

Hinman, *Fundamentals of Mathematical Logic* 解答

鷗海

(最終更新日: 2024 年 6 月 8 日)

本稿では、以下の書籍の演習問題の解答を与えます。

Hinman, P. G. (2005). *Fundamentals of Mathematical Logic*. A K Peters.

その他、同書で証明が省略されていたり、注意が必要と思われるような箇所についても、補足的に掲載します。また、正誤表も本稿の末尾に掲載します。

本稿の pdf ファイルおよび T_EX ソースファイルの最新版は、[GitHub](#) の該当リポジトリから入手できます。

目次

1	Propositional Logic and Other Fundamentals	1
1.1	The propositional language	1
	注意: 命題 1.1.5 の補題 (4) の証明	1
	演習 1.1.10	1
	演習 1.1.11	3
	演習 1.1.12	3
	演習 1.1.13	4
	正誤表	6
	第 1 章	6

Propositional Logic and Other Fundamentals

1

1.1 The propositional language

訳語対応

- 一意可読性 unique readability
- 原子命題論理式 atomic sentence
- 真の始切片 proper initial segment
- 命題記号 sentence symbol
- 命題論理式 sentence
- 命題論理式の帰納法 sentence induction

注意: 命題 1.1.5 の補題 (4) の証明

補題 (4) の証明は, $\phi_0 \dots \phi_k$ の長さに関する帰納法に基づいていますが, 帰納法の basis である, 長さが 1 の場合に (4) が正しいことの証明が省略されています. これは次のように証明できます. $\phi_0 \dots \phi_k$ と $\psi_0 \dots \psi_l$ の長さに関して $1 > k, l$ であるため, $k = l = 0$ でしかありえず, したがって $\phi_0 = \psi_0$ となります.

演習 1.1.10

以下のように定義する.

定義 1 (中置記法での L -命題論理式の集合)

- (i) $\text{Sent}_0 := L$ -原子命題論理式の集合
- (ii) 任意の $n \in \omega$ に対して,

$$\begin{aligned} \text{Sent}_{n+1} := & \text{Sent}_n \cup \{(\neg\phi) : \phi \in \text{Sent}_n\} \\ & \cup \{(\phi \bullet \psi) : \phi, \psi \in \text{Sent}_n, \bullet \text{ は } \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow \text{ のいずれか}\} \end{aligned}$$

- (iii) $\text{Sent}_L := \bigcup_{n \in \omega} \text{Sent}_n$

次は補題 1.1.3 および命題 1.1.4 と全く同じ方法で証明できる.

命題 2 (L -命題論理式の帰納法による証明)

L -表現に関する任意の性質 \mathcal{P} に対して,

- (i) 任意の L -原子命題論理式について \mathcal{P} が成り立ち, かつ

- (ii) 任意の L -命題論理式 ϕ, ψ に対し, ϕ, ψ について P が成り立つならば, $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ についても P が成り立つ

ならば, 任意の L -命題論理式に対して P が成り立つ.

次を証明する.

命題 3 (一意可読性)

任意の L -命題論理式 θ に対して, 以下のちょうど 1 つが成り立つ.

- (i) θ は L -原子命題論理式である.
- (ii) $\theta = (\neg\phi)$ なる L -命題論理式 ϕ が存在する.
- (iii) $\theta = (\phi \vee \psi)$ なる L -命題論理式 ϕ, ψ がそれぞれ一意に存在する.
- (iv) $\theta = (\phi \wedge \psi)$ なる L -命題論理式 ϕ, ψ がそれぞれ一意に存在する.
- (v) $\theta = (\phi \rightarrow \psi)$ なる L -命題論理式 ϕ, ψ がそれぞれ一意に存在する.
- (vi) $\theta = (\phi \leftrightarrow \psi)$ なる L -命題論理式 ϕ, ψ がそれぞれ一意に存在する.

そのために次を証明する. 以下, \bullet は $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ のいずれかとする.

補題 4

- (i) L -命題論理式に含まれる (の個数と) の個数は同じである.
- (ii) L -命題論理式の真の始切片^aに含まれる (の個数は) の個数より多い.
- (iii) L -命題論理式の真の始切片は L -命題論理式ではない.
- (iv) \bullet' は $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ のいずれかとし, ϕ, ψ, ϕ', ψ' は L -命題論理式とする. $(\phi \bullet \psi) = (\phi' \bullet' \psi')$ ならば, $\phi = \phi'$, $\bullet = \bullet'$, $\psi = \psi'$ である.

^a 演習 1.1.11 参照.

- (i) ϕ に対してこれが成り立つことを $P(\phi)$ と書く. 任意の L -命題論理式 ϕ に対して $P(\phi)$ を L -命題論理式の帰納法で示す.
 - (1) ϕ が L -原始命題論理式の場合, (と) は含まれないので, $P(\phi)$ である.
 - (2) L -命題論理式 ϕ, ψ を任意に取り, $P(\phi)$ と $P(\psi)$ を仮定する. 仮定より, $P((\neg\phi))$, $P(\phi \bullet \psi)$ であることは明らかである.
- (ii) ϕ に対してこれが成り立つことを $P(\phi)$ と書く. 任意の L -命題論理式 ϕ に対して $P(\phi)$ を L -命題論理式の帰納法で示す.
 - (1) ϕ が L -原始命題論理式の場合, 真の始切片が存在しないので, $P(\phi)$ である.
 - (2) L -命題論理式 ϕ, ψ を任意に取り, $P(\phi)$ と $P(\psi)$ を仮定する. $(\neg\phi)$, $(\phi \bullet \psi)$ のいずれについても, その真の始切片は右端の) を持たず, 従って (i) より, そこに含まれる (の個数は) の個数より多い. つまり, $P((\neg\phi))$, $P((\phi \bullet \psi))$ である.
- (iii) (i) と (ii) から従う.
- (iv) $(\phi \bullet \psi) = (\phi' \bullet' \psi')$ であれば, $\phi \bullet \psi = \phi' \bullet' \psi'$ であり, (iii) より, ϕ と ϕ' の一方は他方の真の始切片になりえないので, $\phi = \phi'$ である. よって, $\bullet = \bullet'$, 次いで $\psi = \psi'$ が従う.

命題 3 を証明する.

(i)-(vi) のちょうど 1 つが θ について成り立つことを $P(\theta)$ と書く. 任意の L -命題論理式 θ に対して $P(\theta)$ を L -命題論理式の帰納法で示す.

(1) θ が L -原始命題論理式の場合, (i) のみが成り立つので, $\mathcal{P}(\theta)$ である.

L -命題論理式 θ, θ' を任意に取り, $\mathcal{P}(\theta)$ と $\mathcal{P}(\theta')$ を仮定する.

- (2) $(\neg\theta) = (\neg\phi)$ なる L -命題論理式 ϕ は一意に存在するので, (ii) が成り立ち, また左端から 2 番目の記号が \neg であるのは (ii) の場合だけである. よって $\mathcal{P}((\neg\theta))$ である.
- (3) $(\theta \vee \theta') = (\phi \vee \psi)$ なる L -命題論理式 ϕ, ψ の存在は明らかである (θ, θ' 自身). また, $(\theta \vee \theta')$ について, (1), (2) と同様の理由で, (i) と (ii) は成り立たない. また補題 4(iv) より, (iii)–(vi) のうち (iii) のみが成り立つ. よって $\mathcal{P}((\theta \vee \theta'))$ である.
- (4) (3) と同様に, $\mathcal{P}((\theta \wedge \theta'))$, $\mathcal{P}((\theta \rightarrow \theta'))$, $\mathcal{P}((\theta \leftrightarrow \theta'))$ である.

演習 1.1.11

長さ n の任意の L -命題論理式 ϕ に対し, その真の始切片が L -命題論理式でないことを $\mathcal{P}(n)$ と書く. 任意の n に対して $\mathcal{P}(n)$ を帰納法で示す.

(1) $n = 1$ の場合, 真の始切片が存在しないので, $\mathcal{P}(1)$ である.

任意の $1 \leq i \leq n$ に対して $\mathcal{P}(i)$ を仮定し, 長さ $n + 1$ の L -命題論理式 ϕ を任意に取る (もしそのような ϕ が存在しなければ, 自明に $\mathcal{P}(n + 1)$ である). 命題 1.1.5 の証明の (1) と (2) より, ϕ について (i)–(vi) のちょうど 1 つが成り立つ.

- (2) ϕ が L -原始命題論理式の場合, 真の始切片が存在しないので, $\mathcal{P}(n + 1)$ である.
- (3) $\phi = \neg\psi$ の場合, その真の始切片は \neg か $\neg S$ の形である (S は ψ の真の始切片). 前者は L -命題論理式ではない. 後者は, 帰納法の仮定より S は L -命題論理式ではないので, 命題 1.1.5(ii) が成り立たず, また左端の記号が異なるので, (ii) 以外も成り立たない. よって, ϕ の真の始切片は L -命題論理式ではないので, $\mathcal{P}(n + 1)$ である.
- (4) $\phi = \vee\psi\psi'$ の場合, その真の始切片は以下のいずれかの形であり, 仮にそれが L -命題論理式であれば, 命題 1.1.5(iii) が成り立つはずである.
- (4.1) \vee . これは L -命題論理式ではない.
- (4.2) $\vee S$ (S は ψ の真の始切片). 帰納法の仮定より, S は L -命題論理式ではないので, 命題 1.1.5(iii) は成り立たない. よって, これは L -命題論理式ではない.
- (4.3) $\vee\psi$. 帰納法の仮定より, ψ の真の始切片 χ は L -命題論理式ではない. したがって, $\vee\psi = \vee\chi\chi'$ なる L -命題論理式 χ, χ' は存在しないので, 命題 1.1.5(iii) は成り立たない. よって, これは L -命題論理式ではない.
- (4.4) $\vee\psi S$ (S は ψ' の真の始切片). L -命題論理式 χ の長さが n 未満であれば, 帰納法の仮定より, ψ と χ の一方が他方の真の始切片になることはない. したがって, $\vee\psi S = \vee\chi\chi'$ なる L -命題論理式 χ, χ' は存在しないので, 命題 1.1.5(iii) は成り立たない. よって, これは L -命題論理式ではない.
- 以上より, $\mathcal{P}(n + 1)$ である.
- (5) $\phi = \bullet\psi\psi'$ ($\bullet = \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$) の場合も, (4) と同様にして $\mathcal{P}(n + 1)$ を証明できる.

証明は以上である.

この結果が補題 (4) の代わりになることは次のようにして分かる. $\bullet\phi\psi = \bullet\phi'\psi'$ であるとする. ϕ と ϕ' の一方が他方の真の始切片になることはないので, $\phi = \phi'$ であり, したがって $\psi = \psi'$ である.

演習 1.1.12

任意の $\phi \in \text{Sent}_{n+1} \sim \text{Sent}_n$ に対し, 定義 1.1.2 と一意可読性より, 以下のいずれかちょうど 1 つが成り立つ.

- (i) $\phi = \neg\psi$ なる $\psi \in \text{Sent}_n$ が一意に存在する.

- (ii) $\phi = \vee \psi \psi'$ なる $\psi, \psi' \in \text{Sent}_n$ がそれぞれ一意に存在する.
- (iii) $\phi = \wedge \psi \psi'$ なる $\psi, \psi' \in \text{Sent}_n$ がそれぞれ一意に存在する.
- (iv) $\phi = \rightarrow \psi \psi'$ なる $\psi, \psi' \in \text{Sent}_n$ がそれぞれ一意に存在する.
- (v) $\phi = \leftrightarrow \psi \psi'$ なる $\psi, \psi' \in \text{Sent}_n$ がそれぞれ一意に存在する.

したがって、任意の $n \in \omega$ に対し、関数 $F_{n+1}: \text{Sent}_n \rightarrow Z$ を以下のように再帰的に定義できる.

$$\begin{aligned} F_{n+1}(\phi) &= F_n(\phi) && \text{if } \phi \in \text{Sent}_n \\ F_{n+1}(\neg\phi) &= G_{\neg}(F_n(\phi)) && \text{if } \neg\phi \in \text{Sent}_{n+1} \sim \text{Sent}_n \\ F_{n+1}(\bullet\phi\psi) &= G_{\bullet}(F_n(\phi), F_n(\psi)) && \text{if } \bullet\phi\psi \in \text{Sent}_{n+1} \sim \text{Sent}_n \end{aligned}$$

i_ϕ を $\phi \in \text{Sent}_n$ なる最小の $n \in \omega$ とし、関数 $F: \text{Sent}_L \rightarrow Z$ を $F(\phi) = F_{i_\phi}(\phi)$ によって定義すると、任意の $\phi \in \text{Sent}_n$ なる n 、つまり $n \geq i_\phi$ に対して、 $F(\phi) = F_{i_\phi}(\phi) = F_{i_\phi+1}(\phi) = \dots = F_n(\phi)$ である. よって、

- (1) $\phi \in \text{Sent}_0$ に対して $F(\phi) = F_0(\phi)$ であるから、 F は F_0 の拡張である.
- (2) 任意の $\phi \in \text{Sent}_L$ に対して、適当な $n \in \omega$ が存在して、

$$\begin{aligned} F(\neg\phi) &= F_{n+1}(\neg\phi) = G_{\neg}(F_n(\phi)) = G_{\neg}(F(\phi)) \\ F(\bullet\phi\psi) &= F_{n+1}(\bullet\phi\psi) = G_{\bullet}(F_n(\phi), F_n(\psi)) = G_{\bullet}(F(\phi), F(\psi)) \end{aligned}$$

となる. よって、

$$\begin{aligned} F(\neg\phi) &= G_{\neg}(F(\phi)) \\ F(\bullet\phi\psi) &= G_{\bullet}(F(\phi), F(\psi)) \end{aligned}$$

である.

F の一意性を示す. いま、関数 $F': \text{Sent}_L \rightarrow Z$ も F_0 の拡張であり、かつ

$$\begin{aligned} F'(\neg\phi) &= G_{\neg}(F'(\phi)) \\ F'(\bullet\phi\psi) &= G_{\bullet}(F'(\phi), F'(\psi)) \end{aligned}$$

を満たすとする. 任意の $\phi \in \text{Sent}_L$ に対して $F(\phi) = F'(\phi)$ が成り立ち、したがって $F = F'$ が成り立つことを、 L -命題論理式の帰納法で示す.

- (1) $\phi \in \text{Sent}_0$ の場合、 $F(\phi) = F_0(\phi) = F'(\phi)$ である.

$\phi, \psi \in \text{Sent}_L$ を任意に取り、 $F(\phi) = F'(\phi)$ 、 $F(\psi) = F'(\psi)$ を仮定する.

- (2) 仮定より、

$$F(\neg\phi) = G_{\neg}(F(\phi)) = G_{\neg}(F'(\phi)) = F'(\neg\phi)$$

- (3) 仮定より、

$$F(\bullet\phi\psi) = G_{\bullet}(F(\phi), F(\psi)) = G_{\bullet}(F'(\phi), F'(\psi)) = F'(\bullet\phi\psi)$$

証明は以上である.

命題 1.1.9 において、 $Z = \{T, F\}$ 、 $F_0 = V_0$ とし、関数 $G_{\neg}: \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$ と $G_{\bullet}: \{T, F\} \times \{T, F\} \rightarrow \{T, F\}$ を

$$\begin{array}{cccccc} & (T, T) \mapsto T & (T, T) \mapsto T & (T, T) \mapsto T & (T, T) \mapsto T & \\ G_{\neg}: & T \mapsto F & (T, F) \mapsto T & (T, F) \mapsto F & (T, F) \mapsto F & \\ & F \mapsto T & (F, T) \mapsto T & (F, T) \mapsto F & (F, T) \mapsto T & \\ & & (F, F) \mapsto F & (F, F) \mapsto F & (F, F) \mapsto T & \end{array}$$

と定めれば、定理 1.1.7 を得る.

演習 1.1.13

- (i) $\neg((\neg p_1) \vee p_2)$
- (ii) 仮にこれが L -命題論理式であるとする. 命題 1.1.5 より, $\wedge p_1 p_2 \neg p_3 = \wedge \phi \psi$ なる L -命題論理式 ϕ, ψ が一意に存在する. よって, p_1 は L -命題論理式であるから, $p_2 \neg p_3$ は L -命題論理式である. しかし, $p_2 \neg p_3$ は命題 1.1.5 のいずれの場合も満たさないので, L -命題論理式ではない. 矛盾. ゆえに $\wedge p_1 p_2 \neg p_3$ は L -命題論理式ではない.
- (iii) $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (((\neg p_3) \vee p_8) \leftrightarrow p_3)$

正誤表

第 1 章

修正箇所	誤	正
p. 21, ↑ 1	$H(x_0, \dots, x_{k_h-1}) \in Y$	$H(x_0, \dots, x_{k_{\textcolor{red}{H}}-1}) \in Y$
p. 22, ↑ 10	x_0, \dots, x_{k_h-1}	$x_0, \dots, x_{k_{\textcolor{red}{H}}-1}$
"", ↑ 8	$\mathcal{P}(H(x_0, \dots, x_{k_h-1}))$	$\mathcal{P}(H(x_0, \dots, x_{k_{\textcolor{red}{H}}-1}))$