数学の基礎 講義ノート

鴎海

最終更新日：2025 年 2 月 28 日

Let's start at the very beginning
A very good place to start.
When you read you begin with A-B-C.
When you sing you begin with do-re-mi.
(...)
Now children, do-re-mi-fa-so and so on
are only the tools we use to build a song.
Once you have these notes in your heads,
you can sing a million different tunes by mixing them up.
Like this.
So Do La Fa Mi Do Re
(...)
But it doesn't mean anything.
So we put in words. One word for every note. Like this.
When you know the notes to sing
You can sing most anything

— *The Sound of Music*

はじめに（必ず読んでください）

chap_intro

本稿について

本稿は，論理学と集合論への入門を目的とした，主に学部 1 年生向けの講義ノートです．

予備知識

数学に関する予備知識は一切仮定しません．

本稿の書かれ方

(1) 数学書は，プログラムのソースコードに似ています．プログラムのソースコードは，コードそのものとコメントとで構成されています．同様に，数学書も，**数学的内容そのもの**と，**それに対する説明**とで構成されていると思うことができます．

ここで，数学的内容とは，定義・定理・証明など，数学そのものを構成する内容を指します．そして数学的内容の説明とは，例えば「なぜこの定義をする必要があるのか」「この定理は何を意味しているのか」など，その数学的内容の理解を助ける，あるいは補足情報を与えるために書かれる文章を指します．

以下で示すように，本稿では，この 2 つをそれぞれ項目と説明文という形で区分し，一貫してそれらの徹底した分離を行います．そのため，本稿の内容は，項目のみをたどることで完全に完結するようになっています．純粋に論理的に言えば，**説明文を読む必要は一切ありません**．しかし，私たちは機械ではないので，長大なソースコードをコメントなしで理解することが困難であるように，説明文を本当に一切読まずに理解することは困難でしょう．

本稿の全ての数学的内容は，次のような色枠付きのボックスに収められています．

定理 0.1

ここに定理が入ります．

証明　ここに証明が入ります．

このようなボックスを，本稿では項目と呼びます．
全ての項目には，各々の役割に応じた色が以下のように割り当てられています．

色	役割	項目名
■ 青色	定義タイプ	規約，メタ定義，定義
■ 赤色	公理タイプ	公理，推論規則
■ 緑色	定理タイプ	事実，メタ定理，定理，補題，命題
■ 灰色	非形式的な約束	記法，約束

一方，数学的内容に対する説明は，色付きボックスには収められず，この文と同じような普通の文章として記載されます．このような文章を，本稿では**説明文**と呼びます．説明文はその内容に応じて，様々な箇所に書かれます．

特に，「**導入**」と記されている§は，完全に説明文のみで構成されている§です．これは，その後ろに続く「**本論**」という§の全体を解説する目的で書かれています．

(2) 本稿は，前から順に通読できるよう書かれています．特に，本稿の任意の項目は，それ以前に既に記載している項目のみを既知として書かれています．

(3) 初読では理解が困難であったり，一読しただけでは誤解が予想されるために特に注意深く読むべき部分には，を表示します．は，該当部分の開始位置の左側余白と，終了位置の右側余白に表示されます．

目次

第 I 部

論理学

part_logic

第 1 講
一階述語論理の統語論

fol_syntax

§1.1
メタ言語と対象言語：導入

lang_intro

私たちは今から，数学という学問を行っていきます．この講義が行うことを一言で言えば，「数学を全くの基礎から始め，いかなるギャップもなく展開すること」です．それは必然的に，まず**数学そのものを構築する**ところから始まります．

§1.2 では，数学そのものを構築するという作業を実際に行うために必要となる概念をいくつか導入します．しかし，その内容は初学者にはやや抽象的であり，恐らく全講義中で最もモチベーションを掴みにくい「難所」でもあります．そのため，§1.1 では，数学を構築するという作業を実現する上で，なぜそれらの概念が必要とされるに至るのかを解説します．力のある読者は，この § を飛ばして §1.2 から読み進めることも可能です．

数学

そもそも，数学とは何をする学問なのでしょうか？ 思えば，私たちは足し算や 2 次方程式や微積分などといった**個々の**数学を各所で学んできましたが，数学**それ自体**が何であるかを学んだことはありませんでした．とはいえ，次の事実は経験的に明らかでしょう．

UHzs0

経験的事実　数学とは，数学的主張を証明する営みである．

ここでは，数学的主張とは，例えば「対頂角は等しい」「$\sqrt{2}$ は無理数である」などといった，数学的に何かを主張している文のことだと漠然と思って構いません．

注意 1

1. 数学的主張 X が「正しい・真である」「正しくない・偽である」という言い回しは，それぞれ「X を証明できる」「『X ではない』を証明できる」を言い換えたものだと思うことができます．
2. 計算は証明といえないのでは？ と思った方へ：例えば，「$2+3\times 2$ を計算せよ」という問題は，数学的主張「$2+3\times 2=8$」を証明する証明問題に他なりません．

論理式

では，数学的主張とは何でしょうか．それを見出すために，次の事実に注目しましょう．それは，自然言語[*1]で書かれている数学的主張は，実は完全に記号的な文字列として書くことができる，ということです．

例えば，「n が奇数であれば，n^2 は偶数ではない」という数学的主張は，

$$\mathsf{Odd}(n) \to \neg\,\mathsf{Even}(\mathrm{power}(n,2))$$

という文字列として書くことができます．ここで，

- 「$\mathsf{Odd}(n)$」は「n は奇数である」を，
- 「$\mathsf{Even}(n)$」は「n は偶数である」を，
- 「$\mathrm{power}(n,m)$」は「n^m」を，
- 「××→◯◯」は「×× ならば ◯◯」を，
- 「¬××」は「×× ではない」を，

それぞれ意図しています．

こうした記号化の作業を**形式化**と呼びます．形式化を行うメリットは，自然言語にありがちな曖昧さ・不規則性を廃した明確な表記が可能となるという点です．すると，むしろこの形式化された形の方（「$\mathsf{Odd}(n) \to \neg\,\mathsf{Even}(\mathrm{power}(n,2))$」にあたる）が数学的主張の正式な書き方だと思うべきでしょう．同時に，私たちがこれまで数学的主張と呼んでいた自然言語での表記（「n が奇数であれば，n^2 は偶数ではない」にあたる）は，この記号的な文字列を人間が読みやすいように書き直したものだと思うことができます．

さて，こうした記号たちも無秩序に並べてよいわけではありません．例えば，言うまでもなく

$$,\mathrm{power}\,2()\,\mathsf{Odd}\,\mathsf{Even}\,n\neg n)(\to$$

は支離滅裂ですし，ここまででなくとも

$$\mathsf{Odd}(\mathsf{Odd}(n))$$
$$\mathsf{Odd}(\mathrm{power}(\mathsf{Even}(n),m))$$
$$m \to n$$
$$\mathsf{Odd}(n) \to$$
$$\mathsf{Odd}(n,m)$$
$$\mathrm{power}(n)$$

なども不適切な構文です[*2]．また，

$$\mathrm{power}(n,m)$$
$$2$$
$$n$$

などは，単独では数学的主張をなしません．

しかし，各文字列がこのように「適切／不適切である」と判断されるのはなぜなのでしょうか？ それは「ある文字列が『適切』か否かを判断する基準」を，私たちが既に持っているからでしょう．言い換えれば，それは数学的主張を書くための「文法」に他なりません[*3]．ならば，実際にその「文法」を明示してしまえば，それで数学的主張と

[*1] 日本語や英語など．また通常は，自然言語だけでなく相当数の数学記号も用いられます．

[*2] 実際に読もうとすると，そのおかしさが分かると思います．例えば 1 つ目と 2 つ目をあえて読もうとするなら，「n は奇数であるは奇数である」「n は偶数であるの m 乗は奇数である」となるでしょう．

[*3] ここで，「文法」とは，文字列が満たさねばならない規則の集まりのことだと思って差し支えありません．「文法」の役割は，ある文字列が「適切」か否かということを，「文法」に則っているか否かという指標へと転換することにあります．この「文法」は，後ほど**形式言語**として明確に規定されます．

は何かを規定したことになるはずです．こうした既定の「文法」に則った文字列を論理式と呼びますが，**数学的主張とは，この論理式に他ならない**というわけです．例えば，先ほどの

$$\mathsf{Odd}(n) \to \neg\,\mathsf{Even}(\mathrm{power}(n,2))$$

が数学的主張であるのは，それがある与えられた「文法」に則った文字列（i.e. 論理式）だからであって，その文字列に「n が奇数であれば云々」といった意味が備わっているからではない，ということになります．

注意 2　ここで，統語論と意味論の区別という非常に重要な事項について述べておきます．

先ほどの

$$\mathsf{Odd}(n) \to \neg\,\mathsf{Even}(\mathrm{power}(n,2))$$

について，「この文字列は『n が奇数であれば，n^2 は偶数ではない』という意味を持っている」と言いたくなるかもしれません．しかし，文字列が意味を持っているとは何でしょうか．いや，よく考えると，文字列**そのもの**[a]には何ら特定の意味はないのです．これはむしろ，次のように考えざるを得ないでしょう．つまり，私たちが文字列に意味があると言うとき，実際には「文字列そのものに意味を**付与**している」のです．

例えば，日本語を知らない英語話者が「雪は白い」という文を見たとき，その人が分かるのは自分が 4 文字からなる文字列を眺めているということだけで，その文字列が「Snow is white.」という意味を持っていることまでは分かりません．

[a] よりあからさまに言えば，紙の上に書かれたインクの染みの羅列．

RRnp2 **観察**　数学的主張とは，論理式である．

これを先ほどのと合わせると，次のことが言えます．

kmYcu **観察**　数学とは，論理式を証明する営みである．

さて，これを見ると，数学は

(1) 論理式
(2) 証明

というわずか 2 つの機構から成り立っていることが分かります．しかし，論理式や証明とは正確には何なのでしょうか．言い換えれば，あるものが論理式や証明であることを，どの様な基準でもって明確に判断すればよいのでしょうか．その判断基準を与えるものが，論理式の場合は形式言語，証明の場合は推論体系と呼ばれるものです．

形式言語

まず，形式言語について見ていきましょう．論理式とは既定の「文法」に則った文字列のことでした．この「文法」に相当するのが形式言語です．

形式言語は，記号と形成規則からなります．

(1) まず，そもそも論理式を書くにはそのための文字が必要ですから，その文字たちをあらかじめ宣言しておきます．ここで宣言された文字たちを記号と呼びます．あらゆる論理式は，この記号たちを適切に羅列してできる記号列として生成されることになります．
(2) 記号が確定すれば，あとはどのような記号列を論理式とするかを定めればよいので，それをいくつかの規則として宣言します．ここで宣言された諸規則を形成規則と呼びます．

例えば，以下のようにすれば，「AB」の後ろに 0 個以上の「C」が続く文字列（AB，ABC，ABCCCC など）のみを論理式として認める形式言語を定めることができます．

記号 「A」「B」を記号とする．
形成規則 (1)「AB」は論理式である．
(2) $\boldsymbol{X}$ が論理式であれば，$\boldsymbol{X}$ の右に「C」を加えたものも論理式である．
(3) 以上で論理式であると分かるものだけが論理式である．

推論体系

いろは

§1.2 メタ言語と対象言語：本論

objlang_main

規約 1.1（文字，文字列）

dfn_char
dfn_char_str

1. **文字（character）**とは，何らかの図形である．
2. **文字列（character string）**とは，一つまたはそれ以上の文字を水平方向に一つずつ並べたものである．
   以降，任意の文字列を $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \mathcal{W}$ などで表す．

規約 1.2（言語，L-文字列）

dfn_lang
dfn_L_str

1. **言語（language）**とは，一つまたはそれ以上の文字列を集めたものである．
   以降，任意の言語を L, M などで表す．
2. L を任意の言語とする．**L-文字列（L-string）**とは，L に属する文字列である．

dfn_meaning

規約 1.3（意味）

L を任意の言語，$\mathcal{X}$ を任意の L-文字列とする．
$\mathcal{X}$ には，L における**意味（meaning）**を任意に与えることができる[a]．
このとき $\mathcal{X}$ に与えられた意味を，**L における $\mathcal{X}$ の意味**という．

[a] ここでは，意味とは何であるかについて厳格に述べることは避ける．

dfn_itself

規約 1.4（…そのもの）

$\mathcal{X}$ を任意の文字列とする．
$\mathcal{X}$ を[a]，**$\mathcal{X}$ そのもの（$\mathcal{X}$ itself）**ということがある．

[a] よりあからさまに言えば，$\mathcal{X}$ の意味（もし意味が与えられているとして）を度外視した，単なる文字列としての $\mathcal{X}$．

dfn_name

規約 1.5（名前，メタ言語，対象言語）

L を任意の言語とする．
日本語が L の**メタ言語（metalanguage）**である，または L が日本語の**対象言語（object language）**であるとは，日本語と L との間に，以下の (1)–(3) をすべて満たすような対応関係が与えられていることをいう．

eCTIf (1) 全ての L-文字列に対し，日本語の名詞が一つずつ対応している．
(2) 異なる L-文字列には異なる名詞が対応している．

ここで，$\mathcal{X}$ を任意の L-文字列とすると，$\mathcal{X}$ に対応する名詞はただ一つであることが分かる．$\mathcal{X}$ に対応する名詞を $\mathcal{X}$ の L-名前（name）といい，

$$「\mathcal{X}」_L$$

と書く．混同の恐れがないときは，L を省略して，単に

$$「\mathcal{X}」$$

と書き，$\mathcal{X}$ の名前と呼ぶことがある．

7vueJ (3) $\mathcal{X}$ を任意の L-文字列とする．日本語における「$\mathcal{X}$」の意味は，$\mathcal{X}$ そのものである．

dfn_metavar

規約 1.6（メタ変数）

日本語では，

任意の X に対して，……である．
……な y が存在する．

などと書くことがある．このとき現れる，X や y などの文字をメタ変数（metavariable）という．

dfn_rng_over

規約 1.7（…の上を動く）

任意の X に対して，X が ◯◯ であれば……である．
……であってかつ X が ◯◯ であるような y が存在する．

あるいは，よりくだけて書けば

任意の ◯◯X に対して，……である．
……であるような ◯◯X が存在する．

といった日本語文では，メタ変数 X の範囲は ◯◯ であるもののみに制限されることになる．このような状態を，X は任意の ◯◯ の上を動く（range over）という．X 以外のメタ変数についても同様である．

dfn_metanat

規約 1.8（メタ自然数）

日本語の基数詞（ぜろ，いち，に，さん……）を，メタ自然数（meta natural number）という．ここでは，メタ自然数を

$$\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{10}, \mathbf{11}, \ldots$$

のように，太字アラビア数字で書く．

約束 1.9（メタ自然数の表記）

以降，任意のメタ自然数の上を動くメタ変数は，太字ローマン体ラテン文字

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{Z}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{z}$$

およびそれらにメタ自然数の添え字を加えたもの

$$\mathbf{A_0}, \ldots, \mathbf{z_0}, \mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{z_1}, \mathbf{A_2}, \ldots$$

で表記する．従って，規約 1.7 に挙げた文は

任意のメタ自然数 $\mathbf{n}$ に対して，……である．
……なメタ自然数 $\mathbf{n}$ が存在する．

となる．
このとき，$\mathbf{n}$ がメタ自然数である旨も省略して，単に，

任意の $\mathbf{n}$ に対して，……である．
……な $\mathbf{n}$ が存在する．

と書くことも多い．

記法 1.10（メタ自然数間の演算と大小関係）

$\mathbf{m}, \mathbf{n}$ を任意のメタ自然数とする．

(1) $\mathbf{m}$ が $\mathbf{n}$ と等しいことを，$\mathbf{m} \doteq \mathbf{n}$ と書く．
(2) $\mathbf{m}$ が $\mathbf{n}$ 以下（以上）であることを，$\mathbf{m} \,\dot{\leq}\, \mathbf{n}$（$\mathbf{m} \,\dot{\geq}\, \mathbf{n}$）と書く．
(3) $\mathbf{m}$ が $\mathbf{n}$ より小さい（大きい）ことを，$\mathbf{m} \,\dot{<}\, \mathbf{n}$（$\mathbf{m} \,\dot{>}\, \mathbf{n}$）と書く．

また，

(4) $\mathbf{m}$ と $\mathbf{n}$ の和を $\mathbf{m} \dotplus \mathbf{n}$ と書く．
(5) $\mathbf{m}$ と $\mathbf{n}$ の非負差[a]を $\mathbf{m} \dot{-} \mathbf{n}$ と書く．

[a] ただし，非負差とは，$\mathbf{m} \,\dot{<}\, \mathbf{n}$ のときは $\mathbf{0}$ になるような差である．

規約 1.11（L-構文変数）

L を日本語の対象言語とする．
任意の L-文字列の名前の上を動くメタ変数を，**L-構文変数（L-syntactic variable）**という．

約束 1.12（L-構文変数の表記）

L を日本語の対象言語とする．
以降，L-構文変数は，太字イタリック体ラテン文字・太字イタリック体ギリシャ文字小文字

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \dots, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \dots, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \dots, \boldsymbol{\omega}$$

およびそれらにメタ自然数の添え字を加えたもの

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{0}}, \dots, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{A}_{\mathbf{1}}, \dots, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{A}_{\mathbf{2}}, \dots$$

で表記する．

規約 1.13（連結）

L を日本語の対象言語とし，$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ を任意の L-文字列とする．
$\mathcal{X}$ の名前と $\mathcal{Y}$ の名前の**連結（concatenation）**「$\mathcal{X}$」$\frown$「$\mathcal{Y}$」とは，「$\mathcal{X}\mathcal{Y}$」である．

規約 1.14（疑似引用）

L を日本語の対象言語とする．また，一つまたはそれ以上の文字列 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \ldots, \mathcal{W}$ を，それぞれ L-文字列または L-構文変数とする．
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \ldots, \mathcal{W}$ の**疑似引用（quasi quotation）**$\ulcorner \mathcal{X}\mathcal{Y}\ldots\mathcal{W} \urcorner$ とは，$\overline{\mathcal{X}} \frown \overline{\mathcal{Y}} \frown \ldots \frown \overline{\mathcal{W}}$ である．ここで，$\overline{\mathcal{X}}$ とは，

(1) $\mathcal{X}$ が L-文字列であれば，「$\mathcal{X}$」である．
(2) $\mathcal{X}$ が L-構文変数であれば，$\mathcal{X}$ である．

規約 1.15（メタ定義，メタ定理，メタ証明）

1. 日本語で書かれた，何かを定めるための文を**メタ定義（metadefinition）**という．
2. 日本語で書かれた，何らかの事実を表明するための文を**メタ定理（metatheorem）**という．
3. 日本語で書かれた，何らかのメタ定理が事実であることを示すための論証を**メタ証明（metaproof）**という．

§1.3 記号

メタ定義 1.16（論理定項）

以下を**論理定項（logical constant）**という．

1. 「$\neg$」**否定（negation）**
2. 「$\rightarrow$」**含意（implication）**
3. 「$\forall$」**全称量化子（universal quantifier）**

記法 1.17

文字 $'$ を $\mathbf{n}$ 個並べた文字列 $\overbrace{'\ldots'}^{\mathbf{n}個}$ を，省略して $^{\mathbf{n}}$ と書く．

例

(1) $''$ は，$^{\mathbf{2}}$ と省略して書かれる．
(2) $'''''''''''''$ は，$^{\mathbf{13}}$ と省略して書かれる．

メタ定義 1.18（変数）

$\mathbf{n} \dot{\geq} \mathbf{1}$ なる任意の $\mathbf{n}$ に対して，「$\mathtt{v}^{\mathbf{n}}$」を**変数（variable）**という．

メタ定義 1.19（述語記号，関数記号，定数記号）

$\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ をメタ自然数とする．ただし，$\mathbf{I} \dot{\geq} \mathbf{1}$ とする．

1. $\mathbf{1} \dot{\leq} \mathbf{i} \dot{\leq} \mathbf{I}$ なる任意の $\mathbf{i}$ に対して，「$\mathtt{P}^{\mathbf{i}}$」を **$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-述語記号（$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-predicate symbol）**という．
2. $\mathbf{1} \dot{\leq} \mathbf{j} \dot{\leq} \mathbf{J}$ なる任意の $\mathbf{j}$ に対して，「$\mathtt{f}^{\mathbf{j}}$」を **$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-関数記号（$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-function symbol）**という．
3. $\mathbf{1} \dot{\leq} \mathbf{k} \dot{\leq} \mathbf{K}$ なる任意の $\mathbf{k}$ に対して，「$\mathtt{c}^{\mathbf{k}}$」を **$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-定数記号（$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-constant symbol）**と

いう．

メタ定義 1.20（アリティ）

$\boldsymbol{s}$ を，任意の $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-述語記号または $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-関数記号とする．
$\boldsymbol{s}$ には，$\mathbf{1}$ 以上のメタ自然数 $\mathrm{ar}(\boldsymbol{s})$ がただ一つ対応している．このメタ自然数を，$\boldsymbol{s}$ の**アリティ（arity）**という．

メタ定義 1.21（論理記号，非論理記号，記号）

1. 変数と論理定項を**論理記号（logical symbol）**という．
2. $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-述語記号，$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-関数記号，$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-定数記号を**$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-非論理記号（$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-nonlogical symbol）**という．
3. 論理記号と $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-非論理記号を**$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-記号（$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$-symbol）**という．

記法 1.22

$(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathrm{ar})$ を省略して，単に $\mathcal{L}$ と書く．

規約 1.23

$\mathcal{L}$-記号を並べてできる全ての文字列を集めたものは言語である（規約 1.2.1）．以降，この言語も単に $\mathcal{L}$ と呼ぶ．

§1.4
形成規則

記法 1.24（同じである）

$\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ を任意の $\mathcal{L}$-名前とする．
$\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ が**同じである（same）**であるとは，$\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ がいずれも「$\mathcal{Z}$」であるような $\mathcal{L}$-文字列 $\mathcal{Z}$ が存在することをいい，このことを $\mathcal{X} \doteqdot \mathcal{Y}$ と書く．
$\mathcal{X} \doteqdot \mathcal{Y}$ でないことを $\mathcal{X} \not\doteqdot \mathcal{Y}$ と書く．

メタ定義 1.25（項）

$\boldsymbol{\tau}$ が **$\mathcal{L}$-項（$\mathcal{L}$-term）**であるということを，以下の条件によって定める．

(1) $\boldsymbol{v}$ が変数であれば，$\boldsymbol{v}$ は $\mathcal{L}$-項である．
(2) $\boldsymbol{c}$ が $\mathcal{L}$-定数記号であれば，$\boldsymbol{c}$ は $\mathcal{L}$-項である．
(3) $\boldsymbol{f}$ が $\mathcal{L}$-関数記号で，$\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{f})}$ が全て $\mathcal{L}$-項であれば[a]，「$\boldsymbol{f}\boldsymbol{\tau}_1 \dots \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{f})}$」[b]は $\mathcal{L}$-項である．
(4) $\boldsymbol{\tau}$ が $\mathcal{L}$-項であると言えるのは，以上の条件によってそう言えたときに限る．つまり，$\boldsymbol{\tau}$ が $\mathcal{L}$-項であれば，以下のいずれかが成り立つ．
　(4.1) $\boldsymbol{\tau}$ は変数である．
　(4.2) $\boldsymbol{\tau}$ は $\mathcal{L}$-定数記号である．
　(4.3) $\boldsymbol{\tau} \doteqdot$「$\boldsymbol{f}\boldsymbol{\tau}_1 \dots \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{f})}$」なる $\mathcal{L}$-関数記号 $\boldsymbol{f}$ と $\mathcal{L}$-項 $\boldsymbol{\tau}_1, \dots, \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{f})}$ が存在する．

[a] $\boldsymbol{\tau_1}, \dots, \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{f})}$ が全て $\mathcal{L}$-項であるとは，つまり，$\mathbf{1} \le \mathbf{i} \le \mathrm{ar}(\boldsymbol{f})$ なる任意の $\mathbf{i}$ について，$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{i}}$ は $\mathcal{L}$-項である，ということを短く述べているのである．以降も同様の書き方を行う．

[b] $\boldsymbol{f}\boldsymbol{\tau_1} \dots \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{f})}$ とは，$\boldsymbol{f}$ の後ろに構文変数 $\boldsymbol{\tau_1}$ から $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{f})}$ までを連番で並べたものである．以降も同様の書き方を行う．

メタ定理 1.26

$\boldsymbol{\tau}$ が $\mathcal{L}$-項であれば，以下のうちちょうど一つが成り立つ．

(1) $\boldsymbol{\tau}$ は変数である．
(2) $\boldsymbol{\tau}$ は $\mathcal{L}$-定数記号である．
(3) $\boldsymbol{\tau} \doteq \ulcorner \boldsymbol{f}\boldsymbol{\tau_1} \dots \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{f})} \urcorner$ なる $\mathcal{L}$-関数記号 $\boldsymbol{f}$ と $\mathcal{L}$-項 $\boldsymbol{\tau_1}, \dots, \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{f})}$ がちょうど一つずつ存在する．

メタ定義 1.27（論理式）

$\boldsymbol{\varphi}$ が $\mathcal{L}$-論理式（$\mathcal{L}$-formula）であるということを，以下の条件によって定める．

(1) $\boldsymbol{P}$ が $\mathcal{L}$-述語記号で，$\boldsymbol{\tau_1}, \dots, \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{P})}$ が全て $\mathcal{L}$-項であれば，$\ulcorner \boldsymbol{P}\boldsymbol{\tau_1} \dots \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{P})} \urcorner$ は $\mathcal{L}$-論理式である．
(2) $\boldsymbol{\varphi}$ が $\mathcal{L}$-論理式であれば，$\ulcorner \neg\boldsymbol{\varphi} \urcorner$ は $\mathcal{L}$-論理式である．
(3) $\boldsymbol{\varphi}$ が $\mathcal{L}$-論理式であれば，$\ulcorner \to \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi} \urcorner$ は $\mathcal{L}$-論理式である．
(4) $\boldsymbol{v}$ が変数で，$\boldsymbol{\varphi}$ が $\mathcal{L}$-論理式であれば，$\ulcorner \forall \boldsymbol{v}\boldsymbol{\varphi} \urcorner$ は $\mathcal{L}$-論理式である．
(5) $\boldsymbol{\varphi}$ が $\mathcal{L}$-論理式であると言えるのは，以上の条件によってそう言えたときに限る．つまり，$\boldsymbol{\varphi}$ が $\mathcal{L}$-論理式であれば，以下のいずれかが成り立つ．
  (5.1) $\boldsymbol{\varphi} \doteq \ulcorner \boldsymbol{P}\boldsymbol{\tau_1} \dots \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{P})} \urcorner$ なる $\mathcal{L}$-述語記号 $\boldsymbol{P}$ と $\mathcal{L}$-項 $\boldsymbol{\tau_1}, \dots, \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{P})}$ が存在する．
  (5.2) $\boldsymbol{\varphi} \doteq \neg\boldsymbol{\psi}$ なる $\mathcal{L}$-論理式 $\boldsymbol{\psi}$ が存在する．
  (5.3) $\boldsymbol{\varphi} \doteq \to \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\chi}$ なる $\mathcal{L}$-論理式 $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\chi}$ が存在する．
  (5.4) $\boldsymbol{\varphi} \doteq \forall \boldsymbol{v}\boldsymbol{\psi}$ なる変数 $\boldsymbol{v}$ と $\mathcal{L}$-論理式 $\boldsymbol{\psi}$ が存在する．

メタ定理 1.28

$\boldsymbol{\varphi}$ が $\mathcal{L}$-論理式であれば，以下のうちちょうど一つが成り立つ．

(1) $\boldsymbol{\varphi} \doteq \ulcorner \boldsymbol{P}\boldsymbol{\tau_1} \dots \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{P})} \urcorner$ なる $\mathcal{L}$-述語記号 $\boldsymbol{P}$ と $\mathcal{L}$-項 $\boldsymbol{\tau_1}, \dots, \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ar}(\boldsymbol{P})}$ がちょうど一つずつ存在する．
(2) $\boldsymbol{\varphi} \doteq \neg\boldsymbol{\psi}$ なる $\mathcal{L}$-論理式 $\boldsymbol{\psi}$ がちょうど一つ存在する．
(3) $\boldsymbol{\varphi} \doteq \to \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\chi}$ なる $\mathcal{L}$-論理式 $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\chi}$ がちょうど一つずつ存在する．
(4) $\boldsymbol{\varphi} \doteq \forall \boldsymbol{v}\boldsymbol{\psi}$ なる変数 $\boldsymbol{v}$ と $\mathcal{L}$-論理式 $\boldsymbol{\psi}$ がちょうど一つずつ存在する．

約束 1.29

以降，特別な場合を除き，$\mathcal{L}$-項，$\mathcal{L}$-論理式，$\mathcal{L}$-記号などの $\mathcal{L}$-は省略する．

第 2 講

一階述語論理における証明 その 1

§2.1 準備

記法 2.1

$$\boldsymbol{v}\text{ が変数で，}\boldsymbol{\varphi}\text{ が論理式であれば，……である．}$$

といった日本語文を，以降は

（$\boldsymbol{v}$：変数，$\boldsymbol{\varphi}$：論理式）
……である．

などと省略して書く．その他の日本語文についても同様の省略を行う．

メタ定義 2.2

1. （$\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$：記号，$\boldsymbol{v}$：変数，$\boldsymbol{\tau}$：項）
   $\boldsymbol{v}$ から $\boldsymbol{\tau}$ への**部分変換**によって $\boldsymbol{s}$ から $\boldsymbol{t}$ を得られるということを，$\boldsymbol{s}$ に関する以下の場合分けによって定める．
   (1) $\boldsymbol{s} \doteq \boldsymbol{v}$ のとき，$\boldsymbol{v}$ から $\boldsymbol{\tau}$ への部分変換によって $\boldsymbol{s}$ から $\boldsymbol{t}$ を得られるとは，$\boldsymbol{t} \doteq \boldsymbol{v}$ または $\boldsymbol{t} \doteq \boldsymbol{\tau}$ であることをいう．
   (2) $\boldsymbol{s} \not\doteq \boldsymbol{v}$ のとき，$\boldsymbol{v}$ から $\boldsymbol{\tau}$ への部分変換によって $\boldsymbol{s}$ から $\boldsymbol{t}$ を得られるとは，$\boldsymbol{t} \doteq \boldsymbol{v}$ であることをいう．
2. （$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\rho}$：項，$\boldsymbol{v}$：変数）
   $\boldsymbol{\sigma}$ 中の $\boldsymbol{v}$ に $\boldsymbol{\tau}$ を**部分代入（partial substitution）**することで $\boldsymbol{\rho}$ を得られるとは，以下の全てが成り立つような記号 $\boldsymbol{s}_1, \dots, \boldsymbol{s}_\mathbf{n}, \boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_\mathbf{n}$ が存在することをいう．
   (1) $\boldsymbol{\sigma} \doteq \ulcorner \boldsymbol{s}_1 \dots \boldsymbol{s}_\mathbf{n} \urcorner$
   (2) $\boldsymbol{\rho} \doteq \ulcorner \boldsymbol{t}_1 \dots \boldsymbol{t}_\mathbf{n} \urcorner$
   (3) $\mathbf{1} \lesssim \mathbf{i} \lesssim \mathbf{n}$ なる任意の $\mathbf{i}$ に対して，$\boldsymbol{v}$ から $\boldsymbol{\tau}$ への部分変換によって $\boldsymbol{s}_\mathbf{i}$ から $\boldsymbol{t}_\mathbf{i}$ を得られる．
3. （$\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$：論理式，$\boldsymbol{v}$：変数，$\boldsymbol{\tau}$：項）
   $\boldsymbol{\varphi}$ 中の $\boldsymbol{v}$ に $\boldsymbol{\tau}$ を**部分代入（partial substitution）**することで $\boldsymbol{\psi}$ を得られるとは，以下の全てが成り立つような記号 $\boldsymbol{s}_1, \dots, \boldsymbol{s}_\mathbf{n}, \boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_\mathbf{n}$ が存在することをいう．
   (1) $\boldsymbol{\varphi} \doteq \ulcorner \boldsymbol{s}_1 \dots \boldsymbol{s}_\mathbf{n} \urcorner$
   (2) $\boldsymbol{\psi} \doteq \ulcorner \boldsymbol{t}_1 \dots \boldsymbol{t}_\mathbf{n} \urcorner$
   (3) $\mathbf{1} \lesssim \mathbf{i} \lesssim \mathbf{n}$ なる任意の $\mathbf{i}$ に対して，$\boldsymbol{v}$ から $\boldsymbol{\tau}$ への部分変換によって $\boldsymbol{s}_\mathbf{i}$ から $\boldsymbol{t}_\mathbf{i}$ を得られる．

第 II 部

集合論

part_set

参考文献・索引・記号一覧