Hinman, *Fundamentals of Mathematical Logic* 解答

鴎海

（最終更新日: 2024 年 6 月 10 日）

本稿では，以下の書籍の演習問題の解答を与えます．

Hinman, P. G. (2005). *Fundamentals of Mathematical Logic*. A K Peters.

その他，同書で証明が省略されていたり，注意が必要と思われるような箇所についても，補足的に掲載します．また，正誤表も本稿の末尾に掲載します．

本稿の pdf ファイルおよび TEX ソースファイルの最新版は，GitHub の該当リポジトリから入手できます．

目次

Propositional Logic and Other Fundamentals 1

1.1 The propositional language

訳語対応

一意可読性 unique readability
原子文 atomic sentence
真の始切片 proper initial segment
命題記号 sentence symbol
文 sentence
文の帰納法 sentence induction

注意: 命題 1.1.5 の補題 (4) の証明

補題 (4) の証明は，$\phi_0 \dots \phi_k$ の長さに関する帰納法に基づいていますが，帰納法の基底である，長さが 1 の場合に (4) が正しいことの証明が省略されています．これは次のように証明できます．$\phi_0 \dots \phi_k$ と $\psi_0 \dots \psi_l$ の長さに関して $1 > k, l$ であるため，$k = l = 0$ でしかありえず，したがって $\phi_0 = \psi_0$ となります．

演習 1.1.10

以下のように定義する．

定義 1（中置記法での L–文の集合）

(i) $\mathsf{Sent}_0 := L$–原子文の集合
(ii) 任意の $n \in \omega$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathsf{Sent}_{n+1} := \mathsf{Sent}_n &\cup \{(\neg\phi) : \phi \in \mathsf{Sent}_n\} \\ &\cup \{(\phi \bullet \psi) : \phi, \psi \in \mathsf{Sent}_n, \bullet \text{ は } \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow \text{ のいずれか}\}\end{aligned}$$

(iii) $\mathsf{Sent}_L := \bigcup_{n \in \omega} \mathsf{Sent}_n$

次は補題 1.1.3 および命題 1.1.4 と全く同じ方法で証明できる．

命題 2（L–文の帰納法による証明）

L–表現に関する任意の性質 $\mathcal{P}$ に対して，

(i) 任意の L–原子文について $\mathcal{P}$ が成り立ち，かつ

(ii) 任意の L–文 ϕ, ψ に対し，ϕ, ψ について $\mathcal{P}$ が成り立つならば，$(\neg\phi)$，$(\phi \vee \psi)$，$(\phi \wedge \psi)$，$(\phi \to \psi)$，$(\phi \leftrightarrow \psi)$ についても $\mathcal{P}$ が成り立つ

ならば，任意の L–文に対して $\mathcal{P}$ が成り立つ．

次を証明する．

命題 3（一意可読性）

任意の L–文 θ に対して，以下のちょうど 1 つが成り立つ．

(i) θ は L–原子文である．
(ii) $\theta = (\neg\phi)$ なる L–文 ϕ が存在する．
(iii) $\theta = (\phi \vee \psi)$ なる L–文 ϕ, ψ がそれぞれ一意に存在する．
(iv) $\theta = (\phi \wedge \psi)$ なる L–文 ϕ, ψ がそれぞれ一意に存在する．
(v) $\theta = (\phi \to \psi)$ なる L–文 ϕ, ψ がそれぞれ一意に存在する．
(vi) $\theta = (\phi \leftrightarrow \psi)$ なる L–文 ϕ, ψ がそれぞれ一意に存在する．

そのために次を証明する．以下，$\bullet$ は $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ のいずれかとする．

補題 4

(i) L–文に含まれる (の個数と) の個数は同じである．
(ii) L–文の真の始切片[a]に含まれる (の個数は) の個数より多い．
(iii) L–文の真の始切片は L–文ではない．
(iv) $\bullet'$ は $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ のいずれかとし，ϕ, ψ, ϕ', ψ' は L–文とする．$(\phi \bullet \psi) = (\phi' \bullet' \psi')$ ならば，$\phi = \phi'$，$\bullet = \bullet'$，$\psi = \psi'$ である．

[a] 演習 1.1.11 参照.

(i) ϕ に対してこれが成り立つことを $\mathcal{P}(\phi)$ と書く．任意の L–文 ϕ に対して $\mathcal{P}(\phi)$ を L–文の帰納法で示す．
  (1) ϕ が L–原始文の場合，(と) は含まれないので，$\mathcal{P}(\phi)$ である．
  (2) L–文 ϕ, ψ を任意に取り，$\mathcal{P}(\phi)$ と $\mathcal{P}(\psi)$ を仮定する．仮定より，$\mathcal{P}((\neg\phi))$，$\mathcal{P}(\phi \bullet \psi)$ であることは明らかである．
(ii) ϕ に対してこれが成り立つことを $\mathcal{P}(\phi)$ と書く．任意の L–文 ϕ に対して $\mathcal{P}(\phi)$ を L–文の帰納法で示す．
  (1) ϕ が L–原始文の場合，真の始切片が存在しないので，$\mathcal{P}(\phi)$ である．
  (2) L–文 ϕ, ψ を任意に取り，$\mathcal{P}(\phi)$ と $\mathcal{P}(\psi)$ を仮定する．$(\neg\phi)$，$(\phi \bullet \psi)$ のいずれについても，その真の始切片は右端の) を持たず，従って (i) より，そこに含まれる (の個数は) の個数より多い．つまり，$\mathcal{P}((\neg\phi))$，$\mathcal{P}((\phi \bullet \psi))$ である．
(iii) (i) と (ii) から従う．
(iv) $(\phi \bullet \psi) = (\phi' \bullet' \psi')$ であれば，$\phi \bullet \psi) = \phi' \bullet' \psi')$ であり，(iii) より，ϕ と ϕ' の一方は他方の真の始切片になりえないので，$\phi = \phi'$ である．よって，$\bullet = \bullet'$，次いで $\psi = \psi'$ が従う．

命題 3を証明する．

(i)–(vi) のちょうど 1 つが θ について成り立つことを $\mathcal{P}(\theta)$ と書く．任意の L–文 θ に対して $\mathcal{P}(\theta)$ を L–文の帰納法で示す．

(1) θ が L–原始文の場合，(i) のみが成り立つので，$\mathcal{P}(\theta)$ である．

L–文 θ, θ' を任意に取り，$\mathcal{P}(\theta)$ と $\mathcal{P}(\theta')$ を仮定する．

(2) $(\neg\theta) = (\neg\phi)$ なる L–文 ϕ は一意に存在するので，(ii) が成り立ち，また左端から 2 番目の記号が $\neg$ であるのは (ii) の場合だけである．よって $\mathcal{P}((\neg\theta))$ である．
(3) $(\theta \vee \theta') = (\phi \vee \psi)$ なる L–文 ϕ, ψ の存在は明らかである（θ, θ' 自身）．また，$(\theta \vee \theta')$ について，(1)，(2)と同様の理由で，(i) と (ii) は成り立たない．また補題 4(iv)より，(iii)–(vi) のうち (iii) のみが成り立つ．よって $\mathcal{P}((\theta \vee \theta'))$ である．
(4) (3)と同様に，$\mathcal{P}((\theta \wedge \theta'))$，$\mathcal{P}((\theta \to \theta'))$，$\mathcal{P}((\theta \leftrightarrow \theta'))$ である．

演習 1.1.11

$n \in \omega$ に対し，長さ n の任意の L–文 ϕ の真の始切片は L–文ではない，ということを $\mathcal{P}(n)$ と書く．任意の n に対して $\mathcal{P}(n)$ を帰納法で示す．

(1) $n = 1$ の場合，真の始切片が存在しないので，$\mathcal{P}(1)$ である．

任意の $1 \leq i \leq n$ に対して $\mathcal{P}(i)$ を仮定し，長さ $n+1$ の L–文 ϕ を任意に取る（もしそのような ϕ が存在しなければ，自明に $\mathcal{P}(n+1)$ である）．命題 1.1.5 の証明の (1) と (2) より，ϕ について (i)–(vi) のちょうど 1 つが成り立つ．

(2) ϕ が L–原始文の場合，真の始切片が存在しないので，$\mathcal{P}(n+1)$ である．
(3) $\phi = \neg\psi$ の場合，その真の始切片は $\neg$ か $\neg S$ の形である（S は ψ の真の始切片）．前者は L–文ではない．後者は，帰納法の仮定より S は L–文ではないので，命題 1.1.5(ii) が成り立たず，また左端の記号が異なるので，(ii) 以外も成り立たない．よって，ϕ の真の始切片は L–文ではないので，$\mathcal{P}(n+1)$ である．
(4) $\phi = \vee\psi\psi'$ の場合，その真の始切片は以下のいずれかの形であり，仮にそれが L–文であれば，命題 1.1.5(iii) が成り立つはずである．
   (4.1) $\vee$．これは L–文ではない．
   (4.2) $\vee S$（S は ψ の真の始切片）．帰納法の仮定より，S は L–文ではないので，命題 1.1.5(iii) は成り立たない．よって，これは L–文ではない．
   (4.3) $\vee\psi$．帰納法の仮定より，ψ の真の始切片 χ は L–文ではない．したがって，$\vee\psi = \vee\chi\chi'$ なる L–文 χ, χ' は存在しないので，命題 1.1.5(iii) は成り立たない．よって，これは L–文ではない．
   (4.4) $\vee\psi S$（S は ψ' の真の始切片）．L–文 χ の長さが n 未満であれば，帰納法の仮定より，ψ と χ の一方が他方の真の始切片になることはない．したがって，$\vee\psi S = \vee\chi\chi'$ なる L–文 χ, χ' は存在しないので，命題 1.1.5(iii) は成り立たない．よって，これは L–文ではない．

   以上より，$\mathcal{P}(n+1)$ である．
(5) $\phi = \bullet\psi\psi'$（$\bullet = \wedge, \to, \leftrightarrow$）の場合も，(4)と同様にして $\mathcal{P}(n+1)$ を証明できる．

証明は以上である．

この結果が補題 (4) の代わりになることは次のようにして分かる．$\bullet\phi\psi = \bullet\phi'\psi'$ であるとする．ϕ と ϕ' の一方が他方の真の始切片になることはないので，$\phi = \phi'$ であり，したがって $\psi = \psi'$ である．

演習 1.1.12

任意の $\phi \in \mathsf{Sent}_{n+1} \sim \mathsf{Sent}_n$ に対し，定義 1.1.2 と一意可読性より，以下のいずれかちょうど 1 つが成り立つ．

(i) $\phi = \neg\psi$ なる $\psi \in \mathsf{Sent}_n$ が一意に存在する．
(ii) $\phi = \vee\psi\psi'$ なる $\psi, \psi' \in \mathsf{Sent}_n$ がそれぞれ一意に存在する．
(iii) $\phi = \wedge\psi\psi'$ なる $\psi, \psi' \in \mathsf{Sent}_n$ がそれぞれ一意に存在する．

(iv) $\phi = {\to}\psi\psi'$ なる $\psi, \psi' \in \mathsf{Sent}_n$ がそれぞれ一意に存在する．

(v) $\phi = {\leftrightarrow}\psi\psi'$ なる $\psi, \psi' \in \mathsf{Sent}_n$ がそれぞれ一意に存在する．

したがって，任意の $n \in \omega$ に対し，関数 $F_{n+1} \colon \mathsf{Sent}_n \to Z$ を以下のように再帰的に定義できる．

$$\begin{aligned} F_{n+1}(\phi) &= F_n(\phi) && \text{if } \phi \in \mathsf{Sent}_n \\ F_{n+1}(\neg\phi) &= G_\neg(F_n(\phi)) && \text{if } \neg\phi \in \mathsf{Sent}_{n+1} \sim \mathsf{Sent}_n \\ F_{n+1}(\bullet\phi\psi) &= G_\bullet(F_n(\phi), F_n(\psi)) && \text{if } \bullet\phi\psi \in \mathsf{Sent}_{n+1} \sim \mathsf{Sent}_n \end{aligned}$$

i_ϕ を $\phi \in \mathsf{Sent}_n$ なる最小の $n \in \omega$ とし，関数 $F \colon \mathsf{Sent}_L \to Z$ を $F(\phi) = F_{i_\phi}(\phi)$ によって定義すると，$\phi \in \mathsf{Sent}_n$ なる任意の n，つまり $n \geq i_\phi$ に対して，$F(\phi) = F_{i_\phi}(\phi) = F_{i_\phi+1}(\phi) = \cdots = F_n(\phi)$ である．よって，

(1) 任意の $\phi \in \mathsf{Sent}_0$ に対して $F(\phi) = F_0(\phi)$ であるから，F は F_0 の拡張である．

(2) 任意の $\phi \in \mathsf{Sent}_L$ に対して，適当な $n \in \omega$ が存在して，

$$\begin{aligned} F(\neg\phi) &= F_{n+1}(\neg\phi) = G_\neg(F_n(\phi)) = G_\neg(F(\phi)) \\ F(\bullet\phi\psi) &= F_{n+1}(\bullet\phi\psi) = G_\bullet(F_n(\phi), F_n(\psi)) = G_\bullet(F(\phi), F(\psi)) \end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} F(\neg\phi) &= G_\neg(F(\phi)) \\ F(\bullet\phi\psi) &= G_\bullet(F(\phi), F(\psi)) \end{aligned}$$

である．

F の一意性を示す．いま，関数 $F' \colon \mathsf{Sent}_L \to Z$ も F_0 の拡張であり，かつ

$$\begin{aligned} F'(\neg\phi) &= G_\neg(F'(\phi)) \\ F'(\bullet\phi\psi) &= G_\bullet(F'(\phi), F'(\psi)) \end{aligned}$$

を満たすとする．任意の $\phi \in \mathsf{Sent}_L$ に対して $F(\phi) = F'(\phi)$ が成り立ち，したがって $F = F'$ が成り立つことを，L–文の帰納法で示す．

(1) $\phi \in \mathsf{Sent}_0$ の場合，$F(\phi) = F_0(\phi) = F'(\phi)$ である．

$\phi, \psi \in \mathsf{Sent}_L$ を任意に取り，$F(\phi) = F'(\phi)$，$F(\psi) = F'(\psi)$ を仮定する．

(2) 仮定より，

$$F(\neg\phi) = G_\neg(F(\phi)) = G_\neg(F'(\phi)) = F'(\neg\phi)$$

(3) 仮定より，

$$F(\bullet\phi\psi) = G_\bullet(F(\phi), F(\psi)) = G_\bullet(F'(\phi), F'(\psi)) = F'(\bullet\phi\psi)$$

証明は以上である．

命題 1.1.9 において，$Z = \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$，$F_0 = V_0$ とし，関数 $G_\neg \colon \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ と $G_\bullet \colon \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\} \times \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ を

$$G_\neg \colon \begin{matrix} \mathsf{T} \mapsto \mathsf{F} \\ \mathsf{F} \mapsto \mathsf{T} \end{matrix} \quad G_\vee \colon \begin{matrix} (\mathsf{T},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{T},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{F},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{F},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{F} \end{matrix} \quad G_\wedge \colon \begin{matrix} (\mathsf{T},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{T},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{F} \\ (\mathsf{F},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{F} \\ (\mathsf{F},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{F} \end{matrix} \quad G_\to \colon \begin{matrix} (\mathsf{T},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{T},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{F} \\ (\mathsf{F},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{F},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{T} \end{matrix} \quad G_\leftrightarrow \colon \begin{matrix} (\mathsf{T},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{T},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{F} \\ (\mathsf{F},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{F} \\ (\mathsf{F},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{T} \end{matrix}$$

と定めれば，定理 1.1.7 を得る．

演習 1.1.13

(i) $\neg((\neg p_1) \vee p_2)$

(ii) 仮にこれが L–文であるとする．命題 1.1.5 より，$\wedge p_1 p_2 \neg p_3 = \wedge \phi\psi$ なる L–文 ϕ, ψ が一意に存在する．よって，p_1 は L–文であるから，$p_2 \neg p_3$ は L–文である．しかし，$p_2 \neg p_3$ は命題 1.1.5 のいずれの場合も満たさないので，L–文ではない．矛盾．ゆえに $\wedge p_1 p_2 \neg p_3$ は L–文ではない．

(iii) $(p_1 \wedge p_2) \to (((\neg p_3) \vee p_8) \leftrightarrow p_3)$

1.2 Induction and recursion

訳語対応

$\mathcal{X}$-帰納法 $\mathcal{X}$-induction
$\mathcal{X}$-導出 $\mathcal{X}$-derivation
$\mathcal{X}$-閉である $\mathcal{X}$-closed
帰納的系 inductive system
帰納的閉包 inductive closure
帰納法の仮定 induction hypothesis

注意: 定義 1.2.1

pp. 25–26 にも書かれていますが，このような X_n の再帰的定義は定理 1.2.12 によって正当化されます．もし $\mathcal{X} = (X, X_0, \mathcal{H})$ が帰納的系であれば，$X_0 \in \wp(X)$ が成り立ちます．そこで定理 1.2.12 において

$$Z = \wp(X)$$
$$z_0 = X_0$$
$$G\colon \wp(X) \times \omega \ni (x, n) \mapsto x \cup \{H(x_0, \dots, x_{k_H - 1}) \in X : H \in \mathcal{H},\ x_0, \dots, x_{k_H - 1} \in x\} \in \wp(X)$$

とすれば，$F(0) = X_0$ かつ任意の $n \in \omega$ に対して

$$F(n+1) = F(n) \cup \{H(x_0, \dots, x_{k_H - 1}) : H \in \mathcal{H},\ x_0, \dots, x_{k_H - 1} \in F(n)\}$$

であるような関数 $F\colon \omega \to \wp(X)$ が一意に存在することが言えます．この唯一の F に対する $F(n)$ が，X_n（正確には $\mathcal{X}_n$）と書かれているのです．

系 1.2.4

(i) $\overline{X} \subseteq \bigcap\{Y \subseteq X : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\}$
(ii) $\overline{X} \supseteq \bigcap\{Y \subseteq X : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\}$

を示す．

(i) 命題 1.2.3(ii) より，

$$\{Y \subseteq X : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\} \subseteq \{Y \subseteq X : \overline{X} \subseteq Y\}$$

よって，

$$\overline{X} = \bigcap\{Y \subseteq X : \overline{X} \subseteq Y\} \subseteq \bigcap\{Y \subseteq X : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\}$$

(ii) $\overline{X} \subseteq X$ および命題 1.2.3(i) より，

$$\overline{X} \in \{Y \subseteq X : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\}$$

よって，

$$\overline{X} \supseteq \bigcap\{Y \subseteq X : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\}$$

注意: 定理 1.2.5

特に,$X = \overline{X}$ とすれば,$(\overline{X}, X_0, \mathcal{H})$ は帰納的系なので,帰納法の仮定 $\mathcal{P}(x_0), \dots, \mathcal{P}(x_{k_H-1})$ は $x_0, \dots, x_{k_H-1} \in \overline{X}$ のときのみを考えればよいことが分かります.

定理 1.2.12

証明をもう少し詳しく書きます.

....

(1) $z_n = z$, かつ任意の $i < n$ に対して $z_{i+1} = G(z_i, i)$ であるような $z_1, \dots, z_n$ が存在する, ということを $\mathcal{P}(z, n)$ と書き, また $\mathcal{P}(z, n)$ なる z が一意に存在することを $\mathcal{Q}(n)$ と書く. 任意の $n \geq 1$ に対して $\mathcal{Q}(n)$ を帰納法で示す.

(1.1) $z = z_0$ であり, また任意の $i < 0$ に対して自明に $z_{i+1} = G(z_i, i)$ であるから, $\mathcal{P}(z, 0)$ である. このような z は z_0 のみであるから, $\mathcal{Q}(0)$ である.

(1.2) $\mathcal{Q}(n)$ を仮定し, $\mathcal{Q}(n+1)$ を示す. 仮定より, $\mathcal{P}(z, n)$ なる z が一意に存在するので, それを $\overline{z}$ と書く. $\mathcal{P}(\overline{z}, n)$ であるから, 適当な $z_1, \dots, z_n$ を取れば

$$\begin{aligned} z_1 &= G(z_0, 0) \\ &\vdots \\ z_n &= G(z_{n-1}, n-1) \\ \overline{z} &= z_n \end{aligned}$$

である. ここで $z = z_{n+1} = G(\overline{z}, n)$ とすれば $\mathcal{P}(z, n+1)$ であり, そのような z は $G(\overline{z}, n)$ のみであるから, $\mathcal{Q}(n+1)$ である.

$\mathcal{P}(z, n)$ を満たす, この一意に存在する z を z^n と書く.

(2) 関数 F を $F\colon \omega \ni n \mapsto z^n \in Z$ によって定める.

(2.1) $F(0) = z^0 = z_0$ である.

(2.2) $n \in \omega$ に対して, z^n の定義より, $F(n+1) = z^{n+1} = G(z_n, n)$ である.

演習 1.2.18

$\overline{X} \subseteq X$ は, $\overline{X}$ の定義から従う.
以下, (i) $X_0 \subseteq X$ (ii) 任意の $H \in \mathcal{H}$ と $x_0, \dots, x_{k_H-1} \in \overline{X}$ に対して, $H(x_0, \dots, x_{k_H-1}) \in \overline{X}$ を示す.

(i) Y が $\overline{X}$-閉であれば $X_0 \subseteq Y$ であるから,

$$\overline{X} = \bigcap \{Y \subseteq X : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\} \supseteq \{Y \subseteq X : X_0 \subseteq Y\} = X_0$$

より, $X_0 \subseteq \overline{X}$ を得る.

(ii) $H \in \mathcal{H}$, $x_0, \dots, x_{k_H-1} \in \overline{X}$ とする. $\mathcal{X}$-閉である Y を任意に取る.

$$\overline{X} = \bigcap \{Y \subseteq X : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\} = \bigcap \{Y : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\}$$

より, $x_0, \dots, x_{k_H-1} \in Y$ であり, Y は $\mathcal{X}$-閉であるから, $H(x_0, \dots, x_{k_H-1}) \in Y$ である. よって,

$$H(x_0, \dots, x_{k_H-1}) \in \bigcap \{Y \subseteq X : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\} = \overline{X}$$

である.

演習 1.2.19

一意可読性より, 任意の $x \in X_{n+1} \sim X_n$ に対して, $x = H(x_0, \dots, x_{k_H-1})$ なる $H \in \mathcal{H}$ と $x_0, \dots, x_{k_H-1} \in X_n$ がそれぞれ一意に存在する．したがって，任意の $n \in \omega$ に対し，関数 $F_n^u \colon X_n \to Z$ を以下のように再帰的に定義できる．

$$
\begin{aligned}
F_0^u(x) &= F_0(x,u) && \text{if } x \in X_0 \\
F_{n+1}^u(x) &= F_n^u(x) && \text{if } x \in X_n \\
F_{n+1}^u(H(x_0,\dots,x_{k_H-1})) &= G_H(F_n^u(x_0),\dots,F_n^u(x_{k_H-1}),x_0,\dots,x_{k_H-1},u) && \text{if } x \in X_{n+1} \sim X_n
\end{aligned}
$$

i_x を $x \in X_n$ なる最小の $n \in \omega$ とし，関数 $F \colon \overline{X} \times U \to Z$ を $F(x,u) = F_{i_x}^u(x)$ によって定義すると，$x \in X_n$ なる任意の n，つまり $n \geq i_x$ に対して，$F(x) = F_{i_x}^u(x) = \cdots = F_n^u(x)$ である．よって，

(1) 任意の $x \in X_0$ に対して $F(x,u) = F_0^u(x) = F_0(x,u)$ であるから，F は F_0 の拡張である．

(2) 任意の $H \in \mathcal{H}$，$u \in U$，$x_0, \dots, x_{k_H-1} \in \overline{X}$ に対して，適当な $n \in \omega$ が存在して，

$$
\begin{aligned}
F(H(x_0,\dots,x_{k_H-1}),u) &= F_{n+1}^u(H(x_0,\dots,x_{k_H-1})) \\
&= G_H(F_n^u(x_0),\dots,F_n^u(x_{k_H-1}),x_0,\dots,x_{k_H-1},u) \\
&= G_H(F(x_0,u),\dots,F(x_{k_H-1},u),x_0,\dots,x_{k_H-1},u)
\end{aligned}
$$

である．よって，

$$F(H(x_0,\dots,x_{k_H-1}),u) = G_H(F(x_0,u),\dots,F(x_{k_H-1},u),x_0,\dots,x_{k_H-1},u)$$

である．

F の一意性を示す．いま，関数 $F' \colon \overline{X} \times U \to Z$ も F_0 の拡張であり，かつ

$$F'(H(x_0,\dots,x_{k_H-1}),u) = G_H(F'(x_0,u),\dots,F'(x_{k_H-1},u),x_0,\dots,x_{k_H-1},u)$$

を満たすとする．任意の $x \in \overline{X}$ と $u \in U$ に対して $F(x,u) = F'(x,u)$ が成り立ち，したがって $F = F'$ が成り立つことを，$\overline{X}$-帰納法で示す．

(1) $x \in X_0$ の場合，$F(x,u) = F_0^u(x) = F_0(x,u) = F_0'^u(x) = F'(x,u)$ である．

(2) $H \in \mathcal{H}$，$x_0, \dots, x_{k_H-1} \in \overline{X}$ を任意に取り，$F(x_i,u) = F'(x_i,u)$ を仮定する（$0 \leq i \leq k_H - 1$）と，

$$
\begin{aligned}
F(H(x_0,\dots,x_{k_H-1}),u) &= G_H(F(x_0,u),\dots,F(x_{k_H-1},u),x_0,\dots,x_{k_H-1},u) \\
&= G_H(F'(x_0,u),\dots,F'(x_{k_H-1},u),x_0,\dots,x_{k_H-1},u) \\
&= F'(H(x_0,\dots,x_{k_H-1}),u)
\end{aligned}
$$

演習 1.2.21

$\Rightarrow$ を示す．任意の $z \in \overline{X}$ に対して，z の $\mathcal{X}$-導出が存在することを $\mathcal{X}$-帰納法で示す．

(1) $z \in X_0$ の場合，(z) は z の $\mathcal{X}$-導出である．

(2) $H \in \mathcal{H}$ と $z_0, \dots, z_{k_H-1} \in X$ を任意に取り，$z_0, \dots, z_{k_H-1}$ の $\mathcal{X}$-導出が存在すると仮定する．それらをそれぞれ

$$
\begin{gathered}
(x_0^0, \dots, x_0^{n_0}, z_0) \\
\vdots \\
(x_{k_H-1}^0, \dots, x_{k_H-1}^{n_{k_H-1}}, z_{k_H-1})
\end{gathered}
$$

とすると，これらの連結に $H(z_0, \dots, z_{k_H-1})$ を追加した列

$$\begin{aligned}&(x_0^0, \dots, x_0^{n_0}, z_0,\\ &\qquad \dots,\\ &\qquad\qquad x_{k_H-1}^0, \dots, x_{k_H-1}^{n_{k_H-1}}, z_{k_H-1},\\ &\qquad\qquad\qquad H(z_0, \dots, z_{k_H-1}))\end{aligned}$$

は $H(z_0, \dots, z_{k_H-1})$ の $\mathcal{X}$-導出である．なぜなら，この列の $H(z_0, \dots, z_{k_H-1})$ 以外の項は，仮定より定義 1.2.6(i) または (ii) を満たし，また $H(z_0, \dots, z_{k_H-1})$ は定義 1.2.6(ii) を満たすからである．

$\Leftarrow$ を示す．$(x_0, \dots, x_n)$ が x_n の $\mathcal{X}$-導出であれば $x_n \in \overline{X}$ である，ということを $\mathcal{P}(n)$ と書き，これを n に関する帰納法で示す．

(1) $n = 0$ の場合，x_0 について定義 1.2.6(ii) は成り立たないので，(i) $x_0 \in X_0$ が成り立つ．これと $X_0 \subseteq \overline{X}$ より，$\mathcal{P}(0)$ である．
(2) 任意の $0 \leq i \leq n$ に対して $\mathcal{P}(i)$ を仮定する．$(x_0, \dots, x_{n+1})$ が x_{n+1} の $\mathcal{X}$-導出であるとすると，定義 1.2.6(i) または (ii) が成り立つ．(i) の場合，$X_0 \subseteq \overline{X}$ より $\mathcal{P}(n+1)$ である．(ii) の場合，仮定より，$x_{j_0}, \dots, x_{j_{k_H-1}} \in \overline{X}$ であるから，命題 1.2.3(i) より，$x_{n+1} = H(x_{j_0}, \dots, x_{j_{k_H-1}}) \in \overline{X}$ である．よって，$\mathcal{P}(n+1)$ である．

以上より，任意の $n \in \omega$ に対して $\mathcal{P}(n)$ である．よって，$(x_0, \dots, x_n)$ が z の $\mathcal{X}$-導出であれば，$z = x_n \in \overline{X}$ である．

正誤表

1. Propositional Logic and Other Fundamentals

修正箇所	誤 / 正
p. 21, ↑ 1	$H(x_0, \ldots, x_{k_h-1}) \in Y$
	$H(x_0, \ldots, x_{k_H-1}) \in Y$
p. 22, ↑ 10	$x_0, \ldots, x_{k_h-1}$
	$x_0, \ldots, x_{k_H-1}$
〃, ↑ 8	$\mathcal{P}(H(x_0, \ldots, x_{k_h-1}))$
	$\mathcal{P}(H(x_0, \ldots, x_{k_H-1}))$
p. 27, ↑ 16	$F'(H(x_0, \ldots, x_{k_h-1}))$
	$F'(H(x_0, \ldots, x_{k_H-1}))$
p. 30, ↓ 2	$G^*(F^*(m), m))$
	$G^*(F^*(m), m)$