速習コース

大学で数学を学ぶ前に

要約版

鴎海

最終更新日：2025 年 5 月 8 日

2025-05-08: まだ第 1 講だけです．随時更新します．

目次

第 1 講
論理式と証明

§1.1 記号，項，論理式

数学とは，**数学的主張**を**証明**する学問である．

ここではまず，数学的主張の書き方についての正確な規定を与える．それは言い換えれば，数学的主張という文を述べるために用いられる数学言語を定めることに等しい．

英語の文法を説明するためには，そのための言語（私たちの場合は，日本語）が必要になる．同じように，数学言語**について**説明するためには，そのための言語がさらに必要になる．そのとき用いる言語を**メタ言語**（metalanguage）という．ここでは，メタ言語は日本語である．逆に，メタ言語の言及対象となる言語を対象言語という．この場合，対象言語は数学言語である．数学の基礎的な部分を正確に理解するには，自分や相手が今メタ言語（日本語）と対象言語（数学言語）のどちらで話しているのかを，注意深く区別せねばならない．

数学では，数学的主張が何を述べているのかについて曖昧さが残ってはならない．そこで，そうした主張を表現するのに都合のよい記号言語を数学言語として設定しておき，その記号言語を用いて主張を記号化することで，その主張を曖昧さなく明確に表現することができる．こうした記号化の作業を**形式化**（formalization）という．数学的主張を形式化したものが，**論理式**（formula）と呼ばれるものである．

現代の数学が標準的に採用している「記号言語」は，**一階述語論理**（first-order logic）である．一階述語論理は，「…ならば…」「…ではない」「…かつ…」といった**論理結合子**（logical connective）を含む文や，「全ての x に対し，…x…が成り立つ」「…x…を満たす x が，少なくとも一つ存在する」といった**量化**（quantification）を含む数学的主張を表現でき，さらに，それに基づく妥当な推論も実現できる．一階述語論理は既にいくつかの公理[*1]を持っているが，そこにさらに適当な公理を追

[*1] 証明なしに認められる数学的主張．後ほど扱う．

加することで，一つの数学理論が誕生する．そのようにして得られる理論を**一階の理論**（first-order theory）という．

さて，日本語の文がひらがな・カタカナ・漢字・約物を適切に組み合わせることで構成されているように，論理式も，あらかじめ定められた**記号**（symbol）を適切に組み合わせることで構成される．まずは，そのための**記号**，そしてその**組み合わせ方**を指定してやる必要がある．

まず，一階述語論理の記号は，以下のように与えられる．

定義 1.1（一階述語論理の記号）

(1) 無限個の**変数**（variable）：v'，v''，v'''，...
(2) 0 個以上の**定数記号**（constant symbol）：c'，c''，...，$\mathrm{c}'^{\cdots\prime}$
(3) 0 個以上の**関数記号**（function symbol）：f'，f''，...，$\mathrm{f}'^{\cdots\prime}$
各関数記号 $\boldsymbol{f}$ には，$\boldsymbol{f}$ の**項数**（arity）と呼ばれる 1 以上の自然数が定まっている．
(4) 1 個以上の**述語記号**（predicate symbol）：P'，P''，...，$\mathrm{P}'^{\cdots\prime}$
各述語記号 $\boldsymbol{P}$ には，$\boldsymbol{P}$ の**項数**（arity）と呼ばれる 1 以上の自然数が定まっている．
(5) **論理記号**（logical symbol）：$\neg$，$\to$，$\forall$
(6) **補助記号**（auxiliary symbol）：(,), ,
（分かりにくいが，開き括弧「(」，閉じ括弧「)」，カンマ「,」の 3 つである．）

それぞれの記号がどのような意味を意図しているかは，定義 1.7・定義 1.8 以降にまとめて書いてある．

既に上の定義中でも使用したが，以降，変数一般を表すのに文字 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を，定数記号一般を表すのに文字 $\boldsymbol{c}$ を，関数記号一般を表すのに文字 $\boldsymbol{f}$ を，述語記号一般を表すのに文字 $\boldsymbol{P}$ を用いる．「$\boldsymbol{v}_1$」のように，添え字をつけることもある．このような，対象言語の記号や記号列一般を表すのに用いられる文字を**メタ変数**（metavariable）という．メタ変数は，メタ言語に属する語であり，記号**について**の一般的な規則（例えば，項や論理式の定義）を述べるために用いられる文字である．

例題 1

$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を任意の変数とする．$\forall \boldsymbol{v} \mathrm{P}'(\mathrm{v}'', \boldsymbol{v})$ という形の記号列を，**凄い記号列**と呼ぶことにする．凄い記号列であるものを選べ．

1. $\forall \mathrm{v}'' \mathrm{P}'(\mathrm{v}'', \mathrm{v}')$
2. $\forall \mathrm{v}''' \mathrm{P}'(\mathrm{v}'', \mathrm{v}''')$
3. $\forall \mathrm{v}' \mathrm{P}'(\mathrm{v}'''', \mathrm{v}')$
4. $\forall \mathrm{v}'' \mathrm{P}'(\mathrm{v}'', \mathrm{v}'')$

また，以下は常に凄い記号列となるか．

1. $\forall \boldsymbol{v} \boldsymbol{P}(\mathrm{v}'', \boldsymbol{v})$

2. $\forall \boldsymbol{w} \mathrm{P}'(\mathrm{v}'', \boldsymbol{w})$
3. $\forall \mathrm{v}' \mathrm{P}'(\mathrm{v}'', \boldsymbol{v})$
4. $\forall \boldsymbol{w} \mathrm{P}'(\mathrm{v}'', \boldsymbol{v})$

$\neg$ は**否定**（negation），$\to$ は**含意**（implication），$\forall$ は**全称量化子**（universal quantifier）と呼ばれる．

変数は，実際には $x, y, z, A, X, \alpha, \Gamma, \mathfrak{A}$... など，ラテン文字やギリシャ文字 1 文字で書かれることが多い．同様に，定数記号・関数記号・述語記号も，実際には c' や f'''' や P'' などといった無機質な書き方はせず，0 や + や $\in$ などといった独特の文字で書き換えるのが普通である．

関数記号 $\boldsymbol{f}$ の項数が n であるとき，$\boldsymbol{f}$ は n **変数関数記号**であるという．同様に，述語記号 $\boldsymbol{P}$ の項数が n であるとき，$\boldsymbol{P}$ は n **変数述語記号**であるという．

定数記号・関数記号・述語記号をまとめて**非論理記号**（nonlogical symbol）という．

定義 1.1 に示されているように，変数・論理記号・補助記号は常に固定されているが，非論理記号と項数は自由に設定できることに注意しよう．非論理記号・項数は，いわば，数学というゲームを始める際にユーザーが指定できる初期設定（の一つ）である．異なる初期設定の下には，基本的には異なるゲーム（数学理論）が誕生する（そもそも書きうる論理式が異なるため）．そして一度設定して数学を始めてしまうと，もう変更できない[*2]．最も よく使われる初期設定が以下である．

例 1.2（ZF(C) の記号）　この講義では，ZF（**ツェルメロ=フレンケル集合論**），ならびにそれに**選択公理**と呼ばれる公理を加えた，ZFC と呼ばれる一階の理論を扱う．ZF(C) は，**集合**（set）と呼ばれる対象のみを扱う．
ZF(C) は，現在最も標準的に採用されている数学の体系であり，今存在するほとんど全ての数学は，その中で展開される．数学の議論を行う際，特に断りがなければ，ZF(C) で行われているものとみなされる．
ZF(C) の記号は，全部で以下の通り．

変数　v', v'', v''', ...
定数記号　なし
関数記号　なし
述語記号　$=$, $\in$
　　$=$ も $\in$ も 2 変数述語記号．
論理記号　$\neg$, $\to$, $\forall$
補助記号　(,), ,

その他，よく知られた一階の理論で用いられる記号の例を挙げる．

[*2] ただし，後の講義で述べるように，ある一定条件下では，**（形式的）定義**と呼ばれる方法に従うことで非論理記号を追加拡張できる．

例 1.3　Peano **算術**と呼ばれる一階の理論は，**自然数**と呼ばれる対象のみを扱うための理論であり，次の記号を用いる．

変数 v', v'', v''', ...

定数記号 0

関数記号 $\mathrm{suc}, +, \cdot$

　　suc は 1 変数関数記号．$+$ と $\cdot$ は 2 変数関数記号．

述語記号 $=$

　　$=$ は 2 変数述語記号．

論理記号 $\neg$, $\to$, $\forall$

補助記号 (,), ,

例 1.4　**群論**と呼ばれる一階の理論は，**群**と呼ばれる対象のみを扱う理論であり，次の記号を用いる．

変数 v', v'', v''', ...

定数記号 1

関数記号 $\cdot$

　　$\cdot$ は 2 変数関数記号．

述語記号 $=$

　　$=$ は 2 変数述語記号．

論理記号 $\neg$, $\to$, $\forall$

補助記号 (,), ,

例 1.5　**順序理論**と呼ばれる一階の理論は，**順序集合**と呼ばれる対象のみを扱う理論であり，次の記号を用いる．

変数 v', v'', v''', ...

定数記号 なし．

関数記号 なし．

述語記号 $=$, $\leq$

　　$=$ も $\leq$ も 2 変数述語記号．

論理記号 $\neg$, $\to$, $\forall$

補助記号 (,), ,

例 1.6　**環論**と呼ばれる一階の理論は，**環**と呼ばれる対象のみを扱う理論であり，次の記号を用いる．

変数 v′, v″, v‴, ...

定数記号 0, 1

関数記号 $+$, $\cdot$ $+$ も $\cdot$ も 2 変数関数記号.

述語記号 $=$

$=$ は 2 変数述語記号.

論理記号 $\neg$, $\rightarrow$, $\forall$

補助記号 (,), ,

では，数学的主張を表現する際に，どのように記号を組み合わせればよいかを見ていこう．

一階述語論理で重要なのが，**項**と**論理式**である．直感的には，数学的対象を形式化したものが項であり，数学的主張を形式化したものが論理式であると思ってよい．

定義 1.7（項） **項**（term）は，以下の規則に従って与えられる．

(1) 変数は項である．
(2) 定数記号は項である．
(3) $\boldsymbol{f}$ が n 変数関数記号，$\boldsymbol{t}_1, ..., \boldsymbol{t}_n$ が項ならば，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_1,\ ...,\ \boldsymbol{t}_n)$ は項である．
(4) 以上で項であると分かるものだけが項である．

定義 1.8（論理式） **論理式**（formula）は，以下の規則に従って与えられる．

(1) $\boldsymbol{P}$ が n 変数述語記号，$\boldsymbol{t}_1, ..., \boldsymbol{t}_n$ が項ならば，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_1,\ ...,\ \boldsymbol{t}_n)$ は論理式である．
(2) $\boldsymbol{\varphi}$ が論理式であれば，$\neg\boldsymbol{\varphi}$ は論理式である．
(3) $\boldsymbol{\varphi}$ と $\boldsymbol{\psi}$ が論理式であれば，$(\boldsymbol{\varphi} \rightarrow \boldsymbol{\psi})$ は論理式である．
(4) $\boldsymbol{v}$ が変数，$\boldsymbol{\varphi}$ が論理式であれば，$\forall\boldsymbol{v}\boldsymbol{\varphi}$ は論理式である．
(5) 以上で論理式であると分かるものだけが論理式である．

以降，項一般を表すメタ変数として $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ を用い，論理式一般を表すメタ変数として $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\theta}$ を用いる．

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_1,\ ...,\ \boldsymbol{t}_n)$ の形の論理式は**原子論理式**（atomic formula）と呼ばれる．
項は，次のようにイメージするとよい．

項	イメージ	実際の数学での登場例
変数	不特定の対象を指し示している．	「x」「α」「$\mathfrak{A}$」
定数記号	特定の対象に直接与えられた名前．	「2」「$\mathbb{N}$」「$\varnothing$」
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_1,\ ...,\ \boldsymbol{t}_n)$	対象 $\boldsymbol{t}_1, ..., \boldsymbol{t}_n$ に依存して定まる特定の対象を間接的に指し示している．	「$x+2$」「$\{x, y\}$」「$\sin\theta$」

原子論理式については，以下のとおりである．

論理式	イメージ	実際の数学での登場例
$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{t}_n)$	対象 $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$ は，$\boldsymbol{P}$ という関係にある．	「2 は偶数である」
		「m は n の倍数である」
		「$f\colon X \to Y$」

また，論理結合子によって結合した論理式が何を意図しているのかは，以下の通りである．「実際の数学での読まれ方」で示しているように，実際に数学を行う際は，論理式は様々にパラフレーズされる[*3]．

論理式	意図している意味	実際の数学での読まれ方
$\neg\varphi$	φ は成り立たない．	「φ ではない．」
		「φ ということはない．」
		「φ は偽である．」
$\varphi \to \psi$	φ ならば，ψ が成り立つ．	「φ とすると，ψ となる．」
		「φ なら，ψ である．」
		「もし φ であれば，ψ である．」
		「φ であるとする．すると，ψ である．」
$\forall \boldsymbol{v}\varphi$	任意の $\boldsymbol{v}$ に対して，φ が成り立つ．	「任意の $\boldsymbol{v}$ に対して，φ である．」
		「いかなる $\boldsymbol{v}$ についても，φ である．」
		「どのような $\boldsymbol{v}$ を選んでも，φ となる．」

項と論理式の例を挙げる．以降は，変数を v'' といった形で書くことはせず，断りなくラテン文字やギリシャ文字などで表記する．

例 1.9　以下は Peano 算術（→ 例 1.3）の項である．

1. x　　定義 1.7(1) より
2. 0　　定義 1.7(2) より
3. $\mathrm{suc}(0)$　　2, 定義 1.7(3) より
4. $+(x, \mathrm{suc}(0))$　　1, 3, 定義 1.7(3) より

ところで，$+(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2)$ という表記は見づらいので，普通は $(\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{t}_2)$ と書く．もちろん，定義 1.7 に厳密に則るならこの書き方は不正なのだが，実際には $+(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2)$ と書いているものと思ってほしい．
前者のような書き方を**前置記法**（prefix notation），後者のような書き方を**中置記法**（infix notation）という．

5. $(x + \mathrm{suc}(0))$　　4 を中置記法に

[*3] しかし，こうした自由なパラフレーズは，そのもととなる正式な形を知っていてこそ安全に行えるものである，と筆者は信じている．

上の例は，ちょうど $(x + \mathrm{suc}(0))$ が Peano 算術の項であることの証明になっている[*4]．

以降，中置記法を使うときにはいちいち断らない．

例題 2

次が環論（→ 例 1.6）の項であることを証明せよ．

1. 0
2. $(a + 1)$
3. $((1 \cdot 0) \cdot x)$
4. $((1 + y) + (y \cdot 0))$

例題 3

次が群論（→ 例 1.6）の項であることを証明せよ．

1. x
2. $(1 \cdot y)$
3. $(x \cdot (y \cdot z))$
4. $((x \cdot y) \cdot (1 \cdot z))$

例題 4

ZF(C) の項は変数だけである．なぜか？

例 1.10　以下は Peano 算術の論理式である．

1. $=((x + y), x)$　　定義 1.8(1) より

2 変数述語記号の場合も，やはり中置記法を行う．

2. $((x + y) = x)$　　1 を中置記法に
3. $\neg((x + y) = x)$　　2, 定義 1.8(2) より
4. $(\mathrm{suc}(0) = y)$　　定義 1.8(1) より
5. $((\mathrm{suc}(0) = y) \to \neg((x + y) = x))$　　3, 4, 定義 1.8(3) より
6. $\forall x((\mathrm{suc}(0) = y) \to \neg((x + y) = x))$　　5, 定義 1.8(4) より

上の例は，ちょうど $((\mathrm{suc}(0) = y) \to \neg((x + y) = x))$ が Peano 算術の論理式であることの証明になっている．

[*4] この「証明」は，メタ言語における証明であり，対象言語である数学内部における証明とは異なる（そもそも，まだ数学における証明が何かすら話していないので，行いようがない）．この 2 つの区別をしたいときは，前者をメタ証明（metaproof）という．

例題 5

次が ZF(C) の論理式であることを証明せよ.

1. $(u \in y)$
2. $\forall u(\neg(u \in y))$
3. $((x = y) \to \forall u((u \in x) \to (u \in y)))$
4. $\neg\forall A\neg(\forall u((u \in A) \to \neg(u = u)))$

例題 6

次が Peano 算術の論理式であることを証明せよ.

1. $(n = \mathrm{suc}(0))$
2. $\forall n((n \cdot 2) = (n + n))$
3. $((m \cdot \mathrm{suc}(n)) = ((m \cdot n) + m))$
4. $((x = y) \to ((y = z) \to (x = z)))$
5. $((n = 0) \to \forall m((m + n) = m))$

さて，ありとあらゆる数学的主張を本当に $\neg$ と $\to$ と $\forall$ だけで表現できるのか，と思うかもしれない．例えば,「$\boldsymbol{\varphi}$ であり，かつ $\boldsymbol{\psi}$ である」「$\boldsymbol{\varphi}$ であるような $\boldsymbol{v}$ が存在する」といった主張はどのように表すのか．しかし，これらは実は既に導入した論理記号だけで定義できる.

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\varphi} \land \boldsymbol{\psi}) &\equiv \neg(\boldsymbol{\varphi} \to \neg\boldsymbol{\psi}) \\
(\boldsymbol{\varphi} \lor \boldsymbol{\psi}) &\equiv (\neg\boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\psi}) \\
(\boldsymbol{\varphi} \leftrightarrow \boldsymbol{\psi}) &\equiv ((\boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\psi}) \land (\boldsymbol{\psi} \to \boldsymbol{\varphi})) \\
\exists \boldsymbol{v}\boldsymbol{\varphi} &\equiv \neg\forall \boldsymbol{v}\neg\boldsymbol{\varphi}
\end{aligned}$$

ここで，$\equiv$ は，右辺を左辺のように省略することを表す[*5].

それぞれ,

- 「$\boldsymbol{\varphi}$ と $\boldsymbol{\psi}$ の両方が成り立つ」(**「φ かつ ψ」**)
- 「$\boldsymbol{\varphi}$ と $\boldsymbol{\psi}$ のうち少なくとも一方が成り立つ」(**「φ または ψ」**)
- 「$\boldsymbol{\varphi}$ と $\boldsymbol{\psi}$ は同値である」
- 「$\boldsymbol{\varphi}$ であるような $\boldsymbol{v}$ が存在する」

と読まれることを意図している.

[*5] $\equiv$ は対象言語の記号ではないことに注意.

例題 7

$\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ を任意の論理式，$\boldsymbol{v}$ を任意の変数とする．上の定義に照らして，次が論理式であることを証明せよ．

1. $(\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{\psi})$
2. $(\boldsymbol{\varphi} \vee \boldsymbol{\psi})$
3. $(\boldsymbol{\varphi} \leftrightarrow \boldsymbol{\psi})$
4. $\exists \boldsymbol{v} \boldsymbol{\varphi}$