

学部数学のための
論理学

編：鷗海

(最終更新日：2024 年 8 月 4 日)

はじめに

本稿について

本稿『学部数学のための論理学』は、編者による学部生向けの数学ノートのシリーズを構成する一稿である。

シリーズを構成する全ての pdf ファイルとその \LaTeX ソースファイルの最新版は、[クリエイティブ・コモンズ表示-非営利 4.0 国際ライセンス](#)の下、[GitHub](#) の該当リポジトリで配布されている。^{*1}

本稿の pdf ファイルとその \LaTeX ソースファイルの最新版は、この文中のリンク先から入手できる。

本稿の目的と内容

本稿の目的は、学部数学レベルの論理学の知識を提供することである。具体的には、等号付き一階述語論理における証明を行えるようになることが目標となる。

前提知識

いかなる前提知識も仮定しない。

本稿の書かれ方

プログラムのソースコードが、コードそのものとコメントとで構成されているのと同様に、数学書も、数学的内容そのものと、それに対する説明とで構成されていると見ることができる。

本稿に掲載されている全ての数学的内容は、次のような色付きのボックスに収められている。

定理 0.0.1

n が奇数であれば、 n^2 も奇数である。

このようなボックスを、本稿では**項目**と呼ぶ。本稿は全面的に、項目を列挙するスタイルで書かれている。全ての項目には、各々の役割に応じた色が以下のように割り当てられている。

色	役割	項目名
■ 青色	定義タイプ	規約、メタ定義、定義
■ 赤色	公理タイプ	前提、公理、推論規則
■ 緑色	定理タイプ	事実、メタ定理、定理、補題、命題
■ 灰色	非形式的な約束	記法、約束

^{*1} 当リポジトリのコラボレーターを随時募っています。また、内容の誤り、タイポ、改善点、その他のご指摘については、[issue](#) やプルリクエスト、その他何らかの手段で編者までお伝えくださると幸いです。

一方、数学的内容に対する説明は、色付きボックスに収められない普通の文章として記載される（ただし、特に注意に値するものは、「注意」という黒色破線のボックスに収められている）。このような文章を、本稿では**説明文**と呼ぶ。説明文は、内容に応じて、項目の前後や、章およびセクションの冒頭などに書かれる。

重要なのは、これらの説明文は全て項目の理解の補助のために書かれたものであり、**本稿の内容自体は、項目のみをたどることで完全に完結するように書かれている**という点である。言い換えれば、説明文を読む必要は（あくまで論理的には）一切ない。

目次

はじめに	iii
第 1 章 形式的体系	1
1.1 メタ言語と対象言語	1
章末問題	2
索引	3

1

形式的体系

1.1

メタ言語と対象言語

規約 1.1.1

図形 (shape) とは、紙などの媒体上に描画される、視覚的に認識可能な形状をいう。以下、任意の図形を、大文字または小文字ラテン文字の筆記体 (A, \dots, Z, a, \dots, z) で表す。

規約 1.1.2

- 図形 X と図形 Y が同じである (same) とは、 X と Y が同じ形状であることをいい、 $X \equiv Y$ と書かれる。
- 図形 X と図形 Y が異なる (different) とは、 X と Y が同じでないことをいい、 $X \neq Y$ と書かれる。

規約 1.1.3

言語 (language) L は、以下によって特徴づけられる。

- 言語 L に応じて図形がいくつか選ばれ、それらは L のアルファベット (alphabet) と呼ばれる。なお、どの図形を L のアルファベットとして選ぶかは L に依存し、その選び方は明示される場合もされない場合もある。

以下、任意の言語を L や M などて表す。

規約 1.1.4

図形 X が言語 L に属する表現 (expression) であるということを、以下の条件によって定める。

- L のアルファベットは L に属する表現である。
- 図形 Y が L に属する表現であり、図形 a が L のアルファベットであれば、 Y の右に a を描画してできる図形 Ya は L に属する表現である。
- 図形 X が L に属する表現であれば、以下のいずれかが成り立つ。
 - X は L のアルファベットである。
 - $X \equiv Ya$ であるような、 L に属する表現 Y と、 L のアルファベット a が存在する。

\mathcal{X} が L に属する表現であるということを, $\mathcal{X} : L\text{-Expr}$ と書く.

規約 1.1.5

1. 単に**対応** (correspondence) というとき, それはある図形に対して, ある図形を一つだけ対応させることをいう. 図形 \mathcal{X} を図形 \mathcal{Y} に対応させる対応を, $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ と書く.
2. **割り当て** (assignment) とは, いくつかの対応の集まりをいう.

規約 1.1.6

L, M を言語とする. M による L への**名付け** (naming) とは, 以下を満たす対応 $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ 全体からなる対応をいう.

- (i) $\mathcal{X} : L\text{-Expr}$ かつ $\mathcal{Y} : M\text{-Expr}$

章末問題

あ	
アルファベット	1
け	
言語	1
す	
図形	1
図形が	
同じである	1
異なる	1
た	
対応	2
な	
名付け	2
ひ	
表現	1
わ	
割り当て	2