

## ДЗ 4. Сочетания и размещения

1. Докажите равенство комбинаторно

$$\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}.$$

2. Число 72350 написали 7 раз подряд, получив при этом 35-значное число. Из этого числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычеркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

3. а) Докажите комбинаторно следующее тождество:

$$\left( \binom{n+1}{k} \right) = \sum_{i=0}^k \left( \binom{n}{k-i} \right).$$

б) С его помощью докажите справедливость равенства

$$\binom{n+k}{n+1} = \sum_{i=0}^k \binom{n+k-i-1}{n}.$$

4. Подсчитайте количество упорядоченных размещений  $k$  различных предметов по  $n$  различным ящикам, то есть таких размещений, в которых важен порядок размещения предметов в каждом конкретном ящике.

5. «Хромая ладья» может ходить только на одну клетку вверх или на одну клетку вправо. Изначально она стоит в нижнем левом углу клетчатой доски размером  $(2n+1) \times (2m+1)$  клеток.

а) Сколькими способами «хромая ладья» может дойти до правого верхнего угла доски?

б) Хулиган Вася вырезал из этой доски центральную клетку. Сколько способов теперь?

6. \* Посчитайте

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots$$