ДЗ на 25 ноября.

1) Многочлен 101-й степени таков, что $f(n) = [1,01n]$ для всякого целого n от 99 до 200. Найдите $f(0)$.

2) Дан многочлен f 3-й степени. Назовем различные числа a и b друзьями, если $f(a) = b$ и $f(b) = a$. Докажите, что есть не более четырех пар друзей.

3) Докажите, что $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^n}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)} = \sum_{i=1}^{n} x_i$

4) Дан многочлен степени n, значения которого в $n+1$ целой точке — рациональное число. Докажите, что у него рациональные коэффициенты. б) Многочлен во всех целых точках принимает целые значения. Докажите, что он равен линейной комбинации многочленов вида

$$\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-(k-1))}{k!}$$

с целыми коэффициентами

5) Дана интерполяционная задача над полем вещественных чисел с положительными узлами. Докажите, что существует решающий ее многочлен, задающий четную функцию

6) Пусть $f \in Z/pZ[x]$, $f = \sum a_k x^k$ и $\deg(f) \leq p-1$. Докажите, что $a_i = \pm \sum_{a \in Z/pZ} f(a) a^{p-i-1}$

7) $f \in Z[x]$, причём старший коэффициент f равен 1 и f — не константа. Известно, что при всяком $a \in Z$ $f(a)^2 - f(a)$ кратен p. Докажите, что $deg(f) \geq p-1$