

## Контрольная работа

**Задача 1.** (1 балл.) Известно, что  $x + 1/x$  — целое число. Докажите, что

$$x^n + 1/x^n$$

также целое при любом целом  $n$ .

**Задача 2.** (1 балл.) В окружности отмечено 100 точек, которые покрашены в красный или синий цвет. Некоторые точки соединены отрезками, причём у любого отрезка один конец синий, а другой — красный. Известно, что не существует двух красных точек, принадлежащих одинаковому количеству отрезков. Каково наибольшее возможное число красных точек?

**Задача 3.** (1 балл.) Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

**Задача 4.** (1.5 балла.) Докажите комбинаторно тождество:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

**Задача 5.** (1.5 балла.) Кощей придумал для Ивана-дурака испытание. Он дал Ивану волшебную дудочку, на которой можно играть только две ноты — до и си. Для прохождения испытания Ивану нужно сыграть какую-нибудь мелодию из 300 нот на свой выбор. Но до того, как он начнёт играть, Кощей выбирает и объявляет запретными одну мелодию из пяти нот, одну — из шести нот, ..., одну — из 30 нот. Если в какой-то момент последние сыгранные ноты образуют одну из запретных мелодий, дудочка перестаёт звучать. Сможет ли Иван пройти испытание, какие бы мелодии Кощей ни объявил запретными?

**Задача 6.**

- (1 балл) Найдите общее решение рекуррентного соотношения:

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n, a_0 = 2, a_1 = 5$$

- (1 балл) Напишите общее решение рекуррентного соотношения:

$$a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n$$

- (1 балл) Напишите общее решение рекуррентного соотношения:

$$a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$$

**Задача 7.** (2 балла.) Постройте биекцию между множеством всех вещественных чисел и окружностью, т.е. подмножеством точек плоскости  $(x, y)$ , удовлетворяющих соотношению:

$$x^2 + y^2 = 1$$