

# Controlli Automatici T

Kevin Michael Frick

28 gennaio 2020

## 1 Domande

### 1. Sistemi dinamici

- (a) Quali caratteristiche ha un punto di equilibrio?

**R:** Il vettore  $\dot{x}$  delle derivate delle variabili di stato è nullo.

- (b) Come si linearizza un sistema dinamico?

**R:** Sviluppando in serie di Taylor al primo ordine intorno a un punto di equilibrio le espressioni dell'uscita e delle derivate dello stato.

### 2. Trasformata di Laplace

- (a) Dimostrare l'espressione della trasformata di Laplace  $G(s)$  di un sistema dinamico.

**R:** Dall'espressione in forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

si ottiene, trasformando secondo Laplace:

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Siamo interessati solo all'evoluzione forzata, quindi  $x_0 = 0$ . Si ricava l'espressione di  $X(s)$ :

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \implies X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Sostituendo nell'espressione di  $Y$  si ha:

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

Quindi

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = G(s)$$

### 3. Risposte di sistemi elementari

- (a) Ricavare la risposta allo scalino di un sistema con due poli reali e uno zero. Cosa cambia al variare di  $T$  e  $\tau$ ?

**R:** Un sistema con due poli reali e uno zero (e guadagno unitario) ha trasformata di Laplace

$$G(s) = \frac{1 + \tau s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (1)$$

La risposta allo scalino si ricava mediante lo sviluppo in fratti semplici di  $\frac{1}{s}G(s)$  ed è pari a

$$y(t) = \text{sca}(t) \left( 1 + \frac{\tau - T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} - \frac{\tau - T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right) \quad (2)$$

Si distinguono tre casi:

1.  $\tau > T_1 > T_2 > 0$ : il sistema presenta una sovraelongazione tanto più marcata quanto più lo zero è vicino all'origine;
2.  $\tau \approx T_1 > T_2$ : il sistema è approssimabile con un sistema del primo ordine con un solo polo, presenta lieve sovraelongazione se  $\tau > T_1$  e sottoelongazione se  $\tau < T_1$ .
3.  $\tau < 0, T_1 > T_2$ : il sistema presenta una sottoelongazione tanto più marcata quanto più lo zero è vicino all'origine.

- (b) Ricavare la risposta allo scalino di un sistema con una coppia di poli complessi coniugati. Cosa cambia al variare di  $\xi$ ?

**R:** Un sistema con una coppia di poli complessi coniugati e guadagno unitario ha trasformata di Laplace

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s/\omega_n + s^2/\omega_n^2} \quad (3)$$

La risposta allo scalino si ricava mediante lo sviluppo in fratti semplici di  $\frac{1}{s}G(s)$  e, per  $\xi \in ]0, 1[$ , è pari a

$$y(t) = \text{sca}(t) \left( 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \arccos(\xi)) \right) \quad (4)$$

Si dimostra che  $S_{\%} = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ . È possibile approssimare il tempo di assestamento al  $k\%$  con l'istante di tempo in cui  $e^{\xi\omega_n t} = k/100$ . Si ottiene quindi  $T_{ak} \approx \bar{t}_k = -\frac{\log(k/100)}{\xi\omega_n}$ . Se  $\xi = 0$  il sistema è stabile, non asintoticamente, mentre per  $\xi < 0$  il sistema diventa instabile.

#### 4. Risposta in frequenza

- (a) Regole per il tracciamento approssimato dei diagrammi di Bode.

**R:** Prendendo i logaritmi dei moduli, i prodotti e i quozienti diventano somme e differenze: è quindi possibile separare i contributi di guadagno  $k$ , zeri/poli reali e cc e poi sommarli per ottenere il diagramma di Bode finale. I contributi degli zeri si ottengono negando quelli dei poli. Lo stesso vale per gli argomenti.

**Modulo**

1. Guadagno  $k$ : Retta orizzontale che vale  $20 \log_{10} k$ ;
2. Poli nell'origine  $(j\omega)^g$ : Retta con pendenza  $-20g$  dB/decade;
3. Poli reali  $1 + \tau j\omega$ : Retta con pendenza  $-20$  dB/decade per  $\omega > 1/|T|$ ;
4. Poli cc  $1 + 2j\omega\xi/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2$ : Retta con pendenza  $-40$  dB/decade per  $\omega > \omega_n$ .

### Argomento

1. Guadagno  $k$ :  $0$  per guadagno positivo,  $-180^\circ$  per guadagno negativo;
2. Poli nell'origine  $(j\omega)^g$ :  $-90^\circ$  su tutto l'asse delle pulsazioni;
3. Poli reali  $1 + \tau j\omega$ :  $-90^\circ \operatorname{sgn}(T)$  per  $\omega > \frac{1}{|\tau|}$ ;
4. Poli cc  $1 + 2j\omega\xi/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2$ :  $-180^\circ \operatorname{sgn}(\xi)$  per  $\omega > \omega_n$ .

## 5. Stabilità e prestazioni

- (a) Definizione di margine di ampiezza e fase. In che modo questi margini danno indicazioni sulla stabilità robusta del sistema?

**R:** Il margine di fase è definito come  $M_f = 180^\circ + \arg\{L(j\omega_c)\}$ ,  $|L(j\omega_c)|_{dB} = 0$ , quello di ampiezza come  $M_a = -|L(j\omega_\pi)|$ ,  $\arg\{L(j\omega_\pi)\} = -180^\circ$ . Il margine di fase dà una misura della stabilità del sistema a fronte di un ritardo di tempo: dato che un ritardo di tempo  $\tau$  dà al diagramma di Bode della fase un contributo di  $-\omega\tau$  il sistema rimane stabile finché  $\tau < \frac{M_f}{\omega_c}$ . Lo stesso vale per il margine di ampiezza e incertezze sul guadagno del sistema, che rimane stabile finché l'incertezza  $\delta k < M_a$ .

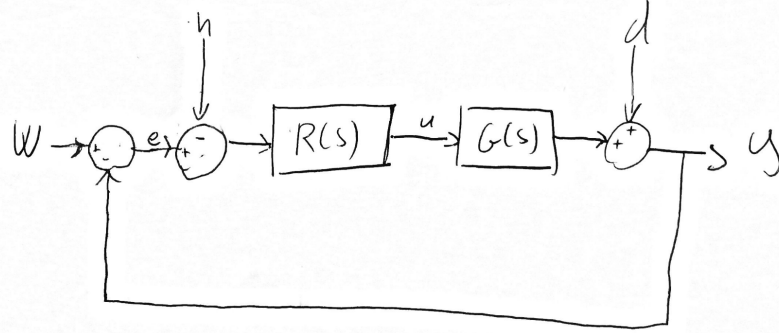
- (b) Regole per il tracciamento approssimato del luogo delle radici.

**R:**

1. Il luogo delle radici ha  $p$  rami;
2. il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale;
3. tutti i punti dell'asse reale a sinistra di un numero dispari di singolarità reali appartengono al luogo delle radici;
4. i rami partono dai poli di  $L(s)$ ;
5.  $z$  rami arrivano agli zeri di  $L(s)$ , i restanti  $p - z$  divergono all'infinito;
6. i rami che divergono hanno asintoti obliqui che intersecano l'asse reale in  $x_a = \frac{1}{p-z} \sum (z_i - p_i)$  con  $z_i \in \operatorname{Ze}\{L(s)\}$ ,  $p_i \in \operatorname{Po}\{L(s)\}$  e formano con esso angoli pari a  $\frac{(2k+1)180^\circ}{p-z}$ ,  $k \in [1..(p-z)]$ ;
7. i punti di intersezione dei rami con l'asse reale sono dati dai massimi e minimi di  $\gamma(s) = -(1/L(s))$ : i massimi di  $\gamma$  rappresentano rami che si separano e diventano cc, i minimi rami che confluiscono sull'asse reale.

- (c) Derivare le espressioni delle funzioni di sensitività  $F(s)$ ,  $S(s)$ ,  $Q(s)$  e le espressioni approssimate dei loro moduli.

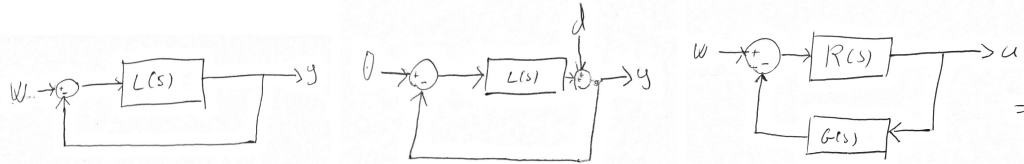
**R:** A partire dal modello nella prima figura, sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti si definiscono le uscite  $Y_w(s)$ ,  $Y_d(s)$ ,  $Y_n(s)$  dovute rispettivamente al riferimento, al disturbo sull'uscita e al disturbo di misura. In maniera analoga si definiscono gli errori e le variabili di controllo  $E_{w,d,n}(s)$ ,  $U_{w,d,n}(s)$ . A questo punto, analizzando un'uscita per volta, è possibile scomporre il modello nella somma dei tre modelli rappresentati nelle figure successive.



Analizzando l'uscita dovuto al riferimento, si ha  $(W(s) - Y_w(s))L(s) = Y_w(s) \implies Y_w(s)(1 + L(s)) = W(s)L(s) \implies \frac{Y_w(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = F(s)$  (prima figura).

Analizzando l'errore dovuto al riferimento, si ha  $E_w(s)L(s) = E_w(s) + W(s) \implies \frac{E_w(s)}{W(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = S(s)$  (seconda figura).

Analizzando la variabile di controllo dovuta al riferimento, si ha  $(W(s) - U_w(s))R(s) = U_w(s) \implies U_w(s) = W(s) \frac{R(s)}{1+R(s)G(s)} \implies \frac{U_w(s)}{W(s)} = \frac{R(s)}{1+R(s)G(s)} = Q(s)$  (terza figura).



Per valori alti di  $|L(j\omega)|$  (e quindi  $\omega < \omega_c$ ) si ha  $|1 + L(j\omega)| = |L(j\omega) + o(L(j\omega))|$ , per valori bassi di  $L(j\omega)$  invece  $|1 + L(j\omega)| = |1 + o(1)|$ , quindi

$$|F(j\omega)| \approx \begin{cases} 1 & \omega < \omega_c \\ |L(j\omega)| & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (5)$$

$$|S(j\omega)| \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} = -|L(j\omega)|_{dB} & \omega < \omega_c \\ 1 & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (6)$$

$$|Q(j\omega)| \approx \begin{cases} \frac{|R(j\omega)|}{|R(j\omega)G(j\omega)|} = \frac{1}{|G(j\omega)|} & \omega < \omega_c \\ \frac{|R(j\omega)|}{1} = |R(j\omega)| & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (7)$$

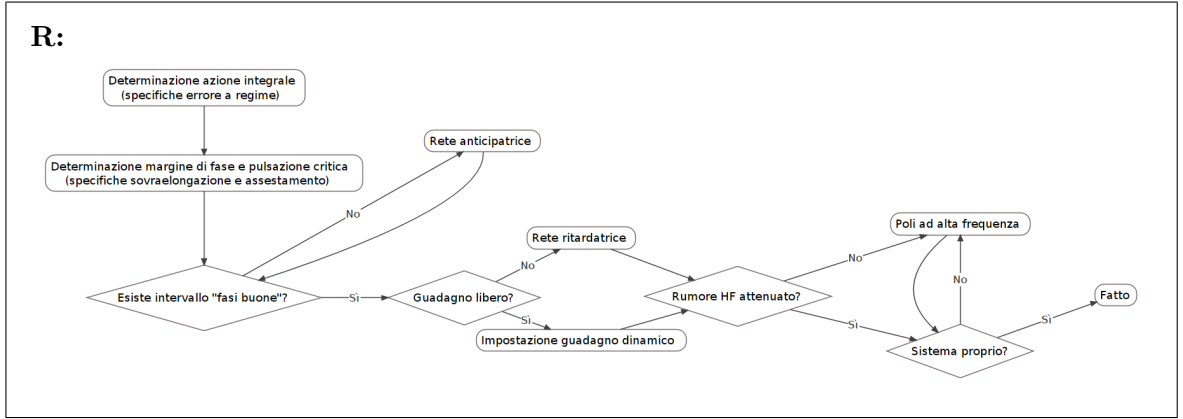
(d) Criterio di Bode.

**R:** Un sistema dinamico  $L(s)$  con più poli che zeri è asintoticamente stabile se e solo se:

1.  $L(s)$  non ha poli a parte reale strettamente positiva;
2. il diagramma di Bode di  $|L(s)|$  interseca una sola volta l'asse delle pulsazioni;
3.  $k_s > 0$ ;
4.  $M_f > 0$ .

## 6. Progetto di regolatori

(a) Tracciare un diagramma di flusso con le fasi del progetto di un regolatore.



- (b) Perché può essere utile cancellare un polo nell'origine inserendo uno zero nel regolatore dinamico?

**R:** Perché un solo polo nell'origine è sufficiente per garantire errore a regime nullo; ogni polo in più toglie 90 gradi alla fase del sistema, abbassando il margine di fase.

Un solo polo nell'origine permette di avere errore a regime nullo per un ingresso a scalino: se  $W(s) = \mathcal{L}\{W \text{ sca}(t)\} = \frac{W}{s}$  allora, per il teorema del valore finale,

$$\begin{aligned}
 e_{\infty} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} S(s)W(s) = W \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \\
 &= W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + N(s)/s^g D^*(s)} = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g D^*(s)}{s^g D^*(s) + N(s)}
 \end{aligned}$$

Dato che  $\lim_{s \rightarrow 0} N(s) = k$  e  $\lim_{s \rightarrow 0} D^*(s) = 1$  si ha

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W s^g}{k + s^g} = \begin{cases} \frac{W}{1+k} & g = 0 \\ 0 & g > 0 \end{cases}$$

Il risultato si può generalizzare a ingressi a rampa, parabola, ecc. (con trasformata  $W/s^p$ ) ottenendo

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W s^{g-p+1}}{k + s^g} = \begin{cases} \frac{W}{k} & g = p - 1 \\ 0 & g > p - 1 \\ \infty & g < p - 1 \end{cases}$$

- (c) In quali scenari ci si può trovare durante la sintesi di un regolatore?

**R:**

1. Se c'è un intervallo di pulsazioni tali che, se la pulsazione critica ricade in quell'intervallo, il margine di fase è pari o superiore a quello desiderato, allora è necessario attenuare il diagramma delle ampiezze alterando il meno possibile la fase:

(a) se si ha guadagno dinamico libero, scegliere  $k_d = 10^{-\frac{1}{20}|G_e(j\omega_c)|_{dB}}$ ;

(b) altrimenti si attenua mediante l'inserimento di poli e zeri, definendo una *rete ritardatrice* nella forma  $R_d(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ ,  $0 < a < 1$  ( $\Rightarrow aT < T$ ) che attenua l'ampiezza per  $\omega > 1/T$  e il cui contributo di fase è quasi nullo per le stesse pulsazioni;

2. se non c'è un intervallo di "fasi buone", invece, è necessario alzare il diagramma delle fasi alterando il meno possibile l'ampiezza per ricondursi allo scenario precedente: si definisce quindi una *rete anticipatrice* nella forma  $R_d(s) = \frac{1+Ts}{1+aTs}$ ,  $0 < a < 1$  ( $\Rightarrow$

$aT < T$ ), che aumenta la fase di circa 90 gradi nell'intervallo  $[\frac{1}{T}, \frac{1}{aT}]$ , aumentando però progressivamente anche l'ampiezza per  $\omega > \frac{1}{T}$ .

- (d) Quale valore deve assumere, la  $F(s)$  per abbattere di  $K$  dB un rumore ad alta frequenza? Come si mappa questo requisito sulla  $L(s)$ ? Quale valore deve invece assumere la  $S(s)$  e quindi la  $L(s)$  per abbattere di  $K$  dB un rumore a bassa frequenza? Come si traducono le approssimazioni di  $|Q(s)|$  sul progetto di un regolatore?

**R:** Il requisito sull'abbattimento del disturbo di misura in alta frequenza impone che  $|F(s)|_{dB} \leq -K[dB]$ . Si ha che  $\omega > \omega_c \implies |F(s)| = \frac{|L(s)|}{|1+L(s)|} \approx |L(s)| \implies |L(s)|_{dB} \leq -K[dB]$ .

Per abbattere invece un disturbo in bassa frequenza è necessario che  $|S(s)|_{dB} \leq K[dB]$ , quindi dato che  $|L(j\omega)|_{dB} \approx -|S(j\omega)|_{dB}$  ( $\omega < \omega_c$ ) si richiede che  $|L(j\omega)|_{dB} \geq -K[dB]$ .

Infine, dato che  $|Q(j\omega)| \approx \frac{1}{|G(j\omega)|}$  ( $\omega < \omega_c$ ), non è possibile influenzare la variabile di controllo con il regolatore a basse frequenze: è quindi importante non avere valori di  $\omega_c$  troppo alti.

- (e) Come si ricavano i vincoli sul margine di fase ( $M_f \omega_c \approx \frac{460}{T^*}$ ) e sui poli complessi coniugati ( $\xi \approx \frac{M_f}{100}$ ) a partire da specifiche sulla sovraelongazione e sul tempo di assestamento e quali approssimazioni sono necessarie?

**R:** La seguente discussione è valida se la funzione  $F(s)$  ha una coppia di poli cc dominanti con  $\omega_n \approx \omega_c$ . Lo studio della risposta allo scalino di un sistema del secondo ordine con poli cc permette di affermare che  $S_{\%} = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$  e  $T_{a1} \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n}$ . Per  $s = j\omega_c$  si ha che

$$\begin{aligned} \frac{|L(s)|}{|1+L(s)|} &= \frac{1}{|1+e^{j(\pi-M_f^{(rad)})}|} = \frac{1}{\sqrt{(1+\cos(\pi-M_f^{(rad)}))^2 + \sin^2(\pi-M_f^{(rad)})}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2-2\cos(M_f^{(rad)})}} = \frac{1}{2\sin(M_f^{(rad)}/2)} \end{aligned}$$

Ma  $F(j\omega_c) = \frac{1}{2\xi}$ , quindi

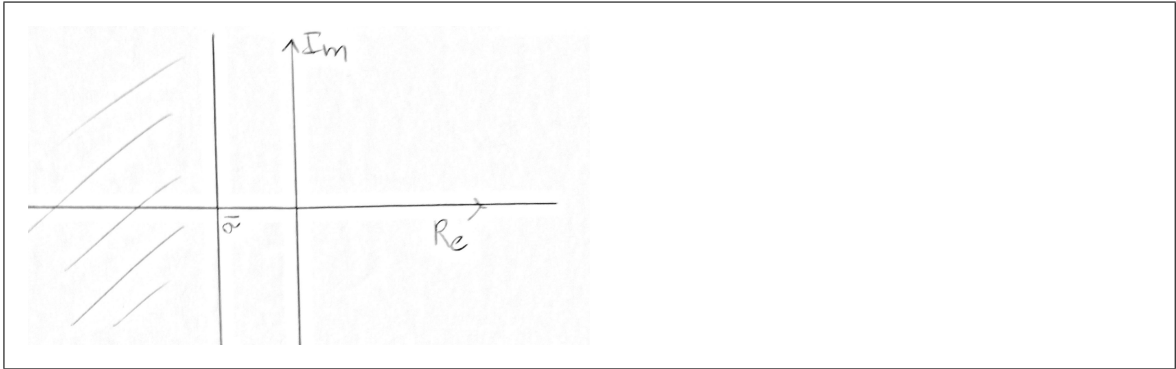
$$\frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2\sin(M_f^{(rad)}/2)} \implies \xi \approx M_f^{(rad)}/2 = \frac{M_f}{2} \frac{\pi}{180} \implies \xi \approx \frac{M_f}{100}$$

da cui

$$T_{a1} \approx 100 \frac{4.6}{M_f \omega_n} \implies M_f \omega_n \approx M_f \omega_c \approx \frac{460}{T_{a1}} \quad (8)$$

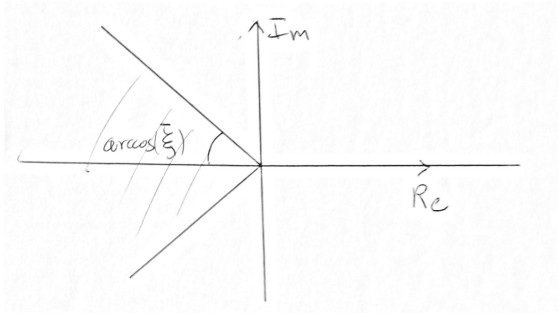
- (f) Come si mappa una specifica sul tempo di assestamento nel luogo delle radici?

**R:** Tramite un vincolo sulla parte reale dei poli in anello chiuso:  $\sigma \leq -\log(0.01k)/T_{ak}^*$ .



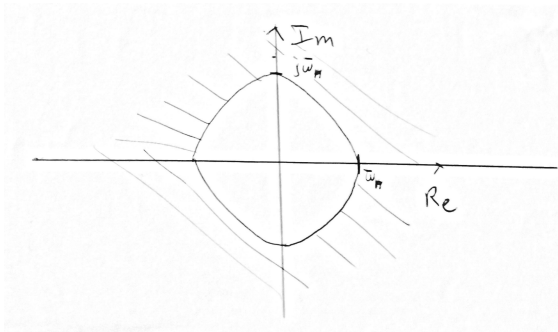
(g) Come si mappa una specifica sullo smorzamento dei poli dominanti nel luogo delle radici?

**R:** Perché i poli dominanti abbiano uno smorzamento maggiore di una soglia  $\bar{\xi}$ , i poli in anello chiuso devono essere all'interno del settore circolare che forma con l'asse reale un angolo pari a  $180^\circ - \arccos \bar{\xi}$ .



(h) Come si mappa una specifica sulla pulsazione naturale dei poli dominanti nel luogo delle radici?

**R:** Perché la pulsazione naturale dei poli dominanti sia maggiore di una soglia  $\bar{\omega}_n$ , i poli in anello chiuso devono essere all'esterno della circonferenza con centro nell'origine e raggio  $\bar{\omega}_n$ .



## 2 Formulario

Sistemi con uno zero:

$$y(t) = \text{sca}(t)(1 - e^{-t/T}) \quad (9)$$

Sistemi con uno zero e due poli:

$$y(t) = \text{sca}(t)\left(1 + \frac{\tau - T_1}{T_1 - T_2}e^{-t/T_1} - \frac{\tau - T_2}{T_1 - T_2}e^{-t/T_2}\right) \quad (10)$$

Sistemi con una coppia di poli cc:

$$y(t) = \text{sca}(t)\left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}t + \arccos(\xi))\right) \quad (11)$$

$$S_{\%} = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (12)$$

$$T_{ak} \approx \bar{t}_k = -\frac{\log(0.01k)}{\xi\omega_n} \quad (13)$$

$$M_f = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c)), |L(j\omega_c)|_{dB} = 0 \quad (14)$$

$$M_a = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}, \arg(L(j\omega_\pi)) = -180^\circ \quad (15)$$

$$|F(j\omega)| \approx \begin{cases} 1 & \omega < \omega_c \\ |L(j\omega)| & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (16)$$

$$|S(j\omega)| \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \omega < \omega_c \\ 1 & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (17)$$

$$|Q(j\omega)| \approx \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & \omega < \omega_c \\ |R(j\omega)| & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (18)$$

$$k_d = 10^{-\frac{1}{20}|G_e(j\omega_c)|_{dB}} \quad (19)$$

Rete ritardatrice ( $R(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ ,  $0 < a < 1$ ):

$$\begin{cases} |G_e(j\omega_c)|_{dB} + 20 \log_{10} M^* = 0 \\ M_f^* = 180^\circ + \arg\{G_e(j\omega_c^*)\} + \phi^* \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} T = \frac{\cos \phi^* - 1/M^*}{\omega_c^* \sin \phi^*} \\ a = \frac{M^* - \cos \phi^*}{T\omega_c^* \sin \phi^*} \end{cases} \quad (21)$$

Rete anticipatrice ( $R(s) = \frac{1+Ts}{1+aTs}$ ,  $0 < a < 1$ ):

$$\begin{cases} |G_e(j\omega_c^*)|_{dB} + 20 \log_{10} M^* = 0 \\ M_f^* = 180^\circ + \arg\{G_e(j\omega_c^*)\} + \phi^* \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} T = \frac{M^* - \cos \phi^*}{\omega_c^* \sin \phi^*} \\ a = \frac{\cos \phi^* - 1/M^*}{T\omega_c^* \sin \phi^*} \end{cases} \quad (23)$$

## 3 Legenda

- $k_s$ : guadagno statico;
- $k_d$ : guadagno dinamico;
- $\tau_i$ : costante di tempo di zeri reali;
- $T_i$ : costante di tempo di poli reali;
- $\zeta_i$ : smorzamento di zeri cc;
- $\xi_i$ : smorzamento di poli cc;
- $\alpha_n$ : pulsazione naturale di zeri cc;
- $\omega_n$ : pulsazione naturale di poli cc;
- $M_f$ : margine di fase;
- $M_a$ : margine di ampiezza;
- $\omega_c$ : pulsazione critica;
- $T_{ak}$ : tempo di assestamento al  $k\%$ ;
- $p$ : numero di poli;



- $z$ : numero di zeri;
- $\text{Po}\{G(s)\}$ : insieme dei poli di  $G(s)$ ;
- $\text{Ze}\{G(s)\}$ : insieme degli zeri di  $G(s)$ ;
- $\text{sca}(t)$ : funzione scalino;
- $G_e(s)$ : funzione di trasferimento del sistema con regolatore statico;
- $\phi^*$ : sfasamento desiderato di una rete anticipatrice/ritardatrice ;
- $M^*$ : attenuazione/amplificazione desiderata di una rete anticipatrice/ritardatrice.

**Disclaimer:** Questo documento può contenere errori e imprecisioni che potrebbero danneggiare sistemi informatici, terminare relazioni e rapporti di lavoro, liberare le vesciche dei gatti sulla moquette e causare un conflitto termonucleare globale. Procedere con cautela.

Questo documento è rilasciato sotto licenza CC-BY-SA 4.0. 