りゼミ 数理音楽理論 ノート

鴎海

最終更新日：2025 年 10 月 5 日

概要

ここでは主に，テキストに記載されている事項のまとめを行う．しかし，テキストの記述が一般的でないか不適切である場合，あるいは論理的な必要に迫られた場合には，必要に応じて適切に再構成した．また，有用性を考慮して，テキストに不記載の事項を多分に組み込み，さらに演習問題なども追加した．したがって，この pdf は**テキストをベースにしたノート**になってはいるが，テキストの忠実なコピーにはなっていない．

目次

第 1 章

基本事項

ここでは，以降の内容を読み進めるのに最低限必要な内容をまとめる．

1.1 ピッチ

テキストでは，ピッチを数学的に定義しているわけではないが，ここでは，あえて数学的に実装してみる．

定義 1.1：ピッチ空間

$N \geq 1$ を整数とする[a]．
集合

$$\mathrm{PITCH}_N := \{(n, x, N) \mid n, x \in \mathbb{Z},\ 0 \leq x \leq N-1\}$$

を，**1 オクターブを N 分割してできるピッチ空間**という．

PITCH_N 上の順序 $\prec$ は，辞書式順序によって定める．つまり，

- $n_1 < n_2$，または
- $n_1 = n_2$ かつ $x_1 < x_2$

であるときに限り，$(n_1, x_1, N) \prec (n_2, x_2, N)$ であると定める．

[a] 以降，これはいちいち断らない．

定義 1.2：ピッチ

PITCH_N の要素を，（PITCH_N における）**ピッチ**（pitch）という．

PITCH_N を，しばしば単に **（N-）ピッチ空間**（pitch space）という．**N 平均律**（N-tone equal temperament）ということすらある[*1]．

定義より，PITCH_N におけるピッチは全て (n, x, N) の形で表せることが分かり（$n, x \in \mathbb{Z},\ 0 \leq x \leq N-1$），逆に，そのような順序対は，全て PITCH_N におけるピッチである．

コメント　ピッチ (n, x, N) は，「1 オクターブが N 分割されているときの，n 番目に低いオクターブ範囲における，x 番目に低い音」と解釈するとよい．

ピッチ $p, q \in \mathrm{PITCH}_N$ について，$p \prec q$ であるとき，p は q よりも**低い**（low），または q は p よりも**高い**（high）

[*1] しかし，これは用語の誤用であることに注意せよ．N-ピッチ空間は，その要素（＝ピッチ）の**順序**にしか言及しておらず，したがって「各ピッチがどのように調律されているか」についての情報を全く持っていない．特に，各ピッチが本当に平均律に調律されていると言っているわけではない．むしろ，調律とは，写像 $\mathrm{PITCH}_N \to \mathbb{R}$ として定義される概念と思うことができる．

という．

PITCH$_N$ に含まれるピッチを（一部だけ）低い順に書いてみると，

$$\begin{aligned}\cdots &\prec (-1,0,N) \prec (-1,1,N) \prec (-1,2,N) \prec \cdots \prec (-1,N-1,N)\\ &\prec (0,0,N) \prec (0,1,N) \prec (0,2,N) \prec \cdots \prec (0,N-1,N)\\ &\prec (1,0,N) \prec (1,1,N) \prec (1,2,N) \prec \cdots \prec (1,N-1,N)\\ &\prec (2,0,N) \prec (2,1,N) \prec (2,2,N) \prec \cdots \prec (2,N-1,N)\\ &\prec \cdots\end{aligned}$$

となる．

コメント　PITCH$_{12}$ は，左右方向に無限に長いピアノの鍵盤に相当する．実際，全ての $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} C_n &:= (n,0,12) & C\sharp_n &:= (n,1,12) & D_n &:= (n,2,12)\\ D\sharp_n &:= (n,3,12) & E_n &:= (n,4,12) & F_n &:= (n,5,12)\\ F\sharp_n &:= (n,6,12) & G_n &:= (n,7,12) & G\sharp_n &:= (n,8,12)\\ A_n &:= (n,9,12) & A\sharp_n &:= (n,10,12) & B_n &:= (n,11,12)\end{aligned}$$

と定義してみれば（なお，左辺の表記を**科学的ピッチ表記法**（scientific pitch notation）という），

$$\begin{aligned}\cdots &\prec C_{-1} \prec C\sharp_{-1} \prec D_{-1} \prec D\sharp_{-1} \prec E_{-1} \prec F_{-1} \prec F\sharp_{-1} \prec G_{-1} \prec G\sharp_{-1} \prec A_{-1} \prec A\sharp_{-1} \prec B_{-1}\\ &\prec C_0 \prec C\sharp_0 \prec D_0 \prec D\sharp_0 \prec E_0 \prec F_0 \prec F\sharp_0 \prec G_0 \prec G\sharp_0 \prec A_0 \prec A\sharp_0 \prec B_0\\ &\prec C_1 \prec C\sharp_1 \prec D_1 \prec D\sharp_1 \prec E_1 \prec F_1 \prec F\sharp_1 \prec G_1 \prec G\sharp_1 \prec A_1 \prec A\sharp_1 \prec B_1\\ &\prec C_2 \prec C\sharp_2 \prec D_2 \prec D\sharp_2 \prec E_2 \prec F_2 \prec F\sharp_2 \prec G_2 \prec G\sharp_2 \prec A_2 \prec A\sharp_2 \prec B_2\\ &\prec \cdots\end{aligned}$$

という馴染みのある列が得られる[a]．

一般に，PITCH$_N$ は，左右方向に無限に長く，1 オクターブを N 分割したピアノの鍵盤に相当する．

[a] 実際のピアノの鍵盤は A_0 から C_8 までしかないが．

コメント　科学的ピッチ表記法のように，アルファベットや数字などを組み合わせてピッチ（または，後述する「ピッチクラス」．定義 1.5 を参照）を表記することを，**音名表記**をするといい，その各表記を**音名**という．

とはいえ，数理音楽理論のほとんどの分野においては，音名について本質的に考えねばならない場面は，それほど多くない[a]．

[a] もちろん，音名についての数学的研究が全く存在しないわけでもない．例えば Julian Hook などがそうした研究を行っている（これ以上は話が脱線するのでここまで）．

コメント　ここで，音名に関連して，**異名同音**（enharmonic）の扱いについて補足しておく[a]．西洋音楽理論では，同じピッチ（やピッチクラス）が様々な音名によって表記される．例えば，ピッチ $C\sharp_4$ は，

- $D\flat_4$
- $B\text{x}_3$
- $E\flat\flat\flat_4$

などとも表記される．これらの音名は，**異名同音**の関係にあると言われる．西洋音楽理論では，異名同音がしばしば「区別」されるが，この「区別」とは，あくまでも**音名**の区別である[b]．一方，今注目しているのは，個々の音名ではなく，**各音名が表している同じピッチ**である．そこで，これら異名同音は，全く同一のもの

として扱われる．つまり，

$$C\sharp_4 = D\flat_4 = B\times_3 = E\flat\flat\flat_4$$

とされるのである．この前提を，**異名同音等価性**（enharmonic equivalence）という．

[a] 異名同音について知らない方は，SoundQuest『異名同音を区別する』などを参照していただきたい．
[b] …と完全に言い切れるわけでもないのだが，ここでは枝葉は省く．

演習 1　順序集合 $(\mathrm{PITCH}_N, \prec)$ は，順序集合 $(\mathbb{Z}, <)$ と順序同型であることを示せ．つまり，任意のピッチ $p, q \in \mathrm{PITCH}_N$ に対し

$$p \prec q \Leftrightarrow f(p) < f(q)$$

が成り立つような全単射 $f\colon \mathrm{PITCH}_N \to \mathbb{Z}$ が存在することを示せ．

1.2　ピッチクラス

1.2.1　オクターブ等価性

定義 1.3：オクターブ等価

$p = (n_1, x_1, N), q = (n_2, x_2, N) \in \mathrm{PITCH}_N$ をピッチとする．
関係 $\sim_N$ を，

$$p \sim_N q \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

によって定義し，この関係を（PITCH_N における）**オクターブ等価性**（octave equivalence）という．
$p \sim_N q$ であるとき，p と q は（PITCH_N において）**オクターブ等価**（octave equivalent）であるという．

コメント　オクターブ等価性は，「2 つのピッチが整数オクターブだけ異なる音である」という性質を数学的に表現したものである．

任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ と $0 \leq x \leq N-1$ に対して，

$$(m, x, N) \sim_N (n, x, N)$$

であることが分かる．
しばしば N を省略して $\sim$ と書く．

1.2.2　ピッチクラス

演習 2　オクターブ等価性は，PITCH_N 上の同値関係であることを示せ．つまり，任意のピッチ $p, q, r \in \mathrm{PITCH}_N$ に対して，

反射律 $p \sim p$
対称律 $p \sim q$ ならば，$q \sim p$
推移律 $p \sim q \sim r$ ならば，$p \sim r$

が成り立つことを示せ．

定義 1.4：PC 空間

商集合

$$\mathrm{PC}_N := \mathrm{PITCH}_N/{\sim_N}$$

を，（PITCH_N による）**ピッチクラス空間**（pitch-class space）という．

しばしば省略して（N-）**PC 空間**という．こちらの方を N **平均律**ということもある．

定義 1.5：ピッチクラス

PC_N の要素を，（PC_N による）**ピッチクラス**（pitch class）という．

ピッチクラスを，単に**音**と呼ぶことすらある．しばしば，「PC」と省略される．

コメント　ピッチクラスは，整数オクターブだけ異なるピッチたちを，1 つの集合にまとめたものと理解できる．また，PC 空間は，全てのピッチクラスからなる集合である．

任意のピッチクラス $c \in \mathrm{PC}_N$ は，ある $0 \leq x \leq N-1$ を用いて，

$$c = \{(n, x, N) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

と書ける．したがって，

$$\mathrm{PC}_N = \{\{(n, x, N) \mid n \in \mathbb{Z}\} \mid 0 \leq x \leq N-1\}$$

であり，PC_N の要素数は N であることが分かる．

コメント　$N = 12$ の場合，PC 空間は，

$$\begin{aligned}
C &:= \{(n, 0, 12) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{C_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \\
C\sharp &:= \{(n, 1, 12) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{C\sharp_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \\
D &:= \{(n, 2, 12) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{D_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \\
&\vdots \\
B &:= \{(n, 11, 12) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{B_n \mid n \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

という 12 種類のピッチクラスからなる．言い換えれば，

$$\mathrm{PC}_{12} = \{C, C\sharp, D, D\sharp, E, F, F\sharp, G, G\sharp, A, A\sharp, B\}$$

である．

$N = 12$ の場合，ピッチクラスに対しても異名同音を考えることができる．しかし，これらの異名同音の区別が不要であることは，次の事実によって示される．

演習 3　もし，$D\flat, B\times, E\flat\flat\flat$ を

$$\begin{aligned}
D\flat &:= \{D\flat_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \\
B\times &:= \{B\times_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \\
E\flat\flat\flat &:= \{E\flat\flat\flat_n \mid n \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

と定義したとしても，結局

$$C\sharp = D\flat = B\times = E\flat\flat\flat$$

が成り立つことを示せ（ヒント：異名同音等価性を用いる）．

このように，異名同音等価性のもとでは，ピッチについての異名同音だけでなく，ピッチクラスについての異名同音も区別しなくてよいことが分かる．これは，異名同音等価性の「ピッチクラス版」といえる．以降，$N = 12$ の場合は，（ピッチクラスにおける）異名同音も断りなく用いる．例えば，ピッチクラス $D\sharp$ を $E\flat$ とも書く．

1.2.3　整数表記

普通は，以下の全単射によって，PC_N の要素を $\mathbb{Z}_N := \{0, ..., N-1\}$ の要素と同一視する．

$$i_N \colon \mathrm{PC}_N \to \mathbb{Z}_N; \quad \{(n, x, N) \mid n \in \mathbb{Z}\} \mapsto x$$

この全単射 i_N を，しばしば**整数表記**（integer notation）という．**以降は，この同一視に従い，もっぱら整数表記された形だけを扱う．**

さらに，もっぱら $\mathbb{Z}_N$ の方を**（N-）PC 空間**や **N 平均律**と呼び，$\mathbb{Z}_N$ の要素の方を**ピッチクラス**と呼ぶことにする．

コメント　$N = 12$ のとき，整数表記 $\mathrm{PC}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ は

$$\begin{array}{ccc} C \mapsto 0 & C\sharp \mapsto 1 & D \mapsto 2 \\ D\sharp \mapsto 3 & E \mapsto 4 & F \mapsto 5 \\ F\sharp \mapsto 6 & G \mapsto 7 & G\sharp \mapsto 8 \\ A \mapsto 9 & A\sharp \mapsto 10 & B \mapsto 11 \end{array}$$

となる（確かめよ）．

1.2.4　音程

定義 1.6：有向 PC 音程

$x, y \in \mathbb{Z}_N$ をピッチクラスとする．

$$\mathrm{int}_N(x, y) := (y - x) \bmod N$$

を，（$\mathbb{Z}_N$ における）x から y への**有向ピッチクラス音程**（ordered pitch-class interval）という．

有向 PC 音程を，しばしば単に**音程**（interval）と呼ぶ．

N が明らかなら，単に $\mathrm{int}(x, y)$ と書くこともある．

定義 1.7：無向 PC 音程

$x, y \in \mathbb{Z}_N$ をピッチクラスとする．

$$\mathrm{uint}_N(x, y) := \min\{\mathrm{int}_N(x, y), \mathrm{int}_N(y, x)\}$$

を，（$\mathbb{Z}_N$ における）x と y の間の**無向ピッチクラス音程**（unordered pitch-class interval）という．

無向 PC 音程を，しばしば**音程クラス**（interval class）と呼ぶ．

演習 4　$x, y \in \mathbb{Z}_N$ をピッチクラスとする．

(1) $0 \leq \mathrm{int}_N(x, y) \leq N - 1$ を示せ．

(2) $x \neq y$ であれば，$\mathrm{int}_N(x, y) + \mathrm{int}_N(y, x) = N$ であることを示せ．

演習 5　$x, y \in \mathbb{Z}_N$ をピッチクラスとする．

(1) $\mathrm{uint}_N(x, y) = \mathrm{uint}_N(y, x)$ を示せ．
(2) $\mathrm{uint}_N(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ を示せ．
(3) $0 \leq \mathrm{uint}_N(x, y) \leq \lfloor N/2 \rfloor$ を示せ．

1.3　PC セット

定義 1.8：ピッチクラス・セット

PC 空間 $\mathbb{Z}_N$ の空でない[a]部分集合を，（$\mathbb{Z}_N$ における）**ピッチクラス・セット**（pitch-class set）という．

[a] テキストは空でないことを特に要請してはいないが，普通は要請しておく．

しばしば省略して **PC セット**ともいう．

「X は（$\mathbb{Z}_N$ における）PC セットである」というのは，「X の要素はすべて（$\mathbb{Z}_N$ における）ピッチクラスである」というのと同じである（確かめよ）．

コメント　PC セットは，コードやメロディやスケールなど，注目したい任意の「音のまとまり」の**構成音**（ただしオクターブ差は無視する）を表しているものと理解できる．

PC セット X の要素数が n であるとき，X は n **音**であるという．

PC セットを，**スケール**（scale）や**コード**（chord）ともいう[*2]．これには明確な呼び分けがあるわけではないが，1〜4 音の場合は，スケールではなくコードと呼ぶ場合がほとんどである．

全ての PC セットからなる集合は，$\mathbb{Z}_N$ の冪集合 $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_N)$ に他ならない．

演習 6

(1) $\mathbb{Z}_N$ における PC セットの総数が $2^N - 1$ であることを確かめよ．
(2) $\mathbb{Z}_N$ における $n \geq 1$ 音 PC セットの総数が $\binom{N}{n}$ であることを確かめよ[a]．

[a] $\binom{n}{m} := \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ は二項係数である．

1.4　移置，反転

1.4.1　ピッチクラスの移置・反転

定義 1.9：T_n

音程 $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ に対し，ピッチクラスをピッチクラスに移す写像 $T_n \colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{Z}_N$ を，以下のように定める．

$$T_n \colon x \mapsto (x + n) \bmod N$$

写像 T_n を，音程 n による**移置**（transposition）という．

[*2] 正確には，**スケール構成音**や**コード構成音**などと呼ぶべきところかもしれないが．

定義 1.10：I_n

音程 $n \in \{0, ..., N-1\}$ に対し，ピッチクラスをピッチクラスに移す写像 $I_n \colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{Z}_N$ を，以下のように定める．

$$I_n \colon x \mapsto (-x+n) \bmod N$$

写像 I_n を，音程 n による**反転**（inversion）という．

$T_n(x)$《$I_n(x)$》を，音程 n による**ピッチクラス x の移置**《反転》という．

演習 7　T_n と I_n は，$\mathbb{Z}_N$ 上の全単射であることを示せ．

言い換えれば，これらは $\mathbb{Z}_N$ の置換である．

コメント　一方，写像

$$M_n \colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{Z}_N; \quad x \mapsto nx \bmod N$$

は，必ずしも全単射とは限らない（この写像は，multiplication と呼ばれる）．
$N = 12$ のとき，M_n が全単射になるのは，$n = 1, 5, 7, 11$ の時に限る（確かめよ）．

演習 8　$m, n \in \{0, ..., N-1\}$ を $\mathbb{Z}_N$ における音程とする．次を示せ．

(1) $T_n \circ T_m = T_{(m+n) \bmod N} = T_m \circ T_n$
(2) $T_n \circ I_m = I_{(m+n) \bmod N}$
(3) $I_n \circ T_m = I_{(-m+n) \bmod N}$
(4) $I_n \circ I_m = T_{(-m+n) \bmod N}$

したがって，PC 空間 $\mathbb{Z}_N$ は，ピッチクラスの移置および反転に関して閉じていることが分かる．

演習 9　$n \in \{0, ..., N-1\}$ を $\mathbb{Z}_N$ における音程とする．次を示せ．

(1) $T_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_N}$[a]
(2) $T_{(-n) \bmod N} \circ T_n = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_N}$
(3) $I_n \circ I_n = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_N}$

[a] ただし，id_X は X 上の恒等写像．

演習 10　$m, n \in \{0, ..., N-1\}$ を $\mathbb{Z}_N$ における音程とする．以下が同値であることを示せ．

1: $I_n \circ T_m = T_m \circ I_n$
2: 以下のいずれかが成り立つ．
- $n = 0$
- N は偶数で，$n = N/2$.

また，以下が同値であることを示せ．

1: $I_n \circ I_m = I_m \circ I_n$
2: 以下のいずれかが成り立つ．
- $m - n = 0$

- N は偶数で，かつ $(m-n) \bmod N = N/2$.

1.4.2 PC セットの移置・反転

一般に，PC セット $X \subseteq \mathbb{Z}_N$ に写像 $f\colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{Z}_N$ を施してできる像 $f[X]$ も[*3]，PC セットである．

PC セット $X \subseteq \mathbb{Z}_N$ に対して，PC セットを PC セットに移す写像

$$T_n^{\mathrm{PC}}\colon \mathcal{P}(\mathbb{Z}_N) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}_N); \quad X \mapsto T_n[X]$$
$$《I_n^{\mathrm{PC}}\colon \mathcal{P}(\mathbb{Z}_N) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}_N); \quad X \mapsto I_n[X]》$$

を，音程 n による PC セット X の移置《反転》という．

以降は，混乱が生じないなら，T_n^{PC}《I_n^{PC}》をも T_n《I_n》と書く． このとき，$T_n[X]$《$I_n[X]$》は，$T_n(X)$《$I_n(X)$》と書かれることになる点に注意せよ．

$m, n \in \{0, \ldots, N-1\}$ を $\mathbb{Z}_N$ における音程とする．ピッチクラスの移置・反転について，演習 8 から，直ちに次が従う．

1. $T_n \circ T_m = T_{(m+n) \bmod N} = T_m \circ T_n$
2. $T_n \circ I_m = I_{(m+n) \bmod N}$
3. $I_n \circ T_m = I_{(-m+n) \bmod N}$
4. $I_n \circ I_m = T_{(-m+n) \bmod N}$

したがって，全ての PC セットの集合 $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_N)$ は，PC セットの移置および反転に関して閉じていることが分かる．

演習 11　$m, n \in \{0, \ldots, N-1\}$ を $\mathbb{Z}_N$ における音程とする．

$$I_n \circ T_m = T_m \circ I_n$$

が成り立つための必要十分条件を求めよ．また，

$$I_n \circ I_m = I_m \circ I_n$$

が成り立つための必要十分条件を求めよ．

定義 1.11：移置形，反転形

PC セット $X, Y \subseteq \mathbb{Z}_N$ の間に

$$Y = T_n(X) \text{ なる音程 } 0 \le n \le N-1 \text{ が存在する}$$
$$《Y = I_n(X) \text{ なる音程 } 0 \le n \le N-1 \text{ が存在する}》$$

という関係が成り立つとき，Y は X の移置形《反転形》であるといい，$X \overset{T}{\sim} Y$《$X \overset{I}{\sim} Y$》と書く．

演習 12　$X, Y, Z \subseteq \mathbb{Z}_N$ を PC セットとする．次を示せ．

(1) $X \overset{T}{\sim} Y \overset{T}{\sim} Z$ ならば，$X \overset{T}{\sim} Z$
(2) $X \overset{I}{\sim} Y \overset{T}{\sim} Z$ ならば，$X \overset{I}{\sim} Z$
(3) $X \overset{T}{\sim} Y \overset{I}{\sim} Z$ ならば，$X \overset{I}{\sim} Z$
(4) $X \overset{I}{\sim} Y \overset{I}{\sim} Z$ ならば，$X \overset{T}{\sim} Z$

[*3] この pdf では，一般に，写像 f による集合 X の像を $f[X]$ と書く．

PC セット X が $X \overset{I}{\sim} X$ を満たすとき，X は**反転対称性**（inversional symmetry）を持つという．

演習 13

(1) $\overset{T}{\sim}$ は，$\mathcal{P}(\mathbb{Z}_N)$ 上の同値関係であることを示せ．
(2) $\overset{I}{\sim}$ は，$\mathcal{P}(\mathbb{Z}_N)$ 上の同値関係**ではない**ことを示せ（ただし，対称律は成り立つ）．
(3) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_N)$ を PC セットの集合とする．以下が同値であることを示せ．
  1: $\overset{I}{\sim}$ は $\mathcal{S}$ 上の同値関係である．
  2: $\mathcal{S}$ の要素は全て反転対称である．

演習 14　$X, Y \subseteq \mathbb{Z}_N$ を PC セットとする．以下が同値であることを示せ．

1: $X \overset{T}{\sim} Y$ かつ $X \overset{I}{\sim} Y$
2: X は反転対称である．

関係 $\overset{T/I}{\sim}$ を，

$$X \overset{T/I}{\sim} Y \Leftrightarrow (X \overset{T}{\sim} Y \text{ または } X \overset{I}{\sim} Y)$$

と定める．

演習 15　$\overset{T/I}{\sim}$ は同値関係であることを示せ．

1.4.3　セットクラス

全ての PC セットをどのような基準で分類するか，という点は興味深い問題である．これは，全 PC セットの集合 $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_N)$ の分割を考えることに他ならない．

定義 1.12：セットクラス

$\sim$ を $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_N)$ 上の同値関係とする．分割

$$\mathcal{P}(\mathbb{Z}_N)/\sim$$

を，$\sim$ による**セットクラス空間**という．
$\sim$ によるセットクラス空間の要素を，$\sim$ による**セットクラス**（set class）という．

同値関係 $\overset{T}{\sim}$《$\overset{T/I}{\sim}$》によるセットクラスを，**T-セットクラス**《**TI-セットクラス**》という．

演習 16

(1) $\mathcal{S}$ を T-セットクラスとする．$\mathcal{S}$ は，ある PC セット $X \subseteq \mathbb{Z}_N$ を用いて，

$$\mathcal{S} = \{T_n(X) \mid 0 \leq n \leq N-1\}$$

と書けることを示せ．
(2) $\mathcal{S}$ を TI-セットクラスとする．$\mathcal{S}$ は，ある PC セット $X \subseteq \mathbb{Z}_N$ を用いて，

$$\mathcal{S} = \{T_n(X) \mid 0 \leq n \leq N-1\} \cup \{I_n(X) \mid 0 \leq n \leq N-1\}$$

と書けることを示せ．

第 2 章

スケール理論

2.1 specific 音程，generic 音程

定義 2.1：specific 音程（cf. Def. 3.2，Def. 3.4）

$x, y \in \mathbb{Z}_N$ をピッチクラスとする．
（$\mathbb{Z}_N$ 上の）x から y への **specific 音程**（specific interval）$\text{sp-int}_N(x, y)$ を，以下のように定める．

$$\text{sp-int}_N(x, y) := (y - x) \bmod N$$

定義 2.2：generic 音程（cf. Def. 3.2，Def 3.5）

$X \subseteq \mathbb{Z}_N$ を k 音 PC セット，$x, y \in X$ をピッチクラスとする．また，$f\colon X \to \mathbb{Z}_k$ を順序同型写像とする．
X 上の x から y への **generic 音程**（generic interval）$\text{gen-int}_X(x, y)$ を，以下のように定める．

$$\text{gen-int}_X(x, y) := (f(y) - f(x)) \bmod k$$

この定義は，f の取り方に依存しない．

コメント　$\text{sp-int}_N(x, y)$ および $\text{gen-int}_X(x, y)$ という記法は，本書では登場しない．

specific 音程《generic 音程》を，**クロマティック音程**（chromatic interval）《**スケール内音程**（scale interval）》ともいう．

N の値が明らかなら，単に $\text{sp-int}_N(x, y)$ を $\text{sp-int}(x, y)$ と書く．

$\text{gen-int}_X(x, y)$ の最小値は 0，最大値は $\#X - 1$ である．

2.2 スケールのさまざまな性質

2.2.1 well-formedness

以降，基本的に $\bmod N$ は省略する．

定義 2.3：生成音程，生成されたスケール（cf. Def. 3.2）

$S \subseteq \mathbb{Z}_N$ を k 音スケール，$x \in \mathbb{Z}_N$ をピッチクラス，$1 \leq g \leq N - 1$ を $\mathbb{Z}_N$ 上の正の音程とする．

$$S = \left\{ T_g^i(x) \,\middle|\, 0 \leq i \leq k - 1 \right\}$$

であるとき[ab]，スケール S はピッチクラス x から**生成音程**（generating interval）g によって**生成されている**（generated）という．

[a] 写像 f に対し，f^n は f の n 回合成写像 $\overbrace{f\circ\cdots\circ f}^{n}$ を表す．f^0 は恒等写像とする．
[b] 具体的に書けば，

$$\begin{aligned} S &= \{(x+ig) \bmod N \mid 0\le i\le k-1\} \\ &= \{x,\ x+g,\ x+2g,\ \ldots,\ x+(k-1)g\} \end{aligned}$$

定義 2.4：well-formedness（cf. Def. 3.3）

$S\subseteq\mathbb{Z}_N$ を，ピッチクラス $x\in\mathbb{Z}_N$ から生成音程 $1\le g\le N-1$ によって生成された k 音スケールとする．
全ての $0\le j\le k-2$ について

$$\text{gen-int}_S(T_g^j(x), T_g^{j+1}(x))$$

が同じ値を取るとき[a]，S は g を生成音程として well-formed であるという．

[a] つまり，

$$\begin{aligned} \text{gen-int}_S(x, x+g) &= \text{gen-int}_S(x+g, x+2g) \\ &= \cdots \\ &= \text{gen-int}_S(x+(k-2)g, x+(k-1)g) \end{aligned}$$

2.2.2 maximally evenness

定義 2.5：スペクトル

$S\subseteq\mathbb{Z}_N$ を k 音 PC セット，$0\le I\le k-1$ を S 上の generic 音程とする．
S 上の generic 音程 i の**スペクトル**（spectrum）$\langle i\rangle_S$ を，以下のように定める．

$$\langle i\rangle_S \coloneqq \{\text{sp-int}(x,y) \mid x,y\in S,\ \text{gen-int}(x,y)=i\}$$

$\langle 0\rangle_S=\{0\}$ である．

定義 2.6：maximally evenness（cf. Def. 3.7）

$S\subseteq\mathbb{Z}_N$ を k 音スケールとする．
次のいずれかが，全ての S 上の正の generic 音程 $1\le i\le k-1$ について成り立つとき，S は maximally even であるという．

1: $\#\langle i\rangle_S=1$
2: $\#\langle i\rangle_S=2$ で，その要素は連続 2 整数である．

定義 2.7：J 関数（cf. Def. 3.8）

$1\le k\le N$ を整数，$0\le m\le N-1$ を整数とする．
ピッチクラスをピッチクラスに移す写像 $J_{N,k}^m\colon\mathbb{Z}_N\to\mathbb{Z}_N$ を，以下のように定める．

$$J_{N,k}^m\colon x\mapsto\left\lfloor\frac{Nx+m}{k}\right\rfloor$$

この写像を，**J 関数**（J-function）という．

誤解の恐れがなければ，

$$\left\{J_{N,k}^m(x)\;\middle|\;x\in\mathbb{Z}_k\right\}$$

を，単に $J_{N,k}^m$ と書き，これを J セット（J-set）という（cf. Def. 3.8）．

定理 2.8：J セットは ME（cf. Thm. 3.2）

$1 \leq k \leq N$ を整数，$0 \leq m \leq N-1$ を整数とする．
J セット $J_{N,k}^m$ は maximally even である．

定理 2.9：ME かつ WF ⇔ 生成（cf. Thm. 3.3）

$S \subseteq \mathbb{Z}_N$ を k 音スケールとし，さらに $N > k$，$\gcd(N,k) = 1$ であるとする．
以下は同値である．

1: S は maximally even で，かつ well-formed である．
2: S は，生成音程 g によって生成されている．
ここで，g は，$gk \equiv 1 \pmod N$ なる最小の自然数である．

命題 2.10：ME セットを移置・反転しても ME（cf. Rmk. 3.1）

$S \subseteq \mathbb{Z}_N$ をスケール，$0 \leq n \leq N-1$ を音程とする．
S が maximally even であれば，$T_n(S)$ および $I_n(S)$ も maximally even である．

PC セット $X \subseteq \mathbb{Z}_N$ に対する離散フーリエ変換は，以下のように定義される．

$$\mathcal{F}_X : t \mapsto \sum_{x \in X} e^{-\frac{2\pi i t x}{N}}$$

定理 2.11：(cf. Thm. 3.4)

$S \subseteq \mathbb{Z}_N$ を k 音 PC セットとする．
以下は同値である．

1: S は maximally even である．
2: 任意の k 音 PC セット $X \subseteq \mathbb{Z}_N$ に対して

$$|\mathcal{F}_S(k)| \geq |\mathcal{F}_X(k)|$$

が成り立つ．

2.2.3 Myhill 性

定義 2.12：Myhill 性（cf. Def. 3.9）

$S \subseteq \mathbb{Z}_N$ を k 音スケールとする．
S 上の全ての正の generic 音程 $1 \leq i \leq k-1$ に対して $\#\langle i \rangle_S = 2$ となるとき，S は Myhill 性（Myhill property）を持つという．

2.2.4 CV，SM

定義 2.13

$S \subseteq \mathbb{Z}_N$ を k 音スケールとする．また，$f\colon X \to \mathbb{Z}_k$ を順序同型写像とする．
S 上の generic 音程 $0 \leq i \leq k-1$ に対し，ピッチクラスをピッチクラスに移す写像 $T_{i \text{ on } S}\colon S \to S$ を以下のように定める．

$$T_{i \text{ on } S}\colon x \mapsto f^{-1}(T_i(f(x)))$$

$T_{i \text{ on } S}$ を，generic 音程 i による **S 上の移置**という．

スケール S に含まれる PC セット $X \subseteq S$ に対し，像 $T_{i \text{ on } S}[X]$ を $T_{i \text{ on } S}(X)$ と書く．
$X \overset{T}{\sim} Y$であるとき，X と Yは**同じ音程構造を持つ**という．

定義 2.14

k 音スケール $S \subseteq \mathbb{Z}_N$ と PC セット $X \subseteq S$ に対し，分割

$$\mathrm{genera}_S(X) := \{T_{i \text{ on } S}(X) \mid 0 \leq n \leq k-1\}/\overset{T}{\sim}$$

の要素を，X から生成される S 上の**属全体の集合**という．その要素を**属（genus）**という．

定義 2.15

$S \subseteq \mathbb{Z}_N$ をスケールとする．

$$\#S = \#\,\mathrm{genera}_S(X)$$

が任意の $X \subseteq S$ に対して成り立つとき，S は **Cardinality equals Variety** を満たすという．

定義 2.16

$x, y \in \mathbb{Z}_{12}$ をピッチクラスとする．x から y への**五度圏上の音程** 5th-int(x, y) を，

$$y = (x + 7i) \bmod 12$$

なる最小の自然数 $i \geq 0$ と定める．

定義 2.17

$S \subseteq \mathbb{Z}_{12}$ をスケールとする．
次が任意の PC セット $X \subseteq S$ について成り立つとき，S は **Structure implies Multiplicity** を満たすという：
$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ と書けるとする（$x_1 < \cdots < x_n$）．
$\mathrm{genera}_S(X)$ に含まれる相異なる属にうまく番号 $1, \ldots, n$ をふり，それらを $G_1, \ldots, G_n$ と書けば，

$$\begin{gathered}
\text{5th-int}(x_1, x_2) = \#G_1 \\
\text{5th-int}(x_2, x_3) = \#G_2 \\
\vdots \\
\text{5th-int}(x_{k-1}, x_k) = \#G_{k-1} \\
\text{5th-int}(x_k, x_1) = \#G_k
\end{gathered}$$

となるようにできる．

定理 2.18

$S \subseteq \mathbb{Z}_N$ をスケールとする．
S が maximally even であるか，または Myhill 性を満たすならば，S は CV および SM を満たす．

2.3　PC セットのなすサイクル

2.3.1　P サイクル

PC セット $X, Y \subseteq \mathbb{Z}_N$ がただ 1 つの要素を除いて同じであるとき，X と Y は **1 音違い**であるという．X と Y が 1 音違いであるというのは，相異なるピッチクラス $x, y \in \mathbb{Z}_N$ を用いて $Y = X \setminus \{x\} \cup \{y\}$ と書けることと同じである．

定義 2.19：P サイクル

PC セットの集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z}_N)$ が以下を満たすとき，$\mathcal{C}$ は **P サイクル**（P-cycle）であるという．

1: $\mathcal{C}$ は，ある TI-セットクラスの部分集合である．
2: $\#\mathcal{C} \geq 3$
3: $\mathcal{C}$ の要素にうまく $1, \ldots, n = \#\mathcal{C}$ の番号をふり，それらを $X_1, \ldots, X_n$ と書けば，

$$X_1 \xleftrightarrow{\text{1 音違い}} X_2 \xleftrightarrow{\text{1 音違い}} \cdots \xleftrightarrow{\text{1 音違い}} X_n \xleftrightarrow{\text{1 音違い}} X_1$$

が成り立つようにできる．

条件 1 で，$\subseteq$ のかわりに $=$ が成り立つとき，その P サイクルは**一方向的**（unidirectional）であるという．一方向的でない P サイクルは，**交代的**（toggling）であるという．

以下編集中…