ПМИ. Группа 1. Домашнее задание №3. Часть 1. (Дедлайн: 17 октября)

1. (1) Вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^3+1}+\frac{2n}{n^3+2}+\ldots+\frac{n^2}{n^3+n}\right)$.

2. (1)Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}=1$.

3. (1) Доказать, что последовательность $a_n=\sin n^2$ не имеет предела.

Указание: $2n+1=(n+1)^2-n^2$. *Можно пользоваться результатами с пары.*

4. (1) Доказать, что при $0<k<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}((n+1)^k-n^k)=0$.

5. (1) На графике $y=x^2$ задаются точки A_n и B_n с абсциссами соответственно $\frac{1}{n}$ и $-\frac{1}{n}$. Через A_n, B_n и начало координат проводится окружность с центром в точке C_n. Найдите предел последовательности точек C_n.

ПМИ. Группа 1. Домашнее задание №3. Часть 2. (Дедлайн: 17 октября)

6. (2) Докажите, что последовательность сходится и найдите ее предел:

$$a_1>0, a_{n+1}=6\cdot\frac{1+a_n}{7+a_n}.$$

7. (2.5) Цель: доказать, что последовательность $x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)$ сходится. Вспомните с лекций, как определяется число e (основание натурального логарифма).

Каждый пункт оценивается в 0.5 балла.

7.1. Докажите неравенства: $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$.
Hint: Вам пригодятся знания из параграфа про экспоненту.

7.2. Докажите, что последовательность $x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)$ убывает.

7.3. Докажите, что последовательность $y_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$ возрастает.

7.4. Докажите, что последовательности x_n и y_n ограничены.

7.5. Докажите, что последовательности x_n и y_n сходятся и $\lim x_n=\lim y_n=\gamma$.

Замечание: что такое γ («гамма»)? Её называют константой Эйлера–Маскерони и она часто встречается в математике.

8. (1) Найдите предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^{n+1}}\left(a+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}+\ldots+\frac{a^n}{n}\right)$, при $a>1$.

9. (1) Пусть $\lim a_n=a$. Вычислите

$$\lim\frac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+1\cdot a_n}{n^2}.$$

10. (1) Докажите по определению, что $x_n=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n}{n^n}\to+\infty$.

11. (1) Про последовательность $\{x_n\}$ известно, что $(x_n-x_{n-2})\to 0$. Докажите, что $\frac{1}{n}x_n\to 0$.