

数学の基礎 講義ノート

鷗海

最終更新日：2025 年 1 月 5 日

Let's start at the very beginning
A very good place to start.
When you read you begin with A-B-C.
When you sing you begin with do-re-mi.
(...)
Now children, do-re-mi-fa-so and so on
are only the tools we use to build a song.
Once you have these notes in your heads,
you can sing a million different tunes by mixing them up.
Like this.
So Do La Fa Mi Do Re
(...)
But it doesn't mean anything.
So we put in words. One word for every note. Like this.
When you know the notes to sing
You can sing most anything

— *The Sound of Music*

はじめに（必ず読んでください）

ap_intro

本稿について

本稿は、論理学と集合論への入門を目的とした、主に学部1年生向けの講義ノートです。

予備知識

数学に関する予備知識は一切仮定しません。

本稿の書かれ方

- (1) 数学書は、プログラムのソースコードに似ています。プログラムのソースコードは、コードそのものとコメントとで構成されています。同様に、数学書も、数学的内容そのものと、それに対する説明とで構成されているとすることができます。

ここで、数学的内容とは、定義・定理・証明など、数学そのものを構成する内容を指します。そして数学的内容の説明とは、例えば「なぜこの定義をする必要があるのか」「この定理は何を意味しているのか」など、その数学的内容の理解を助ける、あるいは補足情報を与えるために書かれる文章を指します。

以下で示すように、本稿では、この2つをそれぞれ**項目**と**説明文**という形で区分し、一貫してこれらの徹底した分離を行います。そのため、本稿の内容は、項目のみをたどることで完全に完結するようになっています。純粋に論理的に言えば、説明文を読む必要は一切ありません。しかし、私たちは機械ではないので、長大なソースコードをコメントなしで理解することが困難であるように、説明文を本当に一切読まずに理解することは困難でしょう。

本稿の全ての数学的内容は、次のような色枠付きのボックスに収められています。

定理 0.1

ここに定理が入ります。

証明 ここに証明が入ります。



このようなボックスを、本稿では**項目**と呼びます。

全ての項目には、各々の役割に応じた色が以下のように割り当てられています。

色	役割	項目名
■ 青色	定義タイプ	規約, メタ定義, 定義
■ 赤色	公理タイプ	公理, 推論規則
■ 緑色	定理タイプ	事実, メタ定理, 定理, 補題, 命題
■ 灰色	非形式的な約束	記法, 約束

一方, 数学的内容に対する説明は, 色付きボックスには収められず, この文と同じような普通の文章として記載されます. このような文章を, 本稿では**説明文**と呼びます. 説明文はその内容に応じて, 様々な箇所に書かれます.

特に, 「**導入**」と記されている § は, 完全に説明文のみで構成されている § です. これは, その後ろに続く「**本論**」という § の全体を解説する目的で書かれています.

- (2) 本稿は, 前から順に通読できるよう書かれています. 特に, 本稿の任意の項目は, それ以前に既に記載している項目のみを既知として書かれています.
- (3) 初読では理解が困難であったり, 一読しただけでは誤解が予想されるために特に注意深く読むべき部分には,  を表示します.  は, 該当部分の開始位置の左側余白と, 終了位置の右側余白に表示されます.

目次

はじめに (必ず読んでください)	iii
目次	v
第 I 部 論理学	1
第 1 講 一階述語論理の統語論 その 1	2
§1.1 メタ言語と対象言語	2
導入	2
本論	2
§1.2 記号	4

DRAFT

第Ⅰ部
論理学

— 第 1 講 —

一階述語論理の統語論 その 1

§1.1

メタ言語と対象言語

導入

本論

規約 1.1

1. **文字 (character)** とは、何らかの図形である。
2. **文字列 (character string)** とは、有限個の文字を水平方向に一つずつ並べたものである。

規約 1.2

1. **言語 (language)** とは、いくつかの文字列の集まりである。
2. **L-文字列 (L-string)** とは、言語 L に属する文字列である。

規約 1.3

L -文字列 x が**有意味 (meaningful)** であるとは、 x に何らかの意味が与えられていることをいう。

規約 1.4

規約 1.3 より、有意味な L -文字列 x は、次の二つの部分から成り立っていることが分かる。

- (1) 文字列そのもの。
- (2) 文字列そのものに与えられている意味。

前者を x の**統語論的部分 (syntactic part)**，後者を x の**意味論的部分 (semantic part)** と呼ぶ。

dfn_meanf

規約 1.5

L を言語とする。日本語が L の **メタ言語 (metalanguage)** である、または L が日本語の **対象言語 (object language)** であるとは、次のような言語間の対応関係が与えられていることをいう。

- (1) 任意の L -文字列に対して、その **名前 (name)** と呼ばれる日本語の名詞が対応している。
- (2) 異なる L -文字列には異なる名前が対応している。

L -文字列 x の名前は、普通「 x 」と書かれる。「 x 」には、 x の統語論的部分がその意味として与えられる。

規約 1.6

日本語における普通の整数を、**メタ自然数 (meta natural number)** という。(普通の日本語では $0, 1, 2, \dots$ などと書くところだが、) メタ自然数は、**0, 1, 2, ...** のように太字のアラビア数字で書く。

約束 1.7

以降、全てのメタ自然数を代入できる変数を表記するには、太字ローマン体ラテン文字 **A, ..., Z, a, ..., z** を用いる。

記法 1.8

m, n をメタ自然数とする。次のような日本語文の省略記法を定める。^a

- (1) m が n と等しいことを、 $m = n$ と書く。
- (2) m が n 以下 (以上) であることを、 $m \leq n$ ($m \geq n$) と書く。
- (3) m が n より小さい (大きい) ことを、 $m < n$ ($m > n$) と書く。

また、

- (4) m と n の和を $m + n$ と書く。
- (5) m と n の非負差^bを $m - n$ と書く。

^a 普通の日本語では、それぞれ $m = n$, $m \leq n$, $m \geq n$, $m < n$, $m > n$, $m + n$ と書くところである (非負差は同じように $m - n$ と書くことが多い)。

^b ただし、非負差とは、 $m < n$ のときは 0 になるような差である。

規約 1.9

日本語では、変数を利用することができる。

L が日本語の対象言語であるとする。全ての L -文字列の名前を代入できる変数を、**メタ変数**

(metavariable) という.

約束 1.10

以降, メタ変数を表記するには, 太字イタリック体ラテン文字 A, \dots, Z, a, \dots, z , およびそれにメタ自然数の添え字を加えたもの $A_0, \dots, z_0, A_1, \dots, z_1, A_2, \dots$ を用いる.

規約 1.11

x, y を L -文字列とする. x の名前と y の名前の連結 (concatenation) 「 x 」 \frown 「 y 」とは, 「 xy 」である.

規約 1.12

L を日本語の対象言語とし, x, y, \dots, w は, それぞれ L -文字列の名前またはメタ変数であるとする. x, y, \dots, w の疑似引用 (quasi quotation) 「 $xy \dots w$ 」とは, $x \frown y \frown \dots \frown w$ である.

規約 1.13

日本語が何らかの言語 L のメタ言語であるとする.

1. 日本語で書かれた, 何かを定義するための文をメタ定義 (metadefinition) という.
2. 日本語で書かれた, 何らかの事実を表明するための文をメタ定理 (metatheorem) という.
3. 日本語で書かれた, メタ定理が事実であることを示すための論証をメタ証明 (metaproof) という.

§1.2

記号

記法 1.14

図形 x を n 個並べたものを $\overbrace{x \dots x}^{n \text{ 個}}$ と書く.

メタ定義 1.15

変数 (variable) を以下の条件によって定める.

- (1) 1 以上の任意のメタ自然数 n に対して, 「 $v \overbrace{[\dots]}^{n \text{ 個}}$ 」は変数である.
- (2) 以上で変数と分かるもののみが変数である.

記法 1.16

$v \overbrace{[\dots]}^{n\text{個}}$ を v_n と書く.

メタ定義 1.17

論理記号 (logical symbol) を以下の条件によって定める. ただし, v はメタ変数である.

- (1) 「 \neg 」は論理記号である.
- (2) 「 \rightarrow 」は論理記号である.
- (3) 「 \forall 」は論理記号である.
- (4) v が変数であれば, v は論理記号である.
- (5) 以上で論理記号であると分かるもののみが論理記号である.

メタ定義 1.18

述語記号 (predicate symbol), **関数記号 (function symbol)**, **定数記号 (constant symbol)** を以下のように定める.