# Hinman, *Fundamentals of Mathematical Logic* 解答

鴎海

（最終更新日: 2024 年 6 月 8 日）

本稿では，以下の書籍の演習問題の解答を与えます．

Hinman, P. G. (2005). *Fundamentals of Mathematical Logic*. A K Peters.

その他，同書で証明が省略されていたり，注意が必要と思われるような箇所についても，補足的に掲載します．また，正誤表も本稿の末尾に掲載します．

本稿の pdf ファイルおよび TEX ソースファイルの最新版は，GitHub の該当リポジトリから入手できます．

# 目次

# 1 Propositional Logic and Other Fundamentals

## 1.1 The propositional language

訳語対応

**一意可読性** unique readability
**原子命題論理式** atomic sentence
**真の始切片** proper initial segment
**命題記号** sentence symbol
**命題論理式** sentence
**命題論理式の帰納法** sentence induction

### 注意: 命題 1.1.5 の補題 (4) の証明

補題 (4) の証明は，$\phi_0 \dots \phi_k$ の長さに関する帰納法に基づいていますが，帰納法の basis である，長さが 1 の場合に (4) が正しいことの証明が省略されています．これは次のように証明できます．$\phi_0 \dots \phi_k$ と $\psi_0 \dots \psi_l$ の長さに関して $1 > k, l$ であるため，$k = l = 0$ でしかありえず，したがって $\phi_0 = \psi_0$ となります．

### 演習 1.1.10

以下のように定義する．

**定義 1（中置記法での $L$–命題論理式の集合）**

(i) $\mathsf{Sent}_0 :=$ $L$–原子命題論理式の集合
(ii) 任意の $n \in \omega$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathsf{Sent}_{n+1} := \mathsf{Sent}_n &\cup \{(\neg\phi) : \phi \in \mathsf{Sent}_n\} \\ &\cup \{(\phi \bullet \psi) : \phi, \psi \in \mathsf{Sent}_n, \bullet \text{ は } \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow \text{ のいずれか}\}\end{aligned}$$

(iii) $\mathsf{Sent}_L := \bigcup_{n \in \omega} \mathsf{Sent}_n$

次は補題 1.1.3 および命題 1.1.4 と全く同じ方法で証明できる．

**命題 2（$L$–命題論理式の帰納法による証明）**

$L$–表現に関する任意の性質 $\mathcal{P}$ に対して，

(i) 任意の $L$–原子命題論理式について $\mathcal{P}$ が成り立ち，かつ

(ii) 任意の $L$–命題論理式 $\phi, \psi$ に対し，$\phi, \psi$ について $\mathcal{P}$ が成り立つならば，$(\neg\phi)$，$(\phi \vee \psi)$，$(\phi \wedge \psi)$，$(\phi \to \psi)$，$(\phi \leftrightarrow \psi)$ についても $\mathcal{P}$ が成り立つ

ならば，任意の $L$–命題論理式に対して $\mathcal{P}$ が成り立つ．

次を証明する．

**命題 3（一意可読性）**

任意の $L$–命題論理式 $\theta$ に対して，以下のちょうど 1 つが成り立つ．

(i) $\theta$ は $L$–原子命題論理式である．
(ii) $\theta = (\neg\phi)$ なる $L$–命題論理式 $\phi$ が存在する．
(iii) $\theta = (\phi \vee \psi)$ なる $L$–命題論理式 $\phi, \psi$ がそれぞれ一意に存在する．
(iv) $\theta = (\phi \wedge \psi)$ なる $L$–命題論理式 $\phi, \psi$ がそれぞれ一意に存在する．
(v) $\theta = (\phi \to \psi)$ なる $L$–命題論理式 $\phi, \psi$ がそれぞれ一意に存在する．
(vi) $\theta = (\phi \leftrightarrow \psi)$ なる $L$–命題論理式 $\phi, \psi$ がそれぞれ一意に存在する．

そのために次を証明する．以下，$\bullet$ は $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ のいずれかとする．

**補題 4**

(i) $L$–命題論理式に含まれる ( の個数と ) の個数は同じである．
(ii) $L$–命題論理式の真の始切片[a]に含まれる ( の個数は ) の個数より多い．
(iii) $L$–命題論理式の真の始切片は $L$–命題論理式ではない．
(iv) $\bullet'$ は $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ のいずれかとし，$\phi, \psi, \phi', \psi'$ は $L$–命題論理式とする．$(\phi \bullet \psi) = (\phi' \bullet' \psi')$ ならば，$\phi = \phi'$，$\bullet = \bullet'$，$\psi = \psi'$ である．

[a] 演習 1.1.11 参照．

---

(i) $\phi$ に対してこれが成り立つことを $\mathcal{P}(\phi)$ と書く．任意の $L$–命題論理式 $\phi$ に対して $\mathcal{P}(\phi)$ を $L$–命題論理式の帰納法で示す．
  (1) $\phi$ が $L$–原始命題論理式の場合，( と ) は含まれないので，$\mathcal{P}(\phi)$ である．
  (2) $L$–命題論理式 $\phi, \psi$ を任意に取り，$\mathcal{P}(\phi)$ と $\mathcal{P}(\psi)$ を仮定する．仮定より，$\mathcal{P}((\neg\phi))$，$\mathcal{P}(\phi \bullet \psi)$ であることは明らかである．
(ii) $\phi$ に対してこれが成り立つことを $\mathcal{P}(\phi)$ と書く．任意の $L$–命題論理式 $\phi$ に対して $\mathcal{P}(\phi)$ を $L$–命題論理式の帰納法で示す．
  (1) $\phi$ が $L$–原始命題論理式の場合，真の始切片が存在しないので，$\mathcal{P}(\phi)$ である．
  (2) $L$–命題論理式 $\phi, \psi$ を任意に取り，$\mathcal{P}(\phi)$ と $\mathcal{P}(\psi)$ を仮定する．$(\neg\phi)$，$(\phi \bullet \psi)$ のいずれについても，その真の始切片は右端の ) を持たず，従って (i) より，そこに含まれる ( の個数は ) の個数より多い．つまり，$\mathcal{P}((\neg\phi))$，$\mathcal{P}((\phi \bullet \psi))$ である．
(iii) (i) と (ii) から従う．
(iv) $(\phi \bullet \psi) = (\phi' \bullet' \psi')$ であれば，$\phi \bullet \psi) = \phi' \bullet' \psi')$ であり，(iii) より，$\phi$ と $\phi'$ の一方は他方の真の始切片になりえないので，$\phi = \phi'$ である．よって，$\bullet = \bullet'$，次いで $\psi = \psi'$ が従う．

命題 3 を証明する．

(i)–(vi) のちょうど 1 つが $\theta$ について成り立つことを $\mathcal{P}(\theta)$ と書く．任意の $L$–命題論理式 $\theta$ に対して $\mathcal{P}(\theta)$ を $L$–命題論理式の帰納法で示す．

(1) $\theta$ が $L$–原始命題論理式の場合，(i) のみが成り立つので，$\mathcal{P}(\theta)$ である．

$L$–命題論理式 $\theta, \theta'$ を任意に取り，$\mathcal{P}(\theta)$ と $\mathcal{P}(\theta')$ を仮定する．

(2) $(\neg\theta) = (\neg\phi)$ なる $L$–命題論理式 $\phi$ は一意に存在するので，(ii) が成り立ち，また左端から 2 番目の記号が $\neg$ であるのは (ii) の場合だけである．よって $\mathcal{P}((\neg\theta))$ である．

(3) $(\theta \vee \theta') = (\phi \vee \psi)$ なる $L$–命題論理式 $\phi, \psi$ の存在は明らかである（$\theta, \theta'$ 自身）．また，$(\theta \vee \theta')$ について，(1)，(2)と同様の理由で，(i) と (ii) は成り立たない．また補題 4(iv)より，(iii)–(vi) のうち (iii) のみが成り立つ．よって $\mathcal{P}((\theta \vee \theta'))$ である．

(4) (3)と同様に，$\mathcal{P}((\theta \wedge \theta'))$，$\mathcal{P}((\theta \to \theta'))$，$\mathcal{P}((\theta \leftrightarrow \theta'))$ である．

## 演習 1.1.11

長さ $n$ の任意の $L$–命題論理式 $\phi$ に対し，その真の始切片が $L$–命題論理式でないことを $\mathcal{P}(n)$ と書く．任意の $n$ に対して $\mathcal{P}(n)$ を帰納法で示す．

(1) $n = 1$ の場合，真の始切片が存在しないので，$\mathcal{P}(1)$ である．

任意の $1 \leq i \leq n$ に対して $\mathcal{P}(i)$ を仮定し，長さ $n+1$ の $L$–命題論理式 $\phi$ を任意に取る（もしそのような $\phi$ が存在しなければ，自明に $\mathcal{P}(n+1)$ である）．命題 1.1.5 の証明の (1) と (2) より，$\phi$ について (i)–(vi) のちょうど 1 つが成り立つ．

(2) $\phi$ が $L$–原始命題論理式の場合，真の始切片が存在しないので，$\mathcal{P}(n+1)$ である．

(3) $\phi = \neg\psi$ の場合，その真の始切片は $\neg$ か $\neg S$ の形である（$S$ は $\psi$ の真の始切片）．前者は $L$–命題論理式ではない．後者は，帰納法の仮定より $S$ は $L$–命題論理式ではないので，命題 1.1.5(ii) が成り立たず，また左端の記号が異なるので，(ii) 以外も成り立たない．よって，$\phi$ の真の始切片は $L$–命題論理式ではないので，$\mathcal{P}(n+1)$ である．

(4) $\phi = \vee\psi\psi'$ の場合，その真の始切片は以下のいずれかの形であり，仮にそれが $L$–命題論理式であれば，命題 1.1.5(iii) が成り立つはずである．

  (4.1) $\vee$．これは $L$–命題論理式ではない．

  (4.2) $\vee S$（$S$ は $\psi$ の真の始切片）．帰納法の仮定より，$S$ は $L$–命題論理式ではないので，命題 1.1.5(iii) は成り立たない．よって，これは $L$–命題論理式ではない．

  (4.3) $\vee\psi$．帰納法の仮定より，$\psi$ の真の始切片 $\chi$ は $L$–命題論理式ではない．したがって，$\vee\psi = \vee\chi\chi'$ なる $L$–命題論理式 $\chi, \chi'$ は存在しないので，命題 1.1.5(iii) は成り立たない．よって，これは $L$–命題論理式ではない．

  (4.4) $\vee\psi S$（$S$ は $\psi'$ の真の始切片）．$L$–命題論理式 $\chi$ の長さが $n$ 未満であれば，帰納法の仮定より，$\psi$ と $\chi$ の一方が他方の真の始切片になることはない．したがって，$\vee\psi S = \vee\chi\chi'$ なる $L$–命題論理式 $\chi, \chi'$ は存在しないので，命題 1.1.5(iii) は成り立たない．よって，これは $L$–命題論理式ではない．

  以上より，$\mathcal{P}(n+1)$ である．

(5) $\phi = \bullet\psi\psi'$（$\bullet = \wedge, \to, \leftrightarrow$）の場合も，(4)と同様にして $\mathcal{P}(n+1)$ を証明できる．

証明は以上である．

この結果が補題 (4) の代わりになることは次のようにして分かる．$\bullet\phi\psi = \bullet\phi'\psi'$ であるとする．$\phi$ と $\phi'$ の一方が他方の真の始切片になることはないので，$\phi = \phi'$ であり，したがって $\psi = \psi'$ である．

## 演習 1.1.12

任意の $\phi \in \mathsf{Sent}_{n+1} \sim \mathsf{Sent}_n$ に対し，定義 1.1.2 と一意可読性より，以下のいずれかちょうど 1 つが成り立つ．

(i) $\phi = \neg\psi$ なる $\psi \in \mathsf{Sent}_n$ が一意に存在する．

(ii) $\phi = \vee\psi\psi'$ なる $\psi, \psi' \in \mathsf{Sent}_n$ がそれぞれ一意に存在する．
(iii) $\phi = \wedge\psi\psi'$ なる $\psi, \psi' \in \mathsf{Sent}_n$ がそれぞれ一意に存在する．
(iv) $\phi = \rightarrow\psi\psi'$ なる $\psi, \psi' \in \mathsf{Sent}_n$ がそれぞれ一意に存在する．
(v) $\phi = \leftrightarrow\psi\psi'$ なる $\psi, \psi' \in \mathsf{Sent}_n$ がそれぞれ一意に存在する．

したがって，任意の $n \in \omega$ に対し，関数 $F_{n+1}\colon \mathsf{Sent}_n \to Z$ を以下のように再帰的に定義できる．

$$\begin{aligned} F_{n+1}(\phi) &= F_n(\phi) && \text{if } \phi \in \mathsf{Sent}_n \\ F_{n+1}(\neg\phi) &= G_\neg(F_n(\phi)) && \text{if } \neg\phi \in \mathsf{Sent}_{n+1} \sim \mathsf{Sent}_n \\ F_{n+1}(\bullet\phi\psi) &= G_\bullet(F_n(\phi), F_n(\psi)) && \text{if } \bullet\phi\psi \in \mathsf{Sent}_{n+1} \sim \mathsf{Sent}_n \end{aligned}$$

$i_\phi$ を $\phi \in \mathsf{Sent}_n$ なる最小の $n \in \omega$ とし，関数 $F\colon \mathsf{Sent}_L \to Z$ を $F(\phi) = F_{i_\phi}(\phi)$ によって定義すると，任意の $\phi \in \mathsf{Sent}_n$ なる $n$，つまり $n \geq i_\phi$ に対して，$F(\phi) = F_{i_\phi}(\phi) = F_{i_\phi+1}(\phi) = \cdots = F_n(\phi)$ である．よって，

(1) $\phi \in \mathsf{Sent}_0$ に対して $F(\phi) = F_0(\phi)$ であるから，$F$ は $F_0$ の拡張である．
(2) 任意の $\phi \in \mathsf{Sent}_L$ に対して，適当な $n \in \omega$ が存在して，

$$\begin{aligned} F(\neg\phi) &= F_{n+1}(\neg\phi) = G_\neg(F_n(\phi)) = G_\neg(F(\phi)) \\ F(\bullet\phi\psi) &= F_{n+1}(\bullet\phi\psi) = G_\bullet(F_n(\phi), F_n(\psi)) = G_\bullet(F(\phi), F(\psi)) \end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} F(\neg\phi) &= G_\neg(F(\phi)) \\ F(\bullet\phi\psi) &= G_\bullet(F(\phi), F(\psi)) \end{aligned}$$

である．

$F$ の一意性を示す．いま，関数 $F'\colon \mathsf{Sent}_L \to Z$ も $F_0$ の拡張であり，かつ

$$\begin{aligned} F'(\neg\phi) &= G_\neg(F'(\phi)) \\ F'(\bullet\phi\psi) &= G_\bullet(F'(\phi), F'(\psi)) \end{aligned}$$

を満たすとする．任意の $\phi \in \mathsf{Sent}_L$ に対して $F(\phi) = F'(\phi)$ が成り立ち，したがって $F = F'$ が成り立つことを，$L$–命題論理式の帰納法で示す．

(1) $\phi \in \mathsf{Sent}_0$ の場合，$F(\phi) = F_0(\phi) = F'(\phi)$ である．

$\phi, \psi \in \mathsf{Sent}_L$ を任意に取り，$F(\phi) = F'(\phi)$，$F(\psi) = F'(\psi)$ を仮定する．

(2) 仮定より，

$$F(\neg\phi) = G_\neg(F(\phi)) = G_\neg(F'(\phi)) = F'(\neg\phi)$$

(3) 仮定より，

$$F(\bullet\phi\psi) = G_\bullet(F(\phi), F(\psi)) = G_\bullet(F'(\phi), F'(\psi)) = F'(\bullet\phi\psi)$$

証明は以上である．

命題 1.1.9 において，$Z = \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$，$F_0 = V_0$ とし，関数 $G_\neg\colon \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ と $G_\bullet\colon \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\} \times \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ を

$$G_\neg\colon \begin{matrix} \mathsf{T} \mapsto \mathsf{F} \\ \mathsf{F} \mapsto \mathsf{T} \end{matrix} \quad G_\vee\colon \begin{matrix} (\mathsf{T},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{T},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{F},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{F},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{F} \end{matrix} \quad G_\wedge\colon \begin{matrix} (\mathsf{T},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{T},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{F} \\ (\mathsf{F},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{F} \\ (\mathsf{F},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{F} \end{matrix} \quad G_\rightarrow\colon \begin{matrix} (\mathsf{T},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{T},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{F} \\ (\mathsf{F},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{F},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{T} \end{matrix} \quad G_\leftrightarrow\colon \begin{matrix} (\mathsf{T},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{T} \\ (\mathsf{T},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{F} \\ (\mathsf{F},\mathsf{T}) \mapsto \mathsf{F} \\ (\mathsf{F},\mathsf{F}) \mapsto \mathsf{T} \end{matrix}$$

と定めれば，定理 1.1.7 を得る．

**演習 1.1.13**

(i) $\neg((\neg p_1) \vee p_2)$

(ii) 仮にこれが $L$–命題論理式であるとする．命題 1.1.5 より，$\wedge p_1 p_2 \neg p_3 = \wedge \phi\psi$ なる $L$–命題論理式 $\phi, \psi$ が一意に存在する．よって，$p_1$ は $L$–命題論理式であるから，$p_2 \neg p_3$ は $L$–命題論理式である．しかし，$p_2 \neg p_3$ は命題 1.1.5 のいずれの場合も満たさないので，$L$–命題論理式ではない．矛盾．ゆえに $\wedge p_1 p_2 \neg p_3$ は $L$–命題論理式ではない．

(iii) $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow (((\neg p_3) \vee p_8) \leftrightarrow p_3)$

## 1.2 Induction and recursion

**訳語対応**

**$\mathcal{X}$-帰納法** $\mathcal{X}$-induction
**$\mathcal{X}$-導出** $\mathcal{X}$-derivation
**$\mathcal{X}$-閉である** $\mathcal{X}$-closed
**帰納的系** inductive system
**帰納的閉包** inductive closure

### 注意: 定義 1.2.1

pp. 25–26 にも書かれていますが，このような $X_n$ の再帰的定義は定理 1.2.12 によって正当化されます．
もし $\mathcal{X} = (X, X_0, \mathcal{H})$ が帰納的系であれば，$X_0 \in \wp(X)$ が成り立ちます．そこで定理 1.2.12 において

$$Z = \wp(X)$$
$$z_0 = X_0$$
$$G\colon \wp(X) \times \omega \ni (x, n) \mapsto x \cup \{H(x_0, \dots, x_{k_H - 1}) \in X : H \in \mathcal{H},\ x_0, \dots, x_{k_H - 1} \in x\} \in \wp(X)$$

とすれば，$F(0) = X_0$ かつ任意の $n \in \omega$ に対して

$$F(n+1) = F(n) \cup \{H(x_0, \dots, x_{k_H - 1}) : H \in \mathcal{H},\ x_0, \dots, x_{k_H - 1} \in F(n)\}$$

であるような関数 $F\colon \omega \to \wp(X)$ が一意に存在することが言えます．この唯一の $F$ に対する $F(n)$ が，$X_n$（正確には $\mathcal{X}_n$）と書かれているのです．

### 系 1.2.4

(i) $\overline{X} \subseteq \bigcap\{Y \subseteq X : Y$ は $\mathcal{X}$-閉である$\}$
(ii) $\overline{X} \supseteq \bigcap\{Y \subseteq X : Y$ は $\mathcal{X}$-閉である$\}$

を示す．

(i) 命題 1.2.3(ii) より，

$$\{Y \subseteq X : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\} \subseteq \{Y \subseteq X : \overline{X} \subseteq Y\}$$

よって，

$$\overline{X} = \bigcap\{Y \subseteq X : \overline{X} \subseteq Y\} \subseteq \bigcap\{Y \subseteq X : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\}$$

(ii) $\overline{X} \subseteq X$ および命題 1.2.3(i) より，

$$\overline{X} \in \{Y \subseteq X : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\}$$

よって，

$$\overline{X} \supseteq \bigcap\{Y \subseteq X : Y \text{ は } \mathcal{X}\text{-閉である}\}$$

**命題 1.2.7**

$\Rightarrow$ を示す．任意の $z \in \overline{X}$ に対して，$z$ の $\mathcal{X}$-導出が存在することを $\mathcal{X}$-帰納法で示す．

(1) $z \in X_0$ の場合，$(z)$ は $z$ の $\mathcal{X}$-導出である．

(2) $H \in \mathcal{H}$ と $z_0, \dots, z_{k_H-1} \in X$ を任意に取り，$z_0, \dots, z_{k_H-1}$ の $\mathcal{X}$-導出が存在すると仮定する．それらをそれぞれ

$$(x_0^0, \dots, x_0^{n_0}, z_0)$$
$$\vdots$$
$$(x_{k_H-1}^0, \dots, x_{k_H-1}^{n_{k_H-1}}, z_{k_H-1})$$

とすると，これらの連結に $H(z_0, \dots, z_{k_H-1})$ を追加した列

$$\begin{aligned}(x_0^0, \dots, x_0^{n_0}, z_0,&\\ &\dots,\\ &\qquad x_{k_H-1}^0, \dots, x_{k_H-1}^{n_{k_H-1}}, z_{k_H-1},\\ &\qquad\qquad H(z_0, \dots, z_{k_H-1}))\end{aligned}$$

は $H(z_0, \dots, z_{k_H-1})$ の $\mathcal{X}$-導出である．なぜなら，この列の $H(z_0, \dots, z_{k_H-1})$ 以外の項は，仮定より定義 1.2.6(i) または (ii) を満たし，また $H(z_0, \dots, z_{k_H-1})$ は定義 1.2.6(ii) を満たすからである．

$\Leftarrow$ を示す．$(x_0, \dots, x_n)$ が $x_n$ の $\mathcal{X}$-導出であれば $x_n \in \overline{X}$ であることを $\mathcal{P}(n)$ と書き，これを $n$ に関する帰納法で示す．

(1) $n = 0$ の場合，$x_0$ について定義 1.2.6(ii) は成り立たないので，(i) $x_n \in X_0$ が成り立つ．よって，$\mathcal{P}(n)$ である．

(2) 任意の $0 \le i \le n$ に対して $\mathcal{P}(i)$ を仮定する．$(x_0, \dots, x_{n+1})$ は $x_{n+1}$ の $\mathcal{X}$-導出であるとすると，定義 1.2.6(i) または (ii) が成り立つ．(i) の場合，$\mathcal{P}(n+1)$ である．(ii) の場合，仮定より，$x_{j_0}, \dots, x_{j_{k_H-1}} \in \overline{X}$ であるから，命題 1.2.3(i) より，$x_{n+1} = H(x_{j_0}, \dots, x_{j_{k_H-1}}) \in \overline{X}$ である．よって，$\mathcal{P}(n+1)$ である．

以上より，任意の $n \in \omega$ に対して $\mathcal{P}(n)$ である．よって，$(x_0, \dots, x_n)$ が $z$ の $\mathcal{X}$-導出であれば，$z = x_n \in \overline{X}$ である．

# 正誤表

## 第 1 章

| 修正箇所 | 誤 | 正 |
|---|---|---|
| p. 21, ↑ 1 | $H(x_0, \dots, x_{k_h-1}) \in Y$ | $H(x_0, \dots, x_{k_H-1}) \in Y$ |
| p. 22, ↑ 10 | $x_0, \dots, x_{k_h-1}$ | $x_0, \dots, x_{k_H-1}$ |
| 〃, ↑ 8 | $\mathcal{P}(H(x_0, \dots, x_{k_h-1}))$ | $\mathcal{P}(H(x_0, \dots, x_{k_H-1}))$ |