

Grillet, *Abstract Algebra* 第 1 章（群）のまとめ

鳴海

最終更新日：2025 年 12 月 19 日

概要

これは, Grillet, P.A. (2007). *Abstract Algebra* (2 ed.). Springer. の I をベースとしたまとめノートである。かなりの部分を書き直したり、意味の変わらない範囲で再定式化し直したりしている場合があるので、必ずしもオリジナルの記述に忠実ではない。

目次

1	群	2
2	部分群	4

1 群

$x, y \in G$ が $xy = \mathbf{1} = yx$ を満たすとき, y は x の逆元 (inverse) であるという.

補題 1.1 \mathfrak{G} をモノイドとする.

$$\forall x \in G \ \exists y \in G \ (xy = \mathbf{1} = yx)$$

証明 一意性のみ示せばよい.

$x \in G$ を任意に取る. $y_1, y_2 \in G$, $xy_1 = \mathbf{1} = y_1x$, $xy_2 = \mathbf{1} = y_2x$ を仮定する. $y_1x = \mathbf{1} = y_2x$ を得る. 右から y_1 をかけて, $y_1 = y_2$.

定義 1.2 $\mathfrak{G} := (G, \cdot)$ をモノイドとする. \mathfrak{G} は, 以下を満たすとき, 群 (group) であるという.

$$\forall x \in G \ \exists y \in G \ (xy = \mathbf{1} = yx)$$

定義 1.3 \mathfrak{G} を群とする. $x \in G$ とする.

- $x^- \in G$
- $xx^- = \mathbf{1} = x^-x$

x^- を, x の逆元 (inverse) という.

例 1.4

- (1) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ は群である.
- (2) $(\mathbb{N}, +)$ は群ではない.
- (3) (\mathbb{Z}, \cdot) , (\mathbb{Q}, \cdot) , (\mathbb{R}, \cdot) , (\mathbb{C}, \cdot) は群ではない.
- (4) $(\mathbb{Q}_{\neq 0}, \cdot)$, $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$, $(\mathbb{C}_{\neq 0}, \cdot)$ は群である.
- (5) $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$, $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $(\mathbb{C}_{|z|=1}, \cdot)$ は群である.

例 1.5

- (1) $(M_n(\mathbb{R}), +)$ は群である.
- (2) $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ は群ではない.
- (3) $(\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ は可逆行列}\}, \cdot)$ は群である.

例 1.6 S_X を, X 上の置換の集合とする.

(S_X, \circ) は群である.

例 1.7 $V_4 := \{1, a, b, c\}$ とする. その上の演算 \cdot を, 以下のように定義する:

V_4	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

(V_4, \cdot) を, クライン 4 元群 (Klein four-group) という.

クライン 4 元群は, 群である.

例 1.8 正 $n \geq 2$ 角形の回転 r_i と鏡映 s_i の全体からなる集合を D_n とする.

演算は次の表のようになる ($i, j \in \mathbb{Z}$).

D_n	r_i	s_i
r_j	r_{i+j}	s_{i+j}
s_j	s_{j-i}	r_{j-i}

(D_n, \circ) を、位数 n の**二面体群** (dihedral group) という.

位数 n の二面体群は、群である.

命題 1.9 $\mathfrak{G} =: (G, \cdot)$ を群とする. $x, y, z, a, b \in G$ とする.

- (1) $xy = xz \Rightarrow y = z$
- (2) $yx = zx \Rightarrow y = z$
- (3) $ax = b \Rightarrow x = a^{-1}b$
- (4) $xa = b \Rightarrow x = ba^{-1}$

命題 1.10

- (1) $(x^{-1})^{-1} = x$
- (2) $(x_1 \cdots x_n)^{-1} = x_1^{-1} \cdots x_n^{-1}$

定義 1.11 $\mathfrak{G} =: (G, \cdot)$ を群とする. $a \in G$, $n \in \mathbb{Z}$ とする.

$$a^n := \begin{cases} (a^{-1})^m & \text{if } n < 0, n =: -m \\ \mathbf{1} & \text{if } n = 0 \\ a^n & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

命題 1.12 $\mathfrak{G} =: (G, \cdot)$ を群とする. $a \in G$, $m, n \in \mathbb{Z}$ とする.

- (1) $a^m a^n = a^{m+n}$
- (2) $(a^m)^n = a^{mn}$
- (3) $(a^n)^{-1} = a^{-n} = (a^{-1})^n$

命題 1.13 $\mathfrak{G} =: (G, \cdot)$ を有限群とする. $a \in G$ とする.

a^{-1} は、ある整数 $k > 0$ を使って、 $a^{-1} = a^k$ と表せる.

問題 1.14 半群 \mathfrak{A} が、左単位元と左逆元を持つとする. \mathfrak{A} は群である.

問題 1.15 半群 \mathfrak{A} が、任意の $a, b \in A$ に対して

- $ax = b$
- $ya = b$

の解を持つとする. \mathfrak{A} は群である.

問題 1.16 半群 \mathfrak{A} が、簡約律を満たすとする. \mathfrak{A} は群である.

問題 1.17 $\mathfrak{G} =: (G, \cdot)$ を有限群とし、その位数は偶数であるとする。

G は、 $x = x^-$ なる元 x を偶数個含んでいる。

奇数位数については？

2 部分群

定義 2.1 $\mathfrak{G} =: (G, \cdot, \mathbf{1}, -)$ を群とする。 $H \subseteq G$ とする。

以下が成り立つとき、 $\mathfrak{H} =: (H, \cdot_H)$ は \mathfrak{G} の部分群 (subgroup) であるといい、 $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ と書く。

1. $\forall x, y \in H (xy \in H)$
2. $\mathbf{1} \in H$
3. $\forall x \in H (x^- \in H)$

命題 2.2 $\mathfrak{G} =: (G, \cdot)$ を群とする。

$\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ であれば、 \mathfrak{H} は群である。

命題 2.3 \mathfrak{G} を群とする。 $H \subseteq G$ とする。

以下は同値である。

1. $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$
2. $H \neq \emptyset$, かつ $\forall x, y \in H (xy^- \in H)$.

命題 2.4 \mathfrak{G} を有限群とする。 $H \subseteq G$ とする。

以下は同値である。

1. $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$
2. $H \neq \emptyset$, かつ $\forall x, y \in H (xy \in H)$.