4. PRUEBAS Y SOLUCIONES

4.1 MATEMÁTICA

SÉPTIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE MATEMÁTICA NIVEL I

Instrucciones:

A continuación se le presenta una serie de siete problemas, resuélvalos correctamente en el cuadernillo de trabajo. El tiempo de la prueba es de 100 minutos.

Problema 1: (10 puntos)

Encuentre las soluciones reales de las ecuaciones propuestas

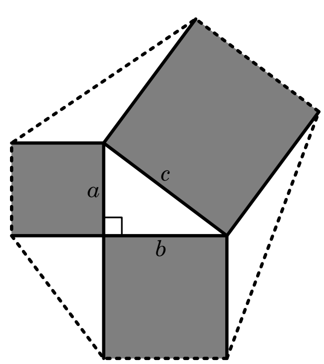
(a) $\log_{\left(\frac{2}{x}+7\right)} 9 = 2$

(b) $\dfrac{1}{2-\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{2}{2+\cos\theta}$

(c) $9^{\sqrt{x-5}} - 27 = 6 \cdot 3^{\sqrt{x-5}}$

Problema 2: (10 puntos)

Usando el principio del teorema de Pitágoras y trigonometría, encuentre el área encerrada entre las líneas punteadas en términos de a, b y c.



Problema 3: (15 puntos)

Demostrar que si dos círculos se tocan en dos y solo dos puntos, los puntos de intersección están sobre una recta que es perpendicular a la recta a la que pertenecen los centros de los círculos.

Problema 4: (15 puntos)

Existen exactamente dos rectas que son tangentes simultáneamente a las parábolas $y = x^2 - 4x + 3$ y $y = -x^2 - 4x - 3$. Determine sus ecuaciones.

Problema 5: (20 puntos)

Halle los valores de a y b tales que $f(x)$ sea diferenciable en 2.

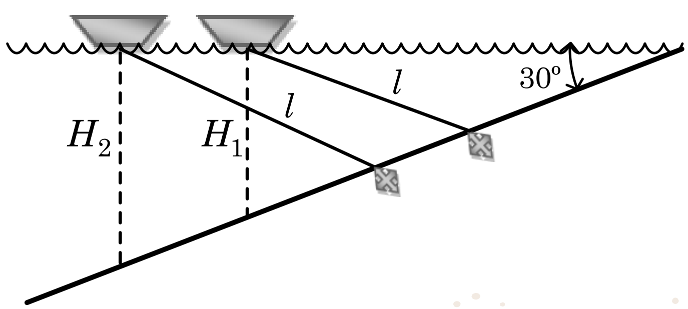
$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Problema 6: (10 puntos)

Una embarcación se refugia de una tormenta en una pequeña bahía cuyo fondo tiene una inclinación $\theta = 30^\circ$. Los vientos de la tormenta hacen que la embarcación sea arrastrada hacia aguas más profundas. Se ha determinado que el ángulo de depresión de la línea de la cadena del ancla, la cual tiene una longitud constante $l = 30\,\text{m}$, ha cambiado de 20º a 25º en cinco minutos.

a. Determine cuál es el cambio de la profundidad por debajo del barco.

b. Suponiendo que el ritmo al cual cambia el ángulo de depresión de la cadena es constante, determine a qué ritmo cambia la profundidad cuando el ángulo es de 30º.



Problema 7: (20 puntos)

Determine la longitud L de la varilla más larga que puede pasar horizontalmente una esquina en un corredor de 2 metros de ancho, hacia otro de 4 metros de ancho.

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Problema 1: (10 puntos)

Encuentre las soluciones reales de las ecuaciones propuestas

a. $\log_{\left(\frac{2}{x}+7\right)} 9 = 2$

b. $\dfrac{1}{2 - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{2}{2+\cos\theta}$

c. $9^{\sqrt{x-5}} - 27 = 6 \cdot 3^{\sqrt{x-5}}$

Solución

a.

$$\log_{\left(\frac{2}{x}+7\right)} 9 = 2$$

$$9 = \left(\frac{2}{x} + 7\right)^2$$

$$9x^2 = 4 + 28x + 49x^2$$

$$40x^2 + 28x + 4 = 0$$

$$10x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$(5x+1)(2x+1) = 0$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Al sustituir $x = -\frac{1}{5}$ en la ecuación original se obtiene una base negativa -3, mientras que para $x = -\frac{1}{2}$ se obtiene una base positiva 3, Si se descarta la base negativa la solución de la ecuación es $x = -\frac{1}{2}$

b. Expresando en valores de $\operatorname{sen}\theta$

$$\frac{1}{2 - \operatorname{sen}\theta} = \frac{2}{2+\cos\theta}$$

$$2 + \cos\theta = 4 - 2\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = 2 - 2\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos^2\theta = 4 - 8\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta$$

$$1 - \operatorname{sen}^2\theta = 4 - 8\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta$$
$$5\operatorname{sen}^2\theta - 8\operatorname{sen}\theta + 3 = 0$$
$$(5\operatorname{sen}\theta - 3)(\operatorname{sen}\theta - 1) = 0$$

Si $\operatorname{sen}\theta = 1$ se obtiene que $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Si $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}$, entonces $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$, de donde se obtiene

$$\theta = 0.6435 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\theta = 2.4981 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Al hacer la prueba, el último valor no satisface la ecuación dada (se elevó al cuadrado); por lo tanto la solución general de la ecuación es

$$\theta = \begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \theta = 0.6435 + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

c. Para resolver la ecuación se expresará usando solo la base 3

$$9^{\sqrt{x-5}} - 27 = 6 \cdot 3^{\sqrt{x-5}}$$
$$3^{2\sqrt{x-5}} - 6 \cdot 3^{\sqrt{x-5}} - 27 = 0$$

Haciendo la sustitución $u = \sqrt{x-5}$

$$3^{2u} - 6 \cdot 3^u - 27 = 0$$
$$(3^u + 3)(3^u - 9) = 0$$

Ahora se puede despejar 3^u :

Si $3^u + 3 = 0$ entonces $3^u = -3$

Si $3^u - 9 = 0$ entonces $3^u = 9$

Aplicando logaritmo de base 3 a ambos lados, se obtiene:

$\log_3 3^u = \log_3(-3)$, que no está definido

$$\log_3 3^u = \log_3 9$$
$$u = 2$$

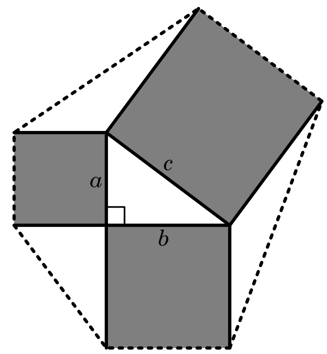
Como $u = \sqrt{x-5}$

$$\sqrt{x-5} = 2$$
$$x - 5 = 4$$
$$x = 9$$

La solución de la ecuación es $x = 9$

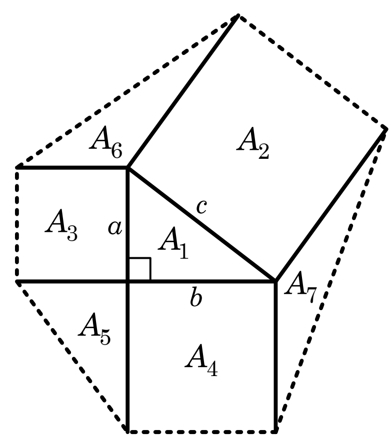
Problema 2: (10 puntos)

Usando el principio del teorema de Pitágoras y trigonometría, encuentre el área encerrada entre las líneas punteadas en términos de a, b y c.



Solución

Primero se denominarán las áreas con los siguientes nombres: $A_1, A_2, \ldots A_7$, para cada una de ellas se establecerá el cálculo de su área respectivamente, como se muestra en el dibujo.



Para A_1, se observa un triángulo rectángulo, donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa. Para este triángulo

$$A_1 = \frac{1}{2}ab,$$

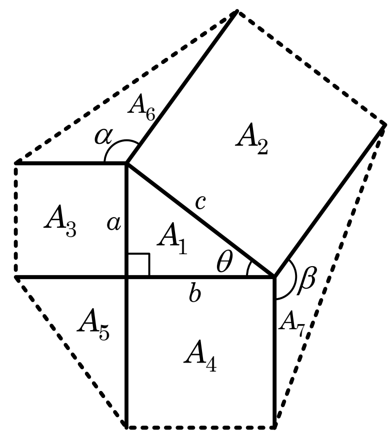
Consecutivamente se observa que las áreas de los cuadrados, son los siguientes

$$A_2 = c^2, \qquad A_3 = a^2, \qquad A_4 = b^2$$

El área A_5 es un triángulo rectángulo de catetos a y b entonces

$$A_5 = \frac{1}{2}ab$$

Para calcular A_6 y A_7, se usara la ecuación para el área de un triángulo donde se conoce, sus lados y el ángulo entre ellos, como se puede observar en la siguiente gráfica.



De donde:

$$A_6 = \frac{1}{2}ac\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Y para:

$$A_7 = \frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}\,\beta$$

Si se relacionan los ángulos α y β con el ángulo interno del triángulo rectángulo θ, se obtiene que $\alpha = 90 + \theta$ y $\beta = 180 - \theta$, de donde las áreas quedarían expresadas de la siguiente manera.

$$A_6 = \frac{1}{2}ac\,\mathrm{sen}(90 + \theta)$$

$$A_7 = \frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}(180 - \theta)$$

Al desarrollar la suma y diferencia de ángulos, se obtiene:

$$\begin{aligned} A_6 &= \frac{1}{2}ac(\mathrm{sen}\,90\cos\theta + \cos 90\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ &= \frac{1}{2}ac\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_7 &= \frac{1}{2}bc(\mathrm{sen}\,180\cos\theta - \cos 180\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ &= \frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

Si se tiene que $\cos\theta = \dfrac{b}{c}$ y $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{a}{c}$; las expresiones finales de las áreas son:

$$A_6 = \frac{1}{2}ac\cos\theta = \frac{1}{2}ac\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{1}{2}ab$$

$$A_7 = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}bc\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{1}{2}ab$$

Tomando en cuenta todas las áreas se tiene:

$$A = \sum_{1}^{7} A_i = \frac{1}{2}ab + c^2 + b^2 + a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab$$
$$= 2ab + a^2 + b^2 + c^2$$

De donde el área total es: $A = 2ab + a^2 + b^2 + c^2$

Si se usa el teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$, el área total quedará expresada como:

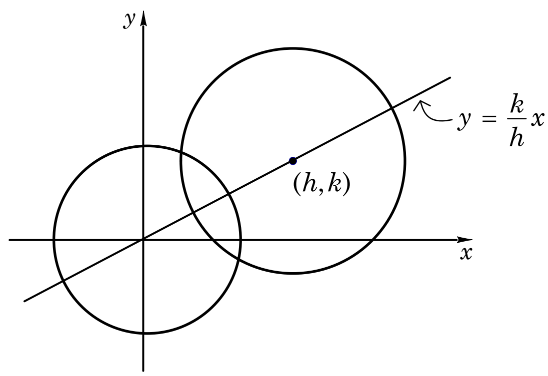
$$A = 2ab + 2c^2 = 2(ab + c^2)$$

Problema 3: (15 puntos)

Demostrar que si dos círculos se tocan en dos y solo dos puntos, los puntos de intersección están sobre una recta que es perpendicular a la recta a la que pertenecen los centros de los círculos.

Solución

Primero, colocamos el centro de uno de los círculos en el origen, y el centro del segundo círculos en el punto (h,k). Como se muestra en la figura



Entonces, las ecuaciones de los círculos son:

$$x^2 + y^2 = r_1^2 \quad \& \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = r_2^2$$

Bajo estas condiciones, la recta que une los centros de ambos círculos pasa por el origen, y por el punto (h,k), por lo que tiene una ecuación

$$y = \frac{k}{h}x \ .$$

Entonces, para encontrar los puntos de intersección, resolvemos ambas ecuaciones como simultáneas, y como primer paso restaremos ambas ecuaciones:

$$\left((x-h)^2 + (y-k)^2 - r_2^2\right) - \left(x^2 + y^2 - r_1^2\right) = 0$$

Es decir

$$(x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r_2^2) - \left(x^2 + y^2 - r_1^2\right) = 0$$

De lo cual eliminando términos semejantes obtenemos:

$$-2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r_2^2 + r_1^2 = 0$$

Esta es la ecuación de una recta a la que pertenecen los puntos que pueden ser punto de intersección entre los círculos, y que depende de los valores de h, k, r_1, r_2, que son valores constantes.

Sí escribimos la recta de la forma $y = mx + b$, obtenemos.

$$y = -\frac{h}{k}x + \frac{r_1^{\,2} - r_2^{\,2} + h^2 + k^2}{2k}$$

Como la pendiente de esta recta es $-\frac{h}{k}$ y la pendiente de la recta que pasa por los centros es $\frac{k}{h}$, entonces las rectas son perpendiculares. Esto es suficiente para demostrar que los puntos de intersección están sobre una recta perpendicular a la recta que une los centros de los círculos.

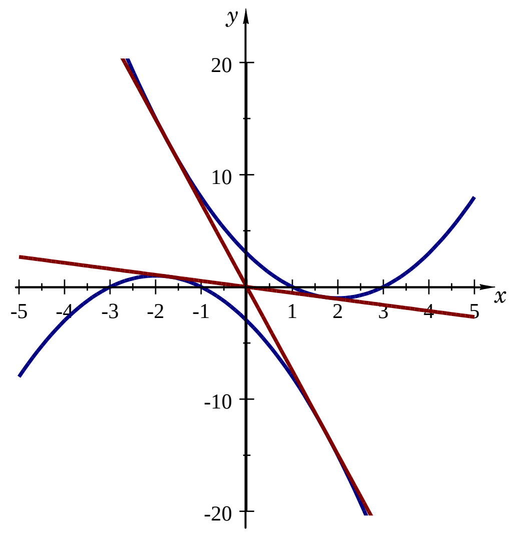
(Para un caso particular, se puede sustituir esta ecuación en la ecuación $x^2 + y^2 = r_1^{\,2}$, para obtener los puntos de intersección y la ecuación particular de la recta que los une)

Problema 4: (15 puntos)

Existen exactamente dos rectas que son tangentes simultáneamente a las parábolas $y = x^2 - 4x + 3$ & $y = -x^2 - 4x - 3$. Determine sus ecuaciones.

Solución

Le recomendamos trazar la gráfica de las dos parábolas para comprender mejor el problema, como se muestra en la figura siguiente



Sea la primera parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y la segunda $g(x) = -x^2 - 4x - 3$ Sea $(a, f(a))$ el punto de tangencia de la recta a la primera parábola y $(b, g(b))$ el punto de tangencia a la segunda. Por lo tanto, la pendiente de la recta debe ser m:

$$m = \frac{f(a) - g(b)}{a - b}$$

Además, sabemos que la recta debe cumplir con ser tangente a las dos parábolas, así que el valor de la primera derivada en $(a, f(a))$ y en $(b, g(b))$ para cada parábola debe ser igual. Entonces necesitamos encontrar el valor de las primeras derivadas para f y g en los puntos arriba indicados e igualarlas.

Primero la derivada de f en a,

$$f(x) = x^2 - 4x + 3, \qquad f'(x) = 2x - 4, \qquad f'(a) = 2a - 4$$

Ahora la derivada de g en b,

$$g(x) = -x^2 - 4x - 3, \quad g'(x) = -2x - 4, \quad g'(b) = -2b - 4$$

Procedemos a igualarlas y simplificar la ecuación resultante, así:

$$f'(a) = g'(b)$$
$$2a - 4 = -2b - 4$$
$$a = -b$$

Ya que tenemos una relación entre a y b, procedemos a expresar la pendiente m en términos de a, de la siguiente manera:

$$m = \frac{f(a) - g(b)}{a - b} = \frac{(a^2 - 4a + 3) - \left(-b^2 - 4b - 3\right)}{a - b}$$

Sustituyendo b por $-a$ tenemos:

$$m = \frac{(a^2 - 4a + 3) - \left(-a^2 + 4a - 3\right)}{2a} = \frac{a^2 - 4a + 3}{a}$$

Si igualamos a $f'(a)$, tenemos finalmente la siguiente ecuación para resolver:

$$2a - 4 = \frac{a^2 - 4a + 3}{a}$$
$$2a^2 - 4a = a^2 - 4a + 3$$
$$a^2 - 3 = 0$$
$$a = \pm\sqrt{3}$$

Lo que nos da dos puntos de tangencia, por lo tanto, dos ecuaciones, como el problema predice. Finalmente determinamos las ecuaciones.

Para $a = \sqrt{3}$,

$$f\left(\sqrt{3}\right) = 3 - 4\sqrt{3} + 3 = 6 - 4\sqrt{3}$$

$$f'\left(\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} - 4$$

Usando la forma punto–pendiente de la ecuación de la recta y usando la derivada de f como pendiente,

$$y - f\left(\sqrt{3}\right) = f'\left(\sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$$
$$y - \left(6 - 4\sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{3} - 4\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$$

Simplificando:

$$y = \left(2\sqrt{3} - 4\right)x$$

Por un procedimiento similar llegamos a la segunda ecuación, para $a = -\sqrt{3}$:

$$y = -\left(2\sqrt{3} + 4\right)x$$

Problema 5: (20 puntos)

Halle los valores de a y b tales que $f(x)$ sea diferenciable en 2.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Solución

Para que sea diferenciable en $x = 2$, la derivada por la izquierda debe ser igual a la derivada por la derecha, es decir

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

Como $f(2) = 7$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{ax + b - 7}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2x^2 - 1 - 7}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{ax - (7 - b)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2(x^2 - 4)}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{a\left[x - \left(\frac{7 - b}{a}\right)\right]}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)}$$

Para que el límite de la izquierda exista, puesto que el denominador tiende a cero, el numerador también debe hacerlo, así que

$$\lim_{x \to 2^-} a\left[x - \left(\frac{7 - b}{a}\right)\right] = 0$$

$$2 - \left(\frac{7 - b}{a}\right) = 0$$

$$2a = 7 - b$$

Entonces

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{a\left(x - \frac{2a}{a}\right)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} 2(x + 2)$$

$$\lim_{x \to 2^-} a = \lim_{x \to 2^+} 2(x + 2)$$

$$a = 8$$

Como

$$\left(\frac{7 - b}{a}\right) = 2$$

$$7 - b = 16$$

$$b = -9$$

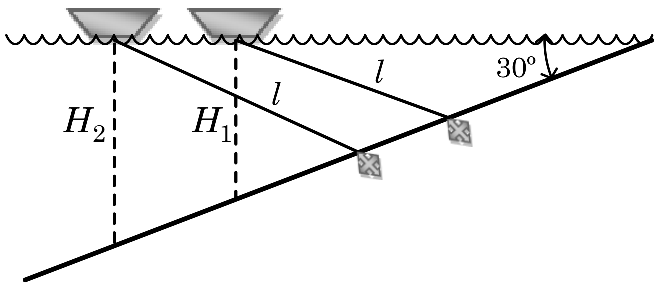
Por lo tanto los valores son $a = 8$ y $b = -9$

Problema 6: (10 puntos)

Una embarcación se refugia de una tormenta en una pequeña bahía cuyo fondo tiene una inclinación $\theta = 30°$. Los vientos de la tormenta hacen que la embarcación sea arrastrada hacia aguas más profundas. Se ha determinado que el ángulo de depresión de la línea de la cadena del ancla, la cual tiene una longitud constante $l = 30\,\text{m}$, ha cambiado de 20º a 25º en cinco minutos.

a. Determine cuál es el cambio de la profundidad por debajo del barco.

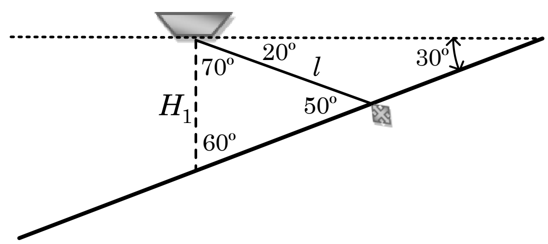
b. Suponiendo que el ritmo al cual cambia el ángulo de depresión de la cadena es constante, determine a qué ritmo cambia la profundidad cuando el ángulo es de 30º.



Solución

a. Denotemos con $\Delta H = H_2 - H_1$ la diferencia entre las profundidades del barco entre $t = 0$ y $t = 5\,\text{min}$.

Para $t = 0$ se tiene

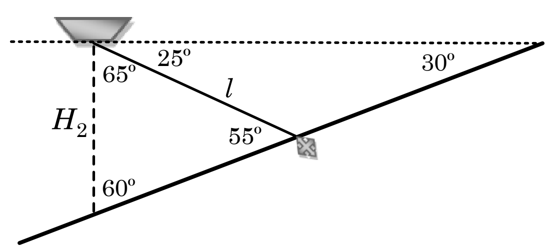


Utilizando la ley de senos para hallar H_1

$$\frac{H_1}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{l}{\operatorname{sen} 60^\circ}$$

$$H_1 = 26.5\ \text{m}$$

Igualmente para calcular H_2 tenemos



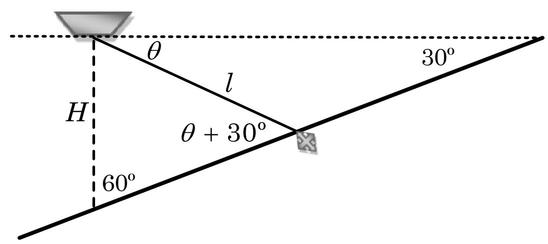
$$\frac{H_2}{\operatorname{sen}55^\circ} = \frac{l}{\operatorname{sen}60^\circ}$$

$$H_2 = 28.3\,\text{m}$$

Por lo tanto

$$\Delta H = 28.3 - 26.5 = 1.8\text{ m}$$

b. Para calcular el ritmo al cual crece la profundidad notemos que, las magnitudes que cambian con el tiempo están relacionadas geométricamente de la siguiente forma



Utilizando la ley de senos tenemos

$$\frac{H}{\operatorname{sen}(\theta + 30^\circ)} = \frac{l}{\operatorname{sen}60^\circ}$$

$$H = \frac{l\operatorname{sen}(\theta + 30^\circ)}{\operatorname{sen}60^\circ}$$

Derivando esta expresión respecto al tiempo tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{l\operatorname{sen}(\theta + 30^\circ)}{\operatorname{sen}60^\circ}\right)\\ &= \frac{l}{\operatorname{sen}60^\circ}\cos(\theta + 30^\circ)\frac{d\theta}{dt}\end{aligned}$$

Evaluando cuando $\theta = 30^\circ$, $l = 30\,\text{m}$ y $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1^\circ}{\text{min}} = \frac{\pi}{180}\frac{\text{rad}}{\text{min}}$

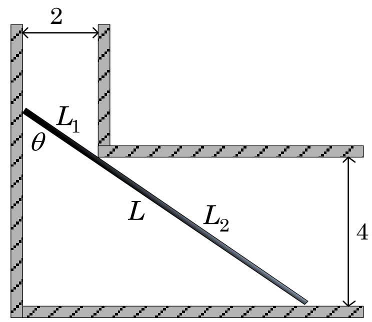
$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{(30)}{\operatorname{sen}60^\circ}\cos(30^\circ + 30^\circ)\frac{\pi}{180}\\ &= 0.302\frac{\text{m}}{\text{min}}\end{aligned}$$

Problema 7: (20 puntos)

Determine la longitud L de la varilla más larga que puede pasar horizontalmente una esquina en un corredor de 2 metros de ancho, hacia otro de 4 metros de ancho.

Solución

La figura muestra una varilla de longitud L pasando de un corredor a otro. Para que esto suceda el ángulo θ cambia de 90º a 0º cuando la varilla gira. La varilla más larga que pasa será aquella que pueda hacer todo el giro.



Si θ es el ángulo entre la varilla y la pared se tiene que

$$L = L_1 + L_2$$

$$\csc\theta = \frac{L_1}{2}\text{, entonces } L_1 = 2\csc\theta$$

$$\sec\theta = \frac{L_2}{4}\text{, entonces } L_2 = 4\sec\theta$$

De donde la función a optimizar es

$$L(\theta) = 2\csc\theta + 4\sec\theta$$

El dominio de ésta función es el intervalo abierto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Calculando la primera derivada

$$L'(\theta) = 4\sec\theta\tan\theta - 2\csc\theta\cot\theta$$

Encontrando los valores críticos

$$L'(\theta) = 0$$

$$4\sec\theta\tan\theta - 2\csc\theta\cot\theta = 0$$

$$4\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} = 2\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\tan\theta = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.6789\,\text{rad}$$

Que es el único número crítico.

Utilizando el criterio de la primera derivada se tiene

Intervalo	$L(\theta)$	$L'(\theta)$	Conclusión
$(0, 0.671)$		Negativo	Decreciente
$\theta = 0.671$	8.3239	0	Mínimo absoluto
$\left(0.671, \frac{\pi}{2}\right)$		Positivo	Creciente

De donde la longitud de la varilla es mínima cuando el ángulo es 0.671 rad.

Es decir que si el ángulo es 0.671 rad, la longitud de la viga es 8.3239 metros. Cualquier varilla más larga que ésta quedará atascada antes de formar éste ángulo y no podrá pasar. Por lo tanto la viga de longitud más larga que pasa tiene longitud $L = 8.3239$ m.

SÉPTIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE MATEMÁTICA NIVEL II

Instrucciones:

A continuación se le presenta una serie nueve de problemas, resuélvalos correctamente en el cuadernillo de trabajo. El tiempo de la prueba es de 100 minutos.

Problema 1: (15 puntos)

Se construye un auditorio sobre una base en forma de un cuarto de círculo con radio de 50 pies. Las ecuaciones siguientes son modelos para el suelo: $z = \dfrac{x+y}{5}$ y para el techo: $z = 20 + \dfrac{xy}{100}$

a. Halle el volumen del auditorio, lo cual se necesita para determinar los requerimientos para la calefacción y el aire acondicionado.

b. Halle el área de la superficie del techo, lo cual se necesita para determinar los requerimientos para pintura del mismo.

Problema 2: (10 puntos)

Determine si la siguiente integral impropia es convergente o divergente, en caso de ser convergente indique a que valor converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - |x-3| + 5}{e^{|x|}}\,dx$$

Problema 3: (10 puntos)

Partiendo de la serie $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad -1 < x < 1$.

Encuentre $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(x+1)\,dx$ como una serie infinita y luego encuentre un valor aproximado con un error menor 0.0001.

Problema 4: (15 puntos)

Encontrar las dimensiones de un triángulo con perímetro constante de tal manera que encierre un área máxima utilizando multiplicadores de Lagrange. ¿Qué tipo de triángulo es?
(Nota: la fórmula de Herón para el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados x, y & z es $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$, donde $s = \frac{x+y+z}{2}$)

Problema 5: (10 puntos)

Una masa que pesa 10 libras produce un alargamiento de 2 pies en un resorte. La masa se une a un dispositivo amortiguador que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Determine los valores de la constante de amortiguamiento β por lo que el movimiento posterior sea:

- **a.** Subamortiguado
- **b.** Sobreamortiguado
- **c.** Críticamente amortiguado

Problema 6: (15 puntos)

Resuelva la ecuación diferencial:

$$4y'' - 4y' + y = e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{1-x^2}$$

Problema 7: (15 puntos)

Verifique el teorema de la divergencia de Gauss para el campo $\vec{F} = 3x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} - 5z\mathbf{k}$ donde S es la frontera de la región limitada por $x^2 + y^2 = 1$; $z = 0$ & $z = 2$

Problema 8: (10 puntos)

Encuentre:

$$\int \frac{1}{x^7 - x}\,dx$$

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Problema 1: (15 puntos)

Se construye un auditorio sobre una base en forma de un cuarto de círculo con radio de 50 pies. Las ecuaciones siguientes son modelos para el suelo: $z = \dfrac{x+y}{5}$ y para el techo: $z = 20 + \dfrac{xy}{100}$

a. Halle el volumen del auditorio, lo cual se necesita para determinar los requerimientos para la calefacción y el aire acondicionado.

b. Halle el área de la superficie del techo, lo cual se necesita para determinar los requerimientos para pintura del mismo.

Solución

a.

$$\text{Volumen} = \iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R \left(\left(20 + \frac{xy}{100}\right) - \left(\frac{x+y}{5}\right)\right) dA$$

$$f(x,y) = f_{\text{techo}} - f_{\text{suelo}}$$

Región R en polares: $dA = r\,dr\,d\theta \quad 0 \le \theta \le \pi/2 \qquad 0 \le r \le 50$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{50} \left(\left(20 + \frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{100}\right) - \left(\frac{r\cos\theta + r\sin\theta}{5}\right)\right) r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{50} \left(\left(20r + \frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{100}\right) - \left(\frac{r^2\cos\theta + r^2\sin\theta}{5}\right)\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(10r^2 + \frac{r^4\cos\theta\sin\theta}{400} - \frac{r^3\cos\theta}{15} - \frac{r^3\sin\theta}{15}\right)\Bigg|_0^{50} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(10\times 50^2 + \frac{50^4\cos\theta\sin\theta}{400} - \frac{50^3\cos\theta}{15} - \frac{50^3\sin\theta}{15}\right) d\theta$$

$$= \left(25000\theta + \frac{50^4\sin^2\theta}{800} - \frac{50^3\sin\theta}{15} + \frac{50^3\cos\theta}{15}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 30{,}415.74\text{pies}^3$$

b.

Área de una superficie= $\iint_R dS = \iint_R \sqrt{1+[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2}\,dA$

$f(x,y) = f_{\text{techo}} = 20 + \dfrac{xy}{100}$ $\quad f_x(x,y) = \dfrac{y}{100}$ $\quad f_y(x,y) = \dfrac{x}{100}$

$$\iint_R \sqrt{1+\frac{y^2}{100^2}+\frac{x^2}{100^2}}\,dA = \iint_R \frac{\sqrt{100^2+y^2+x^2}}{100}\,dA = \iint_R \frac{\sqrt{100^2+r^2}}{100}\,dA$$

Región R en polares: $dA = r\,dr\,d\theta \quad 0 \le \theta \le \pi/2 \qquad 0 \le r \le 50$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{50} \frac{\sqrt{100^2+r^2}}{100}\,r\,dr\,d\theta = \frac{1}{200}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left.\frac{\left(100^2+r^2\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{50}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{300}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(100^2+50^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(100^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{300}\left[\left(100^2+50^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(100^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{600}\left[\left(\left(100^2+50^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(100^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right]$$

$$= 2{,}081.53\text{pies}^2$$

Problema 2: (10 puntos)

Determine si la siguiente integral impropia es convergente o divergente, en caso de ser convergente indique a que valor converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - |x-3| + 5}{e^{|x|}} dx$$

Solución

Por ser integral impropia y por el valor absoluto, se debe dividir la integral de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - |x-3| + 5}{e^{|x|}} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2 - |x-3| + 5}{e^{|x|}} dx + \int_{0}^{3} \frac{x^2 - |x-3| + 5}{e^{|x|}} dx + \int_{3}^{+\infty} \frac{x^2 - |x-3| + 5}{e^{|x|}} dx$$

aplicando límites a las integrales impropias:

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{x^2 - |x-3| + 5}{e^{|x|}} dx + \int_{0}^{3} \frac{x^2 - |x-3| + 5}{e^{|x|}} dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{3}^{b} \frac{x^2 - |x-3| + 5}{e^{|x|}} dx$$

Extrayendo términos de valores absolutos:

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{x^2 + (x-3) + 5}{e^{-x}} dx + \int_{0}^{3} \frac{x^2 + (x-3) + 5}{e^{x}} dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{3}^{b} \frac{x^2 - (x-3) + 5}{e^{x}} dx$$

Al simplificar

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{x^2 + x + 2}{e^{-x}} dx + \int_{0}^{3} \frac{x^2 + x + 2}{e^{x}} dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{3}^{b} \frac{x^2 - x + 8}{e^{x}} dx$$

Al resolver las integrales indefinidas de:

a. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 2}{e^{-x}} dx$

Por medio de integración por partes

$$\int \left(x^2 + x + 2\right) e^x dx = \left(x^2 + x + 2\right) e^x - \int (2x+1) e^x dx$$

$$\int \left(x^2 + x + 2\right) e^x dx = \left(x^2 - x + 3\right) e^x - (2x+1) e^x + \int 2e^x dx$$

$$\int \left(x^2 + x + 2\right) e^x dx = \left(x^2 + x + 2\right) e^x - (2x+1) e^x + 2e^x + C$$

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{e^{-x}} dx = e^x \left(x^2 - x + 3\right) + C$$

b. $\int \frac{x^2+x+2}{e^x}dx$, por medio de integración por partes

$$\int \left(x^2+x+2\right)e^{-x}dx = -\left(x^2+x+2\right)e^{-x} + \int (2x+1)e^{-x}dx$$

$$\int \left(x^2+x+2\right)e^{-x}dx = -\left(x^2+x+2\right)e^{-x} - (2x+1)e^{-x} - \int 2e^{-x}(-dx)$$

$$\int \left(x^2+x+2\right)e^{-x}dx = -\left(x^2+x+2\right)e^{-x} - (2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$\int \frac{x^2+x+2}{e^x}dx = -e^{-x}\left(x^2+3x+5\right)+c$$

c. $\int \frac{x^2-x+8}{e^x}dx$, por medio de integración por partes

$$\int \left(x^2-x+8\right)e^{-x}dx = -\left(x^2-x+8\right)e^{-x} + \int (2x-1)e^{-x}dx$$

$$\int \left(x^2-x+8\right)e^{-x}dx = -\left(x^2-x+8\right)e^{-x} - (2x-1)e^{-x} - \int 2e^{-x}(-dx)$$

$$\int \left(x^2-x+8\right)e^{-x}dx = -\left(x^2-x+8\right)e^{-x} - (2x-1)e^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$\int \frac{x^2-x+8}{e^x}dx = -e^{-x}\left(x^2+x+9\right)+c$$

Regresando a las integrales definidas e impropias:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-|x-3|+5}{e^{|x|}}dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\left(x^2-x+3\right)\right]_a^0 + \left[-e^{-x}\left(x^2+3x+5\right)\right]_0^3 + \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-x}\left(x^2+x+9\right)\right]_3^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0\left(0^2-0+3\right) - e^a\left(a^2-a+3\right)\right] + \left[-e^{-3}\left(3^2+3(3)+5\right) + e^{-0}\left(0^2+0+5\right)\right] + \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-b}\left(b^2+b+9\right) + e^{-3}\left(3^2+3+9\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-|x-3|+5}{e^{|x|}}dx = 3 + -e^{-3}(23) + 5 + e^{-3}(21) + \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{\left(a^2-a+3\right)}{e^{-a}}\right] + \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\left(b^2+b+9\right)}{e^b}\right]$$

$$= [3] + \left[5-23e^{-3}\right] + \left[21e^{-3}\right] = 8-2e^{-3}$$

La integral es convergente, y converge a $8-2e^{-3} \approx 7.9004$

Problema 3: (10 puntos)

Partiendo de la serie $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad -1 < x < 1$.

Encuentre $\int_0^{\frac{1}{4}} x\ln(x+1)\,dx$ como una serie infinita y luego encuentre un valor aproximado con un error menor 0.0001.

Solución

Si

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad -1 < x < 1$$

$$= \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad -1 < x < 1$$

$$\int \frac{1}{1+x}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx \quad -1 < x < 1$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + C \quad -1 < x < 1$$

Encontrando el valor de C

$$\ln 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^{n+1}}{n+1} + C \quad \Rightarrow C = 0$$

Entonces

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad -1 < x < 1$$

Multiplicando por x

$$x\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+1} \quad -1 < x < 1$$

Integrando la serie anterior

$$\int x\ln(x+1)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+1}dx \quad -1 < x < 1$$

$$\int x\ln(x+1)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+3}}{(n+1)(n+3)} + C \quad -1 < x < 1$$

La integral definida

$$\int_0^{\frac{1}{4}} x\ln(x+1)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^{n+3}}{(n+1)(n+3)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (0)^{n+3}}{(n+1)(n+3)}$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} x\ln(x+1)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^{n+3}}{(n+1)(n+3)}$$

Tomando los primeros cuatro términos de la serie se tiene

$$\int_0^{\frac{1}{4}} x\ln(x+1)dx \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^{n+3}}{(n+1)(n+3)}$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} x\ln(x+1)dx \approx \frac{1}{192} - \frac{1}{2048} + \frac{1}{15360}$$

Es una serie alternante y como

$$\frac{1}{15360} \approx 0.000065 < 0.0001$$

Se concluye que

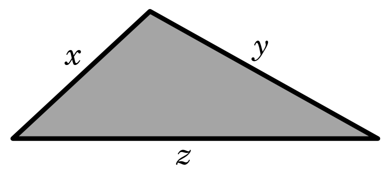
$$\int_0^{\frac{1}{4}} x\ln(x+1)dx \approx \frac{49}{10240}$$

Problema 4: (15 puntos)

Encontrar las dimensiones de un triángulo con perímetro constante de tal manera que encierre un área máxima utilizando multiplicadores de Lagrange. ¿Qué tipo de triángulo es?
(Nota: la fórmula de Herón para el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados x, y & z es $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$, donde $s = \dfrac{x+y+z}{2}$)

Solución

La figura muestra un triángulo cuyos lados tienen longitudes x, y & z.



Por lo tanto el perímetro es

$$x + y + z = k \text{ donde } k \text{ es constante.}$$

Sea A el área del triángulo. Utilizando la fórmula de Herón para el área de un triángulo.

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)} \qquad \text{donde } s = \frac{x+y+z}{2}$$

Ya que el perímetro es constante, s también es constante.

Debemos maximizar A sujeto a la restricción $x + y + z = k$

Podemos trabajar con A^2 en lugar de A.

$$A^2 = f(x,y,z) = s(s-x)(s-y)(s-z)$$

Ligadura $g(x,y,z) = x + y + z - k$

Al utilizar multiplicadores de Lagrange se obtiene

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

Encontramos

$$\nabla f(x,y,z) = \nabla s(s-x)(s-y)(s-z) \qquad \nabla g(x,y,z) = \nabla(x + y + z - k)$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = -s(s-y)(s-z) \qquad \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = -s(s-x)(s-z) \qquad \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = -s(s-x)(s-y) \qquad \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z} = 1$$

Al sustituir estas ecuaciones en $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ el siguiente sistema

$$-s(s-y)(s-z) = \lambda$$

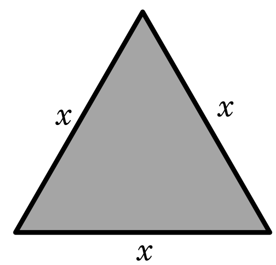
$$-s(s-x)(s-z) = \lambda$$

$$-s(s-x)(s-y) = \lambda$$

Al resolver el sistema anterior se obtienen las soluciones

$$x = y = z = \frac{\text{perimetro}}{3}$$

Por lo tanto se trata de un triángulo equilátero.



Problema 5: (10 puntos)

Una masa que pesa 10 libras produce un alargamiento de 2 pies en un resorte. La masa se une a un dispositivo amortiguador que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Determine los valores de la constante de amortiguamiento β por lo que el movimiento posterior sea:

- **a.** Subamortiguado
- **b.** Sobreamortiguado
- **c.** Críticamente amortiguado

Solución

La ecuación diferencial que modela este problema es

$$m\frac{d^2y}{dx^2} + \beta\frac{dy}{dx} + kx = 0$$

Como una fuerza de 10 lb produce un alargamiento de 2 p se tiene

$$F = ks$$
$$10 \text{ lb} = k \cdot 2 \text{ p}$$
$$k = 5\,\frac{\text{lb}}{\text{p}}$$

Obteniendo la masa

$$F = ma$$
$$10 \text{ lb} = m \cdot 32\,\frac{\text{pies}}{\text{seg}^2}$$
$$m = \frac{5}{16}\text{ slug}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\frac{5}{16}\frac{d^2y}{dx^2} + \beta\frac{dy}{dx} + 5x = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$\frac{5}{16}m^2 + \beta m + 5 = 0$$

Analizando el discriminante

$$\sqrt{\beta^2 - 4\left(\frac{5}{16}\right)(5)} = \sqrt{\beta^2 - \frac{25}{4}}$$

Si $\beta^2 - \dfrac{25}{4} > 0$, se tiene raíces reales distintas para la ecuación auxiliar, por lo tanto el sistema es sobreamortiguado.

Si $\beta^2 - \frac{25}{4} = 0$, se tienen raíces reales iguales y el sistema es críticamente amortiguado.

Si $\beta^2 - \frac{25}{4} < 0$, se tienen raíces complejas para la ecuación auxiliar, por lo tanto el sistema es subamortiguado.

Solución del discriminante

$$\beta^2 - \frac{100}{16} = 0$$

$$\beta = \frac{5}{2}$$

Resupesta:

El sistema es subamortiguado si $\beta < \frac{5}{2}$

El sistema es sobreamortiguado si $\beta > \frac{5}{2}$

El sistema es críticamente amortiguado si $\beta = \frac{5}{2}$

Problema 6: (15 puntos)

Resuelva la ecuación diferencial:

$$4y'' - 4y' + y = e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{1 - x^2}$$

Solución

Primero se escribe la ecuación en su forma estándar dividiendo entre 4:

$$y'' - y' + \tfrac{1}{4}y = \tfrac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{1 - x^2}$$

La solución de la ecuación es de la forma

$$y = y_c + y_p$$

Obteniendo y_c:

$$y'' - y' + \tfrac{1}{4}y = 0$$

$$m^2 - m + \tfrac{1}{4} = 0$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 1}}{2} = \frac{1}{2} \text{, repetido}$$

$$y_c = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x}$$

Utilizando variación de parámetros

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \qquad y_1 = e^{\frac{1}{2}x} \qquad y_2 = xe^{\frac{1}{2}x}$$

$$w = \begin{vmatrix} e^{\frac{1}{2}x} & xe^{\frac{1}{2}x} \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} & \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x} \end{vmatrix} = e^x$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{\frac{1}{2}x} \\ \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{1 - x^2} & \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x} \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{4}xe^x\sqrt{1 - x^2}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} e^{\frac{1}{2}x} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} & \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{1 - x^2} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{4}e^x\sqrt{1 - x^2}$$

$$u_1' = \frac{w_1}{w} = \frac{-\frac{1}{4}xe^x\sqrt{1 - x^2}}{e^x} = -\tfrac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2}$$

$$u_1 = \int -\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

$$u_2' = \frac{w_2}{w} = \frac{e^x \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2}}{e^x} = \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2}$$

$$u_2 = \int \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{4}(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{sen}^{-1} x)$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$= \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{12} e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{8} x e^{\frac{1}{2}x}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{sen}^{-1} x\right)$$

$$y = y_c + y_p$$

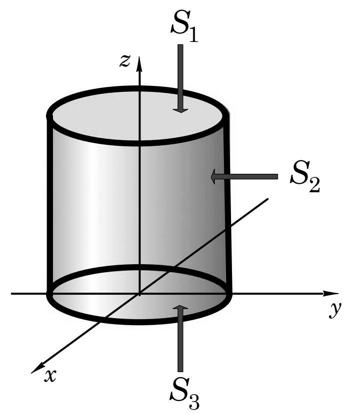
$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x} + \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{12} e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{8} x e^{\frac{1}{2}x}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{sen}^{-1} x\right)$$

Problema 7: (15 puntos)

Verifique el teorema de la divergencia de Gauss para el campo $\vec{F} = 3x\hat{i} + 3y\hat{j} - 5z\hat{k}$ donde S es la frontera de la región limitada por $x^2 + y^2 = 1 \quad ; \quad z = 0 \quad \& \quad z = 2$

Solución

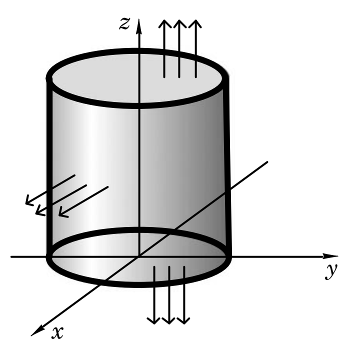
La siguiente figura muestra el cilindro de radio 1 acotado por los planos $z = 0 \quad \& \quad z = 2$, así como las tres superficies a considerar



Verificar que el teorema de la Divergencia de Gauss

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV$$

La figura muestra en forma aproximada la región acotada por el cilindro y los planos, se tomará un flujo orientado hacia afuera.



a. Calculando la integral de superficie se tiene que

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Para S_1 $z = 2$ región $0 \le x^2 + y^2 \le 1$

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_R \left(3x\hat{i} + 3y\hat{j} - 5z\hat{k}\right) \cdot \hat{k}\frac{dydx}{\hat{k} \cdot \hat{k}}$$

$$= \iint_R -5zdydx$$

$$= \iint_R -10dydx = -10\pi(1)^2 = -10\pi$$

Para S_2 $x^2 + y^2 = 1$

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

Donde

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \left(3x\hat{i} + 3y\hat{j} - 5z\hat{k}\right) \cdot \frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}$$

$$= \left(3x\hat{i} + 3y\hat{j} - 5z\hat{k}\right) \cdot \frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j}}{2}$$

$$= \frac{6x^2 + 6y^2}{2} = 3$$

Entonces

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} 3dS$$

Utilizando el área superficial de un cilindro de altura 2

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 3(2\pi)(2) = 12\pi$$

Para S_3 $z = 0$ región $0 \le x^2 + y^2 \le 1$

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_R 3x\hat{i} + 3y\hat{j} - 6z\hat{k} \cdot -\hat{k}\frac{dydx}{\hat{k} \cdot \hat{k}}$$

$$= \iint_R -6zdydx$$

$$= \iint_R 0dydx = 0$$

Finalmente

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$= -10\pi + 0 + 12\pi = 2\pi$$

b. Aplicando el teorema de la divergencia y calculando la integral triple en coordenadas cilíndricas se tiene

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(3x) + \frac{\partial}{\partial y}(3y) + \frac{\partial}{\partial z}(-5z) = 1$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \iiint_V 1\, dV$$

Como el volumen es un cilindro de radio 1 y altura 2

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV = (1)V = \pi(1)^2 2$$

$$= 2\pi$$

Por lo tanto, se verifica el teorema de la divergencia:

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV = 2\pi$$

Problema 8: (10 puntos)

Calcule la integral utilizando los procedimientos adecuados y dejando constancia de su razonamiento.

$$\int \frac{1}{x^7 - x}\,dx$$

Solución

Hay varias formas de resolver éste problema

Primera forma

$$\int \frac{1}{x^7 - x}\,dx = \int \frac{1}{x\left(x^6 - 1\right)}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{x\left(x^6 - 1\right)}\,dx$$

Si se sustituye

$u = x^6 - 1$, entonces $du = 6x^5 dx$ y $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{6x^6} = \dfrac{du}{6(u+1)}$

$$\int \frac{1}{x\left(x^6 - 1\right)}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{u(u+1)}\,du$$

Por fracciones parciales

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{(u+1)}$$

Encontrando las constantes: $A = 1$ & $B = -1$

Separando la integral

$$\int \frac{1}{u(u+1)}\,du = \int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{1}{u+1}\,du$$

Integrando

$$\int \frac{1}{u(u+1)}\,du = \ln|u| - \ln|u+1| + C = \ln\left|\frac{u}{u+1}\right| + C$$

Retornando a la variable x

$$\int \frac{1}{x^7 - x}\,dx = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^6 - 1}{x^6}\right| + C$$

Segunda forma

$$\int \frac{1}{x^7 - x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x^7}}{\frac{x^7 - x}{x^7}}\,dx$$

$$= \int \frac{x^{-7}}{1 - x^{-6}}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{6x^{-7}}{1 - x^{-6}}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|1 - x^{-6}\right| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^6 - 1}{x^6}\right| + C$$

Tercera forma

$$\int \frac{1}{x^7 - x}\,dx = \int \frac{1}{x\left(x^6 - 1\right)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x\left(x^6 - 1\right)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x\left[(x^2)^3 - 1\right]}\,dx$$

Si se sustituye

$$z = x^2\text{, entonces } dz = 2x\,dx \quad \text{y} \quad dx = \frac{dz}{2x}$$

La integral toma la siguiente forma

$$\int \frac{1}{2z\left(z^3 - 1\right)}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z\left(z^3 - 1\right)}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z(z-1)(z^2 + z + 1)}\,dz$$

Por fracciones parciales

$$\frac{1}{z(z-1)(z^2 + z + 1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{(z-1)} + \frac{Cz + D}{(z^2 + z + 1)}$$

Encontrando las constantes: $A = -1, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}, \quad D = \frac{1}{3}$

Separando la integral

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{z(z-1)(z^2 + z + 1)}\,dz = \int \frac{A}{z}\,dz + \int \frac{B}{(z-1)}\,dz + \int \frac{Cz + D}{(z^2 + z + 1)}\,dz$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\,dz + \frac{1}{6}\int \frac{1}{(z-1)}\,dz + \frac{1}{6}\int \frac{2z + 1}{(z^2 + z + 1)}\,dz$$

Integrando

$$\int \frac{1}{z(z-1)(z^2+z+1)}dz = \frac{1}{6}\ln|z-1| - \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{6}\ln|z^2+z+1|$$

Retornando a la variable x

$$\int \frac{1}{x^7-x}dx = \frac{1}{6}\ln\left|x^2-1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2\right| + \frac{1}{6}\ln\left|x^4+x^2+1\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^7-x}dx = \frac{1}{6}\ln\left|x^6-1\right| - \frac{1}{6}\ln\left|x^6\right| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^6-1}{x^6}\right| + C$$

.2 FÍSICA

SÉPTIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE FÍSICA NIVEL I

Instrucciones:

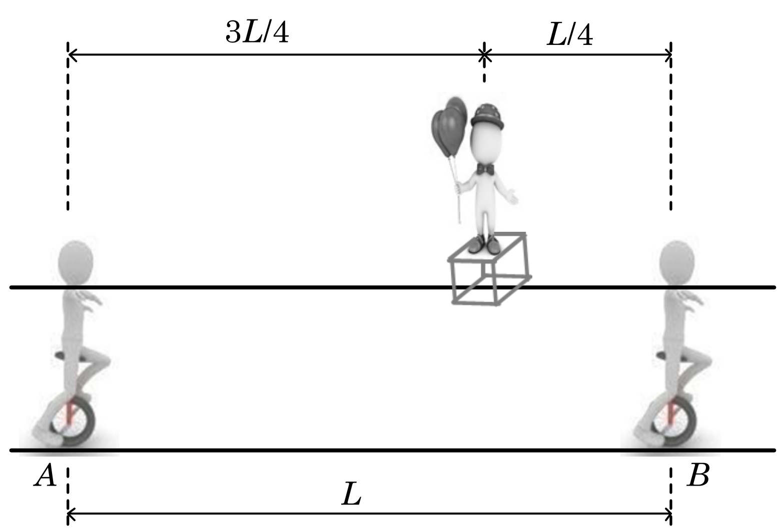
A continuación se le presenta una serie de cuatro problemas, resuélvalos correctamente en el cuadernillo de trabajo. El tiempo de la prueba es de 100 minutos.

Problema 1: (25 puntos)

Parte del espectáculo Kooza del Circo del Sol consta de dos payasos montados en monociclos y desplazándose a velocidad constante de 0.5 m/s hacia la derecha sobre una cuerda tensa quienes sostienen por medio de una barra una caja hecha de varillas de madera (módulo de elasticidad 11.0 Gpa) de longitud $L/8$ y sección rectangular de 5.00 cm por 5.00 cm.

Si sobre la caja de varillas se encuentra un payaso de peso w, la deformación en cada una de las varillas verticales de la caja es de 1.78×10^{-6} m, y la reacción en el monociclo A es de 100 N. Determine

- **a.** El peso del payaso que se encuentra sobre la caja de peso despreciable
- **b.** La distancia de separación entre A y B.
- **c.** Parte del espectáculo consiste en que el payaso sobre la caja salte verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 1m/s y caiga en un cubo de agua que se encuentra a 7m debajo de él, a que distancia horizontal del cubo deberá encontrarse cuando salta para caer exactamente dentro de él.



Problema 2 (25 puntos)

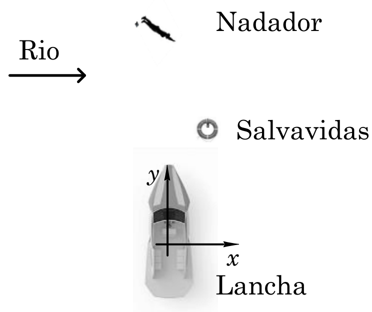
Una persona ha caído al río el cual lleva una velocidad de 2.0 m/s en x. La persona puede ser rescatada si alcanza el salvavidas lanzado por el personal de ayuda.

Los rescatistas viajan en una lancha a una velocidad de 2 m/s en y, lanzan un salvavidas desde la altura de la lancha de 1.0 m con una velocidad de componentes positivas $V_x = 0.50\,\text{m/s}$, $V_y = 2.0\,\text{m/s}$ y $V_z = 24.3\,\text{m/s}$.

Si la persona se encuentra a un metro (a la izquierda) de separación en el eje x del punto de lanzamiento del salvavidas y a 6 m en el eje y del punto donde cae el salvavidas, determine:

a. El desplazamiento del salvavidas.

b. La velocidad del nadador respecto al río.



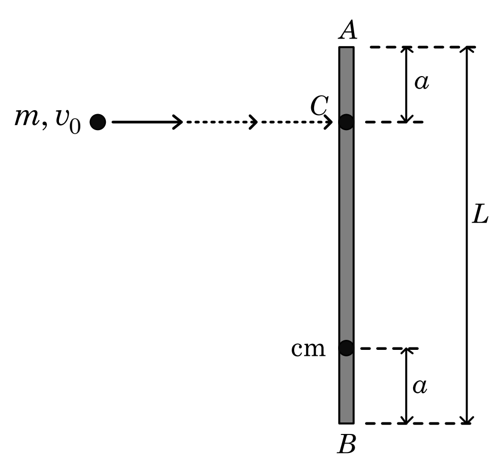
Problema 3. (25 puntos)

Una barra de un material no homogéneo de longitud $L = 1\,\text{m}$, tiene su centro de masa (C.M) a una distancia $a = 0.2\,\text{m}$ de su extremo B y tiene una masa $M = 1\,\text{kg}$ y momento de inercia alrededor de su centro de masa $I_{\text{C.M.}} = 0.38\,\text{kg-m}^2$, ésta descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. Un proyectil de masa $m = 500\,\text{g}$ viaja a una velocidad $v_0 = 90\,\text{m/s}$, horizontal y perpendicularmente a la dirección de la barra. El proyectil se incrusta en la barra a una distancia $a = 0.2\,\text{m}$ del extremo A de la barra. Calcule:

a. La velocidad del CM del sistema barra + partícula.

b. La velocidad angular del sistema barra + partícula.

c. El cambio porcentual de la energía cinética de la colisión.



Problema 4: (25 puntos)

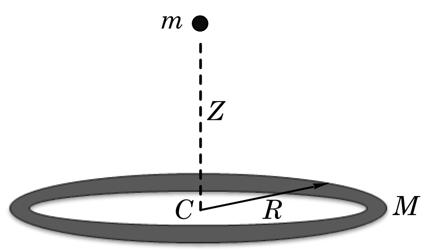
En una región lejana existe una estación espacial en forma de anillo de radio R**.** Considere como si su masa M está distribuida linealmente. Una pequeña nave espacial de masa m se encuentra a una distancia Z del centro C del disco.

a. Calcule la fuerza de atracción gravitacional que experimenta la nave.

b. Si la nave se encuentra en reposo cerca del centro C, oscilará. Calcule el período de dichas oscilaciones.

c. Cuanto trabajo realizan los motores de la nave para moverla de $Z = R$ a $Z = 2R$.

d. Calcule la energía potencial gravitacional de la nave a una distancia Z de C y su velocidad de escape a $Z = R$.



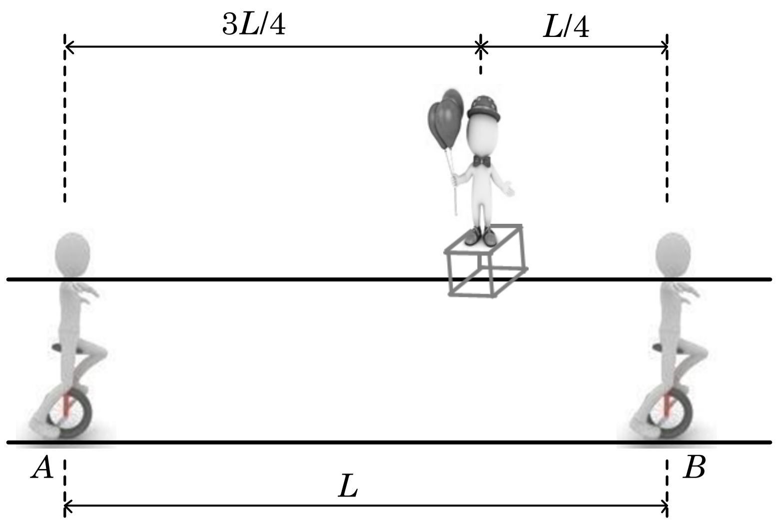
SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Problema 1: (25 puntos)

Parte del espectáculo Kooza del Circo del Sol consta de dos payasos montados en monociclos y desplazándose a velocidad constante de 0.5 m/s hacia la derecha sobre una cuerda tensa quienes sostienen por medio de una barra una caja hecha de varillas de madera (módulo de elasticidad 11.0 Gpa) de longitud $L/8$ y sección rectangular de 5.00 cm por 5.00 cm.

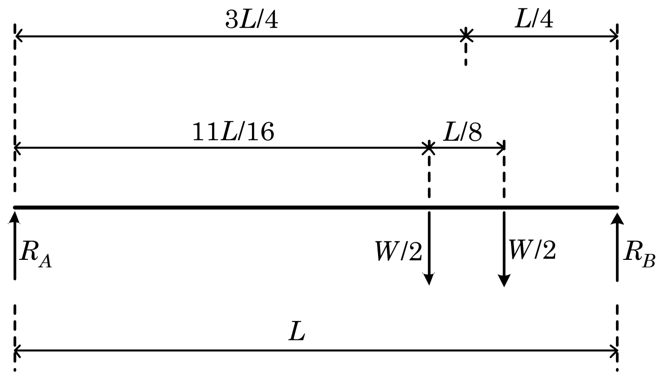
Si sobre la caja de varillas se encuentra un payaso de peso w, la deformación en cada una de las varillas verticales de la caja es de 1.78×10^{-6} m, y la reacción en el monociclo A es de 100 N. Determine

- **a.** El peso del payaso que se encuentra sobre la caja de peso despreciable
- **b.** La distancia de separación entre A y B.
- **c.** Parte del espectáculo consiste en que el payaso sobre la caja salte verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 1m/s y caiga en un cubo de agua que se encuentra a 7m debajo de él, a que distancia horizontal del cubo deberá encontrarse cuando salta para caer exactamente dentro de él.



Solución:

a. El diagrama de cuerpo libre de la viga sobre la que se encuentra el payaso se muestra en la siguiente figura



$$\frac{3L}{4} - \frac{L}{16} = \frac{11L}{16}$$
$$\frac{3L}{4} + \frac{L}{16} = \frac{13L}{16}$$

Para que la viga este en equilibrio

$$\sum \tau_A = 0$$

$$-R_B(L) + \frac{W}{2}\left(\frac{11L}{16}\right) + \frac{W}{2}\left(\frac{13L}{16}\right) = 0$$
$$R_B = \frac{3W}{4}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + R_B - W = 0$$
$$R_A = \frac{W}{4}$$
$$W = 4R_A$$
$$W = 400\,\mathrm{N}$$

b. La distancia de separación entre A y B.

La fuerza que está soportando cada una de las barras es W/4

Como el esfuerzo está dado por la relación entre la fuerza y el área perpendicular.

$$\sigma = \frac{W/4}{A}$$

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} \text{ , entonces } \sigma = Y \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \text{ , donde } L_0 = \frac{L}{8}$$

$$W = \frac{4A \cdot \Delta L \cdot Y}{(L/8)}$$

$$L = \frac{32 \cdot Y \cdot A \cdot \Delta L}{W}$$

$$L = \frac{32 \cdot (11.0 \times 10^{9}\ \text{Pa}) \cdot (0.0500\text{m}) \cdot (0.0500\text{m}) \cdot (1.78 \times 10^{-6}\text{m})}{400\text{N}}$$

$$L = 3.92\text{m}$$

c. Parte del espectáculo consiste en que el payaso sobre la caja salte verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 1m/s y caiga en un cubo de agua que se encuentra a 7m debajo de él, a que distancia horizontal del cubo deberá encontrarse cuando salta para caer exactamente dentro de él.

Análisis en el eje "*y*"

$$\Delta y = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$-7\text{m} = \left(1\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t - \frac{1}{2}\left(9.8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t$$

$$t = 1.30\text{s}$$

Análisis en el eje "*x*"

$$V_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Delta x = V_x \cdot \Delta t$$

$$\Delta x = \left(0.5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot (1.30\text{s})$$

$$\Delta x = 0.65\text{m}$$

Problema 2 (25 puntos)

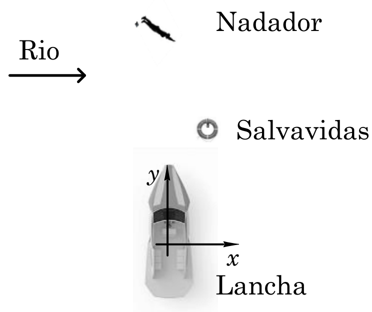
Una persona ha caído al río el cual lleva una velocidad de 2.0 m/s en x. La persona puede ser rescatada si alcanza el salvavidas lanzado por el personal de ayuda.

Los rescatistas viajan en una lancha a una velocidad de 2 m/s en y, lanzan un salvavidas desde la altura de la lancha de 1.0 m con una velocidad de componentes positivas $V_x = 0.50\,\text{m/s}$, $V_y = 2.0\,\text{m/s}$ y $V_z = 24.3\,\text{m/s}$.

Si la persona se encuentra a un metro (a la izquierda) de separación en el eje x del punto de lanzamiento del salvavidas y a 6 m en el eje y del punto donde cae el salvavidas, determine:

a. El desplazamiento del salvavidas.

b. La velocidad del nadador respecto al río.



Solución:

L = Lancha

S = Salvavidas

T = Tierra

R = Rio

$$\mathbf{V}S_L = 0.5\frac{\text{m}}{\text{s}}\mathbf{i} + 2\frac{\text{m}}{\text{s}}\mathbf{j} + 24.3\frac{\text{m}}{\text{s}}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{V}L_R = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{V}R_T = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}\mathbf{i}$$

$$\mathbf{V}L_T = \mathbf{V}L_R + \mathbf{V}R_T = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}\mathbf{i} + 2\frac{\text{m}}{\text{s}}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{V}S_T = \mathbf{V}L_T + \mathbf{V}S_L = 2.5\frac{\text{m}}{\text{s}}\mathbf{i} + 4\frac{\text{m}}{\text{s}}\mathbf{j} + 24.3\frac{\text{m}}{\text{s}}\mathbf{k}$$

a. El desplazamiento del salvavidas.

Analizando el movimiento vertical

$$\Delta z = V_{0z} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$-1\text{m} = \left(24.3\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t - \left(4.9\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2$$

$$t = 5\text{s}$$

Desplazamiento en x

$$\begin{aligned}\Delta x &= V_x \cdot \Delta t\\ &= \left(2.5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\cdot(5.00\text{s})\\ &= 12.5\,\text{m}\end{aligned}$$

Desplazamiento en y

$$\begin{aligned}\Delta y &= V_y \cdot \Delta t\\ &= \left(4.00\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\cdot(5.00\text{s})\\ &= 20\,\text{m}\end{aligned}$$

$$\Delta x = -1\text{m}$$

Por lo tanto el desplazamiento del salvavidas es

$$\Delta\mathbf{r} = 12.5\text{m}\,\mathbf{i} + 20.0\text{m}\,\mathbf{j} - 1\text{m}\,\mathbf{k}$$

b. La velocidad del nadador respecto al río.

En y

El nadador debe desplazarse los 6m en el tiempo que cae el salvavidas (5s); en el eje de las y únicamente está actuando la velocidad del nadador respecto al río en y.

$$V_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{-6\text{m}}{5\text{s}} = -1.2\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En el eje de las x

$$V_y = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{13.5\text{m}}{5\text{s}} = 2.7\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Como 2.7 m/s incluye la velocidad del río, la velocidad del nadador respecto al río en x tiene el valor de 0.7 m/s.

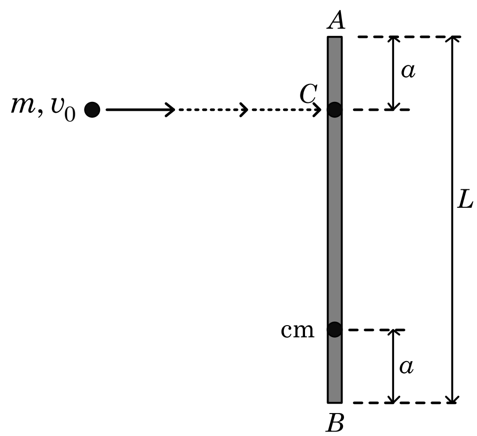
Entonces la velocidad del nadador respecto al río es

$$\mathbf{V}n_R = 0.7\frac{\text{m}}{\text{s}}\mathbf{i} - 1.2\frac{\text{m}}{\text{s}}\mathbf{j}$$

Problema 3. (25 puntos)

Una barra de un material no homogéneo de longitud $L = 1\,\text{m}$, tiene su centro de masa (C.M) a una distancia $a = 0.2\,\text{m}$ de su extremo B y tiene una masa $M = 1\,\text{kg}$ y momento de inercia alrededor de su centro de masa $I_{\text{C.M.}} = 0.38\,\text{kg-m}^2$, ésta descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. Un proyectil de masa $m = 500\,\text{g}$ viaja a una velocidad $v_0 = 90\,\text{m/s}$, horizontal y perpendicularmente a la dirección de la barra. El proyectil se incrusta en la barra a una distancia $a = 0.2\,\text{m}$ del extremo A de la barra. Calcule:

- **a.** La velocidad del CM del sistema barra + partícula.
- **b.** La velocidad angular del sistema barra + partícula.
- **c.** El cambio porcentual de la energía cinética de la colisión.



Solución:

a. El momentum se conserva: $\mathbf{P_0} = \mathbf{P_f}$, por lo que se tiene:

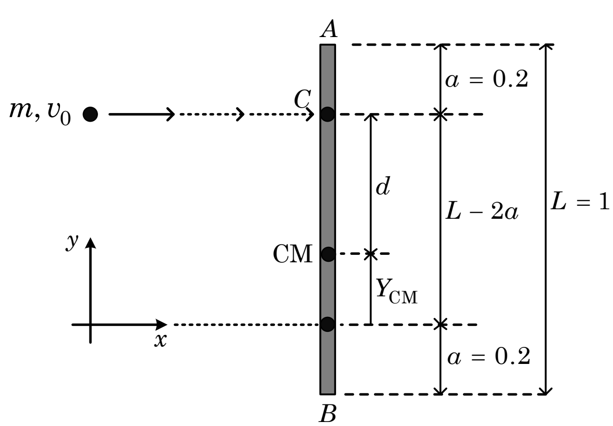
$$m v_0 = (M + m) v_{\text{cm}}$$

$$v_{\text{cm}} = \frac{m v_0}{(M + m)}$$

$$v_{\text{cm}} = \frac{0.5\text{kg}}{1.5\text{kg}}(90\,\text{m/s}) = 30\,\text{m/s}$$

De donde la velocidad del CM del sistema barra + partícula es 30 m/s

b. Si ahora CM es el centro de masa del sistema barra + partícula



Entonces se calcula el CM de la barra + proyectil, alrededor de este punto rotará el sistema.

$$(M+m)Y_{\mathrm{CM}} = M(0) + m(L-2a)$$

$$Y_{\mathrm{CM}} = \frac{m(L-2a)}{M+m} = \frac{0.5\mathrm{kg}}{1.5\mathrm{kg}}(1-0.4)\mathrm{m} = 0.2\mathrm{m}$$

Ahora se calcula la inercia del sistema anterior:

$$I_0 = \left(I_{CM} + MY_{\mathrm{CM}}^2 + md^2\right)$$

$$I_0 = \left(0.38 + 1(0.2)^2 + 0.5(0.45)^2\right) = 0.5\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$$

Ya tenemos todo, así que usamos la ecuación de conservación del momento angular:

$$mv_0 d = I_0\omega$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{mv_0 d}{I_0} = \frac{0.5\mathrm{kg}(90\,\mathrm{m/s})(0.4\,\mathrm{m})}{0.5\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2} = 36\mathrm{rad/s}$$

c. Calculando la energía inicial y la energía final

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{2}(0.5)(90)^2 = 2{,}025\,\mathrm{J}$$

$$K_f = \frac{1}{2}(M+m)v_{\mathrm{CM}}{}^2 + \frac{1}{2}I_0\,\omega^2 = \frac{1}{2}(1.5)(30)^2 + \frac{1}{2}(0.5)(36)^2 = 999\mathrm{J}$$

El cambio porcentual de la energía cinética es

$$\gamma = \frac{\Delta K}{K_0}\cdot 100 = -0.506\cdot 100 = -50.67\%$$

Problema 4: (25 puntos)

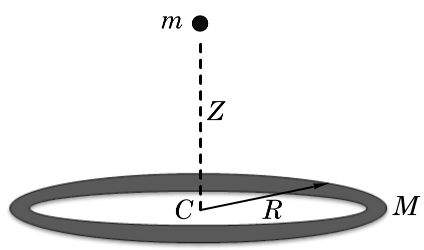
En una región lejana existe una estación espacial en forma de anillo de radio R. Considere como si su masa M está distribuida linealmente. Una pequeña nave espacial de masa m se encuentra a una distancia Z del centro C del disco.

a. Calcule la fuerza de atracción gravitacional que experimenta la nave.

b. Si la nave se encuentra en reposo cerca del centro C, oscilará. Calcule el período de dichas oscilaciones.

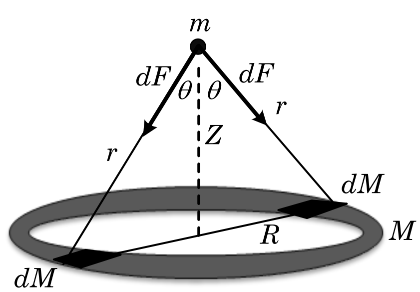
c. Cuanto trabajo realizan los motores de la nave para moverla de $Z = R$ a $Z = 2R$.

d. Calcule la energía potencial gravitacional de la nave a una distancia Z de C y su velocidad de escape a $Z = R$.



Solución:

a. La siguiente figura muestra las fuerzas que se producen



El diferencial de fuerza es

$$dF = \frac{GmdM}{r^2}$$

Usando simetría:

$$dF_T = 2(dF)\cos\theta$$

$$dF_T = \frac{2Gm\cos\theta dM}{r^2}$$

$$F_T = \frac{2Gmcos\theta}{r^2}\int dM$$

Donde $\int dM = M/2$ por los argumentos de simetría

$$F_T = \frac{GmM}{r^2}\cos\theta$$

Dado que $\cos\theta = \dfrac{Z}{R}$ y que $r = \sqrt{R^2 + Z^2}$,

Tenemos que:

$$\boldsymbol{F_T = \frac{GmMZ}{\left(R^2 + Z^2\right)^{3/2}}}$$

b. Z<<R, entonces $Z \rightarrow 0\, y$ $F_T = \dfrac{GmMZ}{\left(R^2+Z^2\right)^{3/2}}$ quedaría $F_T = \dfrac{GmMZ}{R^3}$

$$\sum F = m\frac{d^2Z}{dt^2} \rightarrow m\frac{d^2Z}{dt^2} = -\frac{GmMZ}{R^3}$$

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \left(\frac{GM}{R^3}\right)Z = 0 \quad \text{(Oscilador armónico simple)}$$

$$\omega = \left(\frac{GM}{R^3}\right)^{1/2} = \frac{2\pi}{T}$$

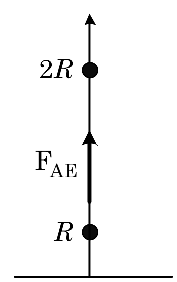
$$\boldsymbol{T = 2\pi\left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}}$$

c.

$$W_{AE} = \int_R^{2R} \frac{GmMZ}{\left(R^2+Z^2\right)^{3/2}}\,dZ$$

$$W_{AE} = GmM\left[\left.\frac{-1}{\left(R^2+Z^2\right)^{1/2}}\right|_R^{2R}\right]$$

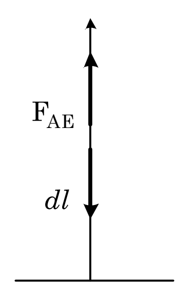
$$\boldsymbol{W_{AE}} = GmM\left[\frac{1}{\sqrt{2}R} - \frac{1}{\sqrt{5}R}\right] = \boldsymbol{\frac{GmM}{R}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$$



d.

$$W_{AE} = \int_\infty^{Z^*} \mathbf{F_{AE}} \cdot \mathbf{dl} = -\int_\infty^{Z^*} F_{AE}\,dl = \int_\infty^{Z^*} \frac{GmMZ}{\left(R^2+Z^2\right)^{3/2}}\,dZ$$

$$W_{AE} = GmM\left[\left.\frac{-1}{\left(R^2 + Z^2\right)^{1/2}}\right|_\infty^{z^*}\right] = -\frac{GmM}{\left(Z^{*2} + R^2\right)^{1/2}}$$



Entonces $U_g = -\dfrac{GmM}{\sqrt{Z^{*2} + R^2}}$

Como $E_0 = E_f$ implicando que $U_g + K = 0 = -\dfrac{GmM}{\sqrt{Z^{*2} + R^2}} + \dfrac{1}{2} m v_0^{\,2}$

$$v_0 = \left[\frac{\sqrt{2}\,GM}{R}\right]^{1/2}$$

SÉPTIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE FÍSICA NIVEL II

Instrucciones:

A continuación se le presenta una serie de cuatro problemas, resuélvalos correctamente en el cuadernillo de trabajo. El tiempo de la prueba es de 100 minutos.

Problema 1: (25 puntos)

La máxima intensidad de campo eléctrico que puede existir en el aire en condiciones normales de presión y temperatura, sin que se produzca ruptura es $3MV/m$. Calcular:

a. El mayor potencial eléctrico a que se puede conectar una esfera conductora de 20 cm de diámetro.

b. ¿Qué sucederá si, manteniendo conectada la esfera a dicho potencial, se le rodea de otra esfera conductora de 20 cm de radio, concéntrica con ella y conectada a tierra? ¿Cuál será el campo eléctrico entre las esferas?

c. ¿Qué sucederá si, manteniendo las condiciones del inciso anterior, entre ambas esferas se coloca un material dieléctrico de constante $K = 4.7$ y de una rigidez dieléctrica de $1 \times 10^7\ V/m$?

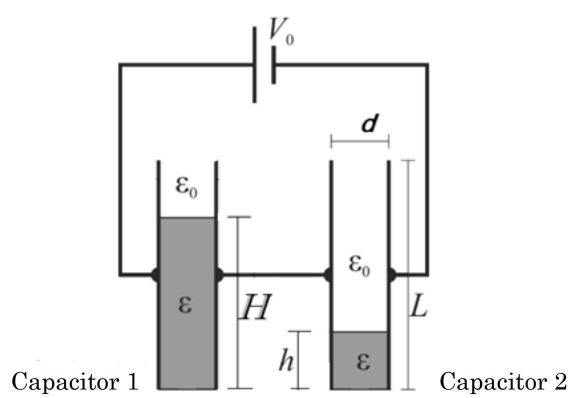
Problema 2: (25 puntos)

El circuito que se muestra en la figura está conectado a una fuente de voltaje $V_0 = 12.0$ v y está conformado por dos capacitores de placas paralelas de $L = 25.0\,\text{cm}$ por lado, separadas una distancia cm que contienen un líquido dieléctrico de constante $\varepsilon_r = 2.40$ tal y como se observa en el circuito. A partir de $t = 0\,\text{s}$, el líquido en el capacitor 1, se escapa a razón de $1 \times 10^{-4}\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ y en el capacitor 2, se vierte a razón de $2 \times 10^{-4}\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$, sabiendo que inicialmente $H = 20.0\,\text{cm}$ y $h = 5.00\,\text{cm}$ respectivamente. Bajo las condiciones anteriormente descritas se desea averiguar lo siguiente:

a. La expresión que describe la variación de la capacitancia total del circuito respecto al tiempo.

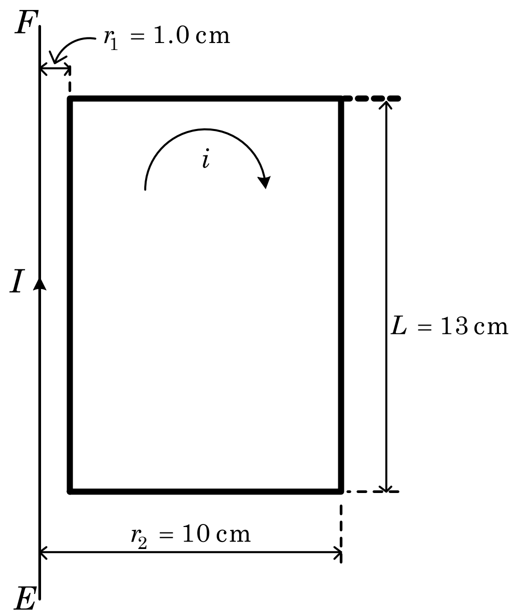
b. La carga total acumulada por el circuito en los tiempos $t = 1.00\,\text{s}$, $t = 2.00\,\text{s}$ y $t = 3.00\,\text{s}$.

c. El valor de la diferencia de potencial entre las placas de cada capacitor para los tiempos $t = 1.00\,\text{s}$, $t = 2.00\,\text{s}$ y $t = 3.00\,\text{s}$.



Problema 3: (25 puntos)

Por el conductor *EF* (que es muy largo) pasa una corriente de $I = 30\,\text{A}$. Por el conductor rectangular, paralelo al alambre, como se muestra en la figura, pasa una corriente $i = 20\,\text{A}$ que circula en el sentido de las manecillas del reloj. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre el conductor rectangular por el campo magnético que crea el conductor *EF*

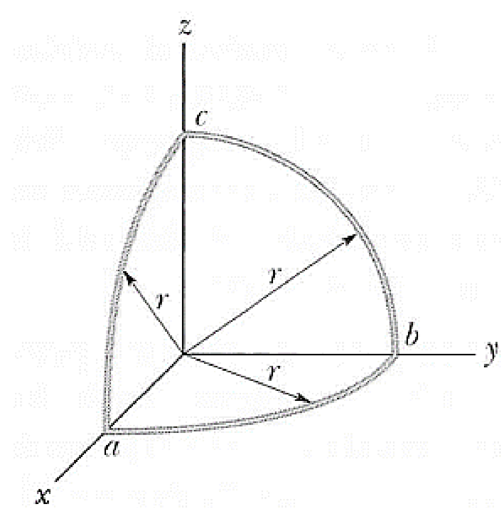


Problema 4: (25 puntos)

Se dobla un alambre en forma de tres segmentos circulares, cada uno de radio $r = 10$ cm, como se muestra en la figura. Cada segmento es el cuadrante de un círculo, *ab* yace en el plano *xy*, *bc* yace en el plano *yz* y *ac* yace en el plano *xz*.

a. Si un campo magnético uniforme $\vec{B}$ apunta en la dirección $+x$, ¿Cuál es valor absoluto de la *fem* establecida en el alambre cuando $\vec{B}$ se incrementa a razón de 3.0 mT/s?

b. ¿Cuál es la dirección de la corriente en el segmento *bc*?



SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Problema 1: (25 puntos)

La máxima intensidad de campo eléctrico que puede existir en el aire en condiciones normales de presión y temperatura, sin que se produzca ruptura es $3MV/m$. Calcular:

a. El mayor potencial eléctrico a que se puede conectar una esfera conductora de 20 cm de diámetro.

b. ¿Qué sucederá si, manteniendo conectada la esfera a dicho potencial, se le rodea de otra esfera conductora de 20 cm de radio, concéntrica con ella y conectada a tierra? ¿Cuál será el campo eléctrico entre las esferas?

c. ¿Qué sucederá si, manteniendo las condiciones del inciso anterior, entre ambas esferas se coloca un material dieléctrico de constante $K = 4.7$ y de una rigidez dieléctrica de $1 \times 10^7\, V/m$?

Solución:

La máxima intensidad de campo eléctrico que puede existir en el aire en condiciones normales de presión y temperatura, sin que se produzca ruptura es $3MV/m$. Calcular:

a. El mayor potencial eléctrico a que se puede conectar una esfera conductora de 20cm de diámetro.

La carga que adquiere la esfera al conectarla a un potencial V_o es:

$$V_o = \frac{kq}{R_1} \rightarrow q = \frac{V_o R_1}{k}$$

El campo eléctrico creado por la esfera en función de r será:

$$E(r) = \frac{kq}{r^2} = \frac{V_o R_1}{r^2}$$

El valor máximo del campo ocurrirá para $r = R_1$ es decir:

$$E_{\max} = \frac{V_o}{R_1}$$

Por lo tanto el máximo potencial al que puede conectarse la esfera sin que se produzca ruptura es:

$$V_{o\max} = E_{\max} R_1 = \left(3 \times 10^6\right)(0.1) = 3 \times 10^5\text{V}$$

b. Si la esfera se mantiene al potencial V_R la diferencia de potencial entre ésta respecto a la esfera conectada a tierra será:

$$E' = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_o r^2} \qquad\qquad V_R = -\int_{R_2}^{R_1} E' dr = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Eliminando *q'* entre las dos ecuaciones, se obtiene el campo eléctrico entre las esferas

$$E' = \frac{V_R}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \frac{1}{r^2}$$

Cuyo valor máximo es

$$E'_{\text{máx}} = \frac{3 \times 10^5}{\left(\frac{1}{2R_1} R_1^2\right)} = 6 \times 10^6 \,\frac{\text{V}}{\text{m}} > E_{\text{ruptura}}$$

Por lo que saltará la chispa entre ambas esferas conductoras.

c. Si la esfera se mantiene al potencial V_R , el campo eléctrico máximo calculado en el inciso anterior, es inferior a la rigidez dieléctrica del material por lo que no saltará chispa entre las esferas conductoras.

Problema 2: (25 puntos)

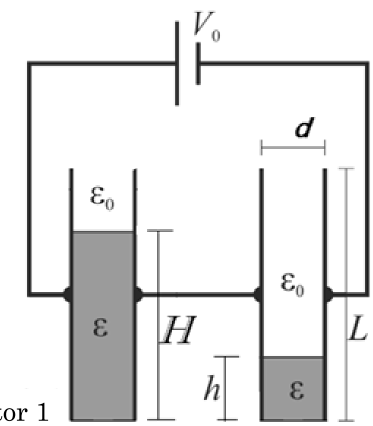
El circuito que se muestra en la figura está conectado a una fuente de voltaje $V_0 = 12.0\,\text{v}$ y está conformado por dos capacitores de placas paralelas de $L = 25.0\,\text{cm}$ por lado, separadas una distancia cm que contienen un líquido dieléctrico de constante $\varepsilon_r = 2.40$ tal y como se observa en el circuito. A partir de $t = 0\,\text{s}$, el líquido en el capacitor 1, se escapa a razón de $1\times10^{-4}\ \dfrac{\text{m}^3}{\text{s}}$ y en el capacitor 2, se vierte a razón de $2\times10^{-4}\ \dfrac{\text{m}^3}{\text{s}}$, sabiendo que inicialmente $H = 20.0\,\text{cm}$ y $h = 5.00\,\text{cm}$ respectivamente. Bajo las condiciones anteriormente descritas se desea averiguar lo siguiente:

a. La expresión que describe la variación de la capacitancia total del circuito respecto al tiempo.

b. La carga total acumulada por el circuito en los tiempos $t = 1.00\,\text{s}$, $t = 2.00\,\text{s}$ y $t = 3.00\,\text{s}$.

c. El valor de la diferencia de potencial entre las placas de cada capacitor para los tiempos

$t = 1.00\,\text{s}$, $t = 2.00\,\text{s}$ y $t = 3.00\,\text{s}$.



Solución:

Datos:

$$L = 0.250\,\text{m},\qquad H = 0.200\,\text{m},\qquad h = 0.050\,\text{m}\quad d = 0.090\,\text{m},$$

$$\varepsilon = 2.40,\qquad \frac{dv_{C1}}{dt} = 1\times10^{-4}\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}\qquad \frac{dv_{C2}}{dt} = 2\times10^{-4}\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

a. Planteamiento

La razón de cambio del volumen de cada uno de los capacitores está expresada de la siguiente manera:

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = \mathrm{d}L\frac{dH}{dt}\qquad \text{y}\qquad \frac{dv_{C2}}{dt} = \mathrm{d}L\frac{dh}{dt}$$

De lo anterior se despeja la variación de la altura de cada uno de los capacitores respecto al tiempo, dejando las expresiones de la siguiente forma:

$$\frac{dv_{C1}}{dt}\times\frac{1}{\mathrm{d}L} = \frac{dH}{dt}\qquad \text{y}\qquad \frac{dv_{C2}}{dt}\times\frac{1}{dL} = \frac{dh}{dt}$$

Así también se busca, la variación de cada una de las áreas respecto al tiempo, las cuales se utilizarán más adelante para encontrar la razón de cambio de la capacitancia en el tiempo.

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{dv_{C1}}{dt} \times \frac{1}{d} \qquad \text{y} \qquad \frac{dA_2}{dt} = \frac{dv_{C2}}{dt} \times \frac{1}{d}$$

La expresión que describe un capacitor de placas paralelas con dieléctrico está descrita como:

$$C_k = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 A}{d} \text{ Faradios}$$

Se puede describir un capacitor de placas paralelas, sin dieléctrico dividiendo la expresión anterior por ε.

Aplicando a la expresión anterior $\frac{dA}{dt}$, para hallar la variación de la capacitancia respecto al tiempo $\frac{dC}{dt}$, en vacío y con líquido, se tiene:

$$\frac{dC_{1\varepsilon}}{dt} = \frac{dv_{c1}}{dt} \times \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mathrm{d}^2} = -0.262 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/s}$$

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{dv_{c1}}{dt} \times \frac{\varepsilon_0}{\mathrm{d}^2} = 0.109 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/s}$$

$$\frac{dC_{2\varepsilon}}{dt} = \frac{dv_{c2}}{dt} \times \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mathrm{d}^2} = 0.524 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/s}$$

$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{dv_{c1}}{dt} \times \frac{\varepsilon_0}{\mathrm{d}^2} = -0.218 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/s}$$

Al aplicar las condiciones iniciales del sistema en t=0s se tiene los siguientes valores:

$$C_{01} = 1.22 \times 10^{-12}\mathrm{F}$$

$$C_{01\varepsilon} = 11.8 \times 10^{-12}\mathrm{F}$$

$$C_{02} = 4.92 \times 10^{-12}\mathrm{F}$$

$$C_{02\varepsilon} = 2.95 \times 10^{-12}\mathrm{F}$$

Lo anterior se obtiene al sustituir las condiciones iniciales del sistema en la expresión para un capacitor de placas paralelas.

Las expresiones que describen cada uno de los capacitores en función del tiempo son tomando en cuenta las condiciones iniciales son:

$$C_{1(t)} = C_{01\varepsilon} - \frac{dC_{1\varepsilon}}{dt}(t) + C_{01} + \frac{dC_1}{dt}(t)\,\mathrm{F/s}$$
$$C_{1(t)} = 13.0 \times 10^{-12} - 0.153 \times 10^{-12}(t)\,\mathrm{F/s}$$

$$C_{2(t)} = C_{02\varepsilon} + \frac{dC_{2\varepsilon}}{dt}(t) + C_{02} - \frac{dC_{12}}{dt}(t)\,\mathrm{F/s}$$
$$C_{2(t)} = 7.87 \times 10^{-12} + 0.306 \times 10^{-12}(t)\,\mathrm{F/s}$$

La expresión que describe la variación de la capacitancia total del circuito respecto al tiempo.

La capacitancia total para dos capacitores en serie se define como:

$$C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \text{ Faradios}$$

Relacionando $\frac{dC_1}{dt}$ *y* $\frac{dC_2}{dt}$ por medio de la expresión anterior, se obtiene:

$$\frac{dC_T}{dt} = \frac{C_{1(t)} \cdot C_{2(t)}}{C_{1(t)} + C_{2(t)}} = \frac{102.3 \times 10^{-24} + 2.774 \times 10^{-24} t - 4.681 \times 10^{-24} t^2}{20.90 \times 10^{-12} + 0.153 \times 10^{-24} t}\ \mathrm{F/s}$$

Evaluando en la función anterior para los tiempos solicitados:

$$C_{T(1)} = 5.00\ \mathrm{pF}$$
$$C_{T(2)} = 5.08\ \mathrm{pF}$$
$$C_{T(3)} = 5.15\ \mathrm{pF}$$

b. La carga total acumulada por el circuito en los tiempos $t = 1.00\,\mathrm{s}$, $t = 2.00\,\mathrm{s}$ y $t = 3.00\,\mathrm{s}$.

La variación de la carga total del circuito respecto al tiempo se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{dQ_t}{dt} = \frac{dC_T}{dt} V_0 \text{ Coulomb}$$

Al multiplicar la expresión anterior por cada uno de los tiempos, se obtiene el resultado:

$$\frac{dQ_t}{dt}(1.00) = \frac{dC_T}{dt}V_0 = 60x10^{-12} \text{ Coulomb/s}$$

$$\frac{dQ_t}{dt}(2.00) = \frac{dC_T}{dt}V_0 = 60.9x10^{-12} \text{ Coulomb/s}$$

$$\frac{dQ_t}{dt}(3.00) = \frac{dC_T}{dt}V_0 = 61.8x10^{-12} \text{ Coulomb/s}$$

c. El valor de la diferencia de potencial instantáneo para cada capacitor en el tiempo se define como:

$$V_{C1} = \frac{dQ_t}{dt}\bigg/\frac{dC_1}{dt} \times (t) \text{ Voltios}$$

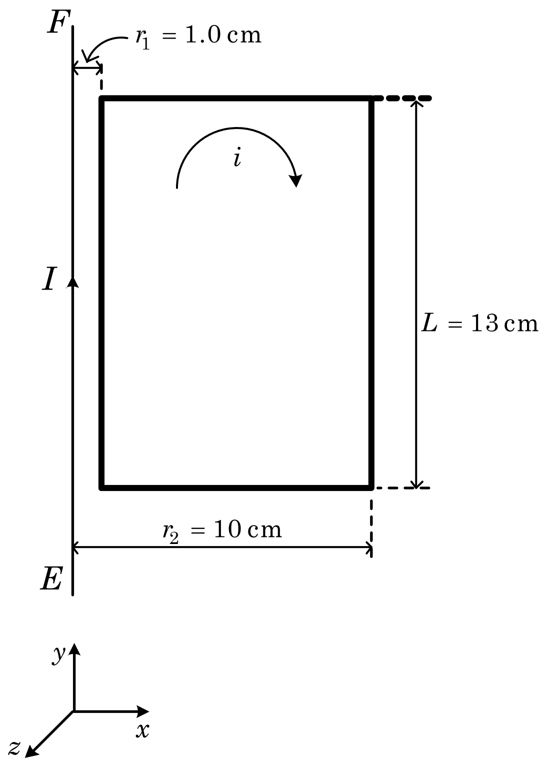
$$V_{C2} = \frac{dQ_t}{dt}\bigg/\frac{dC_2}{dt} \times (t) \text{Voltios}$$

Los resultados en voltios que se obtienen:

Voltaje	t_1	t_2	t_3
V_{C1}	4.68	4.79	4.94
V_{C2}	7.33	7.18	7.03

Problema 3: (25 puntos)

Por el conductor *EF* (que es muy largo) pasa una corriente de $I = 30\,\text{A}$. Por el conductor rectangular, paralelo al alambre, como se muestra en la figura, pasa una corriente $i = 20\,\text{A}$ que circula en el sentido de las manecillas del reloj. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre el conductor rectangular por el campo magnético que crea el conductor *EF*

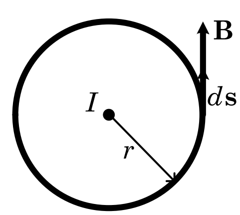


Solución:

La magnitud del campo magnético creado por el conductor *EF* está dada por la ley de Ampere:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

Donde $d\mathbf{s}$ es el elemento de arco en una trayectoria circular de radio r cuyo plano es perpendicular al conductor *EF* y está centrada en éste, como se muestra en la figura siguiente



De modo que el campo magnético $\mathbf{B}$ es paralelo al vector $d\mathbf{s}$ en cada punto de la trayectoria cerrada y obtenemos:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint B\, ds = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

La fuerza que ejerce el conductor largo *EF* sobre el segmento paralelo izquierdo del rectángulo es una fuerza atractiva, pues las corrientes van en el mismo sentido; llamaremos a esta fuerza $\mathbf{F}_1$ y si elegimos un sistema coordenado como el mostrado a continuación, se trata de una fuerza con una sola componente a lo largo de $-x$. La fuerza sobre el segmento derecho es $\mathbf{F}_2$ y apunta a lo largo de $+x$ y es de menor magnitud que $\mathbf{F}_1$ porque está más lejos de *EF*. La fuerza neta hecha por el conductor *EF* sobre el segmento horizontal superior del rectángulo, apunta hacia arriba en dirección $+y$, y se cancela con la fuerza hecha sobre el segmento inferior que apunta en dirección $-y$.

Teniendo en cuenta que el campo magnético de *EF* apunta en dirección $-z$ en la posición de ambos segmentos, izquierdo y derecho del rectángulo, la fuerza neta sobre la espira rectangular es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = i\mathbf{L}_1 \times \mathbf{B}_1 + i\mathbf{L}_2 \times \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 iIL}{2\pi}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right)\hat{x}$$

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(20\,\mathrm{A})(30\,\mathrm{A})(0.13\,\mathrm{m})}{2\pi}\left[\frac{0.010\,\mathrm{m} - 0.10\,\mathrm{m}}{(0.010\,\mathrm{m})(0.10\,\mathrm{m})}\right]\hat{x}$$

$$\mathbf{F} = -1.4 \times 10^{-3}\, N\,\hat{x}$$

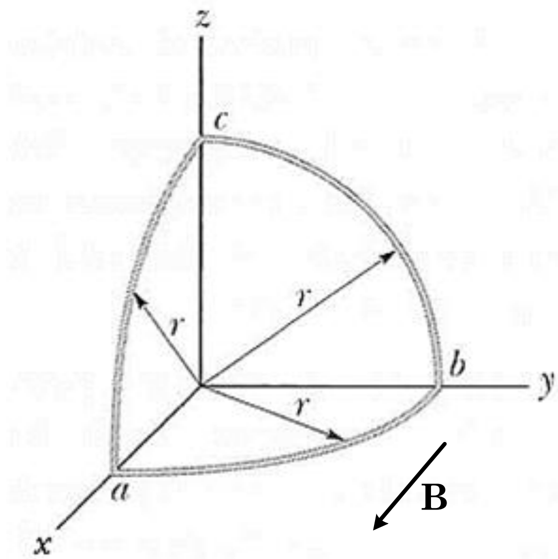
Donde el signo "–" indica una fuerza neta que atrae horizontalmente al rectángulo hacia el conductor *EF*.

Problema 4: (25 puntos)

Se dobla un alambre en forma de tres segmentos circulares, cada uno de radio $r = 10$ cm, como se muestra en la figura. Cada segmento es el cuadrante de un círculo, *ab* yace en el plano *xy*, *bc* yace en el plano *yz* y *ac* yace en el plano *xz*.

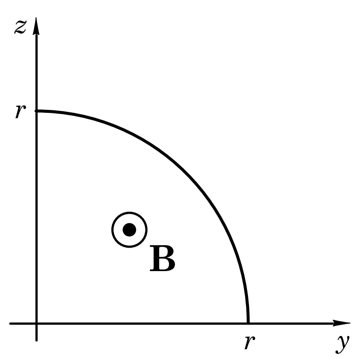
a. Si un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$ apunta en la dirección $+x$, ¿Cuál es valor absoluto de la *fem* establecida en el alambre cuando $\mathbf{B}$ se incrementa a razón de 3.0 mT/s?

b. ¿Cuál es la dirección de la corriente en el segmento *bc*?



Solución:

a. Tomando en cuenta que $\mathbf{B} = B\mathbf{i}$ (uniforme pero con magnitud dependiente del tiempo), solamente el área proyectada en el plano *yz* contribuirá al flujo. Esta área proyectada corresponde a un cuarto de círculo como se muestra a continuación:



Así que, para un instante dado, el flujo magnético Φ_B a través de la espira es:

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{4}\pi r^2 B$$

Por lo tanto, la *fem* ε es:

$$|\varepsilon| = \left|\frac{d\Phi_{\mathrm{B}}}{dt}\right|$$

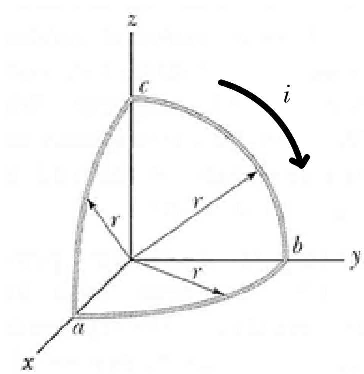
$$= \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}\pi r^2 B\right)\right|$$

$$= \frac{1}{4}\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$= \frac{1}{4}\pi(0.10\,\mathrm{m})^2\left(3.0\times10^{-3}\,\mathrm{T}/\mathrm{s}\right)$$

$$\varepsilon = 2.4\times10^{-5}\,\mathrm{V}$$

b. De acuerdo a la ley de Lenz, la corriente en el segmento *bc* fluye desde *c* hacia *b*, como se muestra en la figura, pues el campo magnético asociado a esta corriente inducida es tal que tiende a oponerse al cambio en el flujo a través del sector circular en el plano *yz*.



4.3 QUÍMICA

SÉPTIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE QUÍMICA NIVEL I

INSTRUCCIONES:

A continuación se le presentan dos series generales de problemas, con instrucciones y valor adjunto. Está permitido el uso de Tabla Periódica, y calculadora. No está permitido el uso de celular.

Primera Serie (50 puntos)

Consta de 25 preguntas de selección múltiple todas corresponden a la parte teórica. Subraye la respuesta correcta. Si necesita razonar una respuesta, hágalo, indicando el número de inciso que se razona.

1. Número Atómico es:

- **a.** El número de neutrones que tiene un átomo.
- **b.** Es la carga eléctrica del átomo.
- **c.** Es la suma de protones y neutrones.
- **d.** Es la cantidad de protones que tiene un átomo.
- **e.** Es el número de neutrones y electrones que tiene un átomo.

2. El aluminio es un metal ligero (densidad = 2.70 g/cm^3) que se utiliza en la construcción de aviones, líneas de transmisión de alto voltaje, latas para bebidas y papel aluminio. ¿Cuál es su densidad en kg/m^3?

- **a.** 2.83 x 103 kg/m^3
- **b.** 3.051 x 102 kg/m^3
- **c.** 2.70 x 102 kg/m^3
- **d.** 2.2876 x 103 kg/m^3
- **e.** 2.70 x 103 kg/m^3

3. Ejemplo de cambio Químico.

- **a.** Un helado que se derrite.
- **b.** Un metal que se calienta.
- **c.** Un papel que se quema.
- **d.** Agua que se evapora.
- **e.** Un metal que se funde.

4. En referencia al tamaño los cationes son:

a. Más pequeños que los átomos de los que se originan.
b. Más grandes que los átomos de los que se originan.
c. Del mismo tamaño que los átomos de los que se originan.
d. Levemente mayores que los átomos de los que se originan.
e. No ha sido determinado.

5. Considere una muestra del elemento E que contiene sólo isótopos de ^{x}E y ^{y}E, donde $y = x + 1$, y cuya masa elemental es M_E. Si la media de masas atómicas de los dos isótopos es menor que M_E, entonces:

a. El isótopo x es más abundante que el isótopo y.
b. El isótopo x es menos abundante que el isótopo y.
c. El isótopo x es igual de abundante que el isótopo y.

6. Energía potencial eléctrica de los electrones del Ca, en el pozo de potencial del núcleo:

a. Positiva.
b. Negativa.
c. Cero.

7. Un muestra de un elemento E, en estado basal, expuesto a un mechero de Bunsen, emiten una luz amarilla. El elemento se excita mediante radiación electromagnética, y se vuelve a exponer al mismo mechero de Bunsen; si sólo hay dos posibilidades, entonces:

a. La llama que emite E es azul.
b. La llama que emite E es roja.

8. Considere tres elementos representativos distintos: A, B y C. Ordenados por afinidad electrónica quedan así: B<C<A. ¿Cómo quedan ordenados por Energía de Ionización?

a. A<C<B
b. C<A<B
c. B<C<A
d. C<B<A
e. Ninguna.

9. ¿Cuál es el número de oxidación del Carbono en el metano?

- **a.** Menos dos.
- **b.** Menos cuatro.
- **c.** Cero.
- **d.** Cuatro.
- **e.** Dos.

10. ¿Qué nombre recibe el siguiente compuesto SbH_3?

- **a.** Silano.
- **b.** Arsina.
- **c.** Fosfina.
- **d.** Estibina.
- **e.** Ninguna.

11. Nombre del Anhídrido Selénico en el sistema estequiométrico:

- **a.** Anhídrido Selenioso.
- **b.** Trióxido de Selenio.
- **c.** Dióxido de Selenio.
- **d.** Oxido de Selenio (III).
- **e.** Ninguna.

12. ¿Cuál de los siguientes compuestos es una oxisal neutra?

- **a.** NaCl
- **b.** $MgSO_4$
- **c.** $Al(OH)_3$
- **d.** HNO_3
- **e.** Ninguna.

13. ¿Cuál es la masa en gramos de un átomo de K?

- **a.** 6.49×10^{-23}
- **b.** 2.55×10^{-23}
- **c.** 1.66×10^{-24}
- **d.** 6.022×10^{-23}
- **e.** Ninguna de las anteriores.

14. En la siguiente reacción $2A+B_2 \rightarrow 2AB$, si se tiene 0.3 mol de A, y 0.5 mol de B_2 entonces:

a. El reactivo limitante es B_2

b. La reacción es equimolar.

c. El reactivo limitante es A.

d. No se puede determinar el reactivo limitante.

e. Ninguna de las anteriores.

15. El número 6.022×10^{23} puede decirse:

a. Es el número de Avogadro.

b. Indica el número de unidades de materia que hacen 1 mol.

c. Es el número de moléculas de H_2 que hay en 2g de H_2

d. Es el número de átomos de He que hay en 4 g de He

e. Todas son correctas.

16. Se tienen volúmenes iguales de los gases *A* y *B*, a las mismas condiciones de temperatura y presión; si del gas *A* existen 0.5 mol y del gas *B* 20 gramos, el peso molecular del gas *B* es:

a. 20

b. 10

c. 40

d. 80

e. 100

17. En un proceso en que intervienen gases isocórico se puede decir:

a. Que el proceso se lleva a presión constante.

b. Que el proceso se lleva a volumen constante.

c. Que el proceso se lleva a temperatura constante.

d. Que el proceso se lleva con el número de moles constante.

e. Ninguna de las anteriores

18. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones explica que un globo con aire caliente suba?

- **a.** La energía cinética promedio de las moléculas aumenta y los choques entre las moléculas y las paredes del globo lo hacen subir.
- **b.** La presión del gas aumenta en el interior del globo, empujándolo hacia arriba.
- **c.** El gas se expande haciendo que algo de él se escape por la boca del globo y la disminución de densidad hace subir al globo.
- **d.** El globo se expande y es lo que lo hace subir.
- **e.** El aire caliente que sube dentro del globo produce la fuerza suficiente para elevarlo.

19. Cuando se estudia el enlace covalente en el cloruro de berilio, la principal razón por la cual no se dibujan dobles enlaces entre los átomos de Be y Cl es:

- **a.** Porque tal situación daría cargas formales positivas a los átomos de cloro y cargas formales negativas a los átomos de berilio.
- **b.** Porque no hay suficientes electrones.
- **c.** Porque tal situación resultaría en tener más de 8 electrones alrededor del átomo de berilio.
- **d.** Porque tal situación resultaría en tener más de 8 electrones alrededor de cada átomo de cloro.
- **e.** Porque la suma de las cargas formales en toda la estructura no daría cero.

20. ¿Cuál de los siguientes elementos, en el contexto de la teoría del enlace de valencia, puede acomodar un octeto electrónico pero no necesariamente debe acomodar un octeto electrónico?

- **a.** Nitrógeno
- **b.** Carbono
- **c.** Hidrógeno
- **d.** Oxígeno
- **e.** Boro

21. ¿Cuántos orbitales moleculares se forman al combinar dos orbitales atómicos?

- **a.** 1
- **b.** 2
- **c.** 3
- **d.** 4
- **e.** 0

22. La ondas electromagnéticas

- **a.** Son todas de igual energía.
- **b.** Son todas de igual frecuencia.
- **c.** Son todas de igual velocidad.
- **d.** Son todos de igual longitud de onda.
- **e.** Son todas de igual amplitud.

23. ¿El electrón del H se excita y llega al vigésimo nivel de energía potencial; Cuál es el valor mínimo de número magnético que puede poseer?

- **a.** 19
- **b.** 20
- **c.** −19
- **d.** −20
- **e.** cero

24. Cuál de los siguientes compuestos posee mayor carácter covalente?

- **a.** HCl
- **b.** SF_4
- **c.** HF
- **d.** H_2O
- **e.** H_2

25. El enlace químico:

- **a.** Se forma en una reacción química.
- **b.** Se forma por intercambio de electrones.
- **c.** Se forma por una transferencia total de electrones.
- **d.** Es la distribución de la carga electrónica en torno de dos núcleos.
- **e.** Todas son correctas.

Segunda Serie (50 puntos):

A continuación encontrará 5 problemas. Resuélvalos correctamente en su cuadernillo de trabajo. **Deje constancia escrita, objetiva, lógica, explicita y ordenada de todo su procedimiento y todas sus suposiciones.** Resalte sus resultados y ecuaciones más importantes de forma inequívoca y anote la respuesta específica en el temario.

Problema 1 (Ciencia y Medición)

La delgada capa externa de la Tierra, la corteza terrestre, abarca tan sólo 0.50% de la masa total del planeta, pese a lo cual es la fuente de casi todos los elementos (la atmósfera proporciona algunos, como el oxígeno, nitrógeno y otros gases). El silicio (Si) es el segundo elemento más abundante en la corteza terrestre (27.2% en masa). Calcule la masa en kilogramos de silicio en la corteza terrestre. (La masa de la Tierra es de 5.9 x 10^{21} toneladas; 1 tonelada = 2000 lb; 1 lb = 453.6 g).

Problema 2: (Teoría Atómica)

El electrón excitado de un átomo de Hidrógeno es irradiado con un fotón de 179.8 nm. El voltaje de frenado del electrón es de 3.5 V. ¿Cuál era el número cuántico n, del electrón excitado? (Se calificará mejor la solución más elegante, por supuesto).

Problema 3: (Enlace químico)

En la Química del nitrógeno, y en general, en la química de los compuestos covalentes, el concepto de estado de oxidación constituye solo un formalismo útil para, entre otras cosas, igualar las reacciones químicas pero al que no se le puede atribuir una realidad física. Existen compuestos de nitrógeno en todos los estados de oxidación formales entre -3 y +5, y óxidos de nitrógeno en cada uno de los cinco estados de oxidación de +1 a +5. A 25 grados centígrados y 1 atm de presión, el óxido nítrico es termodinámicamente inestable. A presiones elevadas se descompone rápidamente en el intervalo entre 30 y 50 grados centígrados, Según la siguiente reacción en el que intervienen tres óxidos de nitrógeno.

$$3\ NO(g) \rightarrow N_2O\ (g) + NO_2\ (g)$$

a. Dibuje las estructuras de Lewis correspondientes a estos tres óxidos de nitrógeno.

b. Indique la geometría molecular del óxido nitroso y del dióxido de nitrógeno.

c. Indique la dirección del momento dipolar (en caso que sean sustancias polares) que presentan estos tres óxidos de nitrógeno.

Problema 4: (Estequiometria)

La industria automovilística brasileña desarrolló vehículos llamados Flex, ya que el motor de estos funciona con proporciones de gasolina y etanol ó con etanol al 100%. Suponiendo que se sustituyen los vehículos guatemaltecos por los Flex y así utilizar etanol al 100%. Se sabe que se recorren 32 Km por 4.5 L de etanol y que por el mismo volumen de gasolina se recorren 42 Km. Si el parque vehicular en Guatemala es de 1,840,000 vehículos que utilizan gasolina y el consumo de gasolina estimado para el año 2013 es de 5.1433 barriles por vehículo, se espera realizar la producción de etanol a partir de la fermentación de maíz, se sabe que se realiza 3 cosechas al año y se requiere 0.4 Ha sembradas para obtener 3,225 Kg de maíz. ¿Cuántas Ha se requiere sembrar en el territorio nacional en cada cosecha para producir el etanol necesario para el consumo del año? (Densidad del Etanol 0.790 g/mL; un barril = 42 gal, se supondrá que todo el almidón del maíz se transforma en glucosa ($C_6H_{12}O_6$) suponga que la reacción se lleva a cabo al 100%, el maíz contiene 27% de almidón).

$$C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2C_2H_5OH + 2CO_2$$

Problema 5 (Gases Ideales)

Una mezcla de 50g de oxigeno gaseoso (O_2) y 50g de helio (He) tiene una presión total de 5 atmosferas, ¿Cuál es la presión parcial de cada gas en la mezcla?

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

PRIMERA SERIE

1. d	**6.** b	**11.** b	**16.** c	**21.** b
2. c	**7.** b	**12.** b	**17.** b	**22.** c
3. c	**8.** c	**13.** a	**18.** c	**23.** c
4. a	**9.** b	**14.** c	**19.** a	**24.** e
5. b	**10.** d	**15.** e	**20.** e	**25.** e

SEGUNDA SERIE

Problema 1(ciencia y medición)

La delgada capa externa de la Tierra, la corteza terrestre, abarca tan sólo 0.50% de la masa total del planeta, pese a lo cual es la fuente de casi todos los elementos (la atmósfera proporciona algunos, como el oxígeno, nitrógeno y otros gases). El silicio (Si) es el segundo elemento más abundante en la corteza terrestre (27.2% en masa). Calcule la masa en kilogramos de silicio en la corteza terrestre. (La masa de la Tierra es de 5.9 x 10^{21} toneladas; 1 tonelada = 2000 lb; 1 lb = 453.6 g).

Solución

Masa de Silicio = (5.9 x 10^{21} ton) (2000 lb/1 ton) (453.6 g/lb) (0.272) (0.5/100)

Masa de Silicio = (7.28 x 10^{24} gramos) (1 kg/1000 g) = **7.28 x 10^{21} kilogramos**

Problema 2: (Teoría Atómica)

El electrón excitado de un átomo de Hidrógeno es irradiado con un fotón de 179.8 nm. El voltaje de frenado del electrón es de 3.5 V. ¿Cuál era el número cuántico *n*, del electrón excitado? (Se calificará mejor la solución más elegante, por supuesto).

Solución

Datos:

h	$6.62607E^{-34}$ J.s
c	$2.99792E^{8}$ m/s
e	$1.60218E^{-19}$ c
Rh	$2.18018E^{-18}$ J
λ	$1.798\ E^{-7}$ m
E_k	3.5 V

$$Ef = \frac{hc}{\lambda} = Ei + Ek$$

$$Ef = \frac{6.626E^{-34}\ \text{J.s} \times 2.998E^{8}\ \text{m/s}}{1.798E^{-7}\ \text{m}} = 1.1048E^{-18}\ \text{J}$$

$$Ek = \varepsilon.e = 3.5\ \text{V} \times 1.6022E^{-19}\ \text{C} = 5.7066E^{-19}\ \text{J}$$

$$Ei = Ef - Ek = 1.1048E^{-18}\ \text{J} - 5.7066E^{-19}\ \text{J} = 5.4405E^{-19}\ \text{J}$$

$$Ep = -Ei$$

$$Ei = \frac{-R_H}{n^2}$$

$$n = \left(\frac{-2.1802E^{-18}\ \text{J}}{-5.4405E^{-19}\ \text{J}}\right)^{1/2} = 2.0$$

Problema 3: (Enlace químico)

En la Química del nitrógeno, y en general, en la química de los compuestos covalentes, el concepto de estado de oxidación constituye solo un formalismo útil para, entre otras cosas, igualar las reacciones químicas pero al que no se le puede atribuir una realidad física. Existen compuestos de nitrógeno en todos los estados de oxidación formales entre −3 y +5, y óxidos de nitrógeno en cada uno de los cinco estados de oxidación de +1 a +5. A 25 grados centígrados y 1 atm de presión, el óxido nítrico es termodinámicamente inestable. A presiones elevadas se descompone rápidamente en el intervalo entre 30 y 50 grados centígrados, Según la siguiente reacción en el que intervienen tres óxidos de nitrógeno.

$$3\ NO(g) \rightarrow N_2O\ (g) + NO_2\ (g)$$

a. Dibuje las estructuras de Lewis correspondientes a estos tres óxidos de nitrógeno.

b. Indique la geometría molecular del óxido nitroso y del dióxido de nitrógeno.

c. Indique la dirección del momento dipolar (en caso que sean sustancias polares) que presentan estos tres óxidos de nitrógeno.

Solución

a. Respuesta (se uso Chemdraw para dibujar las estructuras)

NO: 

NO_2: 

N_2O: 

b. Indique la geometría molecular del óxido nitroso y del dióxido de nitrógeno:

El N_2O posee una forma geométrica que corresponde con una estructura AX_2E_0 y tiene un número estérico de 2 + 0 = 2. Con ese número estérico le corresponde una distribución lineal. Geometría molecular es **Lineal**.

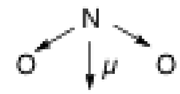
El NO_2 posee una forma geométrica que corresponde con una estructura del tipo AX_2E_1 tiene un número estérico 2 + 1 = 3 le corresponde entonces una distribución triangular. Por ello su gemetría es **Angular**.

c. Indique la dirección del momento dipolar (en caso que sean sustancias polares) que presentan estos tres óxidos de nitrógeno.

Tanto el NO como el N_2O poseen un único dipolo. Por diferencia de electronegatividad ambas moléculas son polares:

$$N \rightarrow O \quad y\ N{=}N{\rightarrow}O$$

El NO_2 posee dos dipolos iguales entre el átomo de N y los átomos de O debido a la diferencia de electronegatividad. Como la geometría es angular existe un vector resultante que hace que la molécula sea polar:



Problema 4: (Estequiometria)

La industria automovilística brasileña desarrolló vehículos llamados Flex, ya que el motor de estos funciona con proporciones de gasolina y etanol ó con etanol al 100%. Suponiendo que se sustituyen los vehículos guatemaltecos por los Flex y así utilizar etanol al 100%. Se sabe que se recorren 32 Km por 4.5 L de etanol y que por el mismo volumen de gasolina se recorren 42 Km. Si el parque vehicular en Guatemala es de 1,840,000 vehículos que utilizan gasolina y el consumo de gasolina estimado para el año 2013 es de 5.1433 barriles por vehículo, se espera realizar la producción de etanol a partir de la fermentación de maíz, se sabe que se realiza 3 cosechas al año y se requiere 0.4 Ha sembradas para obtener 3,225 Kg de maíz. ¿Cuántas Ha se requiere sembrar en el territorio nacional en cada cosecha para producir el etanol necesario para el consumo del año? (Densidad del Etanol 0.790 g/mL; un barril = 42 gal, se supondrá que todo el almidón del maíz se transforma en glucosa ($C_6H_{12}O_6$) suponga que la reacción se lleva a cabo al 100%, el maíz contiene 27% de almidón).

$$C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2C_2H_5OH + 2CO_2$$

Solución

$$1{,}840{,}000 \text{ vehi} \times \frac{5.1322 \text{ barriles gasolina}}{\text{año vehiculo}} \times \frac{43 \text{ galones gasolina}}{1 \text{ barril}} \times \frac{3.785 \text{ L gas}}{1 \text{ gal gas}}$$

$$\times \frac{42 \text{ km}}{4.5 \text{ L gas}} \times \frac{4.5 \text{ L etanol}}{32 \text{ Km}} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ L}} \times \frac{0.790 \text{ g etanol}}{1 \text{ mL}} \times \frac{1 \text{ mol etanol}}{46.06 \text{ g etanol}}$$

$$= 3.38 \times 10^{10} \text{ moles/año}$$

$$\frac{3.38 \times 10^{10} \text{ moles}}{1 \text{ Año}} \times \frac{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6}{2 \text{ mol etanol}} \times \frac{180.15 \text{ g } C_6H_{12}O_6}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} \times \frac{1 \text{ g almidon}}{1 \text{ g } C_6H_{12}O_6}$$

$$\times \frac{1 \text{ g maiz}}{0.27 \text{ g alimdon}} \times \frac{1 \text{ Kg maiz}}{1000 \text{ g maiz}} \times \frac{0.4 \text{ Ha}}{3{,}225 \text{ Kg maiz}} \times \frac{1 \text{ año}}{3 \text{ cosechas}} = \times \frac{467{,}118 \text{ Ha}}{\text{cosecha}}$$

Problema 5 (Gases Ideales)

Una mezcla de 50g de oxigeno gaseoso (O_2) y 50g de helio (He) tiene una presión total de 5 atmosferas, ¿Cuál es la presión parcial de cada gas en la mezcla?

Solución

Para el oxígeno gaseoso:

$$50 \text{ g } O_2 \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{32 \text{ g } O_2} = 1.5625 \text{ mol } O_2$$

Para el helio:

$$50 \text{ g He} \times \frac{1 \text{ mol He}}{4 \text{ g He}} = 12.5 \text{ mol He}$$

Ahora calcular la fracción molar de cada gas

$$X_{\text{oxígeno}} = \frac{1.5625 \text{ mol}}{14.0625 \text{ mol}} = 0.11$$

$$X_{\text{helio}} = \frac{12.5 \text{ mol}}{14.0625 \text{ mol}} = 0.89$$

Calcular la presión parcial de cada gas utilizando la fracción molar de cada uno y la presión total de 5 atmosferas

$$\mathbf{P_i = (X_i)(P_{total})}$$

Presión parcial del oxígeno:

$$\mathbf{P}_{\text{oxigeno}} = 0.11 \text{ x } 5\text{atm} = \mathbf{0.55 \text{ atm}}$$

$$\mathbf{P}_{\text{helio}} = 0.89 \text{ x } 5\text{atm} = \mathbf{4.45 \text{ atm}}$$

SÉPTIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE QUÍMICA NIVEL II

INSTRUCCIONES:

A continuación se le presentan dos series generales de problemas, con instrucciones y valor adjunto. Está permitido el uso de Tabla Periódica, y calculadora. No está permitido el uso de celular.

Primera Serie (50 puntos):

Consta de 25 preguntas de selección múltiple todas corresponden a la parte teórica. Subraye la respuesta correcta. Si necesita razonar una respuesta, hágalo, indicando el número de inciso que se razona.

1. La molaridad de una solución depende de:

- **a.** La masa del disolvente.
- **b.** Las características del soluto.
- **c.** Temperatura y presión.
- **d.** Del volumen de la disolución.
- **e.** Ninguna de las anteriores es correcta.

2. Al famoso químico inglés M. Faraday se debe la palabra electrólito, que quiere decir sustancia que forma soluciones conductoras de la electricidad. ¿Cuál de las siguientes sustancias es un electrólito?

- **a.** CH_3CH_2OH
- **b.** $C_{12}H_{22}O_{11}$
- **c.** HCl
- **d.** $C_3H_5(OH)_3$
- **e.** CH_3CH_2OH

3. ¿Cuál de los siguientes compuestos no se disuelven fácilmente en agua?

- **a.** CH_3OH
- **b.** CH_3CH_2OH
- **c.** $CH_2CH_2(OH)_2$
- **d.** C_6H_6
- **e.** Ninguna de las anteriores es correcta.

4. ¿Cuáles de los siguientes afectan la solubilidad de un soluto?

- **a.** La naturaleza del soluto.
- **b.** Las interacciones que se producen entre soluto y solvente.
- **c.** La temperatura a la que se forma la disolución.
- **d.** La naturaleza del disolvente.
- **e.** Todas las anteriores son correctas.

5. En la reacción de descomposición del dióxido de nitrógeno en óxido nítrico y oxígeno a 300°C, la concentración del dióxido de nitrógeno cae de 0.0100 a 0.00650 M en 100 s. ¿Cuál es la velocidad de formación del oxígeno para este período, expresado en M/s?

- **a.** 0.0000175
- **b.** 0.0000350
- **c.** 0.0000700
- **d.** 0.00350
- **e.** 0.00700

6. Se encontró que una reacción es de tercer orden con respecto a A. Al incrementar la concentración de A por un factor de 3, provocará que la velocidad de reacción:

- **a.** Permanezca constante.
- **b.** Se incremente en un factor de 27.
- **c.** Se incremente en un factor de 9.
- **d.** Se triplique.
- **e.** Disminuya en un factor que es la raíz cúbica de 3.

7. La constante de velocidad para una reacción particular de segundo orden es 0.47 L $mol^{-1}s^{-1}$. Si la concentración del reactivo es de 0.25 mol/L, ¿cuánto tiempo medido en segundos, le tomará a la concentración para disminuir hasta 0.13 mol/L?

- **a.** 7.9
- **b.** 1.4
- **c.** 3.7
- **d.** 1.7
- **e.** 0.13

8. Una reacción de segundo orden tiene una vida media de 18 s cuando la concentración inicial del reactivo es 0.71 M. ¿Cuál es la constante de velocidad para esta reacción expresada en $M^{-1}s^{-1}$?

- **a.** 7.8×10^{-2}
- **b.** 3.8×10^{-2}
- **c.** 2.0×10^{-2}
- **d.** 1.3
- **e.** 18

9. Se desea que el equilibrio se desplace hacia la derecha (productos) para la reacción en fase gaseosa:

$$2NO + 2CO \rightarrow N_2 + 2CO_2 + 179.4 \text{ Kcal}$$

Las mejores condiciones son:

- **a.** Temperatura alta y alta presión.
- **b.** Baja temperatura y alta presión.
- **c.** Temperatura alta y baja presión.
- **d.** Temperatura y presión ambientales.
- **e.** Ninguna de las anteriores.

10. Llene los espacios en blanco con las frases: el equilibrio se desplaza:

a) Hacia la derecha b) hacia la izquierda c) no varía

Se tiene el sistema en equilibrio:

$$N_{2\,(g)} + 3H_{2\,(g)} \leftrightarrow 2NH_{3\,(g)} + 22\text{Kcal}$$

- **a.** Si se aumenta el volumen del recipiente ____________b____________
- **b.** Si se aumenta la presión sobre el sistema ___________a____________
- **c.** Si se agrega un catalizador ________________________c____________
- **d.** Si se agrega N_2 __________________________________a___________
- **e.** Si se extrae NH_3 _________________________________a___________
- **f.** Si se calienta el sistema ___________________________b___________

11. Si a temperatura constante la concentración del reactivo se hace 4 veces mayor en una reacción de primer orden ¿Cómo varía la velocidad **Se hace 4 veces mayor**? En una reacción de orden 2 ¿cómo varia la velocidad **Se hace 16 veces mayor** ? En una reacción de orden 0 ¿Cómo varia la velocidad **no varía**?

12. En la siguiente reacción:

$$Fe^{2+} (ac) + Ag^{+} (ac) \rightarrow Fe^{3+} (ac) + Ag (s)$$

a. Fe^{+2} se oxida y Fe^{+3} se reduce.

b. Fe^{+2} se oxida y Ag^{+} se reduce.

c. Ag^{+} se oxida y Ag (s) se reduce.

d. Ag^{+} se oxida y Fe^{2+} se reduce.

e. Ag^{+} se oxida y Fe^{+3} se reduce.

13. Todas las siguientes aseveraciones corresponden a las celdas voltaicas y son verdaderas excepto una. Determine cuál es la oración falsa.

a. Las dos medias celdas están conectadas por un puente salino.

b. Los electrones se mueven del ánodo al cátodo.

c. La oxidación ocurre en el cátodo.

d. Las celdas voltaicas pueden ser utilizadas como una fuente de energía.

e. Una celda voltaica tiene dos medias celdas.

14. ¿A cuál de las siguientes medias reacciones se le ha asignado un potencial estándar de reducción E° de 0.00 Volts?

a. $2\ H_2O\ (l) + 2\ e^- \rightarrow H_2\ (g) + 2\ OH^-\ (ac)$

b. $2\ H^+\ (ac) + 2\ e^- \rightarrow H_2\ (g)$

c. $Hg_2Cl_2\ (s) + 2\ e^- \rightarrow 2\ Hg\ (l) + 2\ Cl^-\ (ac)$

d. $Fe^{3+}\ (ac) + e^- \rightarrow Fe^{2+}\ (ac)$

e. $F_2\ (g) + e^- \rightarrow 2\ F^-\ (ac)$

15. Escriba la media reacción balanceada para la reducción del ion permanganato, MnO_4^- a Mn^{2+} en solución ácida.

a. $MnO_4^-\ (ac) + 5\ e^- \rightarrow Mn^{2+}\ (ac)$

b. $MnO_4^-\ (ac) + 8\ H^+\ (ac) + 5\ e^- \rightarrow Mn^{2+}\ (ac) + 4\ H_2O\ (l)$

c. $MnO_4^-\ (ac) + 4\ H_2O\ (l) + 5\ e^- \rightarrow Mn^{2+}\ (ac) + 8\ H^+\ (ac)$

d. $MnO_4^-\ (ac) + 4\ H^+\ (ac) + 3\ e^- \rightarrow MnO_2\ (s) + 2\ H_2O\ (l)$

e. $MnO_4^-\ (ac) + 4\ H^+\ (ac) + 5\ e^- \rightarrow Mn^{2+} + 4\ OH^-\ (ac)$

16. Propiedad Termodinámica parecida a un hoyo que cavas: entre más le quitas más grande se hace.

a. Temperatura.

b. Entalpía.

c. Entropía.

d. Energía Libre de Gibbs.

e. Energía de Formación.

17. Propiedad Termodinámica parecida a una montaña que construyes: entre más grande es, más te acercas a su valor real:

- **a.** Temperatura.
- **b.** Entalpía.
- **c.** Entropía.
- **d.** Energía Libre de Gibbs.
- **e.** Energía de Formación.

18. Propiedad termodinámica parecida a una ranita que se despertó en su nenúfar, de repente, y no sabía si estaba bien o estaba mal, si arriba o abajo; como era muy lista decidió hacer todo por regresar al equilibrio natural:

- **a.** Temperatura.
- **b.** Entalpía.
- **c.** Entropía.
- **d.** Energía Libre de Gibbs.
- **e.** Energía de Formación.

19. El descubrimiento, en ecuaciones, del gran matemático John Forbes Nash, ganador del Premio Nobel de Economía de 1994, contradiciendo a Adam Smith: Smith dice que si un ser individual hace lo mejor para sí, mejora la Sociedad: Nash dice que para mejorar al Individuo y a la Sociedad, un ser individual debe hacer, no lo mejor para sí, sino para el conjunto: mejor para sí-mejor para la Sociedad. Las ecuaciones matemáticas de Nash explican por qué hay que sacrificar la "ganancia" personal por la Sociedad, y que de todos modos el ser individual obtiene "ganancia" y evita conflictos. Hay una propiedad Termodinámica que mide eso, porque la naturaleza siempre hace lo que Nash descubrió (nada raro de alguien que estudiaba el comer de las aves). Pregunta: la ecuación que describe el mínimo de consumo y la mejor distribución de ese consumo entre todos es:

- **a.** Temperatura.
- **b.** Entalpía.
- **c.** Entropía.
- **d.** Energía Libre de Gibbs.
- **e.** Energía de Formación.

20. En el siguiente sistema redox: $P_2H_4 \rightarrow PH_3 + P_4H_2$, a cuantos equivalentes gramo es igual un mol de P_2H_4:

- **a.** 1
- **b.** 2
- **c.** 3
- **d.** 6
- **e.** Ninguna de las anteriores.

21. La constante ebulloscópica incluida en la ecuación de aumento del punto de ebullición de un líquido se puede aproximar a partir la ley de Raoult y la ecuación de Antoine: (¿cómo?)

- **a.** Falso.
- **b. Verdadero.**

- Se calculan las presiones del líquido puro y del líquido como solvente con la ecuación de Raoult.

- Con las nuevas presiones se calculan las temperaturas correspondientes con la ecuación de Antoine.

- Con la ecuación de la constante ebulloscópica se calcula la constante.

22. Para una reacción exotérmica, la constante de equilibrio, a medida que aumenta la temperatura:

- **a.** Aumenta.
- **b.** Disminuye.
- **c.** Se mantiene constante.

23. En una pila espontánea, que tiene electrodos de Li y Cr, con soluciones respectivas de Li^+ y Cr^{+3}, ¿quién es el cátodo?

- **a.** Li
- **b.** Cr

24. Se practica un sistema experimental, a manera de motor, dentro de un tubo de de 1 m^3 de volumen total. El sistema es ideal; el pistón está construido con una membrana, cuya naturaleza nos es indiferente (¿por qué?), y está ocupando la mitad del volumen (0.5 m^3). La mitad limitada por el pistón está ocupada por hexano líquido y oxígeno en exceso, y un arco eléctrico no activado; la otra mitad está al vacío. Cuando el arco eléctrico se activa adiabáticamente, crea una combustión; los gases creados en la reacción química hacen presión sobre el pistón, hasta que todo ha reaccionado y sólo hay gas en el sistema ocupado, la membrana-pistón se rompe y se expande hacia la parte vacía. El trabajo hecho por el gas sobre la parte vacía es:

- **a.** Positivo.
- **b.** Negativo.
- **c.** Cero.

25. Para una reacción química, sin ajustar: $A + B + C \rightarrow D + E$, se halla que la correlación matemática:

$$\ln \frac{C_B}{C_A} = k\left[C_{Bo} - C_{Ao}\right]t + ln\frac{Bo}{Ao}$$

Satisface el coeficiente de correlación. Entonces:

- **a.** La reacción es de orden cero.
- **b.** La reacción es de orden uno.
- **c.** La reacción es de orden dos.
- **d.** La reacción es de orden tres.

Segunda Serie (50 puntos):

A continuación entrará 5 problemas. Resuélvalos correctamente en su cuadernillo de trabajo. **Deje constancia escrita, objetiva, lógica, explicita y ordenada de todo su procedimiento y todas sus suposiciones.** Resalte sus resultados y ecuaciones más importantes de forma inequívoca y anote la respuesta específica en el temario.

Problema 1: (soluciones)

Se utilizan 51.33 gramos de sacarosa, $C_{12}H_{22}O_{11}$ para preparar una solución azucarada. La densidad de la solución es de 1.17 g/ml.

¿Cuál es la molalidad de la solución si hay 7.69 g de sacarosa por cada 15 ml de solución?

Problema 2: (cinética)

Una manzana magullada se pudre, a temperatura ambiente (20˚C), en aproximadamente 4 días. Si se mantiene refrigerada a 0˚C, la misma extensión de putrefacción ocurre en 16 días. ¿Cuál es la energía de activación para la reacción de putrefacción? ($R = 8.314\ JK^{-1}\ mol^{-1}$)

Problema 3: (equilibrio)

Se mezclan hidrogeno y yodo a 400ºC en un recipiente de 1.00 litros al alcanzarse el equilibrio las concentraciones de las especies presentes son [HI] = 0.490 M, [H_2] = 0.080 M y [I_2] = 0.060 M. si se añaden 0.300 moles de HI en exceso ¿Cuáles serán las concentraciones al restablecer el equilibrio?

Problema 4: (Electroquímica)

En la siguiente reacción:

$$F_2\ (g) + 2\ Cl^-\ (ac) \rightarrow 2\ F^-\ (ac) + Cl_2\ (g)$$

Determine el $E°_{celda}$ con los siguientes potenciales de reducción:

$$F_2\ (g) + 2\ e^- \rightarrow 2\ F^-\ (ac) \qquad E° = +\ 2.87\ V$$

$$Cl_2\ (g) + 2\ e^- \rightarrow 2\ Cl^-\ (ac) \qquad E° = +\ 1.36\ V$$

Adicionalmente, indique cuál es el ánodo y cuál es el cátodo.

Problema 5: (Termoquímica)

Una caña capta CO_2 del ambiente, y lo convierte en azúcar y en O_2. El Ser humano quema una caña, y lo convierte en CO_2. Una es endotérmica y la otra es exotérmica. Calcule la energía que consume la planta (reacción endotérmica) y la que libera el Ser humano (reacción exotérmica). Diga cuánta energía contribuye al calentamiento global. (Ojo: se pone de ejemplo al azúcar, no a los combustibles fósiles, para no hacérselos más complicado: la caña de azúcar no contamina, pero resta campos sembrados para alimento).

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

PRIMERA SERIE

1. c	**6.** b	**11.**	**16.** c	**21.** b
2. c	**7.** a	**12.** b	**17.** a	**22.** b
3. d	**8.** a	**13.** c	**18.** d	**23.** b
4. e	**9.** b	**14.** b	**19.** d	**24.** c
5. a	**10.**	**15.** b	**20.** b	**25.** c

SEGUNDA SERIE

Problema 1: (soluciones)

Se utilizan 51.33 gramos de sacarosa, $C_{12}H_{22}O_{11}$ para preparar una solución azucarada. La densidad de la solución es de 1.17 g/ml.

¿Cuál es la molalidad de la solución si hay 7.69 g de sacarosa por cada 15 ml de solución?

Solución

$$51.33 \text{ g } C_{12}H_{22}O_{11} \times \frac{1 \text{ mol}}{342.29 \text{ g } C_{12}H_{22}O_{11}} = 0.1499 \text{ mol}$$

$$51.33 \text{ g } C_{12}H_{22}O_{11} \times \frac{15 \text{ mL de Sol}}{7.69 \text{ g } C_{12}H_{22}O_{11}} = 100.12 \text{ mLde Sol}$$

$$100.12 \text{ mL Sol} \times \frac{1.17 \text{ g Sol}}{\text{mL Sol}} = 117.14 \text{ g Sol}$$

$$117.14 \text{ g Sol} - 51.33 \text{ g azúcar} = 65.81 \text{ g Solvente agua}$$

$$65.81 \text{ g} \times \frac{1 \text{ Kg}}{1000 \text{ g}} = 0.0658 \text{ Kg de solvente}$$

$$m = \frac{0.1499 \text{ mol}}{0.0658 \text{ Kg de Sol}} = 2.27 \text{ molal}$$

Problema 2: (cinética)

Una manzana magullada se pudre, a temperatura ambiente (20˚C), en aproximadamente 4 días. Si se mantiene refrigerada a 0˚C, la misma extensión de putrefacción ocurre en 16 días. ¿Cuál es la energía de activación para la reacción de putrefacción? ($R = 8.314\ JK^{-1}\ mol^{-1}$)

Solución

De acuerdo a la ecuación de Arrhenius

$$k = Ae^{\frac{Ea}{RT}}$$

Aplicando logaritmos nos queda

$$\ln k = \frac{Ea}{RT}(\ln A)$$

Si utilizamos los subíndices 1 y 2 para referirnos a las dos temperaturas dadas, 0˚C y 20˚C, respectivamente, y dado que A, E_a y R son constantes obtenemos:

$$\ln k_1 = \frac{Ea}{RT_1}(\ln A) \qquad \ln k_2 = \frac{Ea}{RT_2}(\ln A)$$

Restando las ecuaciones anteriores, resulta:

$$\ln k_2 - \ln k_1 = -\frac{E_a}{RT_2} - \left(-\frac{E_a}{RT_1}\right)$$

$$\ln\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = \frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

Las velocidades son proporcionales a los valores de la constante de velocidad. Por otra parte, la velocidad de una reacción es inversamente proporcional al tiempo que tarda en producirse. Por lo tanto:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{4\left(\text{dias}^{-1}\right)}{16\left(\text{dias}^{-1}\right)} = 4$$

$$\ln 4 = \frac{E_a}{8.314\left(\text{Jmol}^{-1}\,\text{K}^{-1}\right)}\left(\frac{1}{273\text{K}} - \frac{1}{293\text{K}}\right) = \frac{E_a}{8.314\left(\text{Jmol}^{-1}\ \text{K}^{-1}\right)} \times 2.5 \times 10^{-4}\left(\text{K}^{-1}\right)$$

$$E_a = 4.60 \times 10^4\ \text{Jmol}^{-1} = 46\ \text{k Jmol}^{-1}$$

En la ecuación de Arrhenius, la temperatura debe expresarse en la escala absoluta.

Problema 3: (equilibrio)

Se mezclan hidrogeno y yodo a 400ºC en un recipiente de 1.00 litros al alcanzarse el equilibrio las concentraciones de las especies presentes son [HI] = 0.490 M, [H_2] = 0.080 M y [I_2] = 0.060 M. si se añaden 0.300 moles de HI en exceso ¿Cuáles serán las concentraciones al restablecer el equilibrio?

Solución

$$H_{2\,(g)} + I_{2\,(g)} \leftrightarrow 2HI_{(g)}$$

$$K_c = \frac{[HI]^2}{[H_2][I_2]} = \frac{(0.490)^2}{(0.080)(0.060)} = 50$$

	$H_{2\,(g)}$ +	$I_{2\,(g)}$ ↔	$2HI_{(g)}$
Equilibrio n	0.080M	0.060M	0.490M
Mol/L añadido	0M	0M	+0.300M
Nuevas conc. de equilibrio	0.080m	0.060M	0.790M

$$Q > K$$

$$Q = \frac{[HI]^2}{[H_2][I_2]} = \frac{(0.790)^2}{(0.080)(0.060)} = 130$$

	$H_{2\,(g)}$ +	$I_{2\,(g)}$ ↔	$2HI_{(g)}$
Equilibrio n	0.080M	0.060M	0.790M
Mol/L añadido	+ xM	+xM	−2xM
Nuevas conc. de equilibrio	(0.080 + x)m	(0.060 + x)M	(0.790 − 2x)M

$$K_c = 50 = \frac{(0.790 - 2x)^2}{(0.080 + x)(0.060 + x)}$$

$$50 = \frac{0.624 - 3.16x + 4x^2}{0.0048 + 0.14x + x^2}$$

$$0.24 + 7.0x + 50x^2 = 0.624 - 3.16x + 4x^2$$

$$46x^2 + 10.2x + 0.38 = 0$$

$$x^2 + 0.22x - 0.0083 = 0$$

$$x = 0.033$$

[H_2] = (0.080 + x) M = (0.080 + 0.033) M = 0.113M

[I_2] = (0.060 + x) M = (0.060 + 0.033) M = 0.093M

[HI] = (0.790 – 2x) M = (0.790 – 0.066) M = 0.0724M

Problema 4: (Electroquímica)

En la siguiente reacción:

$$F_2\ (g) + 2\ Cl^-\ (ac) \rightarrow 2\ F^-\ (ac) + Cl_2\ (g)$$

Determine el $E°_{celda}$ con los siguientes potenciales de reducción:

$$F_2\ (g) + 2\ e^- \rightarrow 2\ F^-\ (ac) \qquad E° = +\ 2.87\ V$$

$$Cl_2\ (g) + 2\ e^- \rightarrow 2\ Cl^-\ (ac) \qquad E° = +\ 1.36\ V$$

Adicionalmente, indique cuál es el ánodo y cuál es el cátodo.

Solución

En la siguiente reacción:

$$F_2\ (g) + 2\ Cl^-\ (ac) \rightarrow 2\ F^-\ (ac) + Cl_2\ (g)$$

Determine el $E°_{celda}$ con los siguientes potenciales de reducción:

$$F_2\ (g) + 2\ e^- \rightarrow 2\ F^-\ (ac) \qquad E° = +\ 2.87\ V$$

$$Cl_2\ (g) + 2\ e^- \rightarrow 2\ Cl^-\ (ac) \qquad E° = +\ 1.36\ V$$

Adicionalmente, indique cuál es el ánodo y cuál es el cátodo.

$$F_2\ (g) + 2\ e^- \rightarrow 2\ F^-\ (ac) \qquad \text{Cátodo}$$

$$2\ Cl^-\ (ac) \rightarrow Cl_2\ (g) + 2\ e^- \qquad \text{Ánodo}$$

$$E°_{celda} = +\ 2.87\ V - (+\ 1.36\ V) = 1.51\ V$$

Problema 5: (Termoquímica)

Una caña capta CO_2 del ambiente, y lo convierte en azúcar y en O_2. El Ser humano quema una caña, y lo convierte en CO_2. Una es endotérmica y la otra es exotérmica. Calcule la energía que consume la planta (reacción endotérmica) y la que libera el Ser humano (reacción exotérmica). Diga cuánta energía contribuye al calentamiento global. (Ojo: se pone de ejemplo al azúcar, no a los combustibles fósiles, para no hacérselos más complicado: la caña de azúcar no contamina, pero resta campos sembrados para alimento).

Solución

Supondremos condiciones normales.

La reacción de fijación del CO_2 en azúcar es:

$$12CO_2 + 11H_2O \rightarrow C_{12}H_{22}O_{11} + 12O_2 \quad (1)$$

La reacción de combustión del azúcar es inversa:

$$C_{12}H_{22}O_{11} + 12O_2 \rightarrow 12CO_2 + 11H_2O \qquad (2)$$

Entalpías de formación:

CO_2 : -393.77 kJ/mol

H_2O : -242.00 kJ/mol

$C_{12}H_{22}O_{11}$: -2218 kJ/mol

Para la reacción (2), el calor se calcula:

$$\Delta H = 12\text{mol} * -393.77\frac{\text{kJ}}{\text{mol}} + 11\text{mol} * -242.00\frac{\text{kJ}}{\text{mol}} - 1\text{mol} * -2218\frac{\text{kJ}}{\text{mol}} = -5169.24\,\text{kJ}$$

Para la reacción (1) el calor absorbido es de 5169.24 kJ.

Estos datos se refieren a 1.0 kg de Sacarosa. El calor generado por la combustión del azúcar no contribuye al calentamiento global, pues el dióxido de carbono vertido es el mismo que la planta fijó.

4.4 BIOLOGÍA

SÉPTIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE BIOLOGÍA NIVEL I

INSTRUCCIONES:

Esta prueba consta de cuatro series. Debe responder **TODA** la prueba con tinta azul o negra. Puede utilizar calculadora, pero no celular. El tiempo máximo para responder es de 120 minutos.

Primera serie (30 pts.)

A continuación encontrará 30 preguntas de selección múltiple, encierre en un círculo la letra que corresponde a la respuesta correcta (1 pt c/u).
A continuación encontrará 30 preguntas de selección múltiple, encierre en un círculo la letra que corresponde a la respuesta correcta (1 pt c/u).

1. ¿Cuál de las siguientes secuencias se ajusta mejor al concepto de jerarquía de la vida?

Organelos – tejidos – organismos – ecosistemas – individuo.

Poblaciones – organismos – órganos y sistemas – tejidos – células.

Biosfera – comunidades – individuos – moléculas – organelos.

Organelos – tejidos – células – órganos y sistemas – moléculas.

2. La propiedad que contribuye al desplazamiento de la columna de agua a través de las células del xilema de las plantas es:

a. Cohesión.

b. Calor específico.

c. Adhesión.

d. a y c son correctas.

3. Las moléculas de agua se unen mediante puentes de hidrógeno.

a. Verdadero, los puentes de hidrógeno son enlaces entre el hidrógeno de una molécula y el hidrógeno de otra.

b. Falso, las moléculas de agua se unen mediante enlaces covalentes.

c. Verdadero, los puentes de hidrógeno son enlaces entre el hidrógeno de una molécula y un átomo electronegativo de otra molécula.

d. Falso, las moléculas de agua no están unidas mediante ningún enlace.

4. Los siguientes son cuatro elementos esenciales para la vida:

- **a.** Hidrógeno, oxígeno, nitrógeno, carbono.
- **b.** Carbono, nitrógeno, silicio, hierro.
- **c.** Hierro, magnesio, calcio, carbono.
- **d.** Carbono, fósforo, flúor, manganeso.

5. A diferencia de los lípidos, los carbohidratos…

- **a.** Pueden formar polímeros.
- **b.** Se localizan en las membranas celulares.
- **c.** Son fuente energética.
- **d.** Son moléculas orgánicas.

6. Sobre la estructura de los ácidos nucleicos es correcto afirmar que**:**

- **a.** Al carbono alfa se enlaza una base nitrogenada.
- **b.** Al grupo amino se enlaza el fosfato.
- **c.** La síntesis inicia del carbono 3 al carbono 5´.
- **d.** Todas son correctas.

7. ¿Cuál de los siguientes enunciados **NO** es un postulado de la teoría celular?

- **a.** Todas las células son microscópicas.
- **b.** Todo organismo posee una o más células.
- **c.** La célula es la unidad estructural y funcional de todo ser vivo.
- **d.** Toda célula procede de otra preexistente.

8. Las células procariotas y eucariotas se diferencian porque:

- **a.** Las eucariotas realizan metabolismo.
- **b.** Solo las procariotas pueden ser patógenas.
- **c.** Las procariotas carecen de organelos membranosos.
- **d.** Las eucariotas poseen ADN cromosómico y ARN.

9. Del citoesqueleto es **INCORRECTO** afirmar lo siguiente:

- **a.** Sólo está presente en los eucariontes.
- **b.** Está conformado por filamentos proteicos.
- **c.** Mantiene la forma y tamaño celular.
- **d.** Participa en la división celular.

10. Entre las siguientes opciones, ¿cuál **NO** es una unión intercelular?

- **a.** Plasmodesmas.
- **b.** Desmosomas.
- **c.** Matriz extracelular.
- **d.** Comunicantes.

11. ¿Cuál de las siguientes opciones es un mecanismo de comunicación celular?

- **a.** Hormonas.
- **b.** Factores de crecimiento.
- **c.** Sinapsis.
- **d.** Todas son correctas.

12. Un ejemplo de transporte pasivo es:

- **a.** Ósmosis.
- **b.** Bomba sodio potasio.
- **c.** Cotransporte.
- **d.** Antiporte.

13. ¿En cuál de las siguientes situaciones se cumple la primera y segunda ley de la termodinámica?

- **a.** En la transformación de energía libre en energía mecánica.
- **b.** En la entropía orgánica temporal por efecto del calor.
- **c.** En el completo equilibrio de la actividad enzimática.
- **d.** Todas son correctas.

14. El orden correcto de las etapas de la respiración celular es:

- **a.** Glucólisis – cadena de transporte de electrones – quimiósmosis.
- **b.** Glucólisis – quimiósmosis – ciclo del ácido cítrico.
- **c.** Glucólisis – ciclo del ácido cítrico –fosforilación oxidativa.
- **d.** Glucólisis – fosforilación oxidativa – ciclo del ácido cítrico.

15. De la glucólisis se obtienen como productos energéticos:

- **a.** 32 ATP y 4 NADH + H^+
- **b.** 4 ATP totales y 2 lactatos
- **c.** 2 ATP netos y 2 NAD reducidos
- **d.** 36 a 38 ATP,CO_2 y H_2O

16. ¿Cuál de los siguientes eventos ocurre en la mitocondria?

a. Síntesis de oxígeno.
b. Fosforilación de ADP.
c. Fosforilación de ATP.
d. Síntesis de piruvato.

17. La/El ____________________ **NO** es una vía anabólica.

a. Síntesis de ADN.
b. Ciclo de Calvin.
c. Fermentación.
d. Síntesis proteica.

18. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la fase luminosa de la fotosíntesis es **VERDADERA**?

a. Tiene lugar en el estroma.
b. Escinde el H_2O y libera O_2 a la atmósfera.
c. Utiliza el CO_2 para formar glucosa.
d. Utiliza ATP.

19. La fase luminosa de la fotosíntesis abastece al ciclo de Calvin con:

a. CO_2 y ATP.
b. O_2 y energía lumínica.
c. NADPH y ATP.
d. CO_2 y NADPH.

20. Respecto a la síntesis del ADN se puede afirmar que:

a. Se inicia en el extremo 3' del cebador de ARN.
b. Las ADN-polimerasas sintetizan el ADN en dirección 3' → 5'.
c. La hebra adelantada se sintetiza en fragmentos de Okazaki.
d. Las topoisomerasas reparan a las hebras.

21. ¿En cuál de las siguientes fases del ciclo celular ocurre la duplicación de cromosomas?

a. Fase G_2
b. Intercinesis
c. Fase S
d. Fase G_1

22. La fisión binaria es una forma de reproducirse de los/las:

- **a.** Virus y viroides.
- **b.** Células procariontes.
- **c.** Células vegetales.
- **d.** Todas son correctas.

23. De los siguientes acontecimientos, ¿cuáles son exclusivos de la meiosis?

- **a.** Sinapsis y entrecruzamiento.
- **b.** Cromosomas sobre la placa metafásica.
- **c.** Duplicación del material genético.
- **d.** La regulación del ciclo celular.

24. Los genes ligados al sexo son aquellos que:

- **a.** No se expresan en la progenie.
- **b.** Se localizan en cualquier cromosoma sexual.
- **c.** Se localizan exclusivamente en el cromosoma X.
- **d.** Se localizan exclusivamente en el cromosoma Y.

25. En una planta con un alelo rojo (R) y uno blanco (r) para el carácter color de la flor, ¿cuál de los siguientes experimentos ejemplificaría mejor un cruce de prueba?

- **a.** Cruce de líneas puras (RR x rr).
- **b.** Combinación de fenotipo rojo (RR o Rr) con fenotipo blanco (rr).
- **c.** Cruce entre un individuo de fenotipo blanco (rr) y uno de sus progenitores.
- **d.** Combinación de un heterocigoto (Rr) y uno de sus progenitores (RR o rr).

26. La unidad más pequeña de la evolución es:

- **a.** Una especie.
- **b.** Un genotipo.
- **c.** Una población.
- **d.** Un individuo.

27. Sobre las estructuras homólogas es **INCORRECTO** afirmar que:

a. Son restos de estructuras con funciones importantes en el organismo ancestral.

b. Son variaciones sobre una parte estructural que ya existía en su ancestro común.

c. Representan evidencias de la evolución.

d. Son aquellas que son producto de evolución convergente.

28. El éxito reproductivo diferencial que da como resultado que ciertos alelos se transmitan a la siguiente generación en mayores proporciones que otros se conoce como:

a. Selección natural.

b. Evolución.

c. Selección artificial.

d. Especiación.

29. Sobre la deriva génica es **CORRECTO** afirmar que:

a. Es consecuencia de la selección natural.

b. Es un cambio en las frecuencias fenotípicas de una población.

c. Puede ser generada por un efecto cuello de botella.

d. Tiene el efecto de producir organismos más adaptados.

30. La ____________________ se define como el cambio de la constitución genética de una población de una generación a otra.

a. Macroevolución.

b. Mutación.

c. Deriva génica.

d. Microevolución.

Segunda serie (30 pts.)

A continuación encontrará 30 preguntas, responda únicamente lo que se le indica (1 pt c/u).

Indique el nombre de los siguientes grupos funcionales:

1. >CO ________________________
2. –OH ________________________
3. –COOH _____________________
4. –SH ________________________
5. –NH2 _______________________

Cuál de los grupos funcionales mencionados en la pregunta anterior sería más probable encontrar en:

6. Una proteína __________________________________
7. Una bebida alcohólica ___________________________

Escriba la función de los siguientes organelos:

Organelo	Función
8. Núcleo	
9. Aparato de Golgi	
10. Ribosomas	
11. Retículo endoplásmico liso	
12. Mitocondria	

13. Escriba dos organelos presentes en la célula vegetal pero no en la animal y describa su función.

Organelo	Función

14. En las células eucariotas, ¿cuál es el aminoácido iniciador de la síntesis de proteínas?
____

15. Identifique dos funciones principales de la ADN polimerasa III en la replicación del ADN.

a. ____

____

Respecto a la síntesis de proteínas, defina los siguientes términos:

16. Traducción: ____

____

17. Transcripción: ____

____

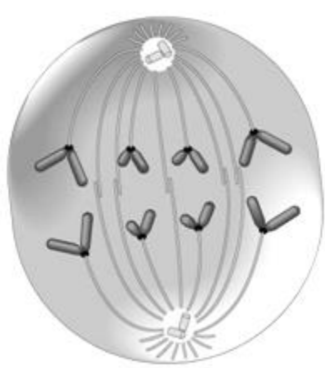
18. Codón: ____

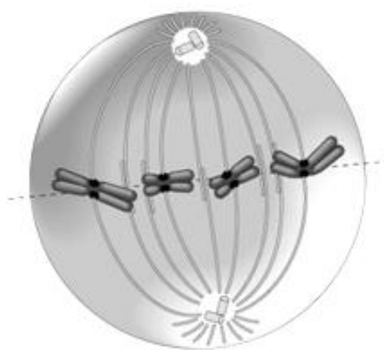
____

19. Anticodón: ____

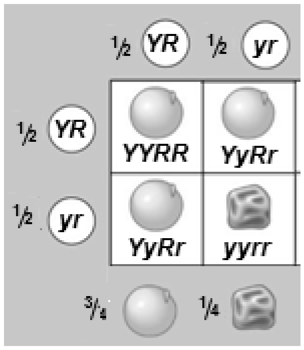
____

Observe los esquemas de las fases de la mitosis, que se presentan en el siguiente cuadro y escriba el nombre y los principales eventos de cada una.

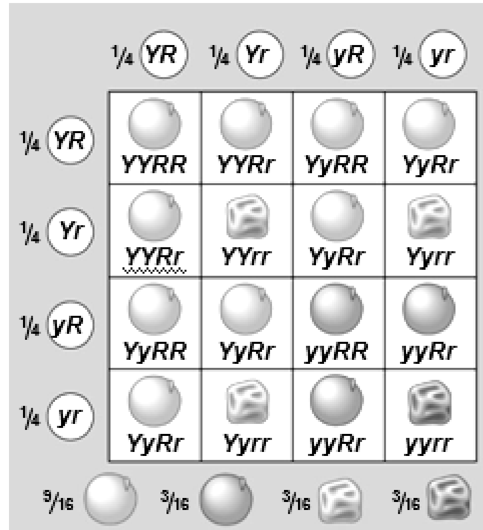
Esquema	Fase	Eventos Principales
 **20.**		

Esquema	Fase	Eventos Principales
 21.		
 22.		
 23.		

24. ¿Cuál de las siguientes figuras ilustra mejor la Ley de Segregación Independiente de Mendel? Encierre en un círculo la letra que corresponda.

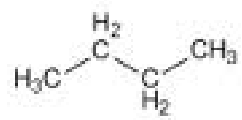


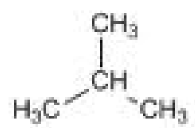
A



B

25. ¿Qué tipo de isomería presentan las siguientes moléculas?





____

26. Mencione dos oligoelementos:

____

____

27. Escriba la secuencia de ARNm complementaria para la siguiente secuencia de ADN:

3'TAC- ACC- TTC- ATC- AAT-ATG-GAG- AAG- ACT5'

____

El espermatozoide de un gato contiene 19 cromosomas, indique:

28. Número haploide ______________

29. Número diploide _______________

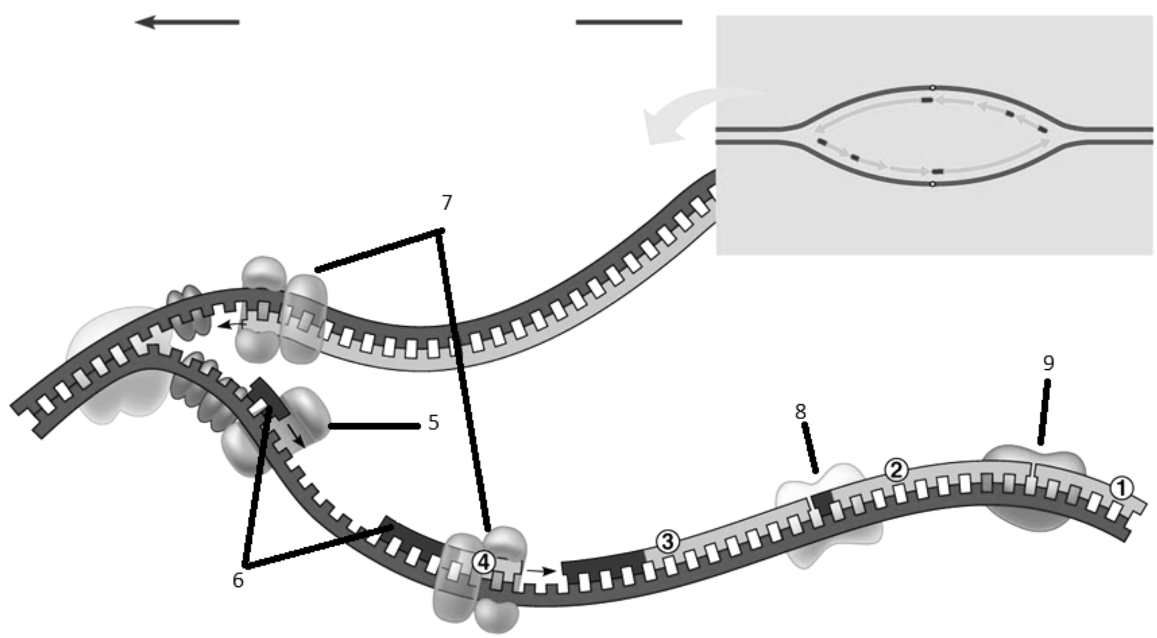
30. ¿En qué etapa de la meiosis se establece el estado haploide de las células?

____

Tercera serie (15 pts.)

A continuación encontrará dos esquemas, responda lo que se le indica en cada inciso.

1. Utilice el siguiente esquema para explicar cómo se da la elongación de una cadena de ADN en la horquilla de replicación. Coloque el nombre de los elementos numerados. No olvide utilizarlos en su explicación (8 pts.).



1) 2) 3) y 4) ______________________ 7) ______________________

5) ______________________ 8) ______________________

6) ______________________ 9) ______________________

2. Realice un esquema de la membrana celular y utilícelo para explicar la diferencia entre difusión, difusión facilitada y transporte activo. Dibuje cualquier otro componente que considere necesario para su explicación, identificándolo debidamente (7 pts.).

Cuarta serie (25 pts.)

Resuelva los siguientes problemas de genética dejando constancia de su procedimiento (5 pts. c/u).

1. Una mujer, cuyo padre era daltónico, se casa con un hombre daltónico. Debido a que esta es una enfermedad ligada al cromosoma X, ¿cuál es la probabilidad de que tengan un hijo con daltonismo? ¿Cuál es la probabilidad de que tengan un hijo y una hija daltónicos?

2. La fenilcetonuria es una enfermedad hereditaria causada por un alelo recesivo. Si en una pareja ambos son portadores y planifican tener tres hijos ¿cuál es la probabilidad de que todos los hijos tengan un fenotipo normal?

3. Tomás tiene los ojos azules, se casa con Ana que tiene los ojos cafés. La madre de Ana tenía los ojos azules y su padre los ojos cafés y su hermano Cristóbal tiene los ojos azules. Del matrimonio de Ana y Tomás nació un hijo con ojos cafés. Suponiendo que la herencia del color de ojos se atribuye únicamente a un locus, ¿cuál es el genotipo de toda la familia, sabiendo que el color café domina sobre el azul?, ¿cuál es la probabilidad de que su segundo hijo tenga los ojos azules?

4. El genotipo de los individuos F_1 en un cruzamiento tetrahíbrido es AaBbDdEe. Si existe una distribución independiente de los cuatro genes, ¿cuál es la probabilidad de que la descendencia F_2 tenga los siguientes genotipos?

- **a.** Aabbddee
- **b.** AaBBDDee
- **c.** AABbDdEE

5. En humanos, los grupos sanguíneos MN están controlados por un gen con dos alelos codominantes (M y N), de manera que el genotipo MM da lugar al grupo M, el genotipo MN al grupo MN y la combinación NN al grupo N. Un hombre, cuyos padres eran uno de grupo M y el otro de grupo N, se casa con una mujer de fenotipo desconocido y tienen un hijo de grupo M. Si además se sabe que el abuelo materno era de grupo N, ¿cuál es la probabilidad de que el siguiente hijo de esta pareja sea de diferente grupo que su hermano?

SÉPTIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE BIOLOGÍA NIVEL II

Instrucciones generales:

Esta prueba consta de 5 series. Debe responder toda la prueba con tinta azul o negra. Puede usar calculadora, pero no celular. El tiempo máximo para responder es de 90 minutos.

INSTRUCCIONES:

Esta prueba consta de cinco series, cada una de las cuales posee instrucciones específicas. Debe responder utilizando tinta negra o azul. Puede usar calculadora, pero no celular. El tiempo para completar la prueba es de 120 minutos.

Primera serie: 10 puntos (0.5 puntos c/u):

Subraye la respuesta correcta.

1. De la doble hélice de ADN, No es correcto afirmar que:

- **a.** Está formada por dos polímeros de nucleótidos unidos por grupos fosfato.
- **b.** Las dos cadenas de ADN se mantienen unidas por enlaces de hidrógeno.
- **c.** Se compone por bases nitrogenadas de purina y pirimidina.
- **d.** Las bases nitrogenadas complementarias del ADN son: A-G, T-C.
- **e.** Las cadenas se enroscan sobre sí mismas formando una especie de escalera.

2. El alargamiento de la hebra adelantada durante la síntesis de ADN

- **a.** Progresa alejándose de la horquilla de replicación.
- **b.** Se produce en la dirección 3’ a 5’.
- **c.** Produce fragmentos de Okazaki.
- **d.** Depende de la acción de la ADN polimerasa.
- **e.** No requiere una cadena molde para sintetizarse.

3. La síntesis de una nueva cadena de ADN, por lo general, comienza con:

- **a.** Un cebador de ARN.
- **b.** Un cebador de ADN.
- **c.** Un fragmento de Okazaki.
- **d.** La ADN ligasa.
- **e.** Un dímero de timina.

4. ¿Qué componente no es necesario para la síntesis de proteínas, cuando el proceso de transcripción finalizó?

a. ARNm
b. ARNt
c. ARNr
d. ADN
e. DNA

5. ¿Cuál de los siguientes organelos celulares no corresponde con su función?

a. Lisosomas: digestión intracelular.
b. Ribosomas: síntesis de proteínas.
c. Microtúbulos: contracción celular.
d. Mitocondrias: respiración celular.
e. Retículo endoplásmico liso: síntesis de lípidos.

6. Un antígeno es:

a. Una célula defensiva del sistema inmunitario.
b. Una sustancia extraña reconocida como ajena al organismo.
c. Una proteína sintetizada por un linfocito para neutralizar a un anticuerpo.
d. Un agente de defensa orgánica.
e. Una proteína de la membrana celular.

7. En una especie africana de acacia, las hormigas del género *Crematogaster* perforan las paredes de las espinas y viven en su interior. Ellas obtienen alimento de las glándulas secretoras de néctar de las hojas, pero también se alimentan de orugas y otros herbívoros que pueden alimentarse de esta planta. ¿Qué tipo de relación se ejemplifica en este párrafo?

a. Competencia.
b. Mutualismo.
c. Comensalismo.
d. Depredación.
e. Parasitismo.

8. El dengue es producido por:

- **a.** Un virus.
- **b.** Un protista.
- **c.** Un artrópodo.
- **d.** Una bacteria.
- **e.** Un prión.

9. ¿Cuál de las siguientes características no definen a una planta CAM?

- **a.** Presentan una anatomía suculenta.
- **b.** La enzima rubisco es la responsable de la carboxilación inicial.
- **c.** Evitan la transpiración durante el día cerrando sus estomas.
- **d.** Mantiene sus estomas abiertos durante el día.
- **e.** b y d no son características de las plantas CAM.

10. ¿Cuál de los siguientes tejidos vegetales no está emparejado con su función?

- **a.** Colénquima/soporte.
- **b.** Parénquima/secreción.
- **c.** Traqueidas/conducción de agua y minerales.
- **d.** Esclerénquima/fotosíntesis.
- **e.** Estomas/respiración.

11. Marque el par incorrecto entre tipo de meristema y función

- **a.** Meristema apical / aumento en longitud.
- **b.** Cambium vascular / aumento en grosor.
- **c.** Cambium vascular / aumento en longitud.
- **d.** Cambium del corcho / formación de corteza.
- **e.** Meristema apical / crecimiento primario.

12. Organismos eucariotas heterótrofos que poseen una pared celular compuesta principalmente por quitina y secretan exoenzimas para su alimentación.

- **a.** Radiolarios.
- **b.** Bacterias grampositivas.
- **c.** Hongos.
- **d.** Artrópodos.
- **e.** Dinoflagelados.

13. En una planta experimental de cultivo de vid, el porcentaje de plantas con uvas sin pigmentar es del 10%. Sabiendo que este carácter es recesivo frente al color normal de la uva y suponiendo que la población está en equilibrio HW. ¿Cuál es la frecuencia de plantas heterocigotas en esta población?

- **a.** 0.35
- **b.** 0.43
- **c.** 0.21
- **d.** 0.17
- **e.** 0.55

14. La flora y fauna de la India muestran grandes diferencias con las especies del cercano sudeste asiático ¿Por qué?

- **a.** Las especies se separaron por evolución convergente.
- **b.** La India está en proceso de separación del resto de Asia.
- **c.** La India estuvo separada hasta hace relativamente poco tiempo.
- **d.** Las especies sufrieron especiación luego de una larga migración.
- **e.** Las especies se separaron por especiación parapátrica.

15. Darwin llamó "selección natural" a:

- **a.** La estabilidad en el proceso de reproducción.
- **b.** Variaciones aleatorias entre organismos individuales, no ocasionadas por el ambiente.
- **c.** Variaciones entre los organismos, ocasionadas por el ambiente.
- **d.** Variaciones favorables heredadas que incrementan su frecuencia de una generación a otra.
- **e.** Ninguna de las anteriores es correcta.

16. Son características del bioma Desierto:

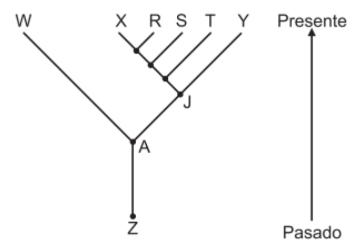
- **a.** Precipitaciones, por lo general inferiores a 30 cm al año.
- **b.** La temperatura varía en función del momento del día.
- **c.** Predomina la vegetación baja y espaciada.
- **d.** b y c son correctas.
- **e.** Todas son correctas.

17. Son características del bioma Tundra:

- **a.** Ocupa áreas amplias del Ártico.
- **b.** La vegetación es herbácea (líquenes, musgos, pastos, arbustos).
- **c.** La temperatura promedio oscila entre 24°C y 29°C.
- **d.** a y b son correctas.
- **e.** b y c son correctas.

18. A partir de este esquema, se podría proponer que las especies

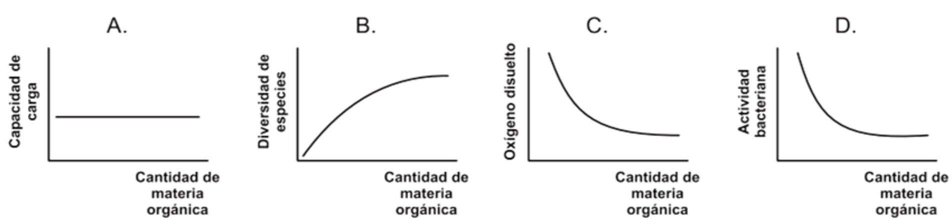
- **a.** X, R, S y T comparten un ancestro común con la especie Y.
- **b.** R, S y T surgieron en el mismo momento evolutivo.
- **c.** W y Y no tienen ningún ancestro común.
- **d.** W y Y son más antiguas que la especie A.
- **e.** Los enunciados a y c son correctos.



19. De acuerdo con el modelo de equilibrio de la biogeografía insular, la riqueza de especies sería mayor en una isla:

- **a.** Grande y remota.
- **b.** Pequeña y remota.
- **c.** Grande y cercana a un continente.
- **d.** Pequeña y cercana a un continente.
- **e.** Con un ambiente homogéneo.

20. Cuando la cantidad de materia orgánica vertida a un río supera su capacidad para procesarla, el sistema se desequilibra. ¿Qué gráfica representa mejor lo que sucederá en este sistema?



E. Ninguna de las gráficas es correcta

Segunda serie: 10 puntos (0.5 puntos c/u)

En el espacio disponible al lado del enunciado escriba “F” si es falso y “V” si es verdadero. En el caso que lo amerite, encierre la palabra o conjunto de palabras que vuelven falso el enunciado. 10 puntos (0.5 puntos c/u)

1. La cadena 5’ a 3’ se sintetiza en forma continua como una sola unidad; la cadena 3’ a 5’ se sintetiza de manera discontinua, como una serie de fragmentos.	
2. Según Mendel los factores hereditarios para cada característica se distribuyen en forma independiente uno del otro.	
3. Las paredes celulares de las arqueas carecen de peptidoglucano.	
4. Los reinos Protista, Fungi, Plantae y Animalia forman clados monofiléticos.	
5. La relación filogenética entre vertebrados y equinodermos es estrecha, por lo que se les ha agrupado dentro de los protostomados.	
6. Estudios moleculares han determinado que los hongos se relacionan más con los animales que con las plantas.	
7. El fenómeno conocido como “marea roja” es causado por el crecimiento explosivo de una población de dinoflagelados.	
8. Los plasmodesmos son canales a través de las paredes celulares que conectan el citoplasma de células adyacentes.	
9. Algunos organelos propios de la célula vegetal, que no están presentes en la célula animal son: cloroplastos, vacuola central, pared celular y mitocondrias.	
10. En Bryophyta, la generación gametofítica se considera dominante pues es capaz de vivir en forma independiente del esporofito.	
11. El epitelio escamoso simple permite el intercambio de material por difusión. Se encuentra revistiendo los vasos sanguíneos y sacos aéreos de los pulmones.	
12. El músculo estriado cardiaco presenta fibras ramificadas e interconectadas a través de discos intercalares, es multinucleado y presenta movimiento involuntario.	

13. Son de origen endodérmico: el tracto digestivo, el tracto respiratorio, la vejiga urinaria y los riñones.	
14. Las aves, al igual que los mamíferos presentan un flujo de aire unidireccional.	
15. Los astrocitos (en el SNC) cumplen la misma función que las células de Schwann (en el SNP).	
16. El útero se estructura de fibras lisas, cuyos sarcómeros son distensibles.	
17. El SNP somático se encarga de recoger la información sensitiva de los receptores sensoriales y de enviar la información motora a los músculos esqueléticos.	
18. Las aves y los reptiles terrestres convierten sus desechos nitrogenados en ácido úrico.	
19. La selección natural actúa solamente sobre los genes recesivos.	
20. La densidad poblacional depende de la interacción entre la tasa de natalidad, mortalidad, inmigración y emigración.	

Tercera serie: (30 puntos):

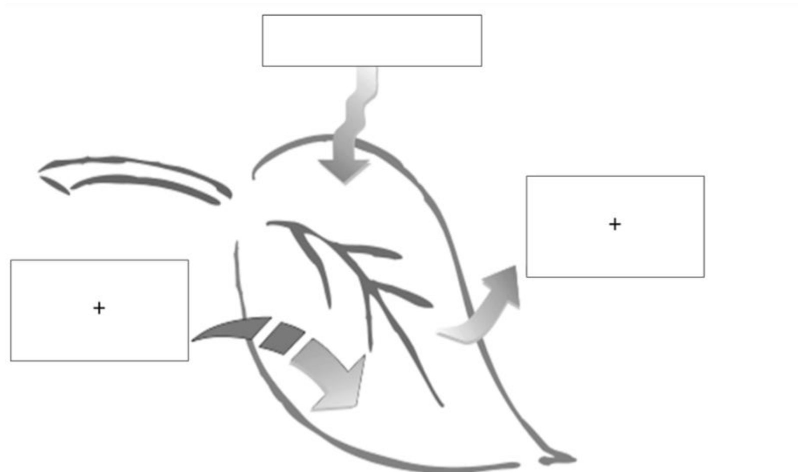
Complete los espacios de esquemas, cuadros o párrafos. 30 puntos (cada pregunta indica su puntuación individual)

1. Se denominan caracteres _______________ a aquellos que evolucionaron de un ancestro común pero difieren en su función por adaptación a diferentes medios. Por el contrario, los caracteres _________________ realizan funciones similares pero evolucionaron de ancestros diferentes. (1 punto)
2. Complete el siguiente párrafo utilizando las palabras clave:

nitrificación	bacterias	fijación	amonificación	desnitrificación	nitrificantes

La atmósfera es el principal reservorio de nitrógeno (77%); sin embargo, este gas no puede ser aprovechado por la mayoría de organismos en su estado molecular. En el **ciclo del nitrógeno**, la _________________ es el proceso mediante el cual entra el nitrógeno al ecosistema. Este proceso se refiere a la conversión que realizan algunas ______________ como *Rizhobium*, donde convierten el N_2 a compuestos orgánicos nitrogenados. El segundo paso del proceso, la _______________________, se refiere a la descomposición del nitrógeno orgánico a amonio (NH_4^+). Posteriormente, a través de la ______________________, el amonio se oxida y se convierte en nitrato (NO_3^-), gracias a las bacterias ____________________. En condiciones anaerobias, otras bacterias utilizan el NO_3^- en vez del O_2 en su metabolismo y liberan N_2 en el proceso final llamado _________________. (3 puntos)

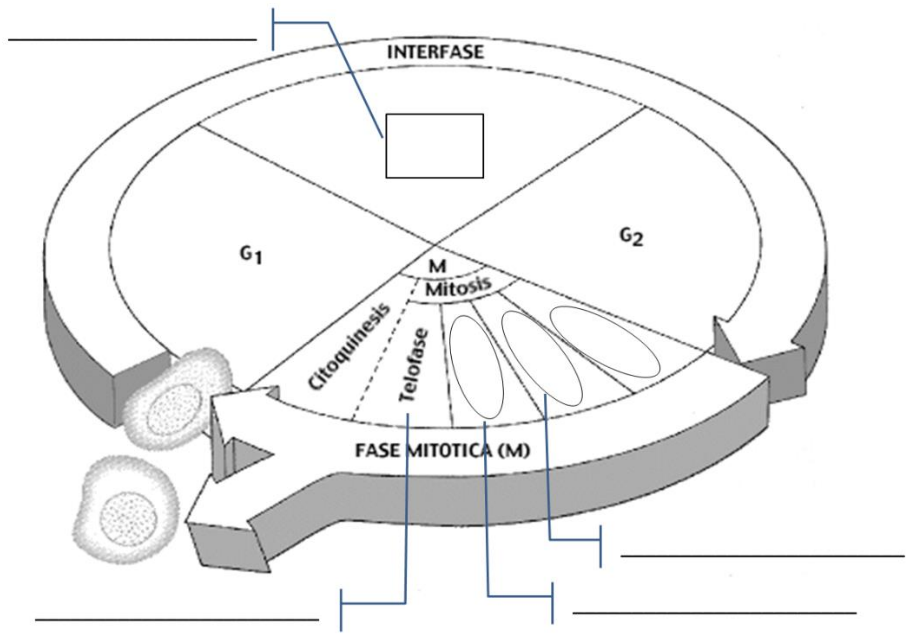
3. Complete el siguiente esquema de la fotosíntesis (2.5 puntos).



4. Complete el siguiente cuadro llenando los espacios en blanco. Agregue la especie, marque con una **X** la casilla de la clasificación a la que pertenece, e indique su importancia ecológica, industrial, cultural o en salud (6 puntos).

Especie	**Clasificación Taxonómica**						**Importancia**
	Archae	**Bacteria**	**Protista**	**Fungi**	**Plantae**	**Animalia**	
Saccharomyces cerevisiae							
							En Salud: Provoca la enfermedad de chagas.
Penicillium roqueforti							
							En salud: Principal vector del dengue
Lactobacillus acidophilus							
Plasmodium falciparum							
Pharomachrus mocinno							
							Grano (dicotiledóneo) que constituye el alimento básico de muchos guatemaltecos.

5. Complete el siguiente esquema del ciclo celular, colocando los nombres de las fases y etapas faltantes, así como, la descripción de los principales eventos que suceden en cada fase, según sea requerido. (4 puntos)

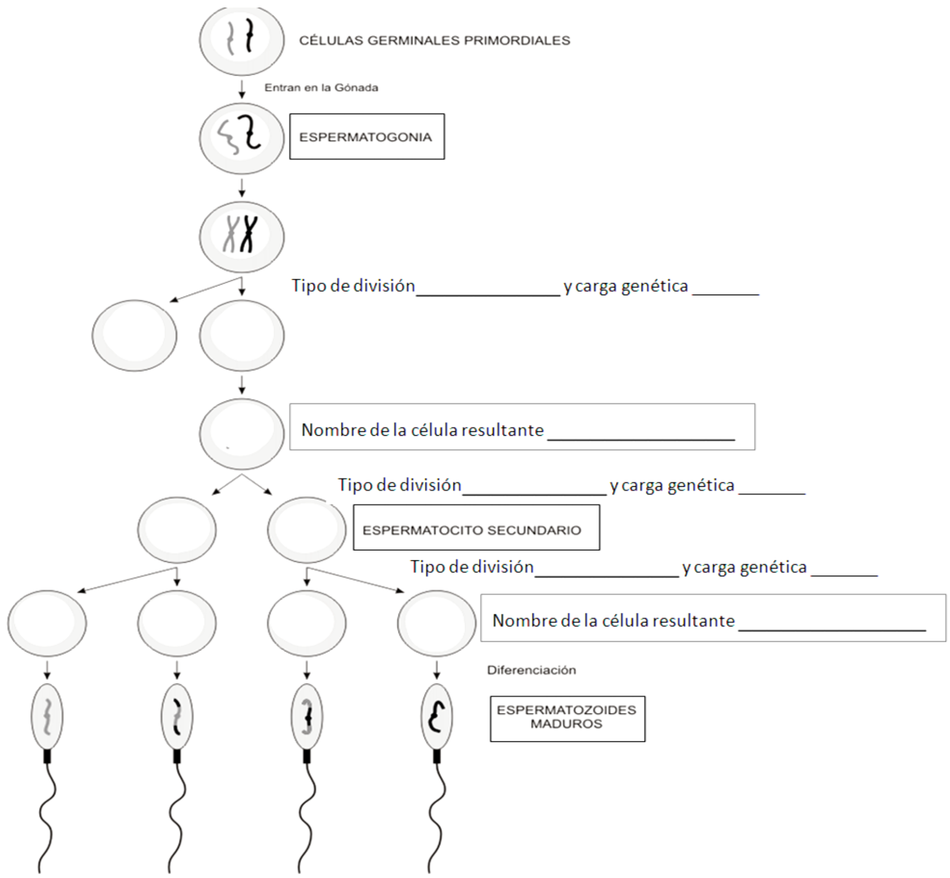


6. Diferencias entre monocotiledóneas y dicotiledóneas (4 puntos).

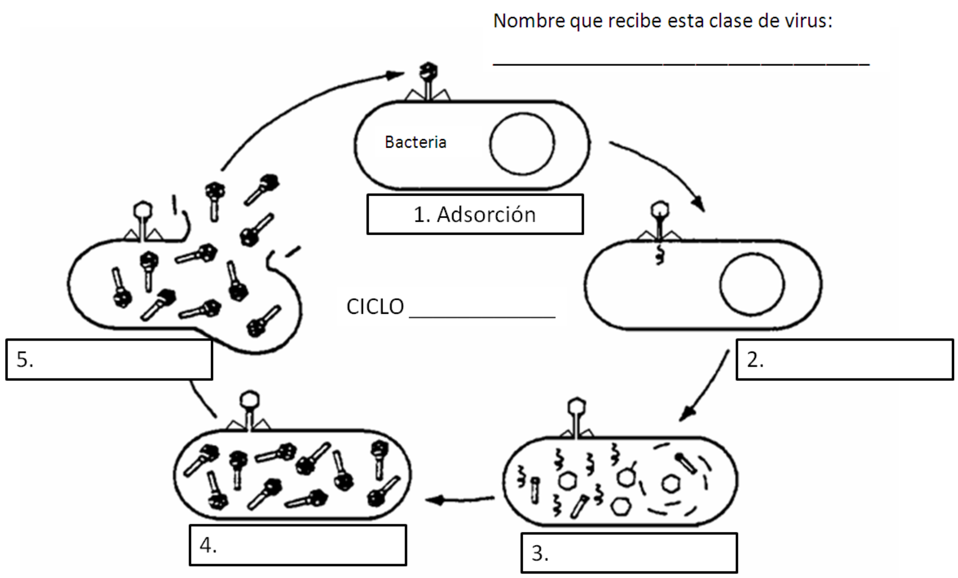
Característica	Monocotiledónea	Dicotiledónea
Número de cotiledones	UNO	DOS
Número de piezas florales		
Nervadura de las hojas		
Disposición de los haces vasculares		
Crecimiento secundario		

7. El tejido ________________________ es el que se encarga de transportar sustancias en el cuerpo de la planta, se divide en células del ______________________, que tranporta agua y minerales, y células del ________________________, que transporta compuestos orgánicos y otros nutrientes. (1.5 puntos)

8. Complete lo que se le solicite en el esquema de espermatogénesis. (5 puntos)



9. Complete el esquema de replicación viral. Coloque el nombre de las fases, que tipo de ciclo es y el nombre de los virus que infectan bacterias (3 puntos).



Cuarta serie: (40 puntos)

Responda brevemente las siguientes preguntas y deje constancia de procedimiento en donde se le solicite. 40 pts. (4 puntos c/u)

1. ¿Qué es la eutrofización? ¿Por qué se produce y qué provoca? Mencione un ejemplo o caso en Guatemala.

2. Mencione 2 ventajas y 2 desventajas que presenta la reproducción sexual y la asexual. Mencione además, 3 tipos de reproducción asexual.

	VENTAJAS	DESVENTAJAS	
Reproducción sexual	1. 2.	1. 2.	
Reproducción asexual	1. 2.	1. 2.	Tipos: 1. 2. 3.

3. Existen dos tipos de barreras reproductivas; las precigóticas y las postcigóticas. ¿En qué consiste cada una? Mencione 2 ejemplos para cada una.

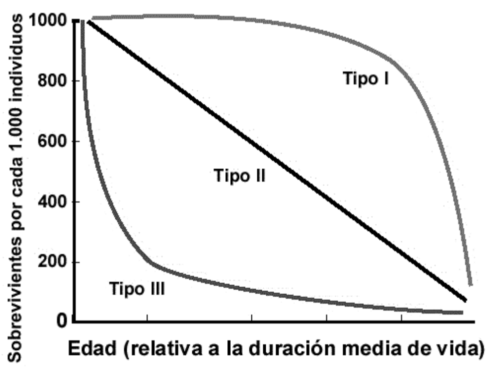
4. ¿Cuál es la diferencia entre sistemática y taxonomía?

5. ¿Cuál es la diferencia entre especiación alopátrica, parapátrica y simpátrica?

6. ¿Cuáles son las ventajas de asociación que obtienen los organismos que forman líquenes? ¿Qué organismos forman dicha asociación?

7. La siguiente figura muestra las curvas de supervivencia ideales:

a. Interprete las curvas tipo I y tipo II
b. ¿Cuál de los tres tipos de curva explica el comportamiento de la población humana?



8. La organización de una proteína está definida por cuatro niveles estructurales denominados: estructura primaria, secundaria, terciaria y cuaternaria, ¿En qué consiste cada uno de estos niveles estructurales?

9. Al cruzar dos moscas negras se obtiene una descendencia formada por 216 moscas negras y 72 blancas. NN representa el color negro y nn el color blanco. Razone el cruzamiento y responda ¿Cuál será el genotipo de las moscas parentales? ¿Cuál es el genotipo y fenotipo de la descendencia obtenida? Deje constancia de su procedimiento.

10. Un hombre AB^- y una mujer O^+ tienen un hijo B^+. Tenga en cuenta que el grupo sanguíneo en los humanos está determinado por tres alelos de un gen: A y B son codominantes y O es recesivo respecto a ellos. El factor rh está determinado por dos alelos de otro gen: rh+ es dominante sobre el rh−.

a. Determine los genotipos posibles de cada uno de los individuos.
b. Explique si alguno de los padres podría donarle sangre al hijo.

Quinta serie: (10 puntos)

Escoja uno de los siguientes temas para desarrollar (20 líneas), cuide su ortografía y redacción. 10 puntos.

a. Evidencias de la evolución.

b. Problemas ambientales y conservación.

5 TECNOLOGÍA

SÉPTIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DEL ÁREA TECNOLOGÍA

Instrucciones:

A continuación se le presenta una serie de problemas, cada problema tiene una valoración en puntos, debe tratar de realizar programas de computadora que resuelvan cada problema, puede resolver los problemas en cualquier orden deseado, al finalizar de resolver cada problema debe solicitar que sea validado con el archivo de prueba que le será entregado por los jueces, deberá generar su salida y entregarla para su verificación, si la verificación es correcta habrá obtenido los puntos en que se ha valorado el problema. Recuerde que el tiempo utilizado para resolver los problemas también es parte de la competencia. A menos que se indique otro método, los problemas deberán solicitar el nombre del archivo de entrada y generar la salida a un archivo nombrado salidaN.txt, donde N corresponde al número de problema.

Problema 1: (5 puntos)

Suppose you are reading byte streams from any device, representing IP addresses. Your task is to convert a 32 characters long sequence of '1s' and '0s' (bits) to a dotted decimal format. A dotted decimal format for an IP address is form by grouping 8 bits at a time and converting the binary representation to decimal representation. Any 8 bits is a valid part of an IP address. To convert binary numbers to decimal numbers remember that both are positional numerical systems, where the first 8 positions of the binary systems are:

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1

Input

The input file, "Entrada-P1.txt", will have a number N (1<=N<=1000) in its first line representing the number of streams to convert. N lines will follow.

Output

The output file "Salida-P1.out" must have N lines with a doted decimal IP address. A dotted decimal IP address is formed by grouping 8 bit at the time and converting the binary representation to decimal representation.

Input Example:

4
00000000000000000000000000000000
00000011100000000111111111111111
11001011100001001110010110000000
01010000000100000000000000000001

Output Example:

0.0.0.0

3.128.255.255

203.132.229.128

80.16.0.1

Problema No. 2 (35 pts.)

SudokuX es una variación del juego Sudoku estándar. Similar a Sudoku estándar, en SudokuX se deben ingresar los números del 1 al 9 una vez en cada fila, columna y cuadrado de 3x3 dentro de la cuadrícula total de 9x9 del rompecabezas. Además, en SudokuX los números solo deben ocurrir una vez en cada una de las dos diagonales.

	1			4		6		
	2		5				3	1
4			3					
						3	9	
6				7				5
	7	3						
					4			2
8	6				2		5	
		7		8			1	

Cuadrícula total (9x9) de SudokuX

Entrada

La primera línea contiene T, el número de casos de prueba (1<=T<=100). Entonces, T casos de prueba siguen. Cada caso de prueba consiste en 9 líneas. Cada línea contiene 9 caracteres, los caracteres válidos son:

'.' : Representa una celda en blanco

'1'..'9' : Representa un valor del SudokuX en la celda que corresponde

Cada caso de prueba es separado por una línea en blanco. Además, le garantizan que cada rompecabezas de SudokuX dado tiene una solución única.

Salida

Para cada rompecabezas, la salida contiene la solución en el mismo formato que la entrada. Debe imprimir una línea en blanco después de cada caso de prueba.

Ejemplo de Entrada

```
2
.8....2..
.1....5..
..34..7..
..9.5....
.2...46..
3........
9...2....
.........
......4.7

....41...
...6....5
.....7.9.
....1.3..
.5......1
.2.......
..18...76
.7......2
........3
```

Ejemplo de Salida

```
486715293
712938546
593462718
679251384
128394675
354876129
945627831
867143952
231589467

293541768
748692135
615387294
864715329
357269481
129438657
531824976
476953812
982176543
```

Problema No. 3 (10 pts.)

Los números que representan partes de un todo se denominan números racionales, fracciones o quebrados. En general, las fracciones se pueden expresar como el cociente de dos números enteros a y b:

$$\frac{a \quad \text{(numerador)}}{b \quad \text{(denominador)}}$$

Una fracción está en su forma reducida o canónica si el numerador y el denominador no tienen un factor común. Por ejemplo, 6/8 no está en su forma reducida pues ambos, 6 y 8, son divisibles por 2: 6/8 = (2·3)/(2·4); sin embargo, 3/4 es una fracción en su forma canónica.

Existen dos tipos de fracciones, propias e impropias. Una fracción propia es aquella en la que el numerador es menor que el denominador; 2/3', -7/8 y 16/19 son todas ellas fracciones propias. Una fracción impropia es aquella en que el numerador es mayor que el denominador; 3/2, -8/4 y 7/3 son fracciones impropias. Las fracciones impropias se pueden convertir en números mixtos o en enteros (por ejemplo, "3/2 = 1 ½; -8/4 = -2, y 7/3 = 2 1/3) si se divide el numerador por el denominador y el resto se expresa como una fracción del denominador.

Entrada

La primera línea contiene un número N de casos (1<=N<=1000) y a continuación vienen N líneas con fracciones (pueden ser propias o impropias, y pueden estar o no en su forma canónica, NO vienen números mixtos), cada fracción se representa con un valor entero P (numerador) una diagonal '/' y un valor entero Q (denominador).

Salida

Por cada caso en la entrada, mostrará la fracción en su forma canónica y, en caso de fracciones impropias deberán ser expresadas como un número mixto, el formato será un valor entero S un espacio ' ' (solo en caso de que exista un componente entero) un valor entero P (numerador) una diagonal '/' y un valor entero Q (denominador).

Ejemplo de Entrada

```
7
6/8
3/4
2/3
-7/14
3/2
-8/4
7/3
```

Ejemplo de Salida

3/4
3/4
2/3
-1/2
1 1/2
-2
2 1/3

Problema No. 4 (30 pts.)

Blue and Orange are friendly robots. An evil computer mastermind has locked them up in separate hallways to test them, and then possibly give them cake.

Each hallway contains 100 buttons labeled with the positive integers {1, 2, ..., 100}. Button k is always k meters from the start of the hallway, and the robots both begin at button 1. Over the period of one second, a robot can walk one meter in either direction, or it can press the button at its position once, or it can stay at its position and not press the button. To complete the test, the robots need to push a certain sequence of buttons in a certain order. Both robots know the full sequence in advance. How fast can they complete it?

For example, let's consider the following button sequence:

O 2, B 1, B 2, O 4

Here, O 2 means button 2 in Orange's hallway, B 1 means button 1 in Blue's hallway, and so on. The robots can push this sequence of buttons in 6 seconds using the strategy shown below:

```
Time | Orange           | Blue
-----+------------------+-----------------
  1  | Move to button 2 | Stay at button 1
  2  | Push button 2    | Stay at button 1
  3  | Move to button 3 | Push button 1
  4  | Move to button 4 | Move to button 2
  5  | Stay at button 4 | Push button 2
  6  | Push button 4    | Stay at button 2
```

Note that Blue has to wait until Orange has completely finished pushing O 2 before it can start pushing B 1.

Input

The first line of the input gives the number of test cases, T. T test cases follow (1<=T<=25).
Each test case consists of a single line beginning with a positive integer N (1<=N<=25), representing the number of buttons that need to be pressed. This is followed by N terms of the form "Ri Pi" where Ri is a robot color (always 'O' or 'B'), and Pi is a button position (1 ≤ Pi ≤ 100).

Output

For each test case, output one line containing "Case #x: y" (note that exists a blank space between ':' and 'y'), where x is the case number (starting from 1) and y is the minimum number of seconds required for the robots to push the given buttons, in order.

Input Example

```
3
4 O 2 B 1 B 2 O 4
3 O 5 O 8 B 100
2 B 2 B 1
```

Output Example

Case #1: 6
Case #2: 100
Case #3: 4

Problema No. 5 (5 pts)

A un número entero positivo se le denomina como palíndromo si su representación decimal es igual cuando se lee de izquierda a derecha y viceversa. Para todo número entero positivo K que contiene menos de 11 dígitos, debes desarrollar una solución que encuentre el palíndromo sucesor menor mayor que K. Los número no poseen ceros a la izquierda.

Entrada

La primer línea contiene un número T que representa el número de casos a explorar, seguido por T líneas que contienen un número K, el cual hay que calcular el palíndromo siguiente menor.

Salida

Por cada número entero positivo K se debe desplegar un número entero positivo mayor que sea palíndromo sin ceros a la izquierda

Condiciones

$1 \leq T \leq 200000$

$1 \leq K \leq 1000000000$

Ejemplo de entrada

2

808

2133

Ejemplo salida

818

2222

Problema No. 6 (5 pts)

Se está generando el prototipo de un nuevo modelo de cajero automático, para el cual se te ha pedido que elabores el algoritmo de validación para las transacciones monetarias que luego se programará directamente en el hardware procesador centralizado de transacciones.

Cada transacción tiene un costo de Q0.50 y las cantidades a retirar solo pueden ser múltiplos de 5, de lo contrario la transacción no se genera.

Entrada

La primera línea contiene un número entero T que indica la cantidad de transacciones que deberán ser evaluadas.

Las siguientes T líneas contendrán dos valores numéricos M y S donde:

M indica el monto que se desea retirar.

S indica el saldo actual de la cuenta.

Salida

Para cada transacción se debe desplegar el saldo final de la cuenta, si el monto deseado es mayor al saldo que se posee se debe desplegar el mismo saldo como saldo final (transacción no generada).

Ejemplo de entrada

7

30.00 120.00

40.00 150.50

15.50 20.20

5.00 6.00

78.00 60.00

10.00 5.50

100.00 500.00

Ejemplo de salida

89.50

110.00

20.20

0.50

60.00

5.50

399.50