Домашнее задание 1: методы доказательства

1. В чем обман? В каждом пункте необходимо найти точное место, в котором вас пытаются обмануть.

a) [0.25 балла] Докажем, что любое натуральное число n больше 100. В самом деле, принцип индукции позволяет это доказывать, считая известным это утверждение для всех меньших чисел. В частности, мы можем предполагать, что утверждение верно для $n-1$, то есть $n-1 >$ > 100. Тогда $n > 101$ и тем более $n > 100$, что и требовалось доказать.

b) [0.25 балла] Докажем, что произведение любых $n > 0$ чисел равно нулю, используя индукцию по n.
База индукции очевидна: при $n = 0$ сомножителей нет, так что перемножать нечего.
Шаг индукции. Пусть утверждение верно для некоторого n, то есть произведение любых n чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ равно нулю. Докажем то же утверждение для любых $n+1$ чисел $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$. Рассуждая по индукции, мы считаем известным, что $a_1a_2...a_n = 0$. Умножим это равенство на a_{n+1}, получится $a_1a_2...a_na_{n+1} = 0$, что и требовалось.

c) [0.25 балла] Докажем по индукции такое утверждение A_n: «в любом наборе из n натуральных чисел все числа равны». (Здесь $n = 1, 2, 3, ...$).
С базисом индукции всё в порядке: A_1 означает тривиальное утверждение «каждое число равно самому себе».
Докажем законность индуктивного перехода. Пусть A_n верно, докажем A_{n+1}. Рассмотрим набор из $(n+1)$ числа $(a_1, a_2, ..., a_{n+1})$. Применим утверждение A_n к наборам $(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $(a_2, ..., a_n, a_{n+1})$; Каждый из этих наборов состоит из n чисел, поэтому к ним можно применить A_n (ничего страшного, что его надо применить дважды: верное утверждение и несколько раз тоже верно). Таким образом, числа и в том, и в другом наборе равны, то есть
$a_1 = a_2 = ... = a_n$ и
$a_2 = a_3 = ... = a_{n+1}$. Отсюда $a_1 = a_2 = ... = a_n = a_{n+1}$, то есть утверждение A_{n+1} верно. Применяя принцип математической индукции, получаем, что A_n верно для всех n.

d) [0.25 балла] Докажем, что любые n точек лежат на одной прямой. При $n = 1$ и $n = 2$ это ясно (в геометрии есть соответствующая аксиома). Осталось доказать это для произвольного n, предполагая, что для $n-1$ это верно. В самом деле, рассмотрим произвольные n точек $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n$. Отбросим последнюю точку и применим предположение индукции. Получим прямую l, на которой лежат точки $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$.
Нам надо доказать, что и последняя точка A_n лежит на этой прямой. Отбросим первую точку и применим предположение индукции к точкам $A_2, A_3, ..., A_n$. Получим, что они все лежат на некоторой прямой l_0. Могут ли прямые l и l_0 быть различны? Нет, так как обе они проходят через точки A_2 и A_{n-1}, а как известно из той же аксиомы геометрии, через две точки можно провести только одну прямую. Значит, прямые l и l_0 совпадают и проходят через все n точек.

2. Докажите, что в любой выборке из 52 положительных целых чисел найдутся хотя бы два, у которых либо их сумма, либо их разность делится на 100.

3. Дана бесконечная вправо последовательность цифр. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на 1001.

4. Докажите, что $2^{5n-2} + 5^{n-1} \cdot 3^{n+1}$ делится на 17 при любом натуральном n.

5. На какое колиество частей разбивают плоскость n прямых общего положения? (Прямые общего положения - попарно не параллельные прямые)

6. Какое наименьшее количество чисел нужно вычеркнуть из последовательности чисел
1,2,3,..., 2024 так, чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других из оставшихся чисел?