Hinman, *Fundamentals of Mathematical Logic* 解答

鴎海

（最終更新日: 2024 年 6 月 8 日）

本稿では，以下の書籍の演習問題の解答を与えます．

Hinman, P. G. (2005). *Fundamentals of Mathematical Logic*. A K Peters.

その他，同書で証明が省略されていたり，注意が必要と思われるような箇所についても，補足的に掲載します．また，正誤表も本稿の末尾に掲載します．

本稿の pdf ファイルおよび TEX ソースファイルの最新版は，GitHub の該当リポジトリから入手できます．

目次

1 Propositional Logic and Other Fundamentals

1.1 The propositional language

訳語対応

一意可読性 unique readability
原子命題論理式 atomic sentence
真の始切片 proper initial segment
命題記号 sentence symbol
命題論理式 sentence
命題論理式の帰納法 sentence induction

注意: 命題 1.1.5 の補題 (4) の証明

補題 (4) の証明は，$\phi_0 \dots \phi_k$ の長さに関する帰納法に基づいていますが，帰納法の basis である，長さが 1 の場合に (4) が正しいことの証明が省略されています．これは次のように証明できます．$\phi_0 \dots \phi_k$ と $\psi_0 \dots \psi_l$ の長さに関して $1 > k, l$ であるため，$k = l = 0$ でしかありえず，したがって $\phi_0 = \psi_0$ となります．

演習 1.1.10

以下のように定義する．

定義 1（中置記法での L–命題論理式の集合）

(i) $\mathsf{Sent}_0 :=$ L–原子命題論理式の集合
(ii) 任意の $n \in \omega$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathsf{Sent}_{n+1} := \mathsf{Sent}_n &\cup \{(\neg\phi) : \phi \in \mathsf{Sent}_n\} \\ &\cup \{(\phi \bullet \psi) : \phi, \psi \in \mathsf{Sent}_n, \bullet \text{ は } \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow \text{ のいずれか}\}\end{aligned}$$

(iii) $\mathsf{Sent}_L := \bigcup_{n \in \omega} \mathsf{Sent}_n$

次は補題 1.1.3 および命題 1.1.4 と全く同じ方法で証明できる．

命題 2（L–命題論理式の帰納法による証明）

L–表現に関する任意の性質 $\mathcal{P}$ に対して，

(i) 任意の L–原子命題論理式について $\mathcal{P}$ が成り立ち，かつ

(ii) 任意の L–命題論理式 ϕ, ψ に対し，ϕ, ψ について $\mathcal{P}$ が成り立つならば，$(\neg\phi)$，$(\phi \vee \psi)$，$(\phi \wedge \psi)$，$(\phi \to \psi)$，$(\phi \leftrightarrow \psi)$ についても $\mathcal{P}$ が成り立つ

ならば，任意の L–命題論理式に対して $\mathcal{P}$ が成り立つ．

次を証明する．

命題 3（一意可読性）

任意の L–命題論理式 θ に対して，以下のちょうど 1 つが成り立つ．

(i) θ は L–原子命題論理式である．
(ii) $\theta = (\neg\phi)$ なる L–命題論理式 ϕ が存在する．
(iii) $\theta = (\phi \vee \psi)$ なる L–命題論理式 ϕ, ψ がそれぞれ一意に存在する．
(iv) $\theta = (\phi \wedge \psi)$ なる L–命題論理式 ϕ, ψ がそれぞれ一意に存在する．
(v) $\theta = (\phi \to \psi)$ なる L–命題論理式 ϕ, ψ がそれぞれ一意に存在する．
(vi) $\theta = (\phi \leftrightarrow \psi)$ なる L–命題論理式 ϕ, ψ がそれぞれ一意に存在する．

そのために次を証明する．以下，$\bullet$ は $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ のいずれかとする．

補題 4

(i) L–命題論理式に含まれる (の個数と) の個数は同じである．
(ii) L–命題論理式の真の始切片[a]に含まれる (の個数は) の個数より多い．
(iii) L–命題論理式の真の始切片は L–命題論理式ではない．
(iv) $\bullet'$ は $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ のいずれかとし，ϕ, ψ, ϕ', ψ' は L–命題論理式とする．$(\phi \bullet \psi) = (\phi' \bullet' \psi')$ ならば，$\phi = \phi'$，$\bullet = \bullet'$，$\psi = \psi'$ である．

[a] 演習 1.1.11 参照．

(i) ϕ に対してこれが成り立つことを $\mathcal{P}(\phi)$ と書く．任意の L–命題論理式 ϕ に対して $\mathcal{P}(\phi)$ をL–命題論理式の帰納法で示す．
  (1) ϕ が L–原始命題論理式の場合，(と) は含まれないので，$\mathcal{P}(\phi)$ である．
  (2) L–命題論理式 ϕ, ψ を任意に取り，$\mathcal{P}(\phi)$ と $\mathcal{P}(\psi)$ を仮定する．仮定より，$\mathcal{P}((\neg\phi))$，$\mathcal{P}(\phi \bullet \psi)$ であることは明らかである．
(ii) ϕ に対してこれが成り立つことを $\mathcal{P}(\phi)$ と書く．任意の L–命題論理式 ϕ に対して $\mathcal{P}(\phi)$ をL–命題論理式の帰納法で示す．
  (1) ϕ が L–原始命題論理式の場合，真の始切片が存在しないので，$\mathcal{P}(\phi)$ である．
  (2) L–命題論理式 ϕ, ψ を任意に取り，$\mathcal{P}(\phi)$ と $\mathcal{P}(\psi)$ を仮定する．$(\neg\phi)$，$(\phi \bullet \psi)$ のいずれについても，その真の始切片は右端の) を持たず，従って (i) より，そこに含まれる (の個数は) の個数より多い．つまり，$\mathcal{P}((\neg\phi))$，$\mathcal{P}((\phi \bullet \psi))$ である．
(iii) (i)と(ii)から従う．
(iv) $(\phi \bullet \psi) = (\phi' \bullet' \psi')$ であれば，$\phi \bullet \psi) = \phi' \bullet' \psi')$ であり，(iii)より，ϕ と ϕ' の一方は他方の真の始切片になりえないので，$\phi = \phi'$ である．よって，$\bullet = \bullet'$，次いで $\psi = \psi'$ が従う．

命題 3を証明する．

(i)–(vi) のちょうど 1 つが θ について成り立つことを $\mathcal{P}(\theta)$ と書く．任意の L–命題論理式 θ に対して $\mathcal{P}(\theta)$ をL–命題論理式の帰納法で示す．

(1) θ が L–原始命題論理式の場合，(i) のみが成り立つので，$\mathcal{P}(\theta)$ である．

L–命題論理式 θ, θ' を任意に取り，$\mathcal{P}(\theta)$ と $\mathcal{P}(\theta')$ を仮定する．

(2) $(\neg\theta) = (\neg\phi)$ なる L–命題論理式 ϕ は一意に存在するので，(ii) が成り立ち，また左端から 2 番目の記号が $\neg$ であるのは (ii) の場合だけである．よって $\mathcal{P}((\neg\theta))$ である．

(3) $(\theta \vee \theta') = (\phi \vee \psi)$ なる L–命題論理式 ϕ, ψ の存在は明らかである（θ, θ' 自身）．また，$(\theta \vee \theta')$ について，(1)，(2)と同様の理由で，(i) と (ii) は成り立たない．また補題 4(iv)より，(iii)–(vi) のうち (iii) のみが成り立つ．よって $\mathcal{P}((\theta \vee \theta'))$ である．

(4) (3)と同様に，$\mathcal{P}((\theta \wedge \theta'))$，$\mathcal{P}((\theta \to \theta'))$，$\mathcal{P}((\theta \leftrightarrow \theta'))$ である．

正誤表

第 1 章

修正箇所	誤	正
p. 21, ↑ 1	$H(x_0, \dots, x_{k_h-1}) \in Y$	$H(x_0, \dots, x_{k_H-1}) \in Y$
p. 22, ↑ 10	$x_0, \dots, x_{k_h-1}$	$x_0, \dots, x_{k_H-1}$
〃, ↑ 8	$\mathcal{P}(H(x_0, \dots, x_{k_h-1}))$	$\mathcal{P}(H(x_0, \dots, x_{k_H-1}))$