

ДЗ 9. Связность, деревья и другие задачи на графы

1. В вузе учатся 103 студента. Однажды на сессии они заскучали и в перерыве между экзаменами устроили турнир по видеоиграм — каждый студент сыграл с каждым у себя дома и в гостях, ничьих не было. Все студенты играют очень хорошо, поэтому каждый выиграл ровно половину игр у себя дома и ровно половину игр в гостях. Докажите, что кто-то обыграл своего однокурсника дважды.
2. В графе 2023 вершины, 2022 вершины степени 200 и одна вершина степени 2. Докажите, что его ребра нельзя раскрасить в 200 цветов так, чтобы любые два ребра с общим концом были разноцветными.
3. В дереве все вершины имеют нечетную степень. Докажите, что более половины его вершин — висячие.
4. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «ЦСКА», а остальные — за «СКА». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?
5. В связном графе есть вершина степени n . Докажите, что в этом графе можно отметить n вершин так, чтобы при удалении любой комбинации отмеченных вершин граф не потерял связность.
6. В связном графе 100 вершин. Докажите, что можно обойти все вершины этого графа, пройдя по ребрам суммарно не более 196 раз.