (2 балла)**.** В классическом домино используются кости, разделенные на две части, каждая из которых содержит от нуля до шести точек. Сколько костей существует в обобщенном домино, в котором любая из частей содержит от нуля до n точек? Сколько существует пар таких костей? Сколькими способами из костей обобщенного домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

3.25 (2 балла)**.** В игре нарды 15 белых и 15 черных шашек стоят на 24 полях так, что каждое поле либо пустое, либо занято несколькими белыми шашками, либо занято несколькими черными шашками. Сколькими способами можно так расставить шашки на доске?

3.26 (2 балла)**.** Докажите, что $(1 + x)^n + (1 - x)^n \leqslant 2^n$ при $n \geqslant 1$ и $|x| \leqslant 1$.

Решение упражнений

3.1. В правой части равенства стоит число, равное количеству двуэлементных подмножеств n-элементного множества. Левая часть равенства подсчитывает то же самое количество другим способом. Именно, мы разбиваем n-элементное множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ на два блока $X_1 := \{x_1, \ldots, x_k\}$ и $X_2 := \{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$. Затем мы либо выбираем двуэлементное подмножество в X_1, либо в X_2, либо выбираем k способами элемент первого подмножества и $n - k$ — второго.

3.2. Воспользуемся принципом double counting. В правой части равенства мы подсчитываем количество способов проделать следующие комбинаторные действия: выбрать $\binom{n}{k}$ способами k-элементное подмножество n-элементного множества X, а затем в оставшемся $(n-k)$-элементном множестве выбрать подмножество произвольного размера. Левая часть доказываемого равенства подсчитывает то же количество, но другим способом. Именно, мы фиксируем произвольное m, $m \in [k, n]$, затем $\binom{n}{m}$ количеством способов выбираем в X m-элементное подмножество Y, а затем $\binom{m}{k}$ способами выбираем в нем k-элементное подмножество. Одновременно с этим мы выбираем в X и некоторое подмножество размера $m - k$. Перебирая все m из диапазона $[k, n]$, мы перебираем все подмножества $(n - k)$-элементного множества вместе с выбором подмножества размера k множества X.

3.3. Рассмотрим множество мощности $2n$, состоящее из чисел $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$. Правая часть доказываемого равенства подсчитывает все подмножества мощности n этого множества. Левая часть подсчитывает то же самое количество, но следующим образом: вначале фиксируется произвольное k, $0 \leqslant k \leqslant n$, затем $\binom{n}{k}$ способами выбирается k положительных чисел, и одновременно с этим $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ выбирается $n - k$ отрицательных чисел.

3.4. Для доказательства этой формулы разобъем все множество n-элементных подмножеств $(n + m + 1)$-элементного множества на блоки следующим образом. В первый блок включим подмножества, не содержащие элемент x_1. Количество таких подмножеств, очевидно, равно $\binom{n+m}{n}$. Во второй блок включим подмножества, содержащие x_1, но не содержащие x_2. Таковых имеется $\binom{n+m-1}{n-1}$ штук. В третий — подмножества, содержащие x_1 и x_2, но не содержащие x_3, и так далее. Наконец, в последний, $(n + 1)$-й блок, мы включим подмножество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Складывая количество элементов в каждом блоке, мы и получим формулу суммирования по диагонали (18).

3.5. Как и при комбинаторном доказательстве рекуррентного соотношения для биномиальных коэффициентов, разобъем все k-мультимножества над множеством X на два блока. В первый блок включим мультимножества, содержащие элемент $x_1 \in X$, а во второй — не содержащие x_1. Количество элементов в первом блоке равно, очевидно, $\left(\!\binom{n}{k-1}\!\right)$: нам из n-элементного множества X осталось выбрать $(k - 1)$ элемент. Мультимножества, принадлежащие второму блоку, содержат k элементов, которые следует выбирать из $(n - 1)$-элементного множества $X \setminus x_1$. Следовательно, их $\left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)$ штук.

3.6. Полагая в (12) $x = 4$, $y = -1$, получаем, что первая сумма равна 3^n. Для вычисления второй суммы достаточно в (15) подставить $y = 1$, $x = 1/n$ и получить, что эта сумма равна $(1 + 1/n)^{n-1}$.

3.7. Для доказательства (16) используем принцип double counting. Именно, подсчитаем количество способов выбора из n-элементного множества людей комитета, состоящего из k членов, а затем назначения председателя этого комитета. Левая часть (16) описывает следующий вариант развития событий: вначале для любого k выбираем $\binom{n}{k}$ способами комитет, состоящий из k членов, а затем k способами назначаем в нем председателя. Правая часть отвечает ситуации, при которой вначале n способами мы выбираем председателя будущего комитета, а затем среди оставшихся $n - 1$ людей мы выбираем других членов этого комитета.

3.8. Полагая в формуле (10) $k = 1$, получаем хорошо известное выражение

$$\sum_{i=0}^{n} i = \binom{n+1}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

для суммы арифметической прогрессии.

Рассмотрим теперь формулу (10) при $k = 2$:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i \cdot (i-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} (i^2 - i) = \binom{n+1}{3}.$$

С учетом формулы для суммы арифметической прогрессии получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 2 \cdot \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Наконец, положим в формуле (10) $k = 3$:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i \cdot (i-1) \cdot (i-2)}{6} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{n} (i^3 - 3i^2 + 2i) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{n} (i^3 - 3i(i-1) - i) = \binom{n+1}{4}.$$

Отсюда с учетом уже найденных выше формул имеем

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 6 \cdot \binom{n+1}{4} + 6 \cdot \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

3.9. Мы можем независимо выбрать $\binom{3}{1}$ офицеров, $\binom{6}{2}$ сержантов и $\binom{60}{20}$ рядовых в формируемый отряд. Следовательно, общее количество способов сформировать данный отряд равно

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{60}{20}.$$

3.10. Всего имеется $\binom{33}{3} = 5456$ способов выбрать три из отмеченных 33 точек. Треугольники образуются во всех случаях, кроме тех, для которых все три точки лежат на одной из сторон исходного треугольника. Таких троек имеется $\binom{10}{3} + \binom{11}{3} + \binom{12}{3} = 505$ штук. Всего, таким образом, получаем $5456 - 505 = 4951$ возможных способов.

3.11. Любая бинарная строка длины n задает нам некоторое подмножество множества X мощности $|X| = n$ с помощью следующего алгоритма: если на i-м месте строки у нас стоит единица, мы добавляем элемент x_i в подмножество, а если там стоит ноль, то элемент x_i в подмножество не добавляем. Ясно, что такой алгоритм задает биекцию между множеством всех бинарных строк длины n и множеством всех подмножеств n-множества X. Поэтому количество бинарных строк, содержащих k единиц, совпадает с количеством всех k-элементных подмножеств множества X и равно $\binom{n}{k}$.

Для ответа на второй вопрос рассмотрим произвольную строку из нулей и единиц требуемого вида, и после каждой из первых $(k-1)$-й единиц удалим стоящий справа от единицы ноль. В результате мы получим обычную строку из нулей и единиц длины $n - k + 1$. Количество таких строк равно $\binom{n-k+1}{k}$.

3.12. Количество таких треугольников совпадает с количеством 3-мультимножеств над 4-элементным множеством и равно $\left(\!\binom{4}{3}\!\right) = \binom{6}{3} = 20$.

3.13. Для решения данной задачи вновь удобно воспользоваться принципом “плохой-хороший” (8), заметив, что достаточно просто сосчитать количество шестизначных чисел, сумма цифр в которых больше или равна 48. Действительно, простейшее шестизначное число, сумма цифр в котором равна 48, есть число 888888. Оно получается из числа 999999 вычитанием из каждого разряда по единице. Теперь несложно понять, что и любое другое число, сумма цифр в котором равна 48, получается вычитанием шести единиц из любых разрядов числа 999999. Любое же число, сумма цифр в котором больше 48, получается вычитанием пяти или менее единиц из любых разрядов числа 999999. Количество способов вычесть i единиц из числа 999999 равно, очевидно, $\left(\!\binom{6}{i}\!\right)$. Общее количество шестизначных чисел равно $9 \cdot 10^5$. Следовательно, количество чисел, сумма цифр в котором строго меньше 48, равно

$$9 \cdot 10^5 - \sum_{i=0}^{6} \left(\!\!\binom{6}{i}\!\!\right) = 9 \cdot 10^5 - \sum_{i=0}^{6} \binom{5+i}{i} = 9 \cdot 10^5 - \binom{12}{6}.$$

Последнее равенство получено с использованием формулы (18) суммирования по диагонали.

4 k-перестановки из n элементов. Основные комбинаторные схемы.

4.1. Перейдем теперь к подсчету количества k-перестановок из n элементов.

4.1.1. Напомним, что k-перестановкой из n элементов называется *упорядоченный* набор

$$(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

элементов, в котором все a_i принадлежат одному и тому же n-элементному множеству X.

Элементы a_i в наборе $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ могут как повторяться, так и не повторяться. В первом случае говорят о k-перестановках с повторениями, во втором — о k-перестановках без повторений.

Номер паспорта — это типичный пример k-перестановки с повторениями над множеством из десяти цифр $X = \{0, 1, \dots, 9\}$. Классическим примером 3-перестановки без повторений является упорядоченный список спортсменов, занявших призовые места в любых спортивных соревнованиях.

4.1.2. В литературе встречается довольно много альтернативных названий для данного объекта. Именно, упорядоченный набор $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $a_i \in X$, также иногда называется

- k-размещением из n элементов;
- кортежем из k элементов множества X;
- упорядоченной k-выборкой из n элементов;
- k-мерным вектором над множеством X;
- k-элементным словом над n-элементным алфавитом.

4.1.3. Сосчитаем количество k-перестановок с повторениями.

Утверждение 4.1. *Количество k-перестановок с повторениями из n элементов равно n^k.*

Для доказательства можно либо просто сослаться на правило произведения, либо рассмотреть $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $a_i \in X$ как слово из k элементов над алфавитом из $n = |X|$ букв. На первое место в слове мы можем поставить любую из n букв, на второе — также любую из n букв и так далее. Всего же получаем n^k вариантов записать данное слово.

4.1.4. Перейдем теперь к подсчету количества перестановок без повторений.

Утверждение 4.2. *Количество $P(n,k)$ k-перестановок из n элементов без повторений равно*

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =: (n)_k.$$

Доказательство очевидно — на первое место в строке длины k я могу поставить любой из n элементов, на второе — любой из оставшихся $(n-1)$ элементов и так далее.

4.1.5. В частном случае $k = n$ k-перестановки из n элементов без повторений называются просто перестановками n-элементного множества X. Их количество равно

$$P_n \equiv P(n) = n!, \qquad P(0) = 0! = 1.$$

4.1.6. Любую k-перестановку из n элементов без повторений можно рассматривать и как упорядоченное k-подмножество n-множества. Количество таких подмножеств мы можем сосчитать следующим образом: мы можем $\binom{n}{k}$ способами выбрать k-подмножество n-элементного множества, а затем $k!$ способами его упорядочить. Действительно, на первое место мы можем поставить любой из k элементов подмножества, на второе — любой из оставшихся $k-1$ элементов и так далее. Таким образом, мы получаем некоторое новое выражение для количества всех упорядоченных k-элементных подмножеств n-множества, то есть количества k-перестановок из n элементов без повторений, равно

$$(n)_k = k! \cdot \binom{n}{k} \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

Последняя формула часто используется как некомбинаторное определение биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ в случае, когда $k \in \mathbb{Z}$, а n принадлежит $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ или даже $\mathbb{C}$. Именно, по определению,

$$\binom{q}{k} := \begin{cases} \dfrac{q\,(q-1)\,\ldots\,(q-k+1)}{k!} =: \dfrac{(q)_k}{k!}, & \text{если } k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k < 0, \end{cases} \qquad \forall\, q \in \mathbb{C}.$$

Например,

$$\binom{-1}{3} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{3\cdot 2\cdot 1} = -1.$$

4.1.7. Функцию $(q)_k$ часто также обозначают через $q^{\underline{k}}$ и называют *убывающей факториальной степенью* [5]. Наряду с убывающей можно ввести и так называемую *возрастающую факториальную степень*

$$q^{(k)} \equiv q^{\overline{k}} := q \cdot (q+1) \cdot \ldots \cdot (q+k-1).$$

В частности, с ее помощью получается удобное для вычислений выражение для количества $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ сочетаний с повторениями:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{(k)}}{k!}. \tag{21}$$

4.2. Итак, мы получили простые соотношения для подсчета количества четырех основных объектов элементарной комбинаторики — k-сочетаний и k-перестановок из n элементов с повторениями и без повторений. Эти объекты встречаются в огромном количестве внешне не очень похожих друг на друга задач элементарной комбинаторики. Оказывается, однако, что большинство этих задач можно свести к одной из двух простейших схем — либо к так называемой урновой схеме, либо к схеме раскладки предметов по ящикам.

4.2.1. В урновой схеме имеется урна, в которой находятся n *различимых* предметов. Из урны последовательно вытаскивается k предметов. Задача состоит в подсчете количества различных способов выбора этих предметов, или, как еще говорят, в подсчете различных k-элементных выборок из n предметов, находящихся в урне.

На практике наиболее часто встречаются четыре модификации этой задачи, различающиеся способами формирования k-элементной выборки. Прежде всего, мы можем возвращать или не возвращать вытаскиваемые предметы обратно в урну. В первом случае говорят о *выборке с повторениями*, во втором — о *выборке без повторений.* Далее, в некоторых задачах нам важен порядок вытаскиваемых предметов. В этом случае имеем так называемые *упорядоченные* выборки. В противном случае выборки называются *неупорядоченными.*

Нетрудно понять, что задачи о подсчете k-элементных выборок представляют собой, по сути, те же самые задачи о подсчете k-перестановок или k-сочетаний из n элементов. Действительно, любая неупорядоченная k-элементная выборка представляет собой либо k-элементное подмножество n-множества, либо k-мультимножество над n-элементным множеством в зависимости от того, возвращаем мы вытаскиваемые предметы обратно в урну или не возвращаем. Следовательно, количество таких неупорядоченных выборок совпадает с коэффициентами $\binom{n}{k}$ или $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Очевидно также, что любая упорядоченная k-элементная выборка есть просто некоторая k-перестановка n-элементного множества. Поэтому количество таких выборок равно n^k или $(n)_k$ в зависимости от того, говорим ли мы о выборке с повторениями или без повторений.

В результате получаем следующую таблицу решений задач, связанных с урновыми схемами:

Предметы на выходе	с возвращением	без возвращения
упорядоченные	n^k	$(n)_k$
неупорядоченные	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

4.2.2. Приведем несколько характерных примеров, достаточно естественно сводящихся к одной из описанных выше урновых схем.

Пример 4.3. Предположим, что у нас имеется некоторое общество, состоящее из двадцати членов. Сколькими способами можно выбрать президента, вице-президента, секретаря и казначея этого общества?

Решение. Очевидно, что любой способ выбора представляет собой упорядоченное 4-элементное подмножество 20-элементного множества. Следовательно, существует ровно $(20)_4$ различных способов выбора членов общества на эти должности.

Пример 4.4. Для того, чтобы открыть сейф, нужно набрать код из пяти символов с помощью вращающихся дисков. На каждом из этих дисков нанесено 12 символов, одинаковых для каждого из дисков. Сколько вариантов различных кодов существует?

Решение. Любой код представляет собой упорядоченную 5-элементную выборку с повторениями или, иначе, строку из пяти символов над алфавитом из 12 букв. Следовательно, имеется 12^5 вариантов различных кодов.

Пример 4.5. На почте продаются открытки десяти различных видов. Сколькими способами можно купить восемь открыток? А восемь открыток разных видов?

Решение. Понятно, что в первом случае любой набор из восьми открыток представляет собой неупорядоченную выборку с повторениями, а во втором — выборку без повторений из 10 элементов. Следовательно, в первом случае имеем $\left(\!\binom{10}{8}\!\right)$, а во втором — $\binom{10}{8}$ способов покупки восьми открыток.

4.2.3. Второй, не менее популярной в элементарной комбинаторике схемой, связанной с подсчетом количества k-перестановок и k-сочетаний, является схема раскладки предметов по ящикам. В этой схеме имеется *n различимых* ящиков, по которым нужно разложить *k различимых* или *неразличимых* предметов. При этом мы можем накладывать определенные ограничения на количество предметов в каждом ящике.

Рассмотрим, к примеру, задачу о подсчете количества способов раскладки k различимых предметов по n различимым ящикам при условии, что в любой ящик можно класть любое количество предметов. Количество способов совершить эти действия равно, очевидно, n^k. Действительно, любой предмет мы можем положить в любой из n ящиков вне зависимости от того, куда мы положили оставшиеся предметы. Поэтому, согласно правилу произведения, это количество равно n^k. Иными словами, данная задача представляет собой переформулировку задачи о подсчете количества k-перестановок из n элементов с повторениями.

Теперь предположим, что в той же схеме мы не имеем права класть более одного предмета в один ящик. Тогда первый предмет мы можем поместить в любой из n ящиков, второй — в любой из оставшихся свободными $(n-1)$ ящиков и так далее. Всего же получаем $(n)_k$ способов раскладки. Следовательно, данная схема соответствует подсчету k-перестановок без повторений.

4.2.4. Пусть теперь у нас имеются n различимых ящиков и k неразличимых предметов. Тогда подсчет количества различных способов раскладки этих предметов по ящикам сводится к задаче о подсчете количества k-сочетаний из n элементов.

Действительно, в данной схеме в качестве n-элементного множества выступает множество, состоящее из n различимых ящиков. В случае, когда в каждый ящик можно класть не более одного предмета, мы, раскладывая предметы по ящикам, выделяем в этом множестве некоторое k-элементное подмножество. Следовательно, количество таких раскладок совпадает с количеством различных k-элементных подмножеств n-множества и равно $\binom{n}{k}$.

В случае же, когда никаких ограничений на количество предметов в ящике не накладывается, мы, раскладывая по ящикам k неразличимых предметов, задаем тем самым некоторое k-мультимножество n-множества X. Поэтому количество различных способов такой раскладки равно количеству $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ k-сочетаний из n элементов с повторениями.

Подводя итоги, построим таблицу рассмотренных схем раскладок k предметов по n ящикам:

Предметы	Ящики	Произвольное количество предметов в ящике	Не более одного предмета в ящике
различимые	различимые	n^k	$(n)_k$
неразличимые	различимые	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

4.2.5. Проиллюстрируем некоторые характерные примеры задач, которые довольно естественно сводятся к схеме схем раскладки предметов по ящикам.

Пример 4.6. Сколькими способами можно разложить по двум *различимым* карманам (например, левому и правому) девять монет *различного* достоинства?

Решение. Рассматриваемый пример является типичной задачей, которая естественным образом сводится к схеме раскладки предметов по ящикам. Действительно, в роли ящиков здесь выступают левый и правый карман, а в роли предметов — девять различных монет. Поэтому ответ в этой задаче — 2^9 способов.

Замечание 4.7. Рассмотренная задача, однако, не всегда решается верно: в качестве ответа иногда выдают 9^2 способов. Путаница, как правило, происходит потому, что эту задачу пытаются свести к урновой схеме, считая, что имеются урна, в которой расположены 9 различных предметов, а также 2 различимые позиции на выходе.

Для того, чтобы этой путаницы избежать, полезно сформулировать следующие основные отличия схемы раскладки по ящикам от соответствующей ей урновой схемы. Во-первых, в схеме раскладки предметов по ящикам предметы обратно не возвращаются, они остаются в ящике. Во-вторых, в этой схеме в любой ящик можно класть любое количество предметов. В аналогичной урновой схеме на любую позицию помещается ровно один предмет.

Приведем теперь два характерных примера, связанных с раскладкой неразличимых предметов по различимым ящикам.

Пример 4.8. У отца имеется 5 (неразличимых) апельсинов, которые он может раздать восьми своим сыновьям. Если его задача состоит в том, чтобы раздать их максимальному количеству сыновей, то он должен поставить дополнительное условие — любой из его сыновей не должен получить более одного апельсина. В этом случае количество способов, которыми он может раздать своим сыновьям эти пять апельсинов, равно, очевидно, $\binom{8}{5}$. Если же он раздает их по каким-то заслугам, и может, таким образом, любому сыну отдать любое количество апельсинов, то количество способов это сделать равно $\left(\!\binom{8}{5}\!\right) = \binom{12}{5}$.

Пример 4.9. В физике встречаются задачи, в которых имеются n различных уровней энергии и k неразличимых элементарных частиц. Если эти частицы — фермионы, то для них действует так называемый принцип запрета Паули, согласно которому на любом энергетическом уровне может находиться не более одной элементарной частицы. Как следствие, количество различных распределений k фермионов по n энергетическим уровням равно $\binom{n}{k}$. Наряду с фермионами существуют и частицы иного сорта — бозоны, для которых не существует ограничений на количество частиц, занимающих один и тот же уровень энергии. Для бозонов количество таких распределений равно, очевидно, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

4.2.6. К задачам раскладки неразличимых предметов по различимым ящикам, связанным с подсчетом количества k-сочетаний, сводятся также задачи о так называемом *разбиении* натурального числа k на n слагаемых. Данная задача формулируется следующим образом: сколькими способами можно представить натуральное число k в виде суммы n слагаемых вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$$

при условии, что порядок слагаемых важен, то есть при условии, что разбиения вида

$$1 + 3 + 3 + 3 = 10 \qquad \text{и} \qquad 3 + 1 + 3 + 3 = 10$$

считаются различными?

Если на числа a_i накладывается единственное условие вида $a_i \geqslant 0$, то количество разбиений равно количеству $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ k-мультимножеств над n-элементным множеством. Действительно, в упорядоченной сумме $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ любой индекс i слагаемого a_i можно рассматривать как i-й ящик, в который мы складываем a_i единиц. Следовательно, эту задачу можно трактовать как задачу о раскладке k "неразличимых" единиц по n различимым ящикам.

Пример 4.10. Подсчитать количество разбиений числа $k = 4$ на два слагаемых:

$$a_1 + a_2 = 4, \qquad a_1, a_2 \geqslant 0.$$

Ответ: $\left(\!\binom{2}{4}\!\right) = \binom{5}{4} = 5$ разбиений: $0 + 4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4 + 0 = 4$.

К подсчету числа k-сочетаний из n элементов без повторений задача о разбиении числа k сводится в случае, когда на числа a_i накладываются следующие условия:

$$a_i = 0 \qquad \text{или} \qquad a_i = 1.$$

В этом случае индекс i также можно трактовать как i-й ящик; его можно выбрать (положив $a_i = 1$) или не выбрать (положив $a_i = 0$). Всего же нужно выбрать k таких ящиков. Это можно сделать $\binom{n}{k}$ способами.

Пример 4.11. Подсчитать количество разбиений числа 2 на три слагаемых при условии, что любое слагаемое может принимать значения 0 или 1.

Ответ: $\binom{3}{2} = 3$ разбиения: $1 + 1 + 0 = 1 + 0 + 1 = 0 + 1 + 1 = 2$.

4.2.7. Достаточно часто на практике встречаются ситуации, когда одну и ту же задачу можно свести и к урновой схеме, и к схеме раскладки предметов по ящикам.

Пример 4.12. В кондитерском магазине продаются пирожные трех разных видов. Сколькими различными способами можно купить семь пирожных?

Решение. Ответ в этой задаче, очевидно, равен $\left(\!\binom{3}{7}\!\right) = \binom{9}{7}$. Этот ответ можно, например, получить, представляя себе коробку с тремя отделениями, в каждое из которых кладется пирожное только одного вида; в этом случае мы сводим задачу к подсчету количества раскладок семи неразличимых предметов по трем различимым ящикам. Другой способ получить тот же ответ — это представлять себе урну, в которой находятся три разных пирожных, и считать количество способов выбора из урны семи пирожных с возвращениями любого выбранного пирожного обратно в урну. Наконец, можно вообще забыть о любых схемах, если понимать, что любые семь купленных пирожных трех различных видов представляют собой 7-мультимножество над 3-элементным множеством различных видов пирожных.

Упражнения

4.1 (1 балл)**.** Дайте комбинаторное доказательство следующих рекуррентных соотношений для чисел $P(n,k)$:

$$P(n,k) = P(n-1,k) + k\,P(n-1,k-1), \qquad n \geqslant 1, \quad k = 1,\dots,n;$$

$$P(n,0) = 1, \quad n = 0,1,2,\dots; \qquad P(n,k) = 0, \quad k > n.$$

4.2 (1 балл)**.** Сколько чисел, меньших миллиона, можно записать с помощью цифр 8 и 9?

4.3 (0,5 балла)**.** На перекрестке имеется 6 светофоров. Сколько существует различных состояний этих светофоров, если каждый из них независимо от других имеет три возможных состояния — горит красный, горит желтый или горит зеленый?

4.4 (1 балл)**.** В алфавите племени Бум-Бум всего шесть букв. Любое слово состоит у них из шести символов, причем в каждом таком слове должны быть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько всего слов в языке племени Бум-Бум?

4.5 (1 балл)**.** Ребенок раскладывает в ряд карточки с пятью буквами А, двумя буквами Е, двумя буквами М, двумя буквами П, двумя буквами Т, двумя буквами Р, одной буквой Г и одной буквой Л. Сколько у него имеется вариантов получить слово ТЕЛЕГРАММААППАРАТ?

4.6 (1 балл)**.** Сосчитайте количество способов раскладки k неразличимых предметов по n различимым ящикам при условии, что в каждом ящике должен находиться как минимум один предмет.

4.7 (1,5 балла)**.** Подсчитайте количество разбиений числа k при ограничениях

$$a_i \geqslant s_i, \quad i = 1,\dots,n; \qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_n =: s \leqslant k.$$

4.8 (1 балл)**.** В купе поезда едет 6 человек. Поезд делает 5 остановок. Сколькими способами пассажиры могут распределиться между этими остановками?

4.9 (1 балл)**.** Сколькими способами из первых 6000 натуральных чисел можно выбрать два различных числа так, чтобы их сумма делилась на 100?

4.10 (1 балл)**.** Восемь студентов выбирают себе спецкурсы на семестр из списка, состоящего из четырех спецкурсов. Сколькими способами студенты могут записаться на эти спецкурсы так, чтобы каждый студент записался хотя бы на один спецкурс?

4.11 (1 балл)**.** Сколько существует булевых функций n аргументов?

4.12 (1 балл)**.** Дайте комбинаторное доказательство тождества

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n.$$

Дополнительные упражнения

4.13 (1 балл). Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность?

4.14 (0,5 балла). Сколько существует трехзначных чисел в пятеричной системе исчисления, в которых все три цифры различны?

4.15 (1,5 балла). Рассмотрим все пятизначные положительные числа, в которых на третьей позиции стоит девятка. Сколько таких чисел делится на три? А если в пятизначных числах присутствует хотя бы одна девятка, и позиции, на которых она присутствует, нам не важны?

4.16 (2 балла). Предположим, что нам нужно разместить r натуральных чисел $1, 2, \ldots, r$ и $n - r$ нулей, $r < n$, в циклическом порядке так, чтобы при движении по часовой стрелке последовательность натуральных чисел всегда была бы возрастающей, и так, чтобы никакие два последовательно идущих натуральных числа i, $i+1$, не шли бы друг за другом (включая пару $(r, 1)$). Например, при $n \geqslant 2$ и $r = 1$ мы можем на любую из n позиций поставить единицу, а оставшиеся позиции заполнить нулями. Так как все такие размещения переходят в себя при вращениях по часовой стрелке, то всего имеется ровно одно подобное размещение при любом $n \geqslant 2$. В случае $r = 2$, $n = 4$ у нас имеется единственное с точностью до циклического сдвига устраивающее нас размещение $(1, 0, 2, 0)$, а в случае $r = 2$ и $n = 5$ таких размещений в точности два — $(1, 0, 2, 0, 0)$ и $(1, 0, 0, 2, 0)$. Подсчитайте количество описанных размещений при произвольных значениях параметров n и r.

4.17 (1,5 балла). Найдите количество девятизначных чисел, в которых каждая цифра от 1 до 9 встречается ровно один раз, цифры $1, 2, 3, 4, 5$ расположены в порядке возрастания, а цифра 6 стоит раньше цифры 1.

4.18 (1,5 балла). Подсчитайте количество упорядоченных размещений k различимых предметов по n различимым ящикам, то есть таких размещений, в которых важен порядок размещения предметов в каждом конкретном ящике.

4.19 (1,5 балла). Трое мужчин и две женщины выбирают себе место работы. В городе имеются три фирмы, в которых требуются только мужчины, две — в которых требуются только женщины, и две — в которых берут и мужчин, и женщин. Сколькими способами они могут выбрать себе место работы?

4.20 (1,5 балла). Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, нужно выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это может быть сделано?

4.21 (1,5 балла). На каждой из прямых $x = 0$ и $x = 2$ отмечено по 62 точки с ординатами $1, 2, \ldots, 62$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 124 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

4.22 (2 балла). Число 72350 написали 7 раз подряд, получив при этом 35-значное число. Из этого числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычеркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

4.23 (2 балла). Предположим, что в задаче **4.**.10 мы дополнительно требуем, чтобы на любой спецкурс записался хотя бы один студент. Сколько существует способов это сделать?

4.24 (2 балла). Говорят, что булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ зависит от своего аргумента x_i, если можно подобрать такие значения $\{b_j\}$ для других аргументов, что

$$f(b_1, ..., b_{i-1}, 0, b_{i+1}, ..., b_n) \neq f(b_1, ..., b_{i-1}, 1, b_{i+1}, ..., b_n).$$

Сколько булевых функций зависят от всех своих n аргументов?

Решение упражнений

4.1. Разобъем все множество k-перестановок без повторений на два блока. В первый блок поместим все перестановки, не содержащие элемента x_n, а во второй — перестановки, содержащие данный элемент. Количество перестановок в первом блоке равно, очевидно, $P(n-1, k)$. Для подсчета количества элементов во втором блоке заметим, что у элемента x_n существует k способов занять свое место в перестановке. При любом фиксированном положении этого элемента существует $P(n-1, k-1)$ способов расставить оставшиеся элементы по $(k-1)$-й позиции.

Начальные условия очевидны: выбрать и упорядочить 0 предметов всегда можно лишь одним способом, а количество способов выбрать k предметов из множества мощности $n < k$ равно нулю.

4.2. Любое описанное в условии задачи число может иметь в длину от одного до шести разрядов. Если число разрядов равно i, то выбрать значения этих разрядов можно 2^i способами (значение каждого разряда выбирается двумя способами). Поэтому общее количество описанных выше чисел есть

$$\sum_{i=1}^{6} 2^i = 2^7 - 2 = 126.$$

4.3. Любое состояние шести светофоров можно рассматривать как слово, состоящее из шести букв, над алфавитом, состоящим из трех цветов. Как следствие, имеем 3^6 вариантов различных состояний.

4.4. Здесь вновь лучше всего воспользоваться принципом “плохой-хороший” (8). Количество всех слов из шести символов над алфавитом из шести букв равно 6^6. Количество слов, в которых все буквы различны, равно 6!. Таким образом, всего имеем $6^6 - 6! = 6^6 - 6! = 45936$ слов.

4.5. Фиксируя слово, мы можем 5! способами переставить букву А, не меняя этого слова, а также 2! способами буквы Е, М, П, Р и Т. Всего имеем $5! \cdot 2^5 = 3840$ способов.

4.6. Легче всего свести данную задачу к известной задаче о раскладке неразличимых предметов по различимым ящикам без каких-либо ограничений на количество предметов в каждом ящике. Для этого положим в каждый из ящиков по одному предмету. Количество способов раскладки оставшихся $(k-n)$ предметов по n ящикам равно

$$\left(\!\!\binom{n}{k-n}\!\!\right) = \binom{n+k-n-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-1-k+n} = \binom{k-1}{n-1}.$$

4.7. Как и предыдущую задачу, данную задачу также легко свести к задаче о раскладке неразличимых предметов по различимым ящикам без ограничений на количество предметов в ящике. Для этого нужно поместить в i-й ящик s_i предметов. Останется разложить ещё $(k-s)$ предметов по тем же n ящикам, причём уже без всяких ограничений. Количество способов это сделать равно $\left(\!\binom{n}{k-s}\!\right)$.

4.8. Данная задача допускает, вообще говоря, две различные постановки. В первой постановке задачи мы различаем пассажиров. В таком случае задачу можно свести к раскладке шести различимых предметов по пяти различимым ящикам без ограничений на количество предметов в каждом ящике. Как следствие, имеется 5^6 различных вариантов.

Во второй постановке задачи мы пассажиров не различаем, и имеем, таким образом, задачу о раскладке шести неразличимых предметов по пяти различимым ящикам при условии отсутствия ограничений на количество предметов в каждом ящике. При таких условиях имеется $\left(\!\binom{5}{6}\!\right)$ способов распределения пассажиров по этим остановкам.

4.9. Предположим, что первое число делится на 100. Тогда и второе число также должно делиться на 100. Всего имеется $\binom{60}{2} = 1770$ способов выбрать такие числа. Аналогичные рассуждения проходят для чисел, делящихся на 50.

Теперь предположим, что первое число не оканчивается ни на 100, ни на 50. В этом случае мы $49 \cdot 60$ способами можем выбрать число, оканчивающееся на число от 1 до 49, и однозначно для него найти пару, такую, что в сумме мы получим 100.

Суммируя все разобранные варианты, окончательно получаем $2 \cdot 1770 + 176400 = 1799400$ способов.

4.10. Закодируем выбор некоторого студента битовой строкой из четырёх символов. В этой строке i-й символ будет равен единице, если студент выбрал i-й спецкурс, и нулю, если не выбрал. Всего таких битовых строк $2^4 = 16$, но одна, состоящая из всех нулей, нам не подходит. Остаётся 15 вариантов для каждого студента. Студенты делают независимый выбор, а значит, по правилу произведения, общее число способов выбрать курсы равно 15^8.

4.11. Число различных наборов из n аргументов равно 2^n. Задать всевозможные булевы функции можно, выбрав в качестве значения функции один из двух вариантов на каждом таком наборе. Количество способов сделать такой выбор равно 2^{2^n}.

4.12. Правую часть тождества можно интерпретировать как количество строк над алфавитом из четырех букв. Левая часть подсчитывает аналогичное количество следующим образом: вначале мы $\binom{n}{k}$ способами выбираем k позиций в строке, размещаем на эти позиции первую букву нашего алфавита, а затем 3^k способами на оставшиеся позиции помещаем символы из алфавита, состоящего из оставшихся трех букв.

5 Подсчет количества отображений конечных множеств. Числа Стирлинга второго рода

5.1. Оказывается, задачи о раскладке различимых предметов по различимым же ящикам имеют и еще одну, чрезвычайно важную комбинаторную интерпретацию — они эквивалентны задачам о подсчете количества отображений конечных множеств.

5.1.1. Напомним определение произвольного отображения $f\colon X \to Y$.

Определение 5.1. Пусть X, Y — пара конечных множеств. Отображением f из X в Y называется правило, согласно которому любому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$:

$$\forall\, x \in X \qquad \exists!\, y \in Y\colon \qquad y = f(x).$$

С комбинаторной точки зрения любое отображение f из n-элементного множества X в k-элементное множество Y можно рассматривать как некоторый вариант раскладки n различимых предметов по k различимым ящиками при отсутствии каких-либо ограничений на количество предметов в каждом ящике.

Пример 5.2. Рассмотрим отображение f из трехэлементного множества X в четырехэлементное множество Y вида

$$f(x_1) = y_2, \qquad f(x_2) = y_2, \qquad f(x_3) = y_4$$

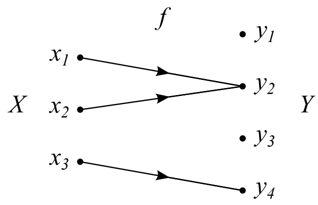


Рис. 7

(смотри рис.7). Этому отображению отвечает раскладка трех различимых предметов по четырем различимым ящикам, при которой первые два предмета размещаются во втором ящике, а третий предмет — в четвертом ящике.

Как следствие, общее количество всех отображений n-элементного множества X в k-элементное множество Y равно k^n.

5.1.2. Напомним теперь определение *инъективного* отображения.

Определение 5.3. Отображение $f\colon X \to Y$ называется инъективным, если из условия

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2.$$

Иными словами, отображение называется инъективным, если у любого элемента $y \in Y$ имеется не более одного прообраза, т.е. элемента $x \in X$, такого, что $y = f(x)$.

Понятно, что любому инъективному отображению $f\colon X \to Y$ отвечает такая раскладка n элементов множества X, при которой в каждом из k ящиков находится не более одного элемента. Как следствие, количество всевозможных инъективных отображений равно $(k)_n$.

5.1.3. Наконец, рассмотрим случай биективного и сюръективного отображений.

Определение 5.4. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *биективным,* если

$$\forall\, y \in Y \qquad \exists!\, x \in X\colon \qquad y = f(x).$$

Количество таких отображений равно, очевидно, $n!$, где $n = |X| = |Y|$.

Определение 5.5. Отображение $f\colon X \to Y$ называется сюръективным, если

$$\forall\, y \in Y \qquad \exists\, x \in X\colon \qquad y = f(x).$$

Другими словами, отображение f сюръективно, если у любого элемента $y \in Y$ найдется хотя бы один прообраз $x \in X$, то есть такой x, что $f(x) = y$.

Комбинаторная интерпретация сюръективного отображения такова: это есть некоторая раскладка n различимых предметов по k различимым ящикам при условии, что в каждом ящике находится хотя бы один предмет. Количество таких раскладок при $k > n$ равно, очевидно, нулю. Задача следующего пункта данного параграфа — сосчитать количество этих раскладок для случая $0 \leqslant k \leqslant n$.

5.2. Обозначим через $\widehat{S}(n,k)$ количество всех сюръективных отображений n-элементного множества X в k-элементное множество Y. Сосчитаем $\widehat{S}(n,k)$ для случая $n \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

5.2.1. Рассмотрим множество *всех* отображений из n-множества X в k-множество Y. Как мы знаем, количество таких отображений равно k^n. Наша задача состоит в том, чтобы подсчитать это количество по-другому, выразив k^n через числа $\widehat{S}(n,k)$.

5.2.2. Заметим, что *любое* отображение $f\colon X \to Y$ можно рассматривать как *сюръективное* отображение множества X на множество

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x\colon\ y = f(x)\},$$

являющееся образом множества X при отображении f.

Так, для отображения f из примера **5.**.2 образ $\operatorname{Im}(f) = \{y_2, y_4\}$, а отображение $f\colon X \to Y$ является сюръективным отображением множества X на подмножество $\operatorname{Im}(f) \subset Y$.

5.2.3. Разобъем теперь все множество отображений $f\colon X \to Y$ на блоки, включив в i-й блок все отображения, образ $\operatorname{Im}(f)$ которых содержит ровно i элементов: $|\operatorname{Im}(f)| = i$, $i = 1, \ldots, k$. Все, что нам остается — это сосчитать количество элементов в каждом блоке, а затем воспользоваться правилом суммы для того, чтобы получить общее количество k^n всех отображений.

5.2.4. Заметим, что существует $\binom{k}{i}$ способов выбрать i-элементное подмножество k-множества Y. Для каждого из этих подмножеств имеется $\widehat{S}(n,i)$ различных сюръективных отображений из n-элементного множества X в выбранное i-элементное подмножество множества Y. Таким образом, по правилу произведения, общее количество элементов в i-м блоке равно

$$\binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i).$$

Тогда по правилу суммы можем записать, что

$$k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i). \tag{22}$$

При этом мы суммируем не от 1 до k, а от 0 до k, учитывая, что $\widehat{S}(n,0) = 0$ для всех $n > 0$.

Замечание 5.6. Формулу (22) полезно иногда записывать в виде

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i). \tag{23}$$

Несложно убедиться в том, что эта формула непосредственно следует из (22), а также в том, что она оказывается справедливой как для случая $n \geqslant k$, так и для случая $n < k$.

5.2.5. Мы выразили количество всех отображений n-элементного множества X в k-элементное множество Y через количество $\widehat{S}(n,i)$ сюръективных отображений. Нам же нужна обратная формула, выражающая количество $\widehat{S}(n,k)$ сюръективных отображений через число i^n всех отображений. Для ее получения воспользуемся так называемыми *формулами обращения.*

Утверждение 5.7. *Пусть* $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ *и* $(g_0, g_1, g_2, \ldots)$ — *две числовые последовательности, и пусть одна из них выражается через вторую по формулам*

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i, \qquad k \geqslant 0. \tag{24}$$

Тогда справедлива следующая формула обращения:

$$g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i, \qquad k \geqslant 0. \tag{25}$$

С учетом этих формул обращения можно, считая n параметром, из соотношения (22) получить следующую явную формулу для вычисления чисел $\widehat{S}(n,k)$:

$$\widehat{S}(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cdot i^n.$$

5.3. Задачи подсчета количества отображений n-элементного множества X в k-элементное множество Y имеют еще одну важную комбинаторную интерпретацию.

5.3.1. Начнем с простого примера.

Пример 5.8. Для трехэлементного множества $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и двухэлементного множества $Y = \{y_1, y_2\}$ имеется, как мы знаем, $2^3 = 8$ различных отображений множества X в множество Y. Запишем все эти отображения как упорядоченные пары подмножеств множества X:

$$(\{x_1, x_2, x_3\}, \varnothing), \qquad (\{x_1, x_2\}, \{x_3\}), \qquad (\{x_1, x_3\}, \{x_2\}), \qquad (\{x_2, x_3\}, \{x_1\}),$$

$$(\{x_1\}, \{x_2, x_3\}), \qquad (\{x_2\}, \{x_1, x_3\}), \qquad (\{x_3\}, \{x_1, x_2\}), \qquad (\varnothing, \{x_1, x_2, x_3\}).$$

Видно, что записанное в таком виде решение представляет собой не что иное, как список всех возможных *разделений* множества X, то есть упорядоченных разбиений X на два блока, один из которых может быть и пустым.

5.3.2. Очевидно, что данный результат справедлив и в общем случае. Именно, любое отображение $f\colon X \to Y$ задает нам некоторое разделение множества X, то есть разбиение этого множества на k упорядоченных блоков, часть из которых могут быть пустыми. Как следствие, количество таких разделений совпадает с количеством всех отображений f и равно k^n.

Аналогичные рассуждения показывают, что любое сюръективное отображение $f\colon X \to Y$ задает нам некоторое *упорядоченное разбиение* множества X на блоки. Поэтому количество всех упорядоченных разбиений n-элементного множества X на k блоков равно числу $\widehat{S}(n,k)$.

5.3.3. Рассмотрим теперь некоторый специальный вид k-разделений множества X, а именно, такие k-разделения, в которых в первом блоке содержится a_1 элемент, во втором блоке — a_2 элемента, в k-м блоке — a_k элементов. Очевидно, что при этом общая сумма всех элементов должна быть равна мощности $|X| = n$:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n, \qquad a_i \geqslant 0.$$

Утверждение 5.9. *Количество всех таких k-разделений n-множества X равно*

$$P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k) := \binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-1}}{a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}. \quad (26)$$

Доказательство. Действительно, из любого n-элементного множества X мы $\binom{n}{a_1}$ способами можем выбрать a_1 элементов и положить их в первый ящик (отнести к первому блоку разбиения). Затем для каждого такого выбора мы $\binom{n-a_1}{a_2}$ способами можем из оставшегося $(n - a_1)$-элементного множества выбрать a_2 элементов и положить их во второй ящик (отнести ко второму блоку разбиения), и так далее. Формула (26), описывающая общее количество способов совершить все эти действия, следует теперь из правила произведения. □

Следствие 5.10. *Общее количество k^n всех k-разделений n-множества X выражается через числа $P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k)$ по формуле*

$$k^n = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n \\ a_i \geqslant 0}} P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k) = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n \\ a_i \geqslant 0}} \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}. \quad (27)$$

Замечание 5.11. Если в условии рассматриваемой задачи заменить нестрогие неравенства $a_i \geqslant 0$ на строгие, то есть на неравенства $a_i > 0$, то вместо разделения мы получим упорядоченное разбиение специального вида. Количество таких упорядоченных разбиений также описывается формулой (26), а вместо формулы (27) получается не менее полезное соотношение вида

$$\widehat{S}(n,k) = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n \\ a_i > 0}} \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}. \quad (28)$$

5.4. Числа $P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k)$ имеют и еще один важный комбинаторный смысл. Именно, они перечисляют так называемые *перестановки n-множества X с повторениями.*

5.4.1. Рассмотрим в качестве элементарного примера следующую задачу: на полке имеются 15 различных книг по математике, 16 по информатике и 12 по физике; каково количество способов перестановки этих книг на полке? Ответ очевиден: $(15 + 16 + 12)! = 43!$ способов.

Предположим теперь, что мы перестали различать книги, посвященные одному и тому же предмету. В этом случае количество различных способов перестановки таких книг уменьшится. Обозначим это количество через λ_n. Так как существует $15!$ способов упорядочить книги по математике, $16!$ – по информатике и $12!$ – по физике, то по правилу произведения мы можем записать, что

$$43! = \lambda_n \cdot 16! \cdot 15! \cdot 12! \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_n = \frac{43!}{16! \cdot 15! \cdot 12!} = P(43; 15, 16, 12).$$

5.4.2. Аналогичные рассуждения справедливы и в общем случае. Именно, пусть среди n переставляемых предметов имеется a_1 неразличимых предметов первого сорта, a_2 неразличимых предметов второго сорта и так далее, причем $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$. Тогда для количества перестановок таких предметов с повторениями получаем уже знакомую нам формулу

$$\frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!} = P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

5.4.3. В частном случае перестановки n предметов двух различных сортов получаем

$$P(n; k, n-k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Иными словами, количество таких перестановок совпадает с количеством различных k-элементных подмножеств n-элементного множества. Для комбинаторного доказательства данного факта можно воспользоваться рассуждениями, которые мы проводили при подсчете количества всех подмножеств данного множества. Напомним, что там мы любое подмножество кодировали упорядоченной битовой строкой длины n, состоящей из k единиц и $(n-k)$ нулей. Осталось заметить, что любая такая строка представляет собой некоторую перестановку k элементов первого сорта (единиц) и $(n-k)$ элементов второго сорта (нулей).

5.4.4. В заключение отметим еще одну полезную биекцию, позволяющую несколько по-другому сосчитать количество k-мультимножеств n-элементного множества. Мы знаем, что любому k-мультимножеству над n-множеством отвечает некоторая раскладка k неразличимых предметов по n различимым ящикам. В свою очередь, любую такую раскладку можно рассматривать как упорядоченный набор, состоящий из k неразличимых предметов одного сорта (например, k неразличимых шаров), и $(n-1)$-го предмета второго сорта ($(n-1)$-й неразличимой перегородки между этими шарами). Как следствие, количество всех k-мультимножеств

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = P(k+n-1; k, n-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

5.5. Вернемся к числам $\widehat{S}(n,k)$, описывающим, в частности, количество всех упорядоченных разбиений n-множества на k блоков. Обозначим теперь через $S(n,k)$ количество обычных, неупорядоченных разбиений n-множества на k блоков. Так как для любого неупорядоченного разбиения существует $k!$ способов упорядочить k его блоков, то

$$\widehat{S}(n,k) = k!\, S(n,k).$$

Отсюда с учетом (22) и (28) получаем следующие две явные формулы, позволяющие вычислять числа $S(n,k)$:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n = \frac{1}{k!}\sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n\\ a_i>0}} \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}. \tag{29}$$

Числа $S(n,k)$ называются *числами Стирлинга второго рода* и встречаются в большом количестве комбинаторных приложений. Исследуем эти числа поподробнее.

5.5.1. Для практического расчета чисел $S(n,k)$ удобно использовать рекуррентные соотношения.

Утверждение 5.12. *Числа Стирлинга второго рода удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k), \qquad k = 1,\ldots,n; \tag{30}$$

$$S(0,0) = 1; \qquad S(n,0) = 0 \quad \forall\ n > 0; \qquad S(n,k) = 0 \quad \forall\ k > n.$$

Доказательство. Граничные условия $S(n,0)=0$ для всех $n>0$ и $S(n,k)=0$ для всех $k>n$ очевидны — n-элементное множество в случае $n>0$ нельзя разбить на 0 блоков, а также на k блоков в случае, когда $k>n$. Равенство $S(0,0)=1$ введено просто для удобства.

Докажем теперь соотношение (30). Разобьем для этого множество всех k-разбиений на два блока. К первому блоку Σ_1 отнесем все разбиения, содержащие одноэлементное подмножество $\{x_1\}$. Ко второму блоку Σ_2 отнесем все оставшиеся k-разбиения, т.е. разбиения, в которых элемент x_1 входит в подмножества, содержащие как минимум два элемента.

Рассмотрим, к примеру, все 2-разбиения множества $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$:

$$\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_4\}\},\quad \{\{x_1,x_2,x_4\},\{x_3\}\},\quad \{\{x_1,x_3,x_4\},\{x_2\}\},\quad \{\{x_2,x_3,x_4\},\{x_1\}\},$$

$$\{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\}\},\quad \{\{x_1,x_3\},\{x_2,x_4\}\},\quad \{\{x_1,x_4\},\{x_2,x_3\}\}.$$

Для этого примера к первому блоку относится единственное разбиение вида $\{\{x_2,x_3,x_4\},\{x_1\}\}$. Остальные шесть разбиений относятся в данном случае ко второму блоку.

Довольно очевидно, что количество элементов в первом блоке равно количеству $S(n-1,k-1)$ всех $(k-1)$-разбиений оставшегося $(n-1)$-элементного множества. В примере это число равно $S(3,1)=1$ — любое множество можно только одним способом разбить на один блок.

Для подсчета количества элементов во втором блоке заметим, что, по сути дела, это число равно количеству всевозможных разбиений $(n-1)$-элементного множества на k непустых подмножеств с поочередным добавлением элемента x_1 в каждое из этих подмножеств. Действительно, для разобранного выше примера имеется три разбиения трехэлементного множества $\{x_2,x_3,x_4\}$ на два непустых подмножества, а именно, разбиения вида

$$\{\{x_2\},\{x_3,x_4\}\},\quad \{\{x_3\},\{x_2,x_4\}\},\quad \{\{x_4\},\{x_2,x_3\}\}.$$

Добавляя к каждому из этих подмножеств элемент x_1, получим $2\cdot 3=6$ выписанных выше разбиений четырехэлементного множества X на блоки требуемого вида. Количество таких разбиений в общем случае равно, очевидно, $k\cdot S(n-1,k)$. $\square$

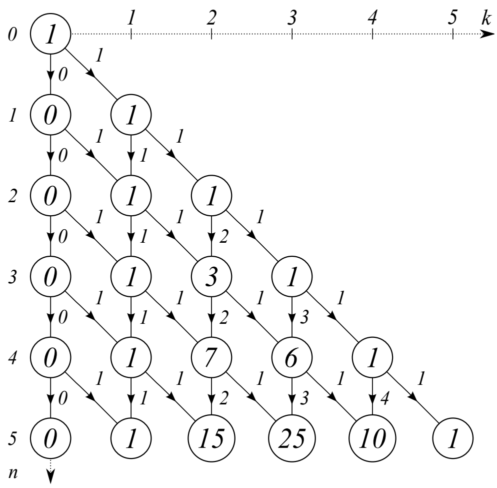


Рис. 8: Графическое представление чисел $S(n,k)$

5.5.2. Как и биномиальные коэффициенты, числа Стирлинга второго рода удобно представлять в виде треугольного массива на плоскости (n, k). На рис.8 показаны первые несколько строк такого массива, вычисленных с помощью рекуррентных соотношений (30). Такой рисунок дает нам еще одну комбинаторную интерпретацию чисел $S(n, k)$ — это есть количество *взвешенных* путей, идущих из начала координат в точку с координатами (n, k). Любой участок такого пути, имеющий вес i, можно рассматривать как набор из i путей, соединяющих соответствующие точки на плоскости.

5.5.3. Числа Стирлинга второго рода встречается в очень большом количестве самых разнообразных задач. В качестве примера вернемся к формуле (23) и перепишем ее через числа Стирлинга второго рода:

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot i! \cdot S(n, i) = \sum_{i=0}^{n} (k)_i \cdot S(n, i). \tag{31}$$

Оказывается, эта формула справедлива для любых вещественных и даже комплексных значений k. Именно, справедливо равенство

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} (x)_i \cdot S(n, i).$$

Эта формула активно используется в теории конечных операторов — она позволяет перейти от базиса x^n к базису $(x)_n$.

5.5.4. С точки зрения схемы раскладки предметов по ящикам числа Стирлинга второго рода описывают количество способов разложить n различимых предметов по k неразличимым ящикам так, чтобы в любом ящике содержался хотя бы один предмет. Сосчитаем, зная $S(n, k)$, количество $B(n, k)$ различных раскладок n различимых предметов по k неразличимым ящикам в случае, когда ограничения на количество предметов в любом ящике отсутствуют.

Для этого вновь разобьем множество всех таких раскладок на блоки, поместив в i-й блок все раскладки, в которых занято ровно i ящиков. В случае различимых ящиков в процессе аналогичного разбиения множества на блоки мы в i-м блоке имели $\binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n, i)$ элементов. В случае неразличимых ящиков мы i из k ящиков выбираем ровно одним способом, а затем $S(n, i)$ способами заполняем эти ящики n предметами. Используя правило суммы, получаем отсюда следующее выражение для чисел $B(n, k)$:

$$B(n, k) = \sum_{i=1}^{k} S(n, i).$$

5.5.5. Числа $B(n, k)$ в случае $n = k$ называются числами Белла $B(n)$. Эти числа перечисляют количество *всех* возможных разбиений n-элементного множества X.

Заметим, что любое разбиение множества X можно получить, введя на этом множестве некоторое отношение эквивалентности. Как следствие, количество всех возможных отношений эквивалентности на n-элементном множестве X описывается числами Белла B_n.

5.5.6. Покажем, что для чисел Белла $B(n)$ справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k. \tag{32}$$

Действительно, рассмотрим блок разбиения $(n+1)$-элементного множества, содержащий число $n+1$. Все возможные разбиения мы можем разбить на $n+1$ группу (блок) в зависимости от того, сколько чисел содержится вместе с $n+1$. Предоположим, что вместе с $n+1$ находятся i чисел, $i = 0, \ldots, n$. Эти числа мы можем выбрать $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ способами. Оставшиеся $k = n - i$ чисел, $k = 0, \ldots, n$, мы можем $B(k)$ способами разбить на блоки. Суммируя по всем k, мы и получим формулу (32).

5.6. Подведем итоги, построив таблицу различных схем раскладок n предметов по k ящикам:

Элементы множества X (предметы)	Элементы множества Y (ящики)	Произвольное количество предметов в ящике	Не более 1 предмета в ящике	Как минимум 1 предмет в ящике
различимые	различимые	k^n	$(k)_n$	$\widehat{S}(n,k)$
неразличимые	различимые	$\left(\!\binom{k}{n}\!\right)$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$
различимые	неразличимые	$B(n,k)$	$0, \quad n > k$ $1, \quad n \leqslant k$	$S(n,k)$

Как видно, остался еще один неразобранный вариант — схема размещения n неразличимых предметов по k неразличимым ящикам. Для количества таких размещений явных аналитических формул не существует. Для того, чтобы их перечислить, необходимо использовать аппарат производящих функций, к изучению которого мы приступим в одном из следующих параграфов.

Упражнения

5.1 (0,5 балла)**.** Докажите справедливость формулы (23)

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i).$$

для любого $n \in \mathbb{Z}_+$.

5.2 (1,5 балла)**.** Докажите формулы обращения (24), (25):

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i, \qquad k \geqslant 0.$$

5.3 (1 балл)**.** В начале учебного года на кафедре происходит распределение нагрузки. Имеется 5 преподавателей и 7 различных групп студентов, которым эти преподаватели должны прочитать один и тот же курс. Любой преподаватель может вести занятия в любой группе. Подсчитайте количество способов распределения нагрузки между преподавателями при условии, что каждый преподаватель должен вести занятия хотя бы в одной группе.

5.4 (1 балл). Докажите, что количество способов раскладки n различимых предметов по k неразличимым ящикам при условии, что в каждом ящике находится не более одного предмета, равно 0 в случае $n > k$ и 1 в случае $n \leqslant k$.

5.5 (1 балл). Сколько разных слов можно получить, переставляя буквы слов а) "математика"; б) "комбинаторика"?

5.6 (1 балл). Сколькими способами можно расставить 20 различных книг по пяти различимым полкам при условии, что каждая полка может вместить все эти двадцать книг?

5.7 (1 балл). Сколькими способами можно из 60 различных грибов сделать четыре неразличимые связки по пятнадцать грибов в каждой?

5.8 (1 балл). Получите явные аналитические выражения для чисел Стирлинга $S(n,1)$, $S(n,n)$, $S(n,2)$ и $S(n,n-1)$.

5.9 (1 балл). Сколько существует разбиений $2n$-множества на два блока, размеры которых не равны между собой?

5.10 (1 балл). Докажите комбинаторно следующую формулу для чисел Стирлинга $S(n,3)$:

$$S(n,3) = \frac{3^n - 3(2^n - 2) - 3}{6}.$$

Дополнительные упражнения

5.11 (1 балл). Сосчитайте количество размещений n различимых предметов по k различимым ящикам при условии, что ровно r из k ящиков должны быть заняты.

5.12 (2 балла). Найдите сумму четырехзначных чисел, которые можно получить при всевозможных перестановках цифр а) $1,2,3,4$; б) $1,2,2,5$.

5.13 (1,5 балла). Докажите, что числа Стирлинга $S(n,n-2)$ рассчитываются по формуле

$$S(n,n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}.$$

5.14 (1,5 балла). Придумайте комбинаторное доказательство формулы (31)

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} (k)_i \cdot S(n,i).$$

5.15 (2,5 балла). Дайте комбинаторное доказательство следующего рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга:

$$S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} S(n-i,k-1)\, k^{i-1}, \qquad n \geqslant k.$$

5.16 (1,5 балла). Докажите, что для всех $n > 2$ числа Белла $B(n) < n!$.

5.17 (1,5 балла). Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n-множества без блоков единичной длины. Докажите, что

$$B(n) = F(n) + F(n+1).$$

5.18 (1,5 балла). Найдите рекуррентную формулу для вычисления чисел $F(n)$, введенных в предыдущем упражнении.

5.19 (2 балла). Докажите, что количество разбиений n-элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла $B(n-1)$.

5.20 (3 балла). Пусть $B_k(n)$ есть количество разбиений, таких, что если числа i и j входят в один и тот же блок, то $|i-j| > k$. Докажите, что $B_k(n) = B(n-k)$ для всех $n \geqslant k$.

Решение упражнений

5.1. Действительно, в случае $n \geqslant k$ имеем

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i)$$

за счет того, что биномиальные коэффициенты $\binom{k}{i} = 0$ для всех $i > k$. В случае же $n < k$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) + \sum_{i=n+1}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i)$$

уже за счет того, что при $i > n$ все числа $\widehat{S}(n,i) = 0$.

5.2. Доказательство этой формулы можно провести, например, так:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{j-i} \binom{i}{j} f_j = \sum_{j=0}^{k} f_j \sum_{i=j}^{k} (-1)^{j-i} \binom{k}{i} \binom{i}{j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f_j \sum_{i=j}^{k} (-1)^{j-i} \binom{k-j}{i-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f_j \sum_{l=0}^{k-j} (-1)^{-l} \binom{k-j}{l}.$$

Внутренняя сумма равна нулю для всех $k-j > 0$. В случае $k = j$ она равна единице, и поэтому

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i = f_k.$$

5.3. С формальной точки зрения речь идет о подсчете количества сюръективных отображений 7-элементного множества X в пятиэлементное множество Y. Это количество равно $\widehat{S}(7,5)$. Для его расчета можно, например, воспользоваться формулой (28). Число 7 можно разбить на пять слагаемых следующими двумя способами:

$$7 = 2+2+1+1+1 = 3+1+1+1+1.$$

Первому разбиению отвечают $\binom{5}{2} = 10$ способов выбора двух преподавателей из пяти, читающих по две лекции. Второму разбиению соответствует $\binom{5}{1} = 5$ способов выбора преподавателя, ведущего у трех групп студентов. Тогда общее количество вариантов равно

$$\widehat{S}(7,5) = 10 \cdot P(7;2,2) + 5 \cdot P(7;3) = 16\,800.$$

5.4. В случае, когда предметов больше, чем ящиков, требуемой раскладки не существует — согласно принципу Дирихле, в одном из ящиков окажется хотя бы два предмета. В обратном случае, то есть в случае, когда предметов не больше, чем ящиков, любые две раскладки n различимых предметов по k неразличимым ящикам эквивалентны друг другу. Как следствие, существует единственный способ такой раскладки.

5.5. Количество различных слов равняется количеству перестановок n элементов (букв в слове) с повторениями. Поэтому из слова "математика" можно составить

$$P(10;3,2,2) = \frac{10!}{3!\,2!\,2!},$$

вариантов слов, а из слова "комбинаторика"

$$P(13;2,2,2) = \frac{13!}{2!\,2!\,2!}$$

различных слов.

5.6. Добавим к двадцати книгам четыре одинаковые разделяющие перегородки. Тогда любая перестановка книг и перегородок даст нам модель расстановки книг по пяти полкам. Таких перестановок существует $24!/4!$ штук.

5.7. Количество способов составить четыре различимые связки из этих грибов равно

$$P(60;15,15,15,15) = \frac{60!}{15!\,15!\,15!\,15!}.$$

Однако сами эти связки мы не различаем, поэтому окончательный ответ есть

$$\frac{60!}{(15!)^4\cdot 4!}.$$

5.8. Очевидно, что для всех натуральных значений n числа $S(n,1) = S(n,n) = 1$: существует единственное разбиение множества на один блок — это само это множество, а также на n блоков — это n элементов этого множества.

Существует ровно 2^n разделения множества на два упорядоченных, возможно пустых блока. Исключая из них два случая разделений с пустыми блоками, получаем $\widehat{S}(n,2) = 2^n - 2$ упорядоченных разбиений множества X на два блока. Поделив результат на два, получим, что $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

Любое разбиение X на $(n-1)$ блок должно содержать ровно один блок, состоящий из двух элементов. Следовательно, количество $S(n,n-1)$ таких разбиений совпадает с количеством двухэлементных подмножеств множества X и равно $\binom{n}{2}$.

5.9. Мы знаем, что $S(2n,2) = 2^{2n-1}-1$. Подсчитаем теперь количество разбиений $2n$-множества ровно на два блока одинакового размера. В первый блок мы можем поместить n элементов $\binom{2n}{n}$ количеством способов. Элементы второго блока при этом определяются однозначно. Однако это количество способов нужно поделить на два — мы не различаем первый и второй блок. Следовательно, используя принцип "плохой-хороший" (8), мы получаем, что количество искомых разбиений равно

$$2^{2n-1} - 1 - \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

5.10. Всего существует 3^n различных отображений n-элементного множества X в трехэлементное множество Y. Из них ровно три отображают X в одноэлементное подмножество, и $3 \cdot \widehat{S}(n,2) = 3(2^n - 2)$ из них отвечают функциям, у которых образ совпадает либо с подмножеством $\{y_1, y_2\}$, либо с подмножеством $\{y_1, y_3\}$, либо с подмножеством $\{y_2, y_3\}$. У остальных функций образ совпадает со всем множеством Y. Следовательно,

$$\widehat{S}(n,3) = 3^n - 3(2^n - 2) - 3 = 3(3^{n-1} - 2^n + 1) \qquad \Longrightarrow \qquad S(n,3) = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}.$$

6 Понятие дискретной вероятности

6.1. Многие задачи элементарной комбинаторики часто формулируются на языке подсчета вероятностей наступления тех или иных случайных событий. Цель настоящего параграфа — изложить основные понятия элементарной теории вероятностей, а также показать связь данной науки с элементарной комбинаторикой.

6.1.1. Начнем, как всегда, с самых простых, базовых понятий теории вероятности.

Под случайным экспериментом будем понимать математическую модель некоторого реального эксперимента, результат которого невозможно точно предсказать. Простейшим и наиболее хрестоматийным примером случайного эксперимента является подбрасывание идеальной монетки. В результате любого такого эксперимента у нас обязательно выпадает или орел, или решка (на ребро идеальная монетка упасть не может). Заранее предсказать, что именно выпадет, мы не можем. Другим простейшим примером случайного эксперимента является подбрасывание игральной кости, результатом которого можно считать выпадение одного из шести чисел, нанесенных на грани куба.

6.1.2. Любой результат ω случайного эксперимента называется *элементарным событием* или *исходом*. Множество всех возможных исходов обозначим через Ω. Далее мы всегда будем считать, что множество Ω конечно или счетно.

Случайным событием или просто *событием* A называется любое подмножество множества Ω. Так, в примере с подбрасыванием игральной кости событиями являются, например, выпадение четного числа или выпадение числа, меньшего тройки.

Говорят, что в результате случайного эксперимента *произошло событие* A, если элементарный исход эксперимента является элементом множества A. Так как один и тот же исход может быть элементом нескольких разных событий, то в результате одного и того же случайного эксперимента возможно появление нескольких случайных событий. *Исход же любого случайного эксперимента может быть только один.*

Так, в примере с игральной костью элементарный исход — это выпадение конкретного числа, например, двойки. Этот элементарный исход, однако, отвечает появлению сразу двух описанных выше событий — события A_1, описывающего выпадение четного числа, и события A_2, соответствующего выпадению числа, меньшего тройки.

6.1.3. Предположим теперь, что у нас для заданного случайного эксперимента имеется некоторый набор $\mathcal{A}_0$ событий. С помощью теоретико-множественных операций объединения, пересечения и дополнения можно из этого набора $\mathcal{A}_0$ построить некоторую новую, более полную систему множеств, также являющихся событиями. Присоединяя к этой системе так называемое невозможное ($A = \varnothing$) и достоверное ($A = \Omega$) события, мы получаем систему множеств $\mathcal{A}$, называемую *алгеброй событий,* то есть такую систему подмножеств множества исходов Ω, что, во-первых, само $\Omega \in \mathcal{A}$, и во-вторых, для любой пары $A, B \in \mathcal{A}$ их объединение, пересечение и дополнение также принадлежат $\mathcal{A}$.

Как правило, в качестве $\mathcal{A}_0$ выбирают некоторый набор подмножеств, образующий разбиение множества Ω. В этом случае $\mathcal{A}$ называется алгеброй, порожденной данным разбиением $\mathcal{A}_0$.

В случае конечного множества Ω в качестве $\mathcal{A}$ чаще всего выбирается множество 2^Ω всех подмножеств данного множества Ω.

6.1.4. Припишем теперь любому элементарному событию $\omega \in \Omega$ некоторое вещественное число $\Pr(\omega)$ из диапазона $[0, 1]$. Это отображение $\Pr : \Omega \to \mathbb{R}_+$ называется *вероятностью,* если для него выполняется следующее условие нормировки:

$$\sum_{\omega\in\Omega} \Pr(\omega) = 1.$$

Зная вероятность $\Pr(\omega)$ любого элементарного исхода, можно по формуле

$$\Pr(A) = \sum_{\omega\in A} \Pr(\omega) \tag{33}$$

определить вероятность случайного события A. Иными словами, мы с помощью этой формулы можем продолжить отображение $\Pr$ на все элементы A заданной алгебры событий $\mathcal{A}$ и считать, что функция $\Pr$ задана не на Ω, а на некоторой алгебре событий $\mathcal{A}$.

Зафиксируем теперь некоторую алгебру событий $\mathcal{A}$. Из определения (33) сразу же вытекают следующие простейшие свойства вероятности:

$$\Pr(\varnothing) = 0, \qquad \Pr(\Omega) = 1;$$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \qquad \forall\ A, B \in \mathcal{A}.$$

События называются *несовместными,* если $A \cap B = \varnothing$. Для таких событий

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B). \tag{34}$$

Следствием формулы (34) является следующее полезное равенство:

$$\Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A), \qquad \text{где} \qquad \bar{A} = \Omega \setminus A. \tag{35}$$

Формулы (34) и (35) легко обобщаются на случай набора $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ несовместных событий, а также на случай набора $\mathcal{A}_0 = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ подмножеств, образующих разбиение множества Ω. В первом случае имеем равенство

$$\Pr(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \ldots + \Pr(A_n), \tag{36}$$

называемое *формулой сложения вероятностей несовместных событий.* Во втором случае получаем равенство

$$\Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \ldots + \Pr(A_n) = 1.$$

Набор $\mathcal{A}_0 = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ называется при этом *полной группой несовместных событий.*

6.1.5. Приведенное в предыдущем пункте определение вероятности годится только лишь для случая конечного или счетного множества Ω. В случае несчетного Ω вероятность любого элементарного исхода ω, как правило, равняется нулю. Как следствие, формула (33) перестает работать. Поэтому в случае несчетного множества Ω вероятность $\Pr$ определяется не как функция на множестве событий Ω, а сразу как функция на некоторой алгебре событий $\mathcal{A}$. При таком подходе равенства $\Pr(\Omega) = 1$ и (36) становятся аксиомами теории вероятности.

Иными словами, в дискретном случае мы можем ограничиться множеством Ω элементарных событий и заданной на нем функцией $\Pr : \Omega \to [0, 1]$, удовлетворяющей условию нормировки. В непрерывном же случае нам необходимо рассматривать тройку $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$, где Ω — множество исходов, $\mathcal{A}$ — некоторая алгебра подмножеств Ω, а $\Pr$ — заданная на $\mathcal{A}$ вероятность. При этом говорят, что тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ определяет *вероятностную модель* или *вероятностное пространство* некоторого случайного эксперимента с множеством исходов Ω и алгеброй событий $\mathcal{A}$.

Как мы уже сказали, мы в данном курсе будем рассматривать только дискретную вероятность. Однако для единообразия мы все же будем и в дискретном случае использовать тройку $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ для описания случайных экспериментов.

Пример 6.1. Рассмотрим случайный эксперимент с однократным подбрасыванием монетки. Его можно описать, задав пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{\text{решка}, \text{орел}\}$$

и введя на нем вероятность $\Pr : \Omega \to [0, 1]$ по формулам

$$\Pr(\{\text{решка}\}) = p, \qquad \Pr(\{\text{орел}\}) = q,$$

где p, q — вещественные положительные числа, такие, что $p + q = 1$. Этот же случайный эксперимент можно описать чуть более сложно, рассмотрев вероятностное пространство вида $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \Pr_1)$, в котором

$$\Omega_1 = \{\text{решка}, \text{орел}\}, \qquad \mathcal{A}_1 = 2^{\Omega_1} = \{\varnothing, \{\text{решка}\}, \{\text{орел}\}, \{\text{орел или решка}\}\}, \tag{37}$$

а вероятность $\Pr_1$ на $\mathcal{A}_1$ описывается соотношениями

$$\Pr_1(\varnothing) = 0, \qquad \Pr_1(\{\text{решка}\}) = p, \qquad \Pr_1(\{\text{орел}\}) = q, \qquad \Pr_1(\{\text{орел или решка}\}) = 1. \tag{38}$$

6.1.6. Вообще говоря, вероятности элементарных событий можно определять достаточно произвольно. Так, если мы считаем монетку сделанной идеально, то вероятность q выпадения орла совпадает с вероятностью p выпадения решки и равна одной второй. В случае же монетки со смещенным центром тяжести вероятность этих элементарных событий может различаться. Так, ничто не мешает нам, например, определить $p = 1/4$, а $q = 3/4$.

Однако на практике все же часто удобно считать, что все различные элементарные события являются равновероятными. В этом случае для любого $\omega \in \Omega$

$$\Pr(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, \qquad \text{и, как следствие,} \qquad \Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Такой способ задания вероятности называется классическим. В этом случае подсчет вероятности $\Pr(A)$ события A сводится к подсчету количества исходов, к этому событию приводящих. Иными словами, в этом случае задача становится чисто комбинаторной.

Пример 6.2. Вернемся к одной из классических урновых схем, а именно, к задаче о подсчете упорядоченных выборок с повторениями. Переформулируем эту задачу на языке дискретной вероятности.

Пусть в урне имеется n различимых предметов. Будем поочередно вытаскивать k предметов, записывать, какой из предметов и в каком порядке мы вытащили, а затем возвращать каждый предмет обратно в урну. Данная последовательность действий представляет собой случайный эксперимент, элементарным исходом которого является упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in X$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Множество Ω всех возможных исходов выглядит в этом случае так:

$$\Omega = \{\omega : \ \omega = (a_1, a_2, \ldots, a_k), \quad a_i \in X\}.$$

Считая, что любые элементарные исходы данного случайного эксперимента являются равновероятными, мы получаем следующую вероятность любого элементарного исхода в этом эксперименте:

$$\Pr(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n^k}.$$

Рассмотрим теперь событие A, заключающееся в отсутствии повторений элементов a_i в наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$:

$$A = \{\omega : \ a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_k\}.$$

Из элементарной комбинаторики известно, что $|A| = (n)_k$ — количеству k-перестановок из n элементов без повторений. Как следствие,

$$\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(n)_k}{n^k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Рассмотренный пример является достаточно характерным — многие задачи элементарной комбинаторики могут быть переформулированы на языке теории вероятности. Например, задача об определении количества трехзначных чисел, содержащих цифры 3 и 6, может рассматриваться и как задача о нахождении вероятности того, что произвольно выбранное трехзначное число содержит цифры 3 и 6.

Упражнения

6.1 (0,5 балла)**.** Подсчитайте мощность пространства Ω элементарных событий для следующих случайных экспериментов:

1. производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, помеченных числами от 1 до 10 (заметим, что есть шанс попасть и мимо мишени);
2. три раза подбрасывается игральная кость; результат представляет собой упорядоченную последовательность из трех чисел;
3. наудачу извлекается одна кость из игры в домино.

6.2 (1 балл)**.** Подсчитайте мощность пространства Ω элементарных событий для следующего случайного эксперимента: вначале производится выстрел по мишени, описанной в предыдущем утверждении, а затем игральная кость бросается столько раз, сколько очков выбито на мишени.

6.3 (0,5 балла)**.** Предположим, что вероятности наступления событий A и B равны 0.5 и 0.7 соответственно. Найти наибольшую и наименьшую вероятность наступления событий $A \cup B$ и $A \cap B$.

6.4 (0,5 балла)**.** Рассмотрим лотерею "пять из тридцати шести", победителем которой является человек, правильно угадавший пять из тридцати шести чисел $1, 2, \ldots, 36$. Набор из пяти чисел считается неупорядоченным. Определите вероятность того, что произвольно выбранные пять чисел выиграют.

6.5 (1 балл)**.** Вычислите вероятность того, что при игре в лотерею "пять из тридцати шести" в произвольно выбранном наборе из пяти чисел хотя бы одно будет правильным.

6.6 (0,5 балла)**.** Три студента решают независимо друг от друга одну и ту же задачу. Вероятности решения студентами этой задачи равны, соответственно, 0.8, 0.7 и 0.6. Найдите вероятность того, что хотя бы один из них решит задачу.

6.7 (1 балл)**.** В урне лежат 8 черных и 5 белых шаров. Из урны одновременно извлекаются два шара. Найти вероятность того, что извлеченные шары а) одного цвета; б) разных цветов.

6.8 (1 балл)**.** В программе экзамена 75 вопросов. Студент выучил 50 из них. В билете три вопроса. Какова вероятность того, что в вытянутом студентом билете будет хотя бы два вопроса, известных студенту?

6.9 (1 балл)**.** Из колоды в 56 карт случайным образом выбирают 6 карт. Какова вероятность того, что среди выбранных карт имеются по три карты двух разных мастей? А вероятность того, что среди выбранных карт имеется не более двух карт бубновой масти?

Дополнительные упражнения

6.10 (0,5 балла)**.** В неидеальной игральной кости вероятность выпадения числа i на грани пропорциональна i (то есть $\Pr(1) = x$, а $\Pr(i) = i \cdot x$). Обозначим через A событие, состоящее в выпадении числа, меньшего 5, а через B — событие, состоящее в выпадении нечетного числа. Определите вероятности событий A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

6.11 (1 балл)**.** Вычислите вероятность угадывания ровно трех из правильных пяти номеров в лотерее "пять из тридцати шести".

6.12 (1 балл)**.** Рассматривается вероятностный эксперимент, заключающийся в бросании двух игральных кубиков. Мощность множества элементарных исходов в таком эксперименте равна 36, так как исходы вида "на первом кубике выпала единица, на втором — двойка" и "на первом кубике выпала двойка, на втором — единица", считаются различными. Какова вероятность того, что сумма значений на кубиках равна семи, если известно, что сумма — нечетная?

Решение упражнений

6.1. В первом случайном эксперименте имеется 11 элементарных исходов (один — попасть мимо мишени), во втором — $6^3 = 216$ (на выходе — строка из трех символов над алфавитом из шести чисел), а в третьем $|\Omega| = \left(\!\binom{7}{2}\!\right) = 28$ (любая кость домино — это элемент 2-мультимножества над множеством X из семи элементов $\{0, 1, \ldots, 6\}$).

6.2. В случае попадания мимо мишени кубик не кидается (единственный исход), в случае выбивания на мишени числа k, $k = 1, \ldots, 10$ мы имеем 6^k элементарных исходов. Тогда

$$|\Omega| = \sum_{k=0}^{10} 6^k = \frac{1 - 6^{11}}{1 - 6} = 72559411.$$

6.3. Максимум вероятности $\Pr(A \cup B)$ будет в случае, когда пересечение $A \cap B$ минимально. Последнее реализуется в случае, когда $\Pr(A \cap B) = 0.2$, при этом $\Pr(A \cup B) = 1$. Напротив, минимум вероятности $\Pr(A \cup B)$, равно как и максимум вероятности $\Pr(A \cap B)$, имеет место в случае, когда A целиком лежит в B; при этом $\Pr(A \cup B) = 0.7$, а $\Pr(A \cap B) = 0.5$.

6.4. Очевидно, что вероятность описанного в задании элементарного события ω равна

$$\Pr(\omega) = \frac{1}{|\Omega|},$$

где Ω есть множество всех возможных элементарных событий. Мощность этого множества совпадает с количеством 5-элементных подмножеств 36-элементного множества, то есть равна $\binom{36}{5}$. Следовательно,

$$\Pr(\omega) = \frac{1}{\binom{36}{5}} = \frac{5! \cdot 31!}{36!} = \frac{5!}{32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36} = \frac{1}{376992} = 2,65 \cdot 10^{-6}.$$

6.5. Для решения данной задачи введем два события — событие A, заключающееся в том, что человек угадывает хотя бы одну правильную цифру, и событие $B = \bar{A}$, состоящее в том, что он все цифры угадал неправильно. В этой задаче легче найти вероятность события B, а затем из формулы

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(B)$$

определить вероятность искомого события A. Действительно, вероятность того, что все пять цифр будут неправильными, определяется количеством всех 5-подмножеств $(36 - 5) = 31$-элементного множества. Следовательно,

$$\Pr(A) = 1 - \frac{\binom{31}{5}}{\binom{36}{5}} = 0.549.$$

6.6. Пусть A_i есть событие, состоящее в том, что i-й студент решил задачу. Вероятности этих событий равны, по условию, $\Pr(A_1) = 0.8$, $\Pr(A_2) = 0.7$ и $\Pr(A_3) = 0.6$. Рассмотрим теперь событие B, заключающееся в том, что хотя бы один из студентов решил задачу. Проще искать вероятность не события B, а противоположного ему события $\bar{B}$, описывающего ситуацию, когда ни один из студентов задачу не решил. Вероятность такого события равна

$$\Pr(\bar{B}) = \Pr(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = \Pr(\bar{A}_1) \cdot \Pr(\bar{A}_2) \cdot \Pr(\bar{A}_3) = 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.024.$$

Следовательно,

$$\Pr(B) = 1 - \Pr(\bar{B}) = 0.976.$$

6.7. Общее количество элементарных исходов равно количеству $\binom{8+5}{2}$ двуэлементных подмножеств $8 + 5 = 13$-элементного множества. Количество благоприятных исходов для события A, состоящего в том, что мы вытащили два шара одинакового цвета, равно сумме $\binom{8}{2} + \binom{5}{2}$, то есть количеству двуэлементных подмножеств 8-элементного множества черных шаров и количеству двуэлементных подмножеств 5-элементного множества белых шаров. Как следствие, вероятность наступления события A равна

$$\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{13 \cdot 6} = \frac{38}{78} = \frac{19}{39}.$$

Заметим теперь, что событие B, состоящее в том, что мы вытащили два шара разного цвета, образует вместе с событием A полный набор несовместных событий. Следовательно

$$\Pr(B) = 1 - \Pr(A) = \frac{20}{39}.$$

6.8. Общее количество элементарных исходов равно биномиальному коэффициенту $\binom{75}{3}$. Количество благоприятных исходов представляет собой сумму исходов, в которых выбрано ровно три билета из 50, известных студенту, и исходов, в которых выбрано два билета из 50; при этом в последнем случае любой из оставшихся 25 билетов может быть выбран произвольно. Как следствие, вероятность выбрать хотя бы два известных студенту билета равна

$$\frac{\binom{25}{1} \cdot \binom{50}{2} + \binom{50}{3}}{\binom{75}{3}} = \frac{50225}{67525} = \frac{2009}{2701}.$$

6.9. Общее количество элементарных исходов в данной задаче равно $\binom{52}{6} = 20358520$. При этом в первом случае благоприятные исходы подсчитываются так: мы $\binom{4}{2}$ числом способов выбираем две масти, а затем $\binom{13}{3} \cdot \binom{13}{3}$ количеством способов выбираем по три карты одной масти. Вероятность такого события A равна

$$\Pr(A) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{3}}{\binom{52}{6}} = \frac{490776}{20358520}.$$

Количество благоприятных исходов во втором случае есть сумма количества $\binom{39}{6}$ способов выбрать все шесть карт, масти которых отличны от бубен, плюс количество $\binom{39}{5} \cdot \binom{13}{1}$ способов выбрать ровно одну карту бубен, плюс количество $\binom{39}{4} \cdot \binom{13}{2}$ способов выбрать ровно две карты бубен. Как следствие, вероятность такого события B равна

$$\Pr(B) = \frac{\binom{39}{6} + \binom{39}{5} \cdot \binom{13}{1} + \binom{39}{4} \cdot \binom{13}{2}}{\binom{52}{6}} = \frac{17163042}{20358520}.$$

7 Условная вероятность, независимые события. Формула полной вероятности

7.1. Перейдем теперь к важному понятию условной вероятности.

7.1.1. Начнем с достаточно характерного примера.

Пример 7.1. Рассмотрим случайный эксперимент, связанный с подбрасыванием игральной кости. Обозначим через A событие, заключающееся в том, что у нас выпало число, большее трех, а через B — событие, состоящее в том, что у нас выпало четное число. Ясно, что

$$\Pr(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \Pr(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Теперь предположим, что мы получили некоторую дополнительную информацию, а именно, нам стало известно, что в результате случайного эксперимента у нас произошло событие A. Мы не знаем, произошло ли у нас событие B, однако появившаяся у нас дополнительная информация позволяет нам утверждать, что вероятность наступления события B увеличилась. Действительно, тот факт, что у нас произошло событие A, сужает множество возможных исходов случайного эксперимента до подмножества $A = \{4, 5, 6\}$. Два исхода из этих трех — выпадение чисел 4 и 6 — являются благоприятными для наступления события B. Иными словами, вероятность $\Pr(B|A)$ наступления события B при условии, что событие A произошло, возрастает и становится равной $2/3$.

7.1.2. Данный пример удобно иллюстрировать на диаграммах Эйлера-Венна (рис.9). Как мы знаем, в случае, когда все элементарные исходы равновероятны, вероятности наступления событий A и B равны

$$\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad \Pr(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}.$$

Информация о том, что у нас произошло событие A, сужает для B пространство возможных исходов с Ω до A. При этом все исходы, принадлежащие $A \cap B$, являются благоприятными для наступления события B, так что вероятность $\Pr(B|A)$ наступления события B при условии, что событие A произошло, становится равной

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}.$$

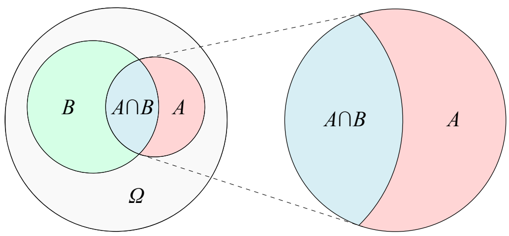


Рис. 9

Теперь мы можем сформулировать формальное определение понятия условной вероятности.

Определение 7.2. Условной вероятностью $\Pr(B|A)$, то есть вероятностью наступления события B при условии того, что событие A произошло, называется величина

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}. \tag{39}$$

Заметим, что так как событие A произошло, то гарантированно $\Pr(A) > 0$, а значит, данное выше определение корректно.

7.1.3. Отметим некоторые простейшие свойства условной вероятности. Прежде всего, из определения $\Pr(B|A)$ с очевидностью следует, что

$$\Pr(A|A) = 1, \qquad \Pr(\varnothing|A) = 0, \qquad \Pr(B|A) = 1 \quad \text{в случае, если } A \subset B.$$

Далее, в случае, если $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ выполняется равенство

$$\Pr(A \cap (B_1 \cup B_2)) = \Pr((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)) = \Pr(A \cap B_1) + \Pr(A \cap B_2),$$

а значит, в этом случае

$$\Pr((B_1 \cup B_2)|A) = \Pr(B_1|A) + \Pr(B_2|A).$$

Следствием этого свойства является важное равенство

$$\Pr(B|A) + \Pr(\bar{B}|A) = 1.$$

7.1.4. Вернемся к примеру с подбрасыванием игральной кости. Предположим теперь, что нам кто-то сообщил о том, что в результате случайного эксперимента событие A не произошло (или, что то же самое, произошло событие $\bar{A} = \Omega \backslash A$). В этом случае шансы на наступление события B уменьшились — из множества $\bar{A} = \{1, 2, 3\}$ возможных исходов только один исход — выпадение числа 2 — является для B благоприятным. Иными словами, вероятность $\Pr(B|\bar{A})$ при условии, что произошло событие $\bar{A}$, равна 1/3. Заметим, что у нас при этом выполняется любопытное равенство вида

$$\Pr(A) \cdot \Pr(B|A) + \Pr(\bar{A}) \cdot \Pr(B|\bar{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = \Pr(B). \tag{40}$$

Полученная формула называется *формулой полной вероятности.* В ее справедливости легко убедиться, проанализировав рис.9.

7.1.5. Формулу полной вероятности обычно записывают в несколько более общем виде. Именно, рассмотрим полную группу несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ясно, что

$$B = B \cap \Omega = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n),$$

откуда на основании свойства (34) следует, что

$$\Pr(B) = \Pr(B \cap A_1) + \Pr(B \cap A_2) + \ldots + \Pr(B \cap A_n).$$

С учетом формулы (39) вероятности $\Pr(B \cap A_i)$ можно выразить через условные вероятности $\Pr(B|A_i)$:

$$\Pr(B \cap A_i) = \Pr(B|A_i) \cdot \Pr(A_i). \tag{41}$$

Отсюда окончательно получается следующая обобщенная формула полной вероятности:

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot \Pr(A_i). \tag{42}$$

7.1.6. Приведем достаточно характерный пример использования формулы (42).

Пример 7.3. Пусть в магазине имеется 100 лампочек, 60 из которых сделаны производителем номер 1, 25 — производителем номер 2, и 15 — производителем номер 3. Вероятность выхода из строя лампочки в первую неделю ее работы у первого производителя равна 0.02, у второго — 0.01, и у третьего — 0.03. Какова вероятность того, что случайно купленная в магазине лампочка выйдет из строя в течение первой недели?

Решение. Обозначим через A_i событие, заключающееся в том, что купленная лампочка принадлежит i-му производителю. Очевидно, что событие Ω, отвечающее покупке лампочки, является достоверным событием (то есть $\Pr(\Omega) = 1$), а $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$, то есть события A_i образуют полную группу несовместных событий. При этом $\Pr(A_1) = 0.6$, $\Pr(A_2) = 0.25$, $\Pr(A_3) = 0.15$.

Далее, вероятность выхода из строя лампочки в первую неделю ее работы у i-го производителя является, очевидно, условной вероятностью $\Pr(B|A_i)$, где B — событие, состоящее в выходе из строя лампочки в первую неделю ее работы. Следовательно, согласно формуле (42) полной вероятности,

$$\Pr(B) = 0.6 \cdot 0.02 + 0.25 \cdot 0.01 + 0.03 \cdot 0.15 = 0.019.$$

7.1.7. В примере **7.**.3 постановка задачи была в определенном смысле прямой: у нас было известно, что хотя бы одно из трех событий A_i произошло (лампочка была куплена), и мы искали вероятность наступления события B, состоящего в том, что купленная нами в магазине лампочка в первую неделю перегорела. На практике, однако, нас может интересовать и такая постановка задачи: пусть лампочка у нас в первую неделю все же перегорела; какова вероятность того, что в этом случае (то есть при наступлении события B) эта лампочка принадлежит, к примеру, 2-му производителю?

С формальной точки зрения речь идет о вычислении условной вероятности $\Pr(A_i|B)$: событие B произошло, плюс произошло и какое-то из трех возможных событий A_i; нас же интересует вероятность того, что в этом случае до наступления события B случилось именно событие A_2, а не два других события.

Оказывается, на такой вопрос также достаточно легко ответить. Именно, предположим, что вероятность $\Pr(B)$ события B строго больше нуля. Заметим, что тогда наряду с формулами

$$\Pr(B|A_i) = \frac{\Pr(B \cap A_i)}{\Pr(A_i)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Pr(B \cap A_i) = \Pr(B|A_i) \cdot \Pr(A_i)$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ мы можем написать и аналогичные равенства

$$\Pr(B \cap A_i) = \Pr(A_i|B) \cdot \Pr(B) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(B \cap A_i)}{\Pr(B)}.$$

Вспоминая теперь, что $\Pr(B \cap A_i)$ вычисляется по формуле (41), а также то, что для $\Pr(B)$ справедлива формула полной вероятности (**7.**.3), мы для $\Pr(A_i|B)$ получаем соотношение

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(A_i) \cdot \Pr(B|A_i)}{\Pr(A_1) \cdot \Pr(B|A_1) + \Pr(A_2) \cdot \Pr(B|A_2) + \ldots + \Pr(A_n) \cdot \Pr(B|A_n)}. \tag{43}$$

В частности, в нашей задаче вероятность того, что лампочка была изготовлена вторым производителем, равна

$$\Pr(A_2|B) = \frac{0.25 \cdot 0.01}{0.6 \cdot 0.02 + 0.25 \cdot 0.01 + 0.03 \cdot 0.15} = \frac{0.01 \cdot 0.25}{0.019} = \frac{5}{38} = 0.13.$$

7.1.8. Формула (43) носит название *теоремы Байеса* и играет достаточно важную роль в разного рода практических задачах. В этих задачах события A_i часто называют *гипотезами*, вероятность $\Pr(A_i)$ — *априорной* вероятностью гипотезы A_i, а вероятность $\Pr(A_i|B)$ трактуется как *апостериорная* вероятность наступления события A_i, то есть вероятность этого события *после* наступления события B.

Одна из наиболее популярных задач в этой области — это нахождение так называемой *наиболее вероятной гипотезы,* то есть события A_i, для которого $\Pr(A_i|B)$ будет наибольшим среди всех A_i. В нашей задаче таковой будет, очевидно, гипотеза, состоящая в том, что перегоревшая лампочка была изготовлена первым предприятием:

$$\Pr(A_1|B) = \frac{0.6 \cdot 0.02}{0.019} = \frac{12}{19} = 0.63.$$

Так как знаменатель в формуле Байеса (43) равен $\Pr(B)$ и не зависит от A_i, то общем случае для определения наиболее вероятной гипотезы следует найти такую гипотезу A_i, для которой величина $\Pr(B|A_i) \cdot \Pr(A_i)$ будет максимальной.

Довольно часто в такого рода задачах все априорные вероятности считаются одинаковыми и равными $1/n$. В этом случае наиболее вероятной гипотезой будет, очевидно, событие A_i с наибольшей условной вероятностью $\Pr(B|A_i)$.

7.2. Следующее понятие — понятие независимых событий — является одним из самых важных и ключевых в теории вероятности.

7.2.1. Пусть у нас имеются два события A и B. Логично считать, что событие B не зависит от события A, если вероятность $\Pr(B)$ не зависит от того, наступило ли событие A или не наступило. Иными словами, B не зависит от A, если $\Pr(B|A) = \Pr(B)$.

Вспоминая теперь определение условной вероятности, мы получаем, что в случае $\Pr(A) > 0$ независимость B от A влечет равенство

$$\Pr(B) = \Pr(B|A) = \frac{\Pr(B \cap A)}{\Pr(A)} \qquad \Longrightarrow \qquad \Pr(B \cap A) = \Pr(B) \cdot \Pr(A).$$

Последнее равенство как раз и кладется в определение независимости случайных событий.

Определение 7.4. События A и B являются независимым, если их совместная вероятность равна произведению этих вероятностей:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B). \tag{44}$$

В противном случае события A и B называются зависимыми.

Последнее определение хорошо тем, что, во-первых, оно симметрично относительно A и B, а во-вторых, работает даже в случаях, когда $\Pr(A)$ или $\Pr(B)$ равны нулю.

Пример 7.5. Вернемся к примеру **7.**.1 с подбрасыванием кубика. Мы уже поняли, что события A и B зависимы — вероятность $\Pr(B|A)$ отлична от вероятности $\Pr(B)$. Этот же вывод дает нам равенство (44). Действительно, $\Pr(A \cap B) = 1/3$, тогда как $\Pr(A) \cdot \Pr(B) = 1/4$.

Рассмотрим теперь событие C, состоящее в том, что в процессе бросания кубика выпало число, кратное трем. Вероятность $\Pr(C) = 1/3$; при этом

$$\Pr(A \cap C) = \frac{1}{6} = \Pr(A) \cdot \Pr(C), \qquad \Pr(B \cap C) = \frac{1}{6} = \Pr(B) \cdot \Pr(C).$$

Следовательно, события A и C, равно как и события B и C попарно независимы.

7.2.2. Понятие независимости довольно естественно обобщается на случай нескольких случайных событий.

Определение 7.6. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми (иногда добавляют в совокупности), если

$$\Pr(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}) = \Pr(A_{i_1}) \cdot \Pr(A_{i_1}) \cdot \ldots \Pr(A_{i_k}) \qquad \text{для любых } 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n.$$

Важно заметить, что из попарной независимости событий независимость в совокупности не следует.

Пример 7.7. Предположим, что мы бросаем два игральных кубика. Обозначим через A событие, состоящее в том, что на первом кубике выпало нечетное количество очков, через B — событие, состоящее в том, что на втором кубике выпало нечетное количество очков, а через C — событие, состоящее в том, что сумма выпавших на обоих кубиков очков нечетна. Несложно убедиться, что вероятности всех этих событий равны $1/2$, а также то, что эти события попарно независимы. Например, $\Pr(A \cap B) = 1/4 = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$. Однако

$$A \cap B \cap C = A \cap B \qquad \Longrightarrow \qquad \Pr(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \Pr(A) \cdot \Pr(B) \cdot \Pr(C).$$

Как следствие, эти три события независимыми в совокупности не являются.

7.2.3. Обычно определить, являются ли какие-то два отдельных события A и B независимыми, довольно затруднительно. Например, не проводя соответствующих вычислений, не очень понятно, являются ли независимыми события "выпадение на кубике нечетного числа" и "выпадение на кубике числа, меньшего или равного трем". Однако существует довольно распространенная конструкция, в которой пары независимых событий возникают довольно естественно, по построению. Для того, чтобы эту конструкцию проще было понять, мы опишем вначале схему ее построения на достаточно простом, но в то же время важном примере — на так называемой схеме Бернулли.

Рассмотрим случайный эксперимент, состоящий из последовательности n одинаковых независимых случайных испытаний, то есть таких испытаний, результаты каждого из которых никак не зависят от результатов прочих испытаний. Предположим, что в каждом таком испытании возможны ровно два исхода, называемые успехом и неудачей, причем вероятность успеха в каждом эксперименте одинакова и равна $p \in (0, 1)$, а вероятность q неудачи равна, соответственно, $1 - p$. Такого рода случайный эксперимент и называется *схемой Бернулли.*

Данная схема моделирует, например, случайный эксперимент, заключающийся в n-кратном подбрасывании монетки. Если монетка правильная, то $p = q = 1/2$. В противном случае имеем так называемую несимметричную монетку, для которой $p \neq q$. Кроме этого простейшего примера, схема Бернулли моделирует множество других случайных экспериментов [6].

7.2.4. С целью формального описания схемы Бернулли вернемся к простейшему случайному эксперименту, заключающемуся в подбрасывании монетки. Напомним, что вероятностное пространство для такого эксперимента описывается соотношениями (37)–(38).

Теперь несколько усложним его, а именно, предположим, что мы n раз подбрасываем данную монету. Результат любого такого эксперимента можно записать в виде битовой строки вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, в которой $a_i = 1$ в случае, если, например, у нас выпала решка, и $a_i = 0$ в случае выпадения орла. При таком подходе пространство всех исходов Ω_n и алгебра событий $\mathcal{A}_n$ имеют вид

$$\Omega_n = \{\omega : \ \omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\}, \qquad \mathcal{A}_n = 2^{\Omega_n}. \tag{45}$$

Покажем, что вероятность Pr_n любого элементарного события ω можно в этом случае задать с помощью соотношения

$$\mathrm{Pr}_n(\omega) = p^k q^{n-k}, \qquad\qquad k = \sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad\qquad p, q > 0, \qquad p + q = 1. \tag{46}$$

Действительно, очевидно, что $\mathrm{Pr}_n(\omega) \in (0, 1)$. Кроме того, количество всех элементарных исходов, для которых $\sum_i a_i = k$, совпадает с количеством $\binom{n}{k}$ битовых строк длины n, содержащих k единиц. Поэтому

$$\sum_{\omega \in \Omega_n} \mathrm{Pr}_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1.$$

Следовательно, описываемая приведенными выше соотношениями (45)–(46) тройка $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathrm{Pr}_n)$ определяет вероятностную модель, описывающую n-кратное подбрасывание монеты.

Обозначим через A_k событие, состоящее в том, что в результате серии n испытаний произошло ровно k успехов. Как мы только что показали, вероятность такого события равна

$$\mathrm{Pr}_n(A_k) = \binom{n}{k} p^k \, q^{n-k}, \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{47}$$

Очевидно, что набор $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ образует полную группу несовместных событий. Соответствующий этим событиям набор вероятностей $\{\mathrm{Pr}_n(A_0), \mathrm{Pr}_n(A_1), \ldots, \mathrm{Pr}_n(A_n)\}$ называется *биномиальным распределением* количества успехов в n испытаниях.

7.2.5. Перейдем теперь к описанию независимых событий в схеме Бернулли.

Определение 7.8. Говорят, что событие B_k зависит только от k-го испытания, если появление этого события определяется только лишь значением a_k.

Самым простым и самым важным событием такого рода является событие B_k вида

$$B_k = \{\omega : \ \ a_k = 1\}, \qquad\qquad \bar{B}_k = \{\omega : \ \ a_k = 0\}.$$

Иными словами, событие B_k заключается в появлении успеха, а $\bar{B}_k$ — неудачи на k-м испытании. Ясно, что

$$\mathrm{Pr}(B_k) = p, \qquad\qquad \mathrm{Pr}(\bar{B}_k) = q.$$

Несложно с помощью формальных выкладок также показать, что для всех $k \neq l$

$$\mathrm{Pr}(B_k \cap B_l) = p^2, \qquad \mathrm{Pr}(B_k \cap \bar{B}_l) = p \cdot q, \qquad \mathrm{Pr}(\bar{B}_k \cap \bar{B}_l) = q^2.$$

Следовательно, все такие события являются попарно независимыми. Более того, оказывается, что эти события являются также независимыми в совокупности, то есть такими событиями, для которых равенство

$$\mathrm{Pr}(B_{k_1} \cap B_{k_2} \cap \ldots \cap B_{k_i}) = \mathrm{Pr}(B_{k_1}) \cdot \mathrm{Pr}(B_{k_2}) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Pr}(B_{k_i})$$

выполняется для любых $i = 1, \ldots, n$, $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_i \leqslant n$. Независимость событий B_k и дает формальное основание называть построенную вероятностную модель $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathrm{Pr}_n)$ моделью, отвечающую n независимым испытаниям с двумя исходами, или схемой Бернулли.

7.2.6. Заметим теперь, что формально та же самая схема Бернулли может быть построена и несколько по-другому. Именно, вернемся к элементарной вероятностной модели (37)–(38), описывающей однократное подбрасывание монетки, и рассмотрим декартовое произведение n множеств Ω_1:

$$\Omega_1 \times \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_1 := \Omega.$$

Элементами ω этого множества Ω будут, как и в предыдущем случае, упорядоченные наборы вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, в которых $a_i \in \Omega_1$. Алгебра $\mathcal{A}$ ее подмножеств строится из множеств вида $A_1 \times \ldots \times A_1$, $A_1 \in \mathcal{A}_1$. Наконец, для любого $\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ положим

$$\mathrm{Pr}(\omega) = \mathrm{Pr}_1(a_1) \cdot \mathrm{Pr}_1(a_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Pr}_1(a_n).$$

Несложно убедиться, что получаемая в итоге тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ образует вероятностную модель, полностью эквивалентную введенной выше модели $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathrm{Pr}_n)$, то есть также описывающую схему Бернулли.

7.2.7. Вернемся теперь к началу данного пункта и опишем общую схему построения такой вероятностной модели, в которой достаточно естественно возникают пары независимых событий. Сразу заметим, что эта схема легко обобщается на случай n независимых событий.

Пусть $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathrm{Pr}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathrm{Pr}_2)$ — пара вероятностных моделей. Образуем декартово произведение пары множеств элементарных событий $\Omega_1 \times \Omega_2$, которое обозначим через Ω. Затем из набора подмножеств вида $A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ стандартным образом построим алгебру событий $\mathcal{A}$. Наконец, вероятность на этой алгебре событий определим так: для любых $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$

$$\mathrm{Pr}(A_1 \times A_2) = \mathrm{Pr}_1(A_1) \cdot \mathrm{Pr}_2(A_2).$$

Полученная тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ в этом случае будет представлять собой некоторую вероятностную модель, в которой любые события вида (A_1, Ω_2) и (Ω_1, A_2) гарантированно являются независимыми. На практике большинство примеров независимых событий имеют именно такую природу.

Упражнения

7.1 (1 балл)**.** Рассмотрим произвольную перестановку трех элементов вида $p = p_1p_2p_3$. Обозначим через A событие, состоящее в том, что $p_1 > p_2$, а через B — событие, заключающееся в том, что $p_2 > p_3$. Являются ли эти события независимыми?

7.2 (1,5 балла)**.** Рассмотрим множество всех перестановок букв $\{a, b, c, d\}$. Найдите условные вероятности следующих событий:

1. события A, состоящего в том, что буква a стоит на первом месте при условии наступления события B_1, состоящего в том, что буква b оказалась на последнем месте;
2. события A при условии наступления события B_2, состоящего в том, что буква a оказалась не на последнем месте;

3. события A при условии наступления события B_3, состоящего в том, что буква b оказалась не на последнем месте;
4. события A при условии наступления события B_4, состоящего в том, что буква b стоит в перестановке правее буквы a;
5. события $\widetilde{A}$, состоящего в том, что буква a стоит в перестановке перед буквой b при условии наступления события $\widetilde{B}$, состоящего в том, что буква c стоит в перестановке за буквой a.

7.3 (1 балл)**.** Подбрасываются три игральные кости. Событие A состоит в том, что одинаковое число очков выпало на первой и второй костях, B — одинаковое число очков на второй и третьей костях, C — на первой и третьей. Являются ли эти события попарно независимыми? А независимыми в совокупности?

7.4 (1 балл)**.** Из полного набора костей домино взята одна кость. Найдите вероятность того, что наудачу взятую вторую кость можно приставить к первой по правилам домино.

7.5 (0,5 балла)**.** В урне находятся белые и черные шары общим количеством в n штук. Обозначим через A_k событие, состоящее в том, что в урне имеется ровно k, $k = 0, \ldots, n$, белых шаров. Будем считать, что вероятности событий A_k одинаковы и равны $1/(1+n)$. Предположим, что мы вытащили белый шар. Найдите вероятность того, что в урне при этом лежало ровно k белых шаров.

7.6 (1,5 балла)**.** Предположим, что тест на наркотики дает 99% истинно положительных результатов для людей, употребляющих наркотики, и 98.5% истинно отрицательных результатов для людей, наркотики не употребляющих. Предположим, что в мире существует $0,5\%$ наркоманов. Предположим, что произвольно выбранный тест показал положительный результат на употребление наркотиков. Какова вероятность того, что человек, сдавший тест, действительно является наркоманом?

7.7 (0,5 балла)**.** Предположим, что вероятность попадания в цель у стрелка при однократном выстреле не зависит от результатов других выстрелов и равна $1/4$. Стрелок делает 5 выстрелов. Найти вероятность события A, состоящего в том, что стрелок попал в цель ровно три раза, а также вероятность события B, заключающегося в том, что стрелок попал в цель как минимум три раза.

7.8 (0,5 балла)**.** Игральная кость подбрасывается десять раз. Какова вероятность трехкратного выпадения шестерки?

7.9 (1 балл)**.** Два равносильных шахматиста играют в матч из n результативных партий. Ничьи во внимание не принимаются. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех? б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти?

7.10 (1 балл)**.** Отрезок разделен на четыре части в отношении $1:2:3:4$. На отрезок наудачу нанесли 8 точек. Найдите вероятность того, что на каждую из четырех частей отрезка попадет по две точки.

Дополнительные упражнения

7.11 (1 балл)**.** Из колоды, содержащей 52 карты, наугад извлекается одна карта. Событие A означает, что извлеченная карта является дамой, событие B — что извлечена карта пиковой масти. Являются ли события A и B независимыми? Решите эту же задачу при условии, что в колоде 54 карты, т.е. к стандартной 52-карточной колоде добавлены два джокера. Джокер не имеет масти и не является дамой.

7.12 (1,5 балла)**.** Из двух мешков для лото, содержащих бочонки с числами от 1 до 90, достают по бочонку. Зависимы ли события A и B, если A есть выпадение чётной суммы, B — выпадение суммы, большей 140?

7.13 (1 балл)**.** Монету подбрасывают три раза. Нам не показывают результат, но говорят, что решка выпала хотя бы один раз. Какова вероятность того, что решка выпала все три раза?

7.14 (1,5 балла)**.** Даны натуральные числа m и n, причем $m < n$. Из чисел $1, 2, \dots, n$ последовательно выбирают наугад два различных числа. Найдите вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет больше или равна m.

7.15 (2 балла)**.** Дано натуральное число $n < 52$. Из тщательно перемешанной колоды в 52 карты одновременно были взяты n карт. На одну из этих n карт посмотрели, она оказалась тузом. После этого она возвращается в набор взятых карт, а затем эти выбранные на первом шаге n карт снова тщательно перемешиваются. После этого из них выбирается одна карта и открывается. Найдите вероятность того, что открытая карта является тузом.

7.16 (1 балл)**.** Производитель конфет M&M's периодически меняет цвета своих конфет в упаковке. До 1995 года в одной упаковке конфет M&M's содержалось 30 процентов коричневых, 20 желтых, 20 красных, 10 оранжевых, 10 зеленых, 10 желто-коричневых конфет. В 1995 году производитель добавил в набор синие конфеты и изменил распределение конфет в наборе. Именно, после 1995 года в стандартном наборе конфет содержалось 24 процентов синих, 20 зеленых, 16 оранжевых, 14 желтых, 13 красных и 13 коричневых конфет. Предположим, что вам дают по одной конфете из двух разных упаковок, одной — 1994 года, второй — 1996 года выпуска, но не говорят, какая конфета взята из какой упаковки. Пусть вам досталась одна желтая и одна зеленая конфета. Какова вероятность того, что желтая конфета оказалась из упаковки 1994 года?

7.17 (1 балл)**.** В понедельник, после двух выходных, токарь Василий вытачивает левовинтовые шурупы вместо требуемых правовинтовых с вероятностью 0.5. Во вторник этот показатель снижается до 0.2. В остальные дни недели Василий ударно трудится, и процент брака среди изготавливаемых им шурупов составляет 10%. При проверке недельной партии шурупов, выточенных Василием, случайно выбранный шуруп оказался дефектным. Какова вероятность того, что шуруп изготовлен в понедельник, если известно, что в понедельник он вытачивает в два раза меньше шурупов, чем в каждый из остальных рабочих дней?

7.18 (1,5 балла)**.** По статистике, 30% из общего количества студентов, которым читается данный курс, сдают экзамен с первой попытки и в срок, 50% с первой попытки его не сдают, но успевают пересдать экзамен в течение основной сессии, а оставшиеся 20% либо вовсе экзамен не сдают, либо сдают его в допсессию. Известно, что среди студентов первой группы 95% успешно заканчивают свое обучение в университете, среди студентов второй группы эта величина составляет 60%, а среди тех, кто в основную сессию данный курс не сдал, доля получивших в итоге диплом составляет 20%. Определите процент студентов, успешно защищающих диплом, по отношению к общему числу поступивших студентов.

7.19 (1,5 балла)**.** Из десяти стрелков пять попадают в цель с вероятностью, равной 80%, три - с вероятностью, равной 50%, и два – с вероятностью 90%. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, поразив цель. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

7.20 (2 балла)**.** Предположим, что вы участвуете в игре, в которой вам предлагают выбрать одну из трех дверей; за одной из этих дверей находится какой-то приз, за двумя другими приза нет. Пусть вы выбрали одну из дверей, скажем, первую дверь. Ведущий игры, не открывая этой двери и зная, что расположено за ней, открывает еще одну дверь дверь, за которой приза нет (пусть это будет, для определенности, вторая дверь), а затем предлагает вам изменить свое решение, выбрав третью дверь. Имеет ли вам смысл изменить свое решение?

7.21 (1 балл)**.** Для заданных натуральных чисел n, m, $m < n$, найдите вероятность того, что в $2n$ испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p появятся $n + m$ успехов, и при этом успехом закончатся все испытания с четными номерами.

7.22 (1 балл)**.** По многолетним наблюдениям, в районе обсерватории из 30 ноябрьских ночей ясных бывает в среднем 10. Группе астрономов, собирающихся сделать мировое открытие, выделено 7 ночей для наблюдений. Найдите вероятность того, что мировое открытие будет совершено, если для этого требуется по крайней мере 3 ясные ночи.

7.23 (1,5 балла)**.** Несимметричную монетку бросают до тех пор, пока не выпадет орел. Найдите вероятность того, что это случилось на втором бросании, если известно, что для этого потребовалось четное число бросаний.

7.24 (1,5 балла)**.** Рассмотрим схему Бернулли из n испытаний, в которой вероятность p успеха является иррациональным числом. Найдите, при каком k, $k = 1, 2, \dots, n$, величина $\Pr(A_k)$ будет наибольшей.

7.25 (1,5 балла)**.** Предположим, что у нас имеются три монетки, две из которых правильные, а третья является несимметричной, вероятность выпадения орла у которой $p = 1/3$. Мы случайным образом выбираем из этих трех монеток одну и подбрасываем ее пять раз. В результате такого эксперимента у нас один раз выпадает орел и четыре раза решка. Какая монетка была выбрана с большей вероятностью — идеальная или несимметричная?

7.26 (1,5 балла)**.** Костя Сидоров любит ходить в тир пострелять. Его рекорд в серии из пяти выстрелов составляет 47 очков. Какова вероятность повторить рекорд, если в среднем он попадает в десятку в 30% случаев, в девятку — в 40%, в восьмерку — в 20%, в семерку — в 5%, а оставшиеся 5% приходятся на диапазон 0–6?

Решение упражнений

7.1. Для ответа на поставленный вопрос нам нужно сосчитать вероятность $\Pr(A \cap B)$ и сравнить ее с произведением вероятностей $\Pr(A)$ и $\Pr(B)$. Последние, очевидно, равны $\Pr(A) = \Pr(B) = 1/2$, так как для любой перестановки, у которой, например, $p_1 > p_2$, существует обратная ей перестановка, у которой $p_1 < p_2$. Событие $A \cap B$ отвечает перестановке, у которой $p_1 > p_2 > p_3$, и вероятность появления такого рода перестановки равна, очевидно, $1/6$. Это число отлично от $1/4 = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$, что означает, что события A и B являются зависимыми.

7.2. Воспользуемся формулой (39) для подсчета условной вероятности. В случае равновероятных элементарных исходов ее можно переписать так:

$$\Pr(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

В случае наступления событий B_1 и B_2 буква a может стоять на $3! = 6$ позициях, две из которых принадлежат событию $A \cap B$. Следовательно, для первых двух пунктов ответ одинаков и равен $1/3$.

Количество элементарных исходов, отвечающих случайному событию B_3, равна $3^2 = 9$. Действительно, буква b может стоять на одной из трех первых позиций; при этом для каждой такой позиции имеется по три возможных позиции для буквы a. При этом количество элементарных исходов, отвечающих событию $A \cap B_3$, равно 2. Следовательно, вероятность $\Pr(A|B_3) = 2/9$.

Случайному событию B_4 отвечают 6 элементарных исходов: три для случая, когда a стоит на первой позиции, два для случая, когда она стоит на второй позиции, и один для случая, когда a стоит на третьей позиции. При этом количество благоприятных исходов равно 3, так что $\Pr(A|B_4) = 1/2$.

Наконец, рассмотрим случайные события $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. Здесь нам нужно рассматривать взаимные расположения трех букв a, b и c. Как следствие, мощность множества $\widetilde{B}$ равна 12: в случае, когда a стоит на первом месте, для букв b и c имеется 6 возможных позиций, в случае, когда a стоит на втором месте — 4, и в случае, когда a стоит на третьем месте — 2. Из них благоприятных имеется $6 + 2 = 8$ вариантов. Как следствие, $\Pr(\widetilde{A}|\widetilde{B}) = 8/12 = 2/3$.

7.3. Заметим, что $\Pr(A) = \Pr(B) = \Pr(C) = 1/6$. Далее, $\Pr(A \cap B) = 6/6^3 = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$, а значит, события A и B попарно независимы. Аналогичное утверждение имеет место и для двух оставшихся пар событий. Однако $\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A \cap B) = 1/36$, тогда как $\Pr(A) \cdot \Pr(B) \cdot \Pr(C) = 1/6^3$. Следовательно, независимыми в совокупности эти события не являются.

7.4. Обозначим через A_1 событие, состоящее в том, что мы выбрали дубль, то есть симметричную костяшку, а через A_2 — событие, состоящее в том, что мы выбрали несимметричную костяшку. Ясно, что $\Pr(A_1) = 7/28 = 1/4$, а $\Pr(A_2) = 1 - \Pr(A_1) = 3/4$. Пусть B — событие, состоящее в том, что наудачу взятую вторую кость мы можем приставить к первой. Тогда условная вероятность $\Pr(B|A_1) = 6/27$, а условная вероятность $\Pr(B|A_2) = 12/27$. Следовательно, по формуле полной вероятности (42) получаем, что

$$\Pr(B) = \Pr(A_1) \cdot \Pr(B|A_1) + \Pr(A_2) \cdot \Pr(B|A_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{27} + \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{27} = \frac{7}{18}.$$

7.5. Ясно, что $\Pr(B|A_k) = k/n$. Следовательно, согласно формуле Байеса (43) мы получаем

$$\Pr(A_k|B) = \frac{k/n \cdot 1/(n+1)}{(0 + 1 + 2 + \ldots + n)/n \cdot 1/(n+1)} = \frac{2k}{n(n+1)}.$$

7.6. Обозначим через A_1 гипотезу, состоящую в том, что человек наркотики употребляет, а через $A_2 = \bar{A}_1$ — гипотезу, состоящую в том, что человек наркоманом не является. Из условия задачи известно, что $\Pr(A_1) = 0.005$; следовательно, $\Pr(A_2) = 0.995$.

Предположим теперь, что у нас произошло событие B, заключающееся в том, что тест показал положительный результат. Нам нужно сосчитать вероятность $\Pr(A_1|B)$ того, что человек, для которого тест дал положительный результат, действительно употребляет наркотики. Для этого воспользуемся формулой (43).

Апостериорная вероятность $\Pr(B|A_1)$ того, что тест дает положительный результат в случае, когда человек действительно наркотики употребляет, по условию равна $\Pr(B|A) = 0.99$. Апостериорная вероятность $\Pr(B|A_2)$ того, что тест дает положительный результат, но человек наркотики не употребляет, равна 0.015. Таким образом, согласно формуле (43) имеем

$$\Pr(A_1|B) = \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.99 \cdot 0.005 + 0.015 \cdot 0.995} = 0.249.$$

Как видно, несмотря на относительную аккуратность проводимых исследований, то, что тест оказывается положительным, означает, что с высокой вероятностью человек, сдавший этот тест, наркоманом не является.

7.7. Согласно формуле (47), вероятность $\Pr(A)$ события A равна

$$\Pr(A) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{512}.$$

Вероятность $\Pr(B)$ события B равна сумме

$$\Pr(B) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\frac{3}{4} + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{53}{512}.$$

7.8. Вероятность p выпадения шестерки при однократном подбрасывании кубика равна $1/6$, вероятность q выпадения любой другой цифры равна $5/6$. Следовательно, согласно формуле (47), вероятность трехкратного выпадения шестерки после десяти подбрасываний равна

$$\binom{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0.155.$$

7.9. Так как шахматисты равносильны, то вероятности выиграть (успех) и проиграть (неудача) отдельную партию у каждого шахматиста одинаковы и равны $p = q = 1/2$. Тогда, согласно формуле (47), вероятность выиграть одну партию из двух равна

$$\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

а вероятность выиграть две партии из четырех равна

$$\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}.$$

Иными словами, вероятность выиграть одну партию из двух выше, чем вероятность выиграть две партии из четырех.

Аналогично, вероятность выиграть не менее двух партий из четырех равна

$$\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6+4+1}{16} = \frac{11}{16},$$

а выиграть не менее трех партий из пяти равна

$$\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10+5+1}{32} = \frac{8}{16}.$$

Как видно, вторая вероятность меньше первой.

7.10. Так как $1+2+3+4 = 10$, то вероятность попасть в первую часть отрезка равна $1/10$, во вторую — $2/10$, в третью — $3/10$ и в четвертую — $4/10$. Следовательно, согласно формуле (47), вероятность описанного в задании случайного события равна

$$\frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^2 = 0.0145152.$$

8 Случайные величины

8.1. Во многих практических задачах нам не очень интересна конкретная природа пространства Ω элементарных событий — как правило, нас больше интересуют какие-то числовые характеристики того или иного случайного эксперимента. Например, в случайном эксперименте с n-кратным подбрасыванием монетки мы чаще следим за количеством успехов в n испытаниях, чем за результатами того или иного элементарного исхода. С формальной точки зрения описание таких числовых характеристик проводится на языке случайных величин.

8.1.1. Начнем с определения случайной величины.

Определение 8.1. Случайной величиной называется произвольная вещественная функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на (конечном) пространстве Ω элементарных событий.

Так как обычно в каждой конкретной задаче имеется лишь одно пространство Ω, то вместо $\xi(\omega)$ мы, как правило, будем просто писать ξ.

Пример 8.2. Рассмотрим случайный эксперимент, состоящий в подбрасывании двух игральных костей. Случайную величину $\xi = \xi(\omega)$ для такого эксперимента можно определить, например, как арифметическую сумму очков на выпавших гранях.

8.1.2. Предположим, что множество Ω элементарных исходов конечно ($|\Omega| = m$). Тогда конечным оказывается и множество $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ возможных значений, которые может принимать заданная на Ω случайная величина. Обозначим через

$$A_k = \{\omega \in \Omega : \ \xi(\omega) = x_k\} \tag{48}$$

событие, заключающееся в том, что ξ принимает заданное значение x_k. Вычислим для каждого $k = 1, \ldots, n$ вероятность такого события:

$$\Pr(A_k) = \sum_{\omega:\ \xi(\omega)=x_k} \Pr(\omega).$$

Определение 8.3. Набор вероятностей $\{\Pr(A_1), \Pr(A_2), \ldots, \Pr(A_n)\}$ случайных событий (48) называется *распределением вероятностей* случайной величины ξ.

Очевидно, что при любом исходе случайная величина какое-то значение обязательно примет. Как следствие, сумма всех вероятностей из данного набора обязана быть равной единице:

$$\sum_{k=1}^{n} \Pr(A_k) = 1.$$

Пример 8.4. Случайная величина ξ из примера **8.**.2 принимает 11 возможных значений $x_k \in X$, $X = \{2, 3, \ldots, 12\}$. Соответствующее ξ распределение вероятностей здесь таково:

Значение x_k случайной величины ξ:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность $\Pr(\xi = x_k)$:	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Заметим, что отдельно взятая случайная величина ξ полностью характеризуется множеством X своих значений, а также распределением вероятностей этих значений. Детальная информация о структуре множества Ω всех элементарных событий нам в этом случае уже не важна. По сути, мы можем определить новое множество $\widetilde{\Omega} = X$ элементарных исходов, множество $\mathcal{B}$ всех его подмножеств, и ввести на $(X, \mathcal{B})$ вероятность $\Pr_\xi(B)$ по формуле

$$\Pr\nolimits_\xi(B) = \Pr(\xi \in B) = \sum_{x_k \in B} \Pr(\xi = x_k).$$

Тройка $(X, \mathcal{B}, \Pr_\xi)$ в этом случае полностью определяет нам соответствующую вероятностную модель, в которой событие A_k вида "случайная величина ξ принимает заданное значение $x_k \in X$" является элементарным событием.

8.1.3. Довольно часто на практике распределения вероятностей случайной величины ξ сводятся к трем важным частным случаям — биномиальному распределению, геометрическому распределению и гипергеометрическому распределению.

Биномиальное распределение связано с разобранной в конце предыдущего параграфа схемой Бернулли. Именно, пусть n — количество испытаний в схеме Бернулли. Введем случайную величину ξ, принимающую значения из множества $X = \{0, 1, \dots, n\}$ и описывающую количество успехов и неудач в схеме Бернулли. Распределение вероятностей этой случайной величины совпадает с биномиальным распределением (47) и равно

$$\Pr(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{49}$$

Определение 8.5. Распределение вероятностей (49) случайной величины ξ, значениями которой являются все возможные значения количества k успехов в схеме Бернулли, носит название *биномиального распределения* случайной величины ξ.

8.1.4. Со схемой Бернулли связано и так называемое геометрическое распределение дискретной случайной величины ξ. Именно, пусть в схеме Бернулли случайный эксперимент прекращается сразу, как только в этом эксперименте впервые случился успех. Ясно, что вероятность наступления такого события A_k равна

$$\Pr(A_k) = p \cdot q^{k-1}.$$

Введем случайную величину ξ, равную количеству проведенных в этом эксперименте испытаний.

Определение 8.6. Распределение вероятностей

$$\Pr(\xi = k) = p \cdot q^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{50}$$

носит название *геометрического распределения вероятностей* случайной величины ξ.

Важно заметить, что в данной модели значение параметра k может быть любым натуральным числом. Следовательно, в этой модели дискретная случайная величина ξ принимает счетное число значений. При этом, как и следовало ожидать, сумма вероятностей

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pr(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = 1.$$

8.1.5. Наконец, рассмотрим еще одно распределение случайной величины ξ, носящее название гипергеометрического распределения. Этому распределению отвечает следующая схема случайного эксперимента.

Пусть у нас имеется множество X элементов мощности $|X| = n + m$, состоящее из n элементов первого типа и m элементов второго типа. Предположим, что мы выбираем k элементов этого множества. Как мы знаем, это можно сделать $\binom{n+m}{k}$ количеством способов. Пусть теперь i — количество элементов первого вида, оказавшихся в выборке объема k. Введем случайную величину ξ, принимающую значения i, $i = 0, 1, \ldots, k$. Ясно, что вероятность

$$\Pr(\xi = i) = \frac{\binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}}{\binom{n}{k}}. \tag{51}$$

В силу тождества Вандермонта (11),

$$\left[\binom{n}{k}\right]^{-1} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i} = 1.$$

Определение 8.7. Распределение вероятностей (51) случайной величины ξ носит название *гипергеометрического распределения.*

8.2. Предположим теперь, что на одном и том же множестве Ω задана не одна, а две случайные величины ξ_1 и ξ_2.

8.2.1. Вернемся к примеру **8.**.2 с подбрасыванием двух кубиков.

Пример 8.8. Введем наряду с ξ случайную величину η, равную произведению чисел, выпавших на двух кубиках. Распределение вероятностей данной случайной величины таково:

Значение y_j:	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$\Pr(\eta = y_j)$:	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Для того, чтобы охарактеризовать их поведение в совокупности, не зная ничего о структуре исходного вероятностного пространства, нам нужно, вообще говоря, задать, как говорят, их совместное распределение вероятностей, то есть сосчитать вероятности вида

$$\Pr(\xi_1 = x_k \text{ и } \xi_2 = y_j) \qquad \text{для всех} \quad x_k \in X, \quad y_j \in Y.$$

Иными словами, нам в данном случае в качестве множества значений нужно взять декартово произведение $X \times Y$ множества значений случайных величин ξ_1 и ξ_2, а затем определить вероятность для каждого элемента этого декартова произведения.

Пример 8.9. Для случайных величин ξ и η из примеров **8.**.2 и **8.**.8 мы в случае $\xi = x_1 = 2$, $\eta = y_1 = 1$ имеем $\Pr(\xi = 2, \eta = 1) = 1/36$. Действительно, имеется лишь один из 36 элементарных исходов, при котором сумма значений равна 2, а произведение равно 1 — элементарный исход, при котором на гранях двух кубиков выпали единицы. В случае $\xi = 2$, $\eta > 1$ вероятность $\Pr(\xi, \eta) = 0$.

8.2.2. В общем случае сосчитать совместное распределение вероятностей непросто. Однако существует важный частный случай, когда вычисление этого распределения сводится к задаче вычисления распределения вероятности каждой отдельно взятой случайной величины.

Определение 8.10. Говорят, что ξ_1 и ξ_2 являются *независимыми* случайными величинами, если

$$\Pr(\xi_1 = x_k \text{ и } \xi_2 = y_j) = \Pr(\xi_1 = x_k) \cdot \Pr(\xi_2 = y_j) \qquad \text{для всех} \quad x_k \in X, \quad y_j \in Y. \tag{52}$$

Пример 8.11. В примере с двумя кубиками мы можем ввести случайную величину ξ_1 как число очков на первом кубике, и случайную величину ξ_2 как количество очков на втором кубике. Ясно, что эти случайные величины являются независимыми.

Пример 8.12. Заметим, что случайные величины ξ и η из примеров **8.**.2 и **8.**.8 независимыми не являются. Это видно и чисто интуитивно: если нам сказали, что $\xi = 2$, то мы тут же можем сказать, что $\eta = 1$. Для формального доказательство данного факта достаточно, например, заметить, что произведение вероятностей $\Pr(\xi = x_k)$ и $\Pr(\eta = y_j)$ для любых допустимых значений x_k и y_j строго больше нуля, тогда как вероятность того, что $\xi = x_k$ и одновременно $\eta = y_j$, достаточно часто равна нулю — например, если $x_k = 2$, а $y_j > 1$.

8.2.3. В более общем случае рассмотрим некоторый набор $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$ случайных величин, заданных на одном и том же множестве Ω и принимающих значения из некоторого конечного или счетного множества X.

Определение 8.13. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ со значениями в одном и том же множестве X называются *независимыми (в совокупности)*, если для любых $x_i \in X$

$$\Pr(\xi_1 = x_{i_1}, \xi_2 = x_{i_2}, \ldots, \xi_m = x_{i_m}) = \Pr(\xi_1 = x_{i_1}) \cdot \Pr(\xi_2 = x_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \Pr(\xi_m = x_{i_m}).$$

Пример 8.14. Простейший пример независимых в совокупности случайных величин можно получить, рассматривая схему Бернулли. Именно, пусть

$$\Omega = \{\omega : \ \omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad a_i \in \{0, 1\}\}, \qquad \Pr(\omega) = p^k q^{n-k}, \quad k = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Мы заметили, что события вида

$$B_1 = \{\omega : \ a_1 = 1\}, \qquad B_2 = \{\omega : \ a_2 = 1\}, \qquad \ldots \qquad B_n = \{\omega : \ a_n = 1\}$$

являются независимыми в совокупности. Введем множество $X = \{0, 1\}$ и рассмотрим n случайных величин вида $\xi_k(\omega) = a_k$, принимающих значения в этом множестве. Каждая такая случайная величина ξ_k характеризует результат случайного испытания в схеме Бернулли на k-м шаге. Свойство независимости событий B_k влечет тогда тот факт, что случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ также являются независимыми в совокупности. Кроме того, каждая из этих n случайных величин имеют одинаковое распределение вероятностей

$$\Pr(\xi_k = 1) = p, \qquad \Pr(\xi_k = 0) = q.$$

Введенная таким образом совокупность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимых и одинаково распределенных случайных величин носит название последовательности бернулиевских случайных величин.

8.2.4. Вернемся к примеру с двумя кубиками. Понятно, что любое значение случайной величины ξ из примера **8.**.2 представляет собой сумму значений случайных величин ξ_1 и ξ_2. Возникает вопрос — возможно ли по известным *распределениям вероятностей* случайных величин ξ_1 и ξ_2 вычислить *распределение вероятностей* случайной величины $\xi = \xi_1 + \xi_2$.

Итак, предположим, что мы имеем пару случайных величин ξ_1 и ξ_2, таких, что ξ_1 принимает значения из множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, а ξ_2 — из множества $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Введем новую случайную величину ξ как арифметическую сумму случайных величин ξ_1 и ξ_2. Ясно, что случайная величина $\xi = \xi_1 + \xi_2$ принимает значения из множества

$$Z = \{z \mid \text{z — всевозможные различные суммы } x_k + y_j, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Распределение же вероятностей случайной величины ξ выражается через совместное распределение вероятностей случайных величин ξ_1 и ξ_2:

$$\Pr(\xi = z) = \Pr(\xi_1 + \xi_2 = z) = \sum_{(k,j):\, x_k + y_j = z} \Pr(\xi_1 = x_k \text{ и } \xi_2 = y_j).$$

Теперь понятно, что в случае, когда случайные величины ξ_1 и ξ_2 являются независимыми, последнее соотношение можно упростить и выразить распределение вероятностей ξ через известные распределения вероятностей случайных величин ξ_1 и ξ_2:

$$\Pr(\xi = z) = \Pr(\xi_1 + \xi_2 = z) = \sum_{(k,j):\, x_k + y_j = z} \Pr(\xi_1 = x_k) \cdot \Pr(\xi_2 = y_j) = \sum_{k=1}^{n} \Pr(\xi_1 = x_k) \cdot \Pr(\xi_2 = z - x_k).$$

В последней сумме вероятность $\Pr(\xi_2 = z - x_k)$ считается равной нулю, если $z - x_k \notin Y$.

8.2.5. В качестве характерного примера рассмотрим случайную величину $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где ξ_1, ξ_2 — пара независимых бернуллиевских случайных величин. В этом случае $Z = \{0, 1, 2\}$, а распределение вероятностей случайной величины ξ описывается следующими соотношениями:

$$\Pr(\xi = 0) = \Pr(\xi_1 = 0) \cdot \Pr(\xi_2 = 0) = q \cdot q = q^2,$$

$$\Pr(\xi = 1) = \Pr(\xi_1 = 0) \cdot \Pr(\xi_2 = 1) + \Pr(\xi_1 = 1) \cdot \Pr(\xi_2 = 0) = 2\,p\,q,$$
$$\Pr(\xi = 2) = \Pr(\xi_1 = 1) \cdot \Pr(\xi_2 = 1) = p \cdot p = p^2.$$

Данный пример естественным образом обобщается на случай n независимых бернуллиевских случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Именно, сумма ξ_i представляет собой случайную величину $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, принимающую значения из множества $Z = \{0, 1, \ldots, n\}$ и описывающую количество успехов и неудач в схеме Бернулли. Распределение вероятностей этой случайной величины описывается биномиальным распределением (49).

Упражения

8.1 (0.5 балла)**.** Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в отдельно взятом опыте равна 0.1. Постройте распределение вероятностей случайной величины ξ, равной количеству отказавших элементов в отдельно взятом опыте.

8.2 (1 балл)**.** В тире стрелку, попавшему в мишень, выдается призовой патрон для следующего выстрела. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0.8. Найдите закон распределения дискретной случайной величины ξ, равной количеству призовых патронов, выданных стрелку, при условии, что вначале он купил только один патрон.

8.3 (1 балл)**.** Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0.3, вторым — 0.7. Начинает стрельбу первое орудие. Постройте законы распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2, равных количеству израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудием.

8.4 (0,5 балла)**.** В партии из 10 деталей имеется 3 бракованные. Наудачу отобраны две детали. Составьте закон распределения случайной величины ξ, равной числу бракованных деталей среди отобранных.

8.5 (0,5 балла)**.** Распределение вероятностей случайной величины ξ_1 имеет вид

$$\Pr(\xi_1 = 1) = 0.4, \qquad \Pr(\xi_1 = 2) = 0.6,$$

а распределение вероятностей независимой с ξ_1 случайной величины ξ_2 записывается так:

$$\Pr(\xi_2 = 3) = 0.8, \qquad \Pr(\xi_2 = 4) = 0.2.$$

Запишите распределение вероятностей случайной величины $\xi = \xi_1 + \xi_2$.

8.6 (1,5 балла)**.** Рассматривается случайный эксперимент, заключающийся в подбрасывании двух игральных кубиков. Событие A_n, $n = 2, 3, \ldots, 12$, означает, что сумма очков на кубиках равна n, а событие B_k, $k = 1, 2, \ldots, 6$ — что на первом кубике выпало k очков. Для каких пар (n, k) события A_n и B_k оказываются независимыми?

Дополнительные упражнения

8.7 (1,5 балла)**.** В процессе экзамена преподаватель задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать вопросы после первого неверного ответа на задаваемый студенту вопрос. Вероятность правильного ответа на каждый вопрос равна 0.9. Постройте закон распределения дискретной случайной величины ξ, равной количеству дополнительных вопросов, задаваемых студенту. Найдите количество дополнительных вопросов, которое имеет наибольшую вероятность.

8.8 (1 балл)**.** В урне находятся k белых и m черных шаров. Из нее последовательно вынимаются два шара. В первой схеме эксперимента они в урну обратно не возвращаются, во второй — возвращаются. Случайная величина ξ равна количеству вытащенных белых шаров. Найдите распределение вероятностей этой случайной величины для обеих схем проведения случайного эксперимента.

8.9 (0,5 балла)**.** Получите распределение вероятностей случайной величины $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, распределения вероятностей которых имеют следующий вид:

$$\Pr(\xi_1 = 1) = \frac{1}{6}, \qquad \Pr(\xi_1 = 2) = \frac{1}{3}, \qquad \Pr(\xi_1 = 3) = \frac{1}{10}, \qquad \Pr(\xi_1 = 4) = \frac{2}{5};$$

$$\Pr(\xi_2 = 0) = \frac{1}{3}, \qquad \Pr(\xi_2 = 1) = \frac{2}{3}.$$

8.10 (1,5 балла)**.** Рассматривается случайный эксперимент, заключающийся в подбрасывании трех игральных кубиков. Обозначим через ξ, η и ζ случайные величины, равные количеству очков, выпавших на первом, втором и третьем кубиках соответственно. Какие пары из приведенных ниже пар случайных величин являются независимыми?

1. ξ и η;
2. ξ и $\xi + \eta$;
3. ξ и $\eta + \zeta$;
4. $\xi + \eta$ и $\xi + \zeta$;
5. ξ^2 и η^3;
6. $\xi + \eta$ и ζ^2;
7. $7 - \eta$ и $\xi + \zeta$;
8. $\min\{\xi, \eta\}$ и $\max\{\xi, \zeta\}$;
9. $\min\{\xi, \eta\}$ и $\max\{\xi, \eta\}$.

8.11 (2 балла)**.** Верно ли, что если ξ и η — независимые случайные величины, то таковыми являются также $f(\xi)$ и $g(\eta)$, где f и g — произвольные функции?

Решение упражнений

8.1. Дискретная случайная величина ξ может принимать значения $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Все отказы элементов независимы друг от друга, а вероятности отказа каждого элемента равны одному и тому же числу $p = 0.1$. Следовательно, мы в данном случае имеем схему Бернулли, а случайная величина ξ описывается биномиальным законом распределения. При этом

$$\Pr(\xi = 0) = q^3 = 0.729, \qquad \Pr(\xi = 1) = \binom{3}{1} pq^2 = 0.243,$$

$$\Pr(\xi = 2) = \binom{3}{2} p^2 q = 0.027, \qquad \Pr(\xi = 3) = p^3 = 0.001.$$

8.2. Вероятность промахнуться при первом же выстреле совпадает с вероятностью $\Pr(\xi = 0)$ и равна $1 - 0.8 = 0.2$. Вероятность получения одного призового патрона, равная $\Pr(\xi = 1) = 0.2 \cdot 0.8$, отвечает ситуации, при которой стрелок попадает в мишень в процессе первого выстрела и промахивается в процессе второго выстрела. В общем случае $\xi = k$ мы, очевидно, имеем $\Pr(\xi = k) = 0.2 \cdot 0.8^{k-1}$, то есть получаем геометрическое распределение (50) случайной величины ξ.

8.3. Обозначим через A_i и B_i события, состоящие в том, что в результате i-го выстрела соответственно первое и второе орудие попали в цель. Первое орудие израсходует лишь один снаряд в случае, если оно попадет в цель при первом же выстреле, или в случае, когда оно промахнется, а второе орудие при первом же выстреле попадет в цель. Вероятность наступления такого события совпадает с $\Pr(\xi_1 = 1)$ и равна

$$\Pr(\xi_1 = 1) = \Pr(A_1) + \Pr(\bar{A}_1) \cdot \Pr(B_1) = 0.3 + 0.7 \cdot 0.7 = 0.79.$$

Первое орудие израсходует два снаряда если оно либо попадет со второго раза, либо второе орудие попадет со второго раза. Вероятность наступления такого события равна

$$\Pr(\xi_1 = 2) = \Pr(\bar{A}_1) \cdot \Pr(\bar{B}_1) \cdot \Pr(A_2) + \Pr(\bar{A}_1) \cdot \Pr(\bar{B}_1) \cdot \Pr(\bar{A}_2) \cdot \Pr(B_2) = 0.21 \cdot (0.3 + 0.7 \cdot 0.7) = 0.79 \cdot 0.21.$$

В общем случае имеем

$$\Pr(\xi_1 = k) = 0.79 \cdot 0.21^{k-1}.$$

Для случайной величины ξ_2 аналогичные рассуждения дают

$$\Pr(\xi_2 = 0) = \Pr(A_1) = 0.3,$$

$$\Pr(\xi_2 = 1) = \Pr(\bar{A}_1) \cdot \Pr(B_1) + \Pr(\bar{A}_1) \cdot \Pr(\bar{B}_1) \cdot \Pr(A_2) = 0.553,$$

$$\Pr(\xi_2 = k) = 0.553 \cdot 0.21^{k-1}.$$

8.4. Случайная величина ξ, равная количеству бракованных изделий в контрольной партии, описывается гипергеометрическим законом (51) распределения. Как следствие,

$$\Pr(\xi = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}, \qquad \Pr(\xi = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}, \qquad \Pr(\xi = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{15}.$$

8.5. Заметим, прежде всего, что в силу независимости случайных величин ξ_1 и ξ_2 для этих величин выполняется равенство (52). Учитывая также, что возможными значениями случайной величины $\xi = \xi_1 + \xi_2$ являются числа $4, 5, 6$, мы получаем

$$\Pr(\xi = 4) = \Pr(\xi_1 = 1) \cdot \Pr(\xi_2 = 3) = 0.4 \cdot 0.8 = 0.32,$$

$$\Pr(\xi = 5) = \Pr(\xi_1 = 1) \cdot \Pr(\xi_2 = 4) + \Pr(\xi_1 = 2) \cdot \Pr(\xi_2 = 3) = 0.56,$$

$$\Pr(\xi = 6) = \Pr(\xi_1 = 2) \cdot \Pr(\xi_2 = 4) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12.$$

8.6. Формально вероятность $\Pr(B_k) = 1/6$ для любого k; вероятность $\Pr(A_n) = (n-1)/36$ для $n = 2, 3, \ldots, 7$ и $\Pr(A_n) = (13-n)/36$ при $n = 8, 9, \ldots, 12$. Вероятность $\Pr(A_n \cap B_k) = 0$ для всех $n \leqslant k$, а следовательно, события A_n и B_k независимыми в этом случае быть не могут. Если же $n > k$, то количество очков на втором кубике равняется $n - k$; иными словами, вероятность такого события совпадает с вероятностью события, состоящего в выпадении конкретной пары чисел (i, j) на паре кубиков, а значит, равна $1/36$. При этом $\Pr(A_n) = 1/6$ только лишь для случая $n = 7$, а значит, лишь для пар вида $(7, k)$, $k = 1, 2, \ldots, 6$, случайные события A_n и B_k являются независимыми.

9 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

9.1. Перейдем теперь к таким важным характеристикам случайной величины, как математическое ожидание и дисперсия.

9.1.1. Рассмотрим произвольный случайный эксперимент. Предположим, что на множестве Ω элементарных исходов этого случайного эксперимента задана случайная величина ξ, принимающая значения из множества X, $|X| = n$. Будем повторять этот случайный эксперимент N раз, и следить за значениями, которые принимает случайная величина ξ в этих экспериментах. Интуитивно ясно, что каждое значение $x_k \in X$ случайной величины ξ появляется в этих испытаниях $N \cdot p_k$ раз, где $p_k = \Pr(\xi = x_k)$. Тогда среднее значение, которое принимает случайная величина ξ в результате N случайных экспериментов, должно быть примерно равно

$$\frac{(N\,p_1)\,x_1 + (N\,p_2)\,x_2 + \ldots + (N\,p_n)\,x_n}{N} = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k.$$

Данные рассуждения приводят нас к следующему определению.

Определение 9.1. Математическим ожиданием или средним значением случайной величины ξ называется сумма вида

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot x_k. \tag{53}$$

Пример 9.2. Колесо рулетки имеет равномерно расположенные по колесу ячейки, которые обозначены числами от 0 до 36. Предположим, что игрок ставит на некоторое число сумму, равную одному доллару. Если эта цифра выигрывает, то он получает 36 долларов, если проигрывает — то не получает ничего. Пусть ξ есть случайная величина, равная количеству денег, которые игрок выигрывает. Подсчитаем, сколько денег в среднем за n испытаний игрок может получить обратно.

Для этого заметим, что множество X возможных значений в данном случайном эксперименте есть $X = \{0, 36\}$. Первое значение случайная величина ξ принимает с вероятностью, равной $36/37$, а второе — с вероятностью $1/37$. Следовательно, по формуле (53) имеем

$$\mathrm{E}(\xi) = 36 \cdot \frac{1}{37} + 0 \cdot \frac{36}{37} = \frac{36}{37} = 0.973.$$

Как видим, в среднем за каждую попытку игрок теряет 0.027 долларов.

Пример 9.3. В случае однократного подбрасывания монетки

$$\mathrm{E}(\xi) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

Пример 9.4. В случае случайной величины ξ_1 из примера **8.**.11 имеем

$$\mathrm{E}(\xi_1) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)\,\frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

9.1.2. Часто на практике помимо математического ожидания приходится использовать и другие числовые величины, в той или иной степени характеризующие среднее значение, принимаемое случайной величиной ξ. Одна из таких величин — это так называемая медиана распределения.

Определение 9.5. Медианой случайной величины ξ называется вещественное число m, такое, что

$$\Pr(\xi \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2} \qquad \text{и} \qquad \Pr(\xi \geqslant m) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Очень часто медиана используется в экономике для оценки среднего значения случайной величины при сильно неравномерных распределениях, то есть в случаях, когда матожидание дает не сильно содержательный с точки зрения здравого смысла результат. Приведем классический пример такой ситуации.

Пример 9.6. Предположим, что зарплата преподавателя в университете составляет 20 тысяч рублей, а зарплата члена ректората — 2 миллиона рублей. Пусть в вузе работают 96 преподавателей и 6 членов ректората. Возьмем случайную величину ξ, равную зарплате случайно выбранного работника вуза. Предполагая, что вероятность выбрать любого работника одинакова и равна $1/100$, мы получаем, что матожидание случайной величины ξ равно

$$\mathrm{E}(\xi) = \frac{1}{100}\left(6 \cdot 2 \cdot 10^6 + 96 \cdot 2 \cdot 10^4\right) = 139200.$$

Однако такую сумму, конечно же, не слишком разумно считать среднестатистической зарплатой работников этого учреждения. При этом медиана рассматриваемого случайного распределения в этом случае равна 20000 рублей. Действительно,

$$\Pr(\xi \leqslant 2 \cdot 10^4) = \Pr(\xi = 2 \cdot 10^4) = \frac{96}{100} \geqslant \frac{1}{2}, \qquad \Pr(\xi \geqslant 2 \cdot 10^4) = 1 \geqslant \frac{1}{2}.$$

При этом, конечно же, сумма в 20 тысяч рублей значительно точнее характеризует среднее значение заработной платы в данном университете.

9.1.3. Поговорим теперь об основных свойствах математического ожидания. Прежде всего, заметим, что иногда нам все же полезно вспомнить об исходном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ и переписать формулу (53) в следующем эквивалентном виде:

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)\ \Pr(\omega). \tag{54}$$

Действительно, для всех ω, для которых $\xi(\omega) = x_k$, имеем

$$\sum_{\omega\colon\ \xi(\omega)=x_k} \Pr(\omega) = \Pr(\xi = x_k),$$

и мы от (54) приходим к (53).

Пусть у нас теперь имеются две произвольные случайные величины ξ_1 и ξ_2, определенные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$. В этом случае, согласно формуле (54), математическое ожидание суммы $\xi = \xi_1 + \xi_2$ этих двух случайных величин равно сумме математических ожиданий $\mathrm{E}(\xi_1)$ и $\mathrm{E}(\xi_2)$:

$$\mathrm{E}(\xi_2 + \xi_2) = \sum_{\omega \in \Omega} (\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega))\ \Pr(\omega) = \mathrm{E}(\xi_1) + \mathrm{E}(\xi_2).$$

Кроме того, из тех же соображений очевидно, что $\mathrm{E}(c\xi) = c\,\mathrm{E}(\xi)$ для любой константы $c \in \mathbb{R}$. Как следствие,

$$\mathrm{E}(c_1\xi_2 + c_2\xi_2) = c_1\,\mathrm{E}(\xi_1) + c_2\,\mathrm{E}(\xi_2) \qquad \forall\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Последнее равенство выражает собой свойство линейности математического ожидания.

Пример 9.7. Математическое ожидание $\mathrm{E}(\xi)$ случайной величины $\xi = \xi_1 + \xi_2$ из примера **8.**.2 равно 7.

В случае произведения случайных величин простая формула, связывающая математическое ожидание $\mathrm{E}(\xi_1 \cdot \xi_2)$ с математическими ожиданиями $\mathrm{E}(\xi_1)$ и $\mathrm{E}(\xi_2)$, имеет место лишь в том случае, когда ξ_1 и ξ_2 являются независимыми случайными величинами. В этом случае

$$\mathrm{E}(\xi_1 \cdot \xi_2) = \mathrm{E}(\xi_1) \cdot \mathrm{E}(\xi_2).$$

Действительно,

$$\mathrm{E}(\xi_1 \cdot \xi_2) = \sum_{\omega \in \Omega} \xi_1(\omega)\,\xi_2(\omega)\ \Pr(\omega) = \sum_{k,j} x_k y_j\ \Pr(\xi_1 = x_k \text{ и } \xi_2 = y_j) =$$

$$= \sum_{k,j} x_k y_j\ \Pr(\xi_1 = x_k)\ \Pr(\xi_2 = y_j) = \sum_k x_k \Pr(\xi_1 = x_k) \cdot \sum_j y_j\ \Pr(\xi_2 = y_j) = \mathrm{E}(\xi_1) \cdot \mathrm{E}(\xi_2).$$

Пример 9.8. Математическое ожидание $\mathrm{E}(\eta)$ случайной величины $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$ из примера **8.**.8 равно $\mathrm{E}(\xi_1) \cdot \mathrm{E}(\xi_2) = 7/2 \cdot 7/2 = 49/4$.

Пример 9.9. Для любой из n бернуллиевских случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ математическое ожидание $\mathrm{E}(x_k)$ равно, очевидно, p. Следовательно, математическое ожидание случайной величины

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

оказывается равным $\mathrm{E}(\xi) = n \cdot p$.

9.1.4. Перейдем теперь к понятию дисперсии $\mathrm{Var}(\xi)$ случайной величины ξ. Она характеризует степень разброса значений ξ относительно ее математического ожидания и определяется как средний квадрат отклонения от среднего:

$$\mathrm{Var}(\xi) := \mathrm{E}((\xi - \mathrm{E}(\xi))^2).$$

Так как

$$\mathrm{E}((\xi - \mathrm{E}(\xi))^2) = \mathrm{E}(\xi^2 - 2\xi\,\mathrm{E}(\xi) + (\mathrm{E}(\xi))^2) = \mathrm{E}(\xi^2) - 2\,\mathrm{E}(\xi) \cdot \mathrm{E}(\xi) + (\mathrm{E}(\xi))^2,$$

то

$$\mathrm{Var}(\xi) = \mathrm{E}(\xi^2) - (\mathrm{E}(\xi))^2. \tag{55}$$

Из последнего равенства, в частности, следует, что для произвольной константы $c \in \mathbb{R}$ дисперсия $\mathrm{Var}(c\xi) = c^2\,\mathrm{Var}(\xi)$.

Посмотрим теперь, чему равна дисперсия суммы случайных величин ξ_1 и ξ_2:

$$\mathrm{Var}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{E}((\xi_1 + \xi_2)^2) - (\mathrm{E}(\xi_1 + \xi_2))^2 = \mathrm{E}(\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2) - (\mathrm{E}(\xi_1) + \mathrm{E}(\xi_2))^2 =$$

$$= \mathrm{E}(\xi_1^2) + 2\,\mathrm{E}(\xi_1\xi_2) + \mathrm{E}(\xi_2^2) - \mathrm{E}(\xi_1)^2 - 2\,\mathrm{E}(\xi_1)\,\mathrm{E}(\xi_2) - \mathrm{E}(\xi_2)^2 = \mathrm{Var}(\xi_1) + \mathrm{Var}(\xi_2) + 2\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2),$$

где

$$\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) := \mathrm{E}(\xi_1\xi_2) - \mathrm{E}(\xi_1)\,\mathrm{E}(\xi_2) \tag{56}$$

есть так называемая *корреляция* двух случайных величин ξ_1 и ξ_2. Заметим, что в случае независимых случайных величин функция $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$, так что в этом случае дисперсия суммы равна сумме дисперсий:

$$\mathrm{Var}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{Var}(\xi_1) + \mathrm{Var}(\xi_2).$$

Пример 9.10. Для случайной величины ξ_1 из примера **8.**.11 согласно (55) имеем

$$\mathrm{Var}(\xi_1) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12},$$

поэтому дисперсия случайной величины ξ из примера **8.**.2 равна

$$\mathrm{Var}(\xi) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6}.$$

Пример 9.11. В случае бернуллиевской случайной величины ξ_1, принимающей два значения 0 и 1 с вероятностями q и p соответственно,

$$\mathrm{Var}(\xi_1) = \mathrm{E}(\xi_1^2) - (\mathrm{E}(\xi_1))^2 = (p \cdot 1^2 + q \cdot 0^2) - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Как следствие, если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ есть последовательность бернуллиевских случайных величин и ξ есть их сумма, то $\mathrm{Var}(\xi) = npq$.

9.1.5. Теперь мы можем более строго обосновать тот факт, что дисперсия есть мера разброса случайной величины ξ.

Лемма 9.12. *Для любого вещественного $\alpha > 0$ справедливо неравенство*

$$\Pr\left((\xi - \mathrm{E}(\xi))^2 \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(\xi)}{\alpha}, \tag{57}$$

называемое неравенством Чебышева.

Доказательство. Обозначим через $\mu := \mathrm{E}(\xi)$. По определению,

$$\mathrm{Var}(\xi) = \mathrm{E}((\xi - \mu)^2) = \sum_{\omega \in \Omega} \Pr(\omega)\,(\xi(\omega) - \mu)^2 \geqslant \sum_{\omega \in \Omega\colon (\xi(\omega)-\mu)^2 \geqslant \alpha} \Pr(\omega)\,(\xi(\omega) - \mu)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\omega \in \Omega\colon (\xi(\omega)-\mu)^2 \geqslant \alpha} \Pr(\omega) \cdot \alpha = \alpha \cdot \Pr\left((\xi - \mu)^2 \geqslant \alpha\right).$$

□

Для того, чтобы лучше понять смысл неравенства (57), перепишем его в несколько ином виде. Введем наряду с $\mathrm{Var}(\xi)$ так называемое стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(\xi)}$ случайной величины ξ и перейдем от параметра α к новому параметру c по формуле $\alpha = c^2\,\mathrm{Var}(\xi) = c^2\sigma^2$. Условие $(\xi - \mu)^2 \geqslant \alpha$ в этом случае принимает вид $(\xi - \mu)^2 \geqslant c^2\sigma^2$, что равносильно тому, что $|\xi - \mu| \geqslant c\sigma$. В результате неравенство Чебышева (57) записывается так:

$$\Pr\left(|\xi - \mu| \geqslant c\sigma\right) \leqslant \frac{1}{c^2}.$$

Данное неравенство полезно в случае $c > 1$. В этом случае его можно трактовать так: ξ отклоняется от своего среднего значения μ больше, чем на c стандартных отклонений σ с вероятностью меньшей или равной $1/c^2$. Например, в случае $c = 2$ имеем $1/c^2 = 0.25$, и поэтому отклонение случайной величины ξ от μ не превосходит 2σ по крайней мере для 75% испытаний. В случае $c = 10$ этот процент возрастает до 99%.

Упражения

9.1 (0,5 балла)**.** Рассмотрим обобщенную схему Бернулли, в которой исходом одного испытания являются числа 1, -1 и 0 с вероятностями p, q и $1 - p - q$ соответственно, $p, q \in [0, 1]$, $p + q \leqslant 1$. Случайная величина ξ принимает значения, равные сумме выпавших в процессе n испытаний чисел. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

9.2 (1 балл)**.** Колесо рулетки в равномерно расположенных ячейках имеет числа от 0 до 36. Ячейки с чётными номерами в диапазоне от 2 до 36 окрашены в черный цвет, ячейки с нечетными номерами в диапазоне от 1 до 36 окрашены в красный цвет. Игрок платит доллар и выбирает цвет. Если игрок выигрывает, то он получает два доллара, если проигрывает, то не получает ничего. Есть подозрение, что в среднем игрок проигрывает казино какую-то сумму, а казино соответствующую сумму выигрывает. Подсчитайте величину среднего проигрыша игрока.

9.3 (1 балл)**.** Обозначим через η максимальное из значений очков, выпавших на двух игральных костях. Постройте распределение вероятностей этой случайной величины, найдите ее матожидание и дисперсию.

9.4 (1,5 балла)**.** Найдите математическое ожидание и дисперсию геометрического распределения (50).

9.5 (1 балл)**.** Дискретная случайная величина ξ принимает только значения $1, 2$ и 3. Кроме того, известно, что математическое ожидание $\mathrm{E}(\xi) = 2.1$, а дисперсия $\mathrm{Var}(\xi) = 0.89$. Найдите закон распределения случайной величины ξ, то есть определите вероятности $\Pr(\xi = k)$, $k = 1, 2, 3$.

9.6 (1 балл)**.** Докажите, что в случае пары независимых случайных величин ξ и η дисперсия

$$\mathrm{Var}(\xi \cdot \eta) = \mathrm{Var}(\xi) \cdot \mathrm{Var}(\eta) + a^2 \,\mathrm{Var}(\xi) + b^2 \,\mathrm{Var}(\eta), \qquad a = \mathrm{E}(\xi), \quad b = \mathrm{E}(\eta).$$

9.7 (2 балла)**.** Найдите корреляцию случайной величины ξ, равной количеству очков, выпадающих на одном игральном кубике, и случайной величины η из примера **9.**.3.

9.8 (1 балл)**.** Предположим, что случайная величина $\widetilde{\xi}$ принимает только неотрицательные значения, α — некоторая положительная константа. Докажите, что вероятность

$$\Pr(\widetilde{\xi} \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\widetilde{\xi})}{\alpha}. \tag{58}$$

Выведите из этого неравенства неравенство Чебышева (57).

9.9 (0,5 балла)**.** Средняя температура в квартире составляет 20 градусов, а среднее квадратическое отклонение равно 2 градуса. Оцените вероятность того, что температура в квартире отклонится от средней по абсолютной величине более чем на 5 градусов.

Дополнительные упражнения

9.10 (1 балл)**.** Предположим, что игральным картам присвоены следующие стоимости: туз имеет стоимость, равную одному доллару, двойка — 2 доллара, ..., десятка — 10 долларов, валет — 11, дама — 12, король — 13. Игрок вытягивает одну карту. В случае, если эта карта бубновой масти, игрок получает ее стоимость. Если червовой, то ее стоимость удваивается. Если карта черной масти, то игрок платит 10 долларов. Чему равно математическое ожидание выигрыша?

9.11 (1,5 балла)**.** Восемь шаров, пронумерованных числами $0, 1, 1, 2, 2, 2, 5$ и 10 соответственно, помещены в урну. Игрок вытягивает три из них и получает выигрыш в сумме, равной сумме чисел на трех шарах. Каково математическое ожидание выигрыша в такой игре?

9.12 (1,5 балла)**.** Предположим, что у вас имеется связка из n ключей, лишь один из которых подходит к вашей двери. Вы случайным образом выбираете ключи из связки и пытаетесь открыть дверь. В первом случае вы снимаете из связки неподошедшие ключи, во втором оставляете их в связке. Подчитайте математическое ожидание количества попыток открыть дверь в первом и во втором случаях.

9.13 (1,5 балла)**.** Случайная величина ξ принимает все натуральные значения от 1 до 1000. Вероятность $\Pr(\xi = k)$ пропорциональна k. Найдите медиану и математическое ожидание случайной величины ξ.

9.14 (1,5 балла)**.** Дискретная случайная величина ξ принимает только два значения x_1 и x_2, $x_1 < x_2$. Кроме того, известно, что вероятность $\Pr(\xi = x_1) = 0.2$, математическое ожидание $\mathrm{E}(\xi) = 2.6$, а дисперсия $\mathrm{Var}(\xi) = 0.64$. Найдите закон распределения случайной величины ξ, то есть определите вероятность $\Pr(\xi = x_2)$, а также значения x_1 и x_2.

9.15 (1,5 балла)**.** Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение с математическим ожиданием, равным e, и дисперсией, равной d. Найдите корреляцию случайных величин $a\xi + b\eta$ и $a\xi - b\eta$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

9.16 (2 балла)**.** Число ξ выбирается случайным образом из множества $\{1, 2, 3, 4\}$, а затем из этого же множества выбирается число η, большее или равное ξ. Найдите $\mathrm{E}(\eta)$, $\mathrm{Var}(\eta)$, а также $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$.

9.17 (1 балл)**.** Средняя величина вклада в банке составляет 100 тысяч рублей. Оцените вероятность того, что наудачу выбранный вклад не превысит 2 миллиона рублей.

9.18 (1,5 балла)**.** В лотерее на выплату по выигрышам уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть в такую лотерею сумму, большую или равную 5000 рублей, меньше одного процента.

9.19 (1,5 балла)**.** Игральная кость подбрасывается $n = 500$ раз. Пусть ξ — случайная величина, равная среднему арифметическому количества выпавших за n испытаний очков. С помощью неравенства Чебышева оцените вероятность того, что ξ отклонится от $\mathrm{E}(\xi)$ по абсолютной величине не более, чем на $0,2$.

Решение упражнений

9.1. Введем случайные величины ξ_i, равные результату испытания в i-м эксперименте. Эти случайные величины независимы, принимают значения 1 с вероятностью p, -1 с вероятностью q, и 0 с вероятностью $1 - p - q$. Как следствие,

$$\mathrm{E}(\xi_i) = p - q \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{E}(\xi) = n(p - q).$$

Далее, дисперсия случайной величины ξ_i равна

$$\mathrm{Var}(\xi_i) = \mathrm{E}(\xi_i^2) - (p-q)^2 = p \cdot 1^2 + q \cdot (-1)^2 + (1-p-q) \cdot 0^2 - (p-q)^2 = p(1-p) + q(1-q) + 2pq.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Var}(\xi) = np(1-p) + nq(1-q) + 2pqn.$$

9.2. Вероятность выигрыша составляет $\frac{18}{37}$, а вероятность проигрыша равна, соответственно, $\frac{19}{37}$. Пусть ξ — случайная величина, равная выигрышу в игре. Тогда

$$\mathrm{E}(\xi) = 2 \cdot \frac{18}{37} + 0 \cdot \frac{19}{37} = \frac{36}{37} = 0.973.$$

Таким образом, в среднем за игру игрок теряет 0.027 доллара.

9.3. Распределение вероятностей случайной величины η имеет следующий вид:

Значение x_k случайной величины η:	1	2	3	4	5	6
Вероятность $\Pr(\eta = x_k)$:	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Как следствие, математическое ожидание η равно

$$\mathrm{E}(\eta) = \frac{1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11}{36} = \frac{161}{36},$$

а ее дисперсия принимает следующее значение:

$$\mathrm{Var}(\eta) = \frac{1 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 5 + 4^2 \cdot 7 + 5^2 \cdot 9 + 6^2 \cdot 11}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296}.$$

9.4. По определению математического ожидания,

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Дифференцируя левую и правую часть этого равенства по q, мы получим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Следовательно, математическое ожидание для геометрического распределения равно $1/p$.

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой (55):

$$\mathrm{Var}(\xi) = \mathrm{E}(\xi^2) - (\mathrm{E}(\xi))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p \cdot q^{k-1} - \frac{1}{p^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot p \cdot q^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= p \cdot q \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot q^{k-2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}.$$

Сумма

$$\sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot q^{k-2}$$

представляет собой вторую производную суммы бесконечной геометрической прогрессии, равной $1/(1-q)$. Как следствие,

$$\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right) = \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p^3},$$

так что дисперсия случайной величины, подчиняющейся геометрическому распределению, равна

$$\mathrm{Var}(\xi) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

9.5. Обозначим через p_1 и p_2 вероятности того, что случайная величина ξ принимает значения x_1 и x_2 соответственно. Из условия задачи известно, что $p_1 = 0.2$. Следовательно, из условия нормировки $p_2 = 0.8$.

Для определения x_1 и x_2 запишем выражения для математического ожидания и дисперсии в рассматриваемом случае:

$$\mathrm{E}(\xi) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0.2x_1 + 0.8x_2 = 2.6;$$

$$\mathrm{Var}(\xi) = \mathrm{E}(\xi^2) - \left(\mathrm{E}(\xi)\right)^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 - (2.6)^2 = 0.64.$$

Как следствие, на x_1 получаем следующее квадратное уравнение:

$$0.2x_1^2 + (2.6 - 0.2x_1)^2/0.8 = 7.4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0.25x_1^2 - 1.3x_1 + 1.05 = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения с учетом неравенства $x_1 < x_2$ дает $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

9.6. Действительно, согласно (55),

$$\mathrm{Var}(\xi \cdot \eta) = \mathrm{E}[(\xi \cdot \eta)^2] - [\mathrm{E}(\xi \cdot \eta)]^2.$$

Так как ξ и η независимы, то независимы и случайные величины ξ^2 и η^2. Кроме того, математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. Следовательно,

$$\mathrm{E}[(\xi \cdot \eta)^2] = \mathrm{E}[\xi^2] \cdot \mathrm{E}[\eta^2], \qquad \mathrm{E}(\xi \cdot \eta) = \mathrm{E}(\xi) \cdot \mathrm{E}(\eta) = a \cdot b,$$

так что

$$\mathrm{Var}(\xi \cdot \eta) = \mathrm{E}[\xi^2] \cdot \mathrm{E}[\eta^2] - a^2 \cdot b^2.$$

Учитывая, что

$$\mathrm{E}[\xi^2] = \mathrm{Var}(\xi) + a^2, \qquad \mathrm{E}[\eta^2] = \mathrm{Var}(\eta) + b^2,$$

мы и получаем после упрощений нужное нам равенство.

9.7. Построим вначале совместное распределение вероятностей случайных величин ξ и η:

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36
5	0	0	0	0	5/36	1/36
6	0	0	0	0	0	6/36

Вычислим корреляцию с помощью формулы (56). Для этого нам понадобится математическое ожидание произведения случайных величин ξ и η. С учетом полученное выше совместного распределения этих случайных величин мы получаем, что

$$\mathrm{E}(\xi \cdot \eta) = 1 \cdot \frac{1+2+3+4+5+6}{36} + 2 \cdot \frac{2^2+3+4+5+6}{36} + 3 \cdot \frac{3^2+4+5+6}{36} +$$

$$+4 \cdot \frac{4^2+5+6}{36} + 5 \cdot \frac{5^2+6}{36} + 6 \cdot \frac{6^2}{36} = \frac{616}{36}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) := \mathrm{E}(\xi_1 \xi_2) - \mathrm{E}(\xi_1)\,\mathrm{E}(\xi_2) = \frac{616}{36} - \frac{161}{36} \cdot \frac{7}{2} = \frac{105}{72}.$$

9.8. Действительно, так как значения $\widetilde{\xi}(\omega) \geqslant 0$ для любых $\omega \in \Omega$, то

$$\mathrm{E}(\widetilde{\xi}) = \sum_{\omega \in \Omega} \widetilde{\xi}(\omega) \cdot \mathrm{Pr}(\omega) \geqslant \sum_{\omega \in \Omega \colon \widetilde{\xi} \geqslant \alpha} \widetilde{\xi}(\omega) \cdot \mathrm{Pr}(\omega) \geqslant \sum_{\omega \in \Omega \colon \widetilde{\xi} \geqslant \alpha} \alpha \cdot \mathrm{Pr}(\omega).$$

Отсюда с очевидностью следует требуемое неравенство. Выберем теперь в качестве $\widetilde{\xi}$ случайную величину $(\xi - \mu)^2$, где $\mu = \mathrm{E}(\xi)$. По определению дисперсии $\mathrm{Var}(\xi)$ случайной величины, $\mathrm{Var}(\xi) = \mathrm{E}((\xi - \mu)^2)$. С учетом этого мы из доказанного неравенства сразу получаем неравенство Чебышева (57).

9.9. В данном случае случайная величина ξ представляет собой температуру в квартире с $\mathrm{E}(\xi) = 20$ и $\sigma(\xi) = 2$. Воспользуемся неравенством Чебышева в форме (57). Для этого заметим, что в данном случае $c\sigma(\xi) = 5$, а значит $c = 5/\sigma(\xi) = 5/2$. Следовательно,

$$\mathrm{Pr}(|\xi - 20| \geqslant 5) \leqslant \frac{1}{(2,5)^2} = 0,16.$$

10 Рекуррентные соотношения

10.1. В предыдущей главе мы уже несколько раз получали решения комбинаторных задач, записанные в виде тех или иных рекуррентных соотношений. Настало время поговорить о них немного поподробнее.

10.1.1. Начнем с простого примера [3].

Пример 10.1. Популяция лягушек в озере увеличивается в четыре раза каждый год. В последний день каждого года 100 лягушек отлавливают и переправляют на другие озера. Предполагая, что в начале первого года в озере было 50 лягушек, найти количество лягушек в начале любого последующего года.

Решение. Обозначим через a_n количество лягушек в начале $(n+1)$-го года. По условию задачи, $a_0 = 50$. Тогда, очевидно,

$$a_1 = 4 \cdot 50 - 100 = 100, \qquad a_2 = 4 \cdot 100 - 100 = 300,$$

а в общем случае

$$a_{n+1} = 4 \cdot a_n - 100, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Полученное равенство является простейшим примером *рекуррентного соотношения.*

10.1.2. Перейдем теперь к формальным определениям.

Определение 10.2. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — произвольная числовая последовательность. Если для любого $n \geqslant 0$ число a_{n+m} является некоторой функцией от m предыдущих членов последовательности, т.е.

$$a_{n+m} = f_n(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m-1}), \tag{59}$$

то такая последовательность называется рекуррентной последовательностью, а соотношение (59) — рекуррентным соотношением m-го порядка.

В частном случае линейной функции f имеем так называемое *линейное рекуррентное соотношение*

$$a_{n+m} = b_1(n)\, a_{n+m-1} + b_2(n)\, a_{n+m-2} + \ldots + b_{m-1}(n)\, a_{n+1} + b_m(n)\, a_n + u(n). \tag{60}$$

В случае $u(n) = 0$ оно называется *однородным,* в противном случае — *неоднородным.*

Самый простой случай рекуррентного соотношения (60) — это *линейное однородное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами*

$$a_{n+m} = b_1\, a_{n+m-1} + b_2\, a_{n+m-2} + \ldots + b_{m-1}\, a_{n+1} + b_m\, a_n. \tag{61}$$

Очевидно, что для однозначного определения всех a_n необходимо наряду с самим рекуррентным соотношением (59) задать и первые m членов $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ данной последовательности, то есть, как говорят, *задать начальные условия* для рекуррентного соотношения.

10.1.3. Итак, наличие рекуррентного соотношения и начальных условий позволяет нам последовательно, шаг за шагом, определить любое наперед заданное количество n членов рекуррентной числовой последовательности. Зачастую это все, что нам требуется от задачи. Иными словами, получение рекуррентного соотношения для искомой числовой последовательности a_n

является вполне приемлемым, а зачастую — и наиболее удобным с вычислительной точки зрения ответом для поставленной комбинаторной задачи.

Однако иногда нам полезно иметь явную формулу, которая для любого n позволяет вычислять значение a_n. Такую формулу называют *решением* рассматриваемого рекуррентного соотношения. Мы в данном параграфе покажем, как строить такие решения для случая линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами (61).

10.2. Прежде чем рассматривать общий случай уравнения (61), рассмотрим наиболее простой его вариант — линейное однородное рекуррентное соотношение первого порядка

$$a_{n+1} = b_1 \cdot a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad a_0 \text{ — заданное число.} \tag{62}$$

10.2.1. Решение этого уравнения построить легко. Действительно,

$$a_1 = b_1 \cdot a_0; \qquad a_2 = b_1 \cdot a_1 = b_1^2 \cdot a_0; \qquad \ldots \qquad a_n = b_1^n \cdot a_0.$$

10.2.2. Предположим теперь, что нам кто-то сразу подсказал вид решения, а именно, что решение нашего уравнения (62) степенным образом зависит от n:

$$a_n = r^n \qquad \text{для некоторого } r.$$

Воспользовавшись этой подсказкой, подставим это выражение в исходное рекуррентное соотношение (62). В результате получается равенство вида

$$r^{n+1} = b_1 \cdot r^n,$$

из которого сразу же следует, что $r = b_1$; при этом a_n оказывается равным b_1^n. Это означает, что при $n = 0$ число $a_0 = b_1^0 = 1$. Иными словами, $a_n = b_1^n$ есть решение исходной задачи (62) в частном случае $a_0 = 1$. Поэтому такое решение называется *частным решением* уравнения (62).

10.2.3. Теперь попытаемся, зная частное решение, построить общее решение задачи (62). Для этого заметим, что в силу однородности уравнения (62) любое его частное решение, умноженное на произвольную постоянную c, по-прежнему этому уравнению удовлетворяет:

$$c \cdot b_1^{n+1} \equiv c \cdot b_1 \cdot b_1^n.$$

Решение же вида $c \cdot b_1^n$ позволяет удовлетворить любому начальному условию. Действительно, подставляя его в начальное условие для уравнения (62), получим:

$$c \cdot b_1^0 = a_0 \qquad \Longrightarrow \qquad c = a_0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = a_0 \cdot b_1^n.$$

По этой причине решение вида $c \cdot b_1^n$ называется *общим решением* уравнения (62).

10.3. Подведем предварительные итоги. Так как исходное уравнение (62) было очень простым, то нам удалось сразу построить его решение и выяснить, что оно степенным образом зависит от параметра n. Затем мы заметили, что если бы нам кто-то заранее подсказал степенной характер решения уравнения (62), то нам хватило бы этой информации для построения как общего, так и частного решения нашего рекуррентного уравнения.

Возникает вопрос: зачем же нам нужен для столь простого уравнения столь сложный алгоритм построения его решения? Оказывается, что этот алгоритм практически без изменений работает и для построения решения линейного однородного уравнения произвольного порядка.

10.3.1. Рассмотрим в качестве примера линейное однородное рекуррентное соотношение второго порядка

$$a_{n+2} = b_1 \cdot a_{n+1} + b_2 \cdot a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad a_0,\ a_1 \text{ — заданные числа,} \tag{63}$$

и попытаемся применить к этому уравнению алгоритм, описанный в конце предыдущего пункта.

Для этого предположим, что частное решение уравнения (63) по прежнему степенным образом зависит от параметра n, то есть предположим, что существуют такие значения параметров a_0 и a_1, при которых $a_n = r^n$. Подставляя это выражение в рекуррентное соотношение, получим

$$r^{n+2} = b_1 \cdot r^{n+1} + b_2 \cdot r^n \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 - b_1\, r - b_2 = 0, \tag{64}$$

т.е. квадратное уравнение на r. Любое его решение r_0 дает нам некоторое частное решение уравнения (63). По этой причине данное уравнение называется *характеристическим уравнением* для рекуррентного соотношения (63).

10.3.2. Предположим, что характеристическое уравнение (64) имеет два различных вещественных корня r_1 и r_2. Покажем, что в таком случае выражение

$$a_n = c_1\, r_1^n + c_2\, r_2^n, \tag{65}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, является *общим решением* соотношения (63) в том смысле, что любое решение (63) с заданными начальными условиями в нем содержится.

Действительно, покажем вначале, что выражение (65) действительно удовлетворяет рекуррентному соотношению (63):

$$c_1\, r_1^{n+2} + c_2\, r_2^{n+2} = b_1\, c_1\, r_1^{n+1} + b_1\, c_2\, r_2^{n+1} + b_2\, c_1\, r_1^n + b_2\, c_2\, r_2^n \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \qquad c_1\, r_1^n\, (r_1^2 - b_1\, r_1 - b_2) + c_2\, r_2^n\, (r_2^2 - b_1\, r_2 - b_2) \equiv 0.$$

Покажем теперь, что это — действительно общее решение, т.е. что мы всегда можем подобрать константы c_1 и c_2 так, чтобы решение вида (65) удовлетворяло любым заданным начальным условиям. Для этого рассмотрим это выражение при $n = 0$ и $n = 1$:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_1\, r_1^0 + c_2\, r_2^0 = c_1 + c_2, \\ a_1 &= c_1\, r_1^1 + c_2\, r_2^1 = c_1\, r_1 + c_2\, r_2. \end{aligned}$$

Эти выражения следует рассматривать как систему линейных уравнений для определения неизвестных постоянных c_1 и c_2. Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0,$$

поэтому система всегда имеет единственное решение.

10.3.3. Пожалуй, самым известным и важным примером рекуррентного соотношения (63) является соотношение вида

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad F_0 = 0,\ \ F_1 = 1,$$

определяющее так называемые числа Фибоначчи F_n. Характеристическое уравнение для этого рекуррентного уравнения имеет вид

$$r^2 = r + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad F_n = c_1\, \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\, \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Константы c_1 и c_2 определим из начальных условий:

$$F_0 = 0 = c_1 + c_2$$
$$F_1 = 1 = c_1\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\,\frac{1-\sqrt{5}}{2} = c_1\,\left[\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right] = c_1\sqrt{5} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad c_1 = +\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, окончательно получаем следующее явное выражение для чисел Фибоначчи:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{66}$$

10.3.4. Предположим теперь, что характеристическое уравнение (64) имеет ровно один кратный корень $r_1 = r_2 =: \rho$. Покажем, что в этом случае общее решение уравнения (63) имеет вид

$$a_n = c_1\,\rho^n + c_2\,n\,\rho^n.$$

Мы уже показали, что частное решение вида ρ^n удовлетворяет уравнению (63). С учетом линейности и однородности этого уравнения нам осталось показать, что этому уравнению удовлетворяет и частное решение вида $n\,\rho^n$. Подставляя в уравнение (63) выражение $n\,\rho^n$, получим

$$(n+2)\,\rho^{n+2} = b_1\,(n+1)\,\rho^{n+1} + b_2\,n\,\rho^n \qquad \Longrightarrow \qquad n\,(\rho^2 - b_1\,\rho - b_2) + \rho\,(2\,\rho - b_1) = 0.$$

Первое слагаемое в левой части этого выражения равно нулю в силу характеристического уравнения. Для того, чтобы понять, что равно нулю и последнее слагаемое, заметим, что в случае совпадающих корней $r_1 = r_2 = \rho$ имеем

$$\rho = \frac{b_1 \pm 0}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad 2\rho - b_1 = 0.$$

Осталось показать, что такой вид решения может удовлетворить любым начальным условиям. Подставив начальные условия в выражение для a_n, получим следующую систему двух линейных алгебраических уравнений относительно параметров c_1 и c_2:

$$c_1 = a_0,$$

$$\rho\,(c_1 + c_2) = a_1.$$

Понятно, что такая система имеет решение при любых a_0, a_1 и $\rho \neq 0$. Случай же $\rho = 0$ тривиален — в этом случае $b_1 = b_2 = 0$, и потому $a_n = 0$ для любых n.

10.3.5. Наконец, давайте рассмотрим случай, когда уравнение (64) имеет два комплексно сопряжённых корня

$$r_1 = x + iy = \rho\,e^{i\,\vartheta}, \qquad r_2 = x - iy = \rho\,e^{-i\,\vartheta}, \qquad \rho, \vartheta \neq 0.$$

Покажем, что в таком случае общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами второго порядка (63) можно записать так:

$$a_n = \widetilde{c}_1\,\rho^n\,\cos(n\,\vartheta) + \widetilde{c}_2\,\rho^n\,\sin(n\,\vartheta). \tag{67}$$

Действительно, рассуждения, аналогичные проведенным для случая двух различных вещественных корней, показывают, что линейная комбинация частных решений вида

$$a_n = c_1\, r_1^n + c_2\, r_2^n$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению (63) при любых c_1 и c_2. Рассмотрим теперь систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} &a_0 = c_1 + c_2, \\ &a_1 = c_1\, \rho\, e^{i\vartheta} + c_2\, \rho\, e^{-i\vartheta} = \rho\,(c_1 + c_2)\cos\vartheta + \rho\, i\,(c_1 - c_2)\sin\vartheta. \end{aligned} \tag{68}$$

Определитель этой системы по-прежнему отличен от нуля, так что мы с помощью общего решения по-прежнему можем удовлетворить любым начальным условиям. Из (68) также следует, что коэффициенты $\widetilde{c}_1 = c_1 + c_2$ и $\widetilde{c}_2 = i\,(c_1 - c_2)$ являются вещественными числами. Действительно, первое уравнение (68) гарантирует нам, что сумма $c_1 + c_2$ является вещественным числом. Но тогда вещественным числом обязано быть и выражение $i\,(c_1 - c_2)$.

Заметим теперь, что линейную комбинацию частных решений мы в рассматриваемом случае можем переписать так:

$$a_n = c_1\, r_1^n + c_2\, r_2^n = c_1\, \rho^n\, e^{i\vartheta\, n} + c_2\, \rho^n\, e^{-i\vartheta\, n} =$$

$$= (c_1 + c_2)\, \rho^n\, \cos(n\,\vartheta) + i\,(c_1 - c_2)\, \rho^n\, \sin(n\,\vartheta).$$

Обозначив через $\widetilde{c}_1 = c_1 + c_2$ и $\widetilde{c}_2 = i\,(c_1 - c_2)$, мы получаем для a_n формулу (67).

10.3.6. Описанная выше техника решения линейных однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами обобщается и на случай соотношений более высокого порядка. Именно, рассмотрим линейное однородное рекуррентное соотношение m-го порядка (61)

$$a_{n+m} = b_1 \cdot a_{n+m-1} + b_2 \cdot a_{n+m-2} + \ldots + b_m \cdot a_n, \qquad a_0, \ldots, a_{m-1} \text{ — заданы.}$$

Предположим, что частное решение этого соотношения имеет вид $a_n = r^n$. Подставляя это выражение в исходное рекуррентное соотношение, получаем для параметра r следующее характеристическое уравнение:

$$r^m = b_1 \cdot r^{m-1} + b_2 \cdot r^{m-2} + \ldots + b_m \cdot r.$$

Пусть $r_1, \ldots, r_k$ есть корни этого уравнения. Каждый такой корень дает свой вклад в общее решение рассматриваемого рекуррентного соотношения. В частности, если r_j есть корень кратности q_j, то вклад этого корня в общее решение задается выражением вида

$$c_{1,j} \cdot r_j^n + c_{2,j} \cdot n \cdot r_j^n + \ldots + c_{q_j,j} \cdot n^{q_j-1} \cdot r_j^n.$$

Так, если характеристическое уравнение для некоторого рекуррентного соотношения шестого порядка имеет вид

$$(r-1)^3 \cdot (r-2)^2 \cdot (r-3) = 0,$$

то общее решение такого соотношения записывается так:

$$a_n = c_1 + c_2 \cdot n + c_3 \cdot n^2 + c_4 \cdot 2^n + c_5 \cdot n \cdot 2^n + c_6 \cdot 3^n.$$

10.4. Вернемся к примеру о лягушках, рассмотренному вначале параграфа. В отличие от разобранных выше примеров, рекуррентное соотношение, полученное для этой задачи, было неоднородным. Постараемся понять, как нам решать такие соотношения.

10.4.1. Рекуррентное соотношение

$$a_{n+1} = 4 \cdot a_n - 100, \qquad\qquad a_0 = 50$$

представляет собой частный случай линейного неоднородного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами первого порядка. В общем случае такое соотношение имеет следующий вид:

$$a_{n+1} = b_1 \cdot a_n + u, \qquad\qquad a_0 \text{ — заданное число.} \tag{69}$$

Как и в случае однородного рекуррентного соотношения (62), решение рекуррентного соотношения (69) довольно легко построить, последовательно выражая a_n через a_0 и u. Именно,

$$\begin{gathered}
a_1 = b_1 \cdot a_0 + u, \\
a_2 = b_1 \cdot a_1 + u = b_1 \cdot (b_1 \cdot a_0 + u) + u = b_1^2 \cdot a_0 + b_1 \cdot u + u, \\
a_3 = b_1 \cdot a_2 + u = b_1 \cdot (a_0 \cdot b_1^2 + b_1 \cdot u + u) + u = b_1^3 \cdot a_0 + b_1^2 \cdot u + b_1 \cdot u + u, \\
\ldots \\
a_n = b_1^n \cdot a_0 + (b_1^{n-1} + b_1^{n-2} + \ldots + b_1 + 1) \cdot u.
\end{gathered}$$

В зависимости от значений параметра b_1 мы имеем два варианта развития событий. В случае $b_1 \neq 1$ мы выражение для a_n можем переписать так:

$$a_n = b_1^n \cdot a_0 + \frac{b_1^n - 1}{b_1 - 1} \cdot u = \left(a_0 - \frac{u}{1 - b_1}\right) \cdot b_1^n + \frac{u}{1 - b_1}.$$

В случае $b_1 = 1$ мы получаем

$$a_n = a_0 + n \cdot u.$$

10.4.2. Из приведенных выше рассуждений мы можем сделать два важных наблюдения. Первое из них заключается в том, что в обоих случаях решение a_n неоднородного рекуррентного соотношения может быть записано в виде

$$a_n = c_1 \cdot r^n + q_n,$$

где $c_1 \cdot r^n$ есть общее решение соответствующего (69) однородного рекуррентного соотношения

$$a_{n+1}^{(0)} = b_1 \cdot a_n^{(0)},$$

а q_n есть некоторое частное решение неоднородного рекуррентного соотношения (69), то есть решение, при подстановке которого в рекуррентное соотношение последнее превращается в тождество. Оказывается, что этот факт справедлив и в общем случае. Именно, справедлива следующая

Теорема 10.3. *Пусть q_n есть частное решение рекуррентного соотношения*

$$a_{n+m} = b_1\, a_{n+m-1} + b_2\, a_{n+m-2} + \ldots + b_{m-1}\, a_{n+1} + b_m\, a_n + u(n).$$

Тогда любое решение этого рекуррентного соотношения имеет вид $a_n = p_n + q_n$, где p_n есть общее решение соответствующего однородного рекуррентного соотношения

$$a_{n+m}^{(0)} = b_1\, a_{n+m-1}^{(0)} + b_2\, a_{n+m-2}^{(0)} + \ldots + b_{m-1}\, a_{n+1}^{(0)} + b_m\, a_n^{(0)}.$$

Второе важное наблюдение состоит в том, что мы легко можем построить решение рекуррентного соотношения в случае, если нам кто-то подскажет конкретный вид как общего решения однородного соотношения, так и частного решения неоднородного соотношения. Предположим, например, что нам кто-то подсказал, что в случае $b_1 \neq 1$ частное решение (69) следует искать в виде $q(n) = c_0 \cdot u$, а общее решение соответствующего (69) однородного соотношения — в виде $a_n = c_1 \cdot r^n$. Подставляя в (69) вместо q_n выражение $c_0 \cdot u$, получаем

$$c_0 \cdot u = b_1 \cdot c_0 \cdot u + u \qquad \Longrightarrow \qquad c_0 = \frac{1}{1 - b_1}.$$

Далее, подставляя вместо $a_n^{(0)}$ в соответствующее (69) однородное рекуррентное соотношение

$$a_{n+1}^{(0)} = b_1 \cdot a_n^{(0)}$$

выражение $c_1 \cdot r^n$, мы находим, что $r = b_1$. Осталось определить константу c_1. Для этого воспользуемся начальным условием:

$$c_1 \cdot b_1^0 + \frac{u}{1 - b_1} = a_0 \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = a_0 - \frac{u}{1 - b_1}.$$

Аналогичный алгоритм проходит и в случае $b_1 = 1$.

10.4.3. Мы уже знаем, в каком виде следует искать общее решение однородного рекуррентного соотношения. Осталось понять, как определять вид частного решения неоднородного рекуррентного соотношения. Ранее мы отмечали, что общее решение соответствующего однородного рекуррентного соотношения представляет собой сумму функций $f_j(n)$ вида

$$f_j(n) = (c_{1,j} + c_{2,j} \cdot n + c_{3,j} \cdot n^2 + \ldots + c_{q_j,j} \cdot n^{q_j - 1}) \cdot r_j^n.$$

Предположим, что неоднородность $u_n \equiv u(n)$ имеет вид

$$u(n) = (d_0 + d_1 \cdot n + \ldots + d_l \cdot n^l) \cdot r^n =: P_l(n) \cdot r^n.$$

Тогда частное решение исходного неоднородного уравнения следует искать в виде

$$(c_0 + c_1 \cdot n + \ldots + c_l \cdot n^l) \cdot n^q \cdot r^n,$$

где $q = 0$ в случае, если r отличен от корней r_j характеристического уравнения, и равно кратности корня r_j в случае, если r совпадает с одним из корней r_j. В случае, когда неоднородность представляет собой сумму описанных выше функций $u_t(n)$, частное решение рекуррентного соотношения можно искать в виде суммы частных решений неоднородных рекуррентных соотношений вида

$$a_{n+m} = b_1 \cdot a_{n+m-1} + b_2 \cdot a_{n+m-2} + \ldots + b_m \cdot a_n + u_t(n).$$

10.4.4. Разберем несколько примеров решения неоднородных рекуррентных соотношений.

Пример 10.4. Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + 3 \cdot 2^n.$$

Решение. Характеристическое уравнение для соответствующего однородного рекуррентного соотношения имеет следующий вид:

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (r - 2)^2 = 0.$$

Как следствие, общее решение сооответствующего однородного рекуррентного соотношения имеет вид
$$c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n.$$
Так как $r = 2$ есть корень кратности 2 характеристического уравнения, то частное решение исходного неоднородного рекуррентного соотношения следует искать в виде
$$c_0 \cdot n^2 \cdot 2^n.$$
Подставим это выражение в рекуррентное соотношение:
$$c_0 \cdot (n+2)^2 \cdot 2^{n+2} = 4c_0 \cdot (n+1)^2 \cdot 2^{n+1} - 4c_0 \cdot n^2 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \qquad 4c_0(n^2+4n+4) = 8c(n^2+2n+1) - 4cn^2 + 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 8c_0 = 3.$$
Следовательно, $c_0 = 3/8$, так что частное решение заданного рекуррентного соотношения имеет вид
$$3 \cdot n^2 \cdot 2^{n-3}.$$

Пример 10.5. Построить общее решение следующего линейного неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка:
$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + 3^n \cdot n + 3^n \cdot \cos(\pi\, n/2).$$

Решение. Для построения общего решения соответствующего однородного рекуррентного соотношения запишем его характеристическое уравнение:
$$r^2 = 6r - 9 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (r-3)^2 = 0.$$
Как видно, это уравнение имеет корень $r = 3$ кратности два. Следовательно, общее решение однородного рекуррентного соотношения записывается в виде
$$(d_1 + d_2 \cdot n) \cdot 3^n.$$

Неоднородная часть рекуррентного соотношения состоит из двух слагаемых:
$$u_1(n) = 3^n \cdot n \qquad \text{и} \qquad u_2(n) = 3^n \cdot \cos(\pi\, n/2).$$
Так как
$$\cos(\pi\, n/2) = \frac{e^{i\,\pi\, n/2} + e^{-i\,\pi\, n/2}}{2},$$
то выражение для $u_2(n)$ можно переписать так:
$$u_2(n) = \frac{1}{2}\left(r_1^n + r_2^n\right), \qquad \text{где} \quad r_1 = 3 \cdot e^{i\,\pi/2}, \qquad r_2 = 3 \cdot e^{-i\,\pi/2}.$$
Иными словами, неоднородная часть рекуррентного соотношения состоит из трех слагаемых вида $r^n \cdot P_i(n)$, и только в первом из них показатель совпадает с корнем характеристического уравнения. Как следствие, мы можем искать отдельно частное решение, связанное с первым слагаемым, и частное решение, связанное с оставшимися слагаемыми.

Рассмотрим вначале рекуррентное соотношение
$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + 3^n \cdot n.$$

Частное его решение следует искать в виде $(c_1 + c_2 \cdot n) \cdot n^2 \cdot 3^n$. Подставляя это выражение в рекуррентное соотношение, получим равенство

$$54n \cdot c_2 + 54 \cdot c_2 + 18 \cdot c_1 = n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, получаем значения констант $c_2 = 1/54$, $c_1 = -1/18$.

Теперь запишем рекуррентное соотношение

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + 3^n \cdot \cos(\pi\, n/2) \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n + 3^n \cdot e^{i\,\pi\, n/2}/2 + 3^n \cdot e^{-i\,\pi\, n/2}/2.$$

Частное его решение можно искать в виде умноженной на 3^n линейной комбинации экспонент с показателями $\pm\, i\,\pi\, n/2$, либо, что более удобно, в виде линейной комбинации синуса и косинуса, умноженной на 3^n:

$$c_3 \cdot 3^n \cdot \cos(\pi\, n/2) + c_4 \cdot 3^n \cdot \sin(\pi\, n/2).$$

Подставляя это выражение в записанное выше рекуррентное соотношение, получаем равенство

$$18 \cdot c_3 \cdot \sin(\pi\, n/2) - (18 \cdot c_4 + 1) \cdot \cos(\pi\, n/2) = 0,$$

из которого следует, что $c_3 = 0$, $c_4 = -1/18$.

Окончательно получаем следующее общее решение исходного рекуррентного соотношения:

$$(d_1 + d_2 \cdot n) \cdot 3^n + (n-3) \cdot n^2 \cdot 3^{n-3}/2 - 3^{n-2} \cdot \sin(\pi\, n/2)/2.$$

Упражнения

10.1 (1,5 балла)**.** Найдите общее решение следующих линейных однородных рекуррентных соотношений второго порядка:

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n; \qquad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 13a_n; \qquad a_{n+2} = -4a_{n+1} - 4a_n.$$

10.2 (1,5 балла)**.** Решите следующие линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка:

$$\begin{aligned} &a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, && a_0 = 2, \quad a_1 = 6;\\ &a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n, && a_0 = 2, \quad a_1 = 6;\\ &a_{n+2} = 2\sqrt{2}a_{n+1} - 4a_n, && a_0 = 1, \quad a_1 = 2. \end{aligned}$$

10.3 (1,5 балла)**.** Постройте общее решение рекуррентного соотношения вида

$$a_{n+5} = 2a_{n+4} + 16a_{n+1} - 32a_n.$$

10.4 (1,5 балла)**.** Постройте общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 5\, a_{n+1} - 4\, a_n + 3 \cdot 2^n.$$

10.5 (1,5 балла)**.** Мы положили тысячу рублей в банк под пять процентов годовых. В начале каждого года мы докладываем пятьсот рублей на счет. Сколько денег будет на счете через n лет?

10.6 (1,5 балла)**.** На плоскости нарисованы n окружностей так, что любая пара окружностей пересекается ровно по двум точкам, и никакие три окружности не имеют общей точки пересечения. Определите количество a_n областей, на которые разбивается плоскость такими окружностями.

10.7 (1 балл)**.** Докажите, что любые два последовательно идущих друг за другом числа Фибоначчи F_n и F_{n+1} взаимно простые.

Дополнительные упражнения

10.8 (1,5 балла)**.** Постройте общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 5\,a_{n+1} - 6\,a_n + 6 \cdot 3^n.$$

10.9 (1,5 балла)**.** Постройте общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 3\,a_{n+1} - 2\,a_n + 3 \cdot \sin(n\pi/2).$$

10.10 (1 балл)**.** В теннисном турнире участвуют $2n$ игроков. Составьте и решите рекуррентное соотношение для количества a_n различных пар, которые можно сформировать для n матчей первого круга.

10.11 (2 балла)**.** Рассмотрим плоскость (x, y). Предположим, что мы можем ходить по плоскости, делая шаг вверх (U), шаг вправо (R) и шаг влево (L) на единицу длины так, чтобы шаг R никогда не следовал за шагом L и наоборот. Подсчитайте количество a_n таких путей после n шагов.

10.12 (2 балла)**.** Космический зонд обнаружил, что органическое вещество на Марсе имеет ДНК, состоящее из пяти символов (a, b, c, d, e). Четыре пары символов — *ce*, *cd*, *ed*, *ee* — никогда не встречаются в марсианских ДНК, однако любая цепочка, не содержащая этих пар, возможна. Порядок букв в цепочке важен, поэтому, например, цепочка *bbdca* возможна, а *bbcda* — нет. Найдите рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют эти цепочки слов. Постройте решения этих рекуррентных соотношений.

10.13 (1,5 балла)**.** Докажите, что числа Фибоначчи F_n удовлетворяют следующим соотношениям:

$$F_{n+m} = F_{n-1}\,F_m + F_n\,F_{m+1}; \tag{70}$$

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}; \tag{71}$$

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n\,F_{n+1}. \tag{72}$$

10.14 (1,5 балла)**.** Используя соотношение (70), докажите, что наибольший общий делитель чисел Фибоначчи F_n и F_m есть число Фибоначчи F_d, где d есть наибольший общий делитель чисел n и m:

$$\gcd(F_n, F_m) = F_d, \qquad d = \gcd(n, m).$$

10.15 (2 балла)**.** Докажите, что возможна, вообще говоря, фибоначчиева система исчисления, показав, что любое натуральное число N можно единственным образом представить в виде суммы

$$N = a_2 F_2 + \ldots + a_n F_n,$$

в которой коэффициенты a_i равны 0 или 1, а кроме того, никакие два идущих подряд элемента последовательности чисел $\{a_i\}$ не равны одновременно единице.

Решение упражнений

10.1. Для рекуррентного соотношения

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$$

корни характеристического уравнения $r^2 - 7\,r + 12 = 0$ вещественны и равны $r_1 = 3$, $r_2 = 4$. Следовательно, общий вид решения такого уравнения имеет вид

$$a_n = c_1\,3^n + c_2\,4^n.$$

В случае уравнения

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 13a_n$$

характеристическое уравнение $r^2 - 4\,r + 13 = 0$ имеет два комплексно-сопряженных корня $r_1 = 2 + 3i$ и $r_2 = 2 - 3i$. Следовательно, общий вид решения можно записать так:

$$a_n = (\sqrt{13})^n (c_1 \cos(n \operatorname{arctg}(3/2)) + c_2 \sin(n \operatorname{arctg}(3/2))).$$

Наконец, характеристическое уравнение для рекуррентного соотношения

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$

имеет вид $r^2 - 4\,r + 4 = 0$. Такое уравнение имеет один корень $r = 2$ кратности 2. Следовательно, общее решение этого рекуррентного соотношения имеет вид

$$a_n = c_1\,2^n + c_2\,n\,2^n.$$

10.2. Для первого рекуррентного соотношения корни характеристического уравнения

$$r^2 - 5\,r + 6 = 0$$

вещественны и равны $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Следовательно, общий вид решения такого уравнения имеет вид

$$a_n = c_1\,2^n + c_2\,3^n.$$

Подставляя в это уравнение начальные условия $a_0 = 2$, $a_1 = 6$, получаем систему линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} 2 &= c_1 + c_2 \\ 6 &= 2c_1 + 3c_2 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = 0, \quad c_2 = 2.$$

Следовательно, решение первого рекуррентного соотношения имеет вид $a_n = 2 \cdot 3^n$.

Для второго соотношения характеристическое уравнение записывается так:

$$r^2 + 2\,r + 1 = (r + 1)^2 = 0.$$

Так как оно имеет единственный корень $r = -1$, то решение следует искать в виде

$$a_n = c_1(-1)^n + c_2\,n\,(-1)^n.$$

Подстановка начальных условий

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 = c_1 \\ a_1 &= 6 = -c_1 - c_2 \end{aligned}$$

дает $c_1 = 2$, $c_2 = -8$, так что решением этого рекуррентного соотношения является последовательность

$$a_n = 2 \cdot (-1)^n - 8 \cdot n \cdot (-1)^n = 2 \cdot (-1)^n (1 - 4n).$$

Наконец, для третьего соотношение характеристическое уравнение

$$r^2 - 2\sqrt{2}\, r + 4 = 0$$

имеет комплексно-сопряженные корни $r_{1,2} = 2 \cdot \exp(\pm\, i \cdot \pi/4)$, поэтому решение следует искать в виде

$$a_n = c_1\, 2^n\, \cos(\pi\, n/4) + c_2\, 2^n\, \sin(\pi\, n/4).$$

С использованием начальных условий получаем, что

$$\begin{aligned} &a_0 = 1 = c_1 \\ &a_1 = 2 = 2(c_1 \cos(\pi/4) + c_2 \sin(\pi/4)) = 2(c_1\sqrt{2}/2 + c_2\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}\,(c_1 + c_2). \end{aligned}$$

Поэтому $c_1 = 1$, $c_2 = \sqrt{2} - 1$, и решение данного рекуррентного соотношения принимает вид

$$a_n = 2^n \Big(\cos(\pi\, n/4) + (\sqrt{2} - 1) \sin(\pi\, n/4)\Big)\,.$$

10.3. Запишем характеристическое уравнение для заданного рекуррентного соотношения:

$$r^5 - 2r^4 - 16r + 32 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (r-2)(r^4 - 16) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (r-2)(r^2-4)(r^2+4) = 0.$$

Данное уравнение имеет корень $r_1 = 2$ кратности 2, корень $r_2 = -2$ кратности 1, а также пару комплексно-сопряженных корней $r_{3,4} = \pm\, 2i = 2 \cdot \exp(\pm\, i\,\pi/2)$. Как следствие, общее решение этого рекуррентного соотношения имеет следующий вид:

$$a_n = 2^n\,(c_1 + c_2 \cdot n + c_3 \cdot (-1)^n + c_4 \cdot \cos(\pi\, n/2) + c_5 \cdot \sin(\pi\, n/2))\,.$$

10.4. Характеристическое уравнение для соответствующего однородного рекуррентного соотношения имеет следующий вид:

$$r^2 - 5r + 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r_1 = 1, \quad r_2 = 4.$$

Следовательно, общее решение такого соотношения записывается в виде $c_1 + c_2 \cdot 4^n$. Предположим теперь, что частное решение заданного неоднородного соотношения имеет вид $q_n = c \cdot 2^n$. Подставляя его в исходное рекуррентное соотношение, получаем

$$c \cdot 2^{n+2} = 5c \cdot 2^{n+1} - 4c \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n \qquad \Longrightarrow \qquad c = -3/2.$$

Общее же решение заданного в упражнении рекуррентного соотношения записывается в виде

$$a_n = c_1 + c_2 \cdot 4^n - 3 \cdot 2^{n-1}.$$

10.5. Обозначим через a_n сумму денег на счете после n лет. Тогда из условий задачи мы получаем следующее рекуррентное соотношение для чисел a_n :

$$a_{n+1} = 1.05\, a_n + 500, \qquad\qquad a_0 = 1000.$$

Данное уравнение является неоднородным. С этим легко справиться, введя новую переменную $\widetilde{a}_n = a_n + c$ так, чтобы уравнение на $\widetilde{a}_n$ получилось однородным:

$$\widetilde{a}_{n+1} - c = 500 + 1.05\, \widetilde{a}_n - 1.05\, c \qquad \Longrightarrow \qquad c = 10000.$$

При таком выборе константы c уравнение на $\widetilde{a}_n$ принимает следующий вид:

$$\widetilde{a}_{n+1} = 1.05\, \widetilde{a}_n \qquad \Longrightarrow \qquad \widetilde{a}_n = c_1 \cdot 1.05^n \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = 11000 \cdot 1.05^n - 10000.$$

10.6. Предположим, что на плоскости уже нарисовано n окружностей. Добавим к этим окружностям еще одну. Она пересечёт уже имеющиеся окружности в $2n$ точках. Эти точки разобьют новую окружность на $2n$ дуг, каждая из которых, в свою очередь, разобьет какую-то из уже имеющихся областей на две. Как следствие, для числа областей a_n справедливо следующее соотношение:

$$a_{n+1} = a_n + 2n; \quad a_1 = 2.$$

Выражая a_n через a_{n-1}, a_{n-1} через a_{n-2} и так далее, получим следующий ответ:

$$a_n = 2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 6 + 4 + 2 + 2 = n(n-1) + 2.$$

10.7. Пусть F_n и F_{n-1} делятся на k. Это означает, что их разность, равная F_{n-2}, также должна делиться на k. Продолжая это рассуждение, получаем, что F_1 делится на k, что не верно для любых $k \neq 1$.

Литература

[1] Виленкин П.А., Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н. *Комбинаторика.* М.: МЦНМО, 2006.
[2] Ландо С. К. *Лекции о производящих функциях.* М.: МЦНМО, 2002.
[3] Bona M. *A Walk Through Combinatorics: an Introduction to Enumeration and Graph Theory.* World Sciendific Publishing Co, Second Edition, 2006.
[4] Aigner M. *A Course in Enumeration.* Springer, 2007.
[5] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* М.: Мир; Бином. Лаборатория знаний, 2006.
[6] Ширяев А.Н. *Вероятность.* М.: Наука, 1989.
[7] Прасолов В.В. *Задачи по планиметрии.* М.: МЦНМО, 2001.

Омельченко Александр Владимирович
Основы перечислительной комбинаторики

Учебное издание для вузов

Подписано в печать 20.02.2020. Формат 84×108/16. Усл. печ. л. 8,4. Тираж 20 экз. Заказ __
Отпечатано в типографи ФГБОУВПО «СПГУТД»
191028, Санкт-Петербург, Моховая ул., 26