Контрольная работа

Задача 1. *(1 балл.)* Доказать, что любое натуральное число $n \geqslant 32$, представимо в виде суммы слагаемых, таких, что сумма обратных величин этих слагаемых равна 1.

Задача 2. *(1 балл.)* В пространстве даны 5 точек, таких что в проекциях на координатные плоскости никакие три точки не лежат на одной прямой. Могло ли оказаться так, что каждая точка ровно в одной из этих проекций лежит внутри выпуклой оболочки остальных? (Мы говорим, что точка лежит внутри выпуклой оболочки других точек, если она лежит внутри треугольника с вершинами в некоторых трёх из этих точек.)

Задача 3. *(1 балл.)* Сколькими способами можно разложить m различных шаров по n неразличимым ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым? Иными словами, сколькими способами можно представить m-элементное множество в виде объединения n непустых непересекающихся подмножеств?

Задача 4. *(1.5 балла.)* Докажите формулу обращения:

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i \Leftrightarrow g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i$$

Задача 5. *(1.5 балла.)* Класс из 20 учеников разделён на две половины так, что каждый школьник из первой половины дружит ровно с шестью одноклассниками, а каждый школьник из второй половины дружит ровно с четырьмя одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

Задача 6.

- (*1 балл*) Найдите общее решение неоднородного реккурентного соотношения:

$$a_{n+2} = 9a_{n+1} - 20a_n + (3n + 5n^2) \cdot 4^n,$$

- (*1 балл*) Напишите общее решение реккурентного соотношения:

$$a_{n+k} = -\sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \binom{k}{s} a_{n+s}$$

- (*1 балл*) Напишите общее решение реккурентного соотношения:

$$a_{n+3} = -a_{n+2} - a_{n+1} - a_n$$

Задача 7. *(2 балла.)* Докажите что не существует биекции между множеством ограниченных функций на отрезке

$$B(a;b) = \left\{ f(x) \colon [a;b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sup_{x \in [a;b]} |f(x)| < \infty \right\}$$

и отрезком $[a;b]$