Grillet, *Abstract Algebra* 第 1 章（群）のまとめ

鴎海

最終更新日：2025 年 12 月 20 日

概要

これは，Grillet, P.A. (2007). *Abstract Algebra* (2 ed.). Springer. の I をベースとしたまとめノートである．かなりの部分を書き直したり，意味の変わらない範囲で再定式化し直したりしている場合があるので，必ずしもオリジナルの記述に忠実ではない．

目次

1 群

$x, y \in G$ が $xy = \mathbf{1} = yx$ を満たすとき，y は x の**逆元** (inverse) であるという．

補題 1.1 $\mathfrak{G}$ をモノイドとする．
$\forall x \in G \; !y \in G \; (xy = \mathbf{1} = yx)$

証明 一意性のみ示せばよい．
$x \in G$ を任意に取る．$y_1, y_2 \in G$，$xy_1 = \mathbf{1} = y_1 x$，$xy_2 = \mathbf{1} = y_2 x$ を仮定する．$y_1 x = \mathbf{1} = y_2 x$ を得る．右から y_1 をかけて，$y_1 = y_2$．

定義 1.2 $\mathfrak{G} =: (G, \cdot)$ をモノイドとする．$\mathfrak{G}$ は，以下を満たすとき，**群** (group) であるという．

$$\forall x \in G \; \exists y \in G \; (xy = \mathbf{1} = yx)$$

定義 1.3 $\mathfrak{G}$ を群とする．$x \in G$ とする．

- $x^- \in G$
- $xx^- = \mathbf{1} = x^- x$

x^- を，x の**逆元** (inverse) という．

例 1.4

(1) $(\mathbb{Z}, +)$，$(\mathbb{Q}, +)$，$(\mathbb{R}, +)$，$(\mathbb{C}, +)$ は群である．
(2) $(\mathbb{N}, +)$ は群**ではない**．
(3) $(\mathbb{Z}, \cdot)$，$(\mathbb{Q}, \cdot)$，$(\mathbb{R}, \cdot)$，$(\mathbb{C}, \cdot)$ は群**ではない**．
(4) $(\mathbb{Q}_{\neq 0}, \cdot)$，$(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$，$(\mathbb{C}_{\neq 0}, \cdot)$ は群である．
(5) $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$，$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$，$(\mathbb{C}_{|z|=1}, \cdot)$ は群である．

例 1.5

(1) $(M_n(\mathbb{R}), +)$ は群である．
(2) $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ は群**ではない**．
(3) $(\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ は可逆行列}\}, \cdot)$ は群である．

例 1.6 S_X を，X 上の置換の集合とする．
$(S_X, \circ)$ は群である．

例 1.7 $V_4 := \{1, a, b, c\}$ とする．その上の演算 $\cdot$ を，以下のように定義する：

V_4	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

$(V_4, \cdot)$ を，**クライン 4 元群** (Klein four-group) という．
クライン 4 元群は，群である．

例 1.8 正 $n \geq 2$ 角形の回転 r_i と鏡映 s_i の全体からなる集合を D_n とする．
演算は次の表のようになる（$i, j \in \mathbb{Z}$）．

D_n	r_i	s_i
r_j	r_{i+j}	s_{i+j}
s_j	s_{j-i}	r_{j-i}

$(D_n, \circ)$ を，位数 n の**二面体群** (dihedral group) という．
位数 n の二面体群は，群である．

命題 1.9 $\mathfrak{G} =: (G, \cdot)$ を群とする．$x, y, z, a, b \in G$ とする．

(1) $xy = xz \Rightarrow y = z$
(2) $yx = zx \Rightarrow y = z$
(3) $ax = b \Rightarrow x = a^{-}b$
(4) $xa = b \Rightarrow x = ba^{-}$

命題 1.10

(1) $(x^{-})^{-} = x$
(2) $(x_1 \cdots x_n)^{-} = {x_1}^{-} \cdots {x_n}^{-}$

定義 1.11 $\mathfrak{G} =: (G, \cdot)$ を群とする．$a \in G$，$n \in \mathbb{Z}$ とする．

$$a^n := \begin{cases} (a^{-})^m & \text{if } n < 0,\ n =: -m \\ \mathbf{1} & \text{if } n = 0 \\ a^n & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

命題 1.12 $\mathfrak{G} =: (G, \cdot)$ を群とする．$a \in G$，$m, n \in \mathbb{Z}$ とする．

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$
(2) $(a^m)^n = a^{mn}$
(3) $(a^n)^{-} = a^{-n} = (a^{-})^n$

命題 1.13 $\mathfrak{G} =: (G, \cdot)$ を有限群とする．$a \in G$ とする．
a^{-} は，ある整数 $k > 0$ を使って，$a^{-} = a^k$ と表せる．

問題 1.14 半群 $\mathfrak{A}$ が，左単位元と左逆元を持つとする．$\mathfrak{A}$ は群である．

問題 1.15 半群 $\mathfrak{A}$ が，任意の $a, b \in A$ に対して

- $ax = b$
- $ya = b$

の解を持つとする．$\mathfrak{A}$ は群である．

問題 1.16 半群 $\mathfrak{A}$ が，簡約律を満たすとする．$\mathfrak{A}$ は群である．

問題 1.17　$\mathfrak{G} =: (G, \cdot)$ を有限群とし，その位数は偶数であるとする．
G は，$x = x^{-}$ なる元 x を偶数個含んでいる．
奇数位数については？

2　部分群

定義 2.1　$\mathfrak{G} =: (G, \cdot)$ を群とする．$H \subseteq G$ とする．$\mathfrak{H} =: (H, \cdot_H)$ とする．
以下が成り立つとき，$\mathfrak{H}$ は $\mathfrak{G}$ の**部分群** (subgroup) であるといい，$\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ と書く．

1. $\forall x, y \in H\ (xy \in H)$
2. $\mathbf{1} \in H$
3. $\forall x \in H\ (x^{-} \in H)$

以下，代数的構造の演算を省略して，台集合のみ書くことが多い．

例 2.2

(1) $\{\mathbf{1}\} \leq G$
(2) $G \leq G$

例 2.3

(1) $\{1, a\}, \{1, b\}, \{1, c\} \leq V_4$
(2) $\{r_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \leq D_n$

例 2.4

(1) $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}) \leq (\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}) \leq (\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}) \leq (\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}})$
(2) $(\mathbb{N}, +_{\mathbb{N}}) \not\leq (\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}})$

命題 2.5　G を群とする．
$H \leq G$ であれば，G は群である．

命題 2.6　G を群とする．$H \subseteq G$ とする．
以下は同値である．

1. $H \leq G$
2. $H \neq \varnothing$，かつ $\forall x, y \in H\ (xy^{-} \in H)$.

命題 2.7　G を**有限**群とする．$H \subseteq G$ とする．
以下は同値である．

1. $H \leq G$
2. $H \neq \varnothing$，かつ $\forall x, y \in H\ (xy \in H)$.

定義 2.8　$\mathfrak{G}$ を群とする．$X \subseteq G$ とする．$X^{-} := \{x^{-} \mid x \in X\}$ とする．

$$\langle X \rangle := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_0 \cdots x_n \mid x_i \in X \cup X^{-}\}$$

$\langle X \rangle$ を，X から**生成された** (generated) 群という．
さらに $\langle X \rangle = G$ であるとき，$\mathfrak{G}$ は X によって**生成された** (generated) 群であるという．

例 2.9　$D_n = \langle \{r_1, s_0\} \rangle$

命題 2.10　G を群とする．$X \subseteq G$ とする．$H \subseteq G$ とする．

(1) $\langle X \rangle \leq G$．よって，$\langle X \rangle$ は群である．
(2) $H \leq G \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq H$

命題 2.11　G を**有限**群とする．$X \subseteq G$ とする．

$$\langle X \rangle = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_0 \cdots x_n \mid x_i \in X\}$$

定義 2.12　G を群とする．$a_1, \ldots, a_n \in G$ とする．

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle := \langle \{a_1, \ldots, a_n\} \rangle$$

特に，$a \in G$ に対して，$\langle a \rangle$ を，a から生成された**巡回群** (cyclic group) という．

命題 2.13　G を群とする．$a, b \in G$ とする．

$$\langle a, b \rangle = \langle \langle a \rangle \cup \langle b \rangle \rangle$$

// 一般に $\langle X_1 \cup \cdots \cup X_n \rangle = \langle \langle X_1 \rangle \cup \cdots \cup \langle X_n \rangle \rangle$ が成り立つはず．

例 2.14　$G \leq (\mathbb{Z}, +)$ とする．
G は，整数 $k \geq 0$ を用いて，$G = \langle k \rangle$ と表せる．

命題 2.15　$G'' \leq G' \leq G \Rightarrow G'' \leq G$

命題 2.16　G を群とする．$\mathcal{H} \neq \varnothing$ を，G の部分群（の台集合）の集合とする．

$$\bigcap \mathcal{H} \leq G$$

命題 2.17　G を群とする．X を集合とする．$\mathcal{H} := \{H \leq G \mid X \subseteq H\}$ とする．

(1) $X \subseteq \bigcap \mathcal{H} \leq G$
(2) $X \subseteq H \leq G \Rightarrow \bigcap \mathcal{H} \subseteq H$

命題 2.18　$H_1, H_2 \leq G$ であるとする．
以下は同値である．

1. $H_1 \cup H_2 \leq G$
2. $H_1 \subseteq H_2$，または $H_1 \supseteq H_2$

定義 2.19 S を集合とする．$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ とする．

(1) $\mathcal{F}$ が S の部分集合からなる**鎖** (chain) であるとは，

$$\forall X_1, X_2 \in \mathcal{F} \left[\begin{array}{l} X_1 \subseteq X_2 \\ X_1 \supseteq X_2 \end{array} \right.$$

が成り立つことをいう．

(2) $\mathcal{F}$ が S の部分集合からなる**有向集合** (directed set) であるとは，

$$\forall X_1, X_2 \in \mathcal{F}\ \exists Y \in \mathcal{F}\ (X_1, X_2 \subseteq Y)$$

が成り立つことをいう．

系 2.20 鎖は有向集合である．

命題 2.21 G を群とする．$\mathcal{H} \neq \varnothing$ を，G の部分群（の台集合）の集合とする．
$\mathcal{H}$ が有向集合（特に，鎖）であれば，$\bigcup \mathcal{H} \leq G$.

命題 2.22 $H \leq G$ とする．$a \in G$ とする．

(1) $aH := \{a\}H$ を，H による a の**左剰余類** (left coset) という．

(2) $Ha := H\{a\}$ を，H による a の**右剰余類** (right coset) という．

右剰余類と左剰余類をまとめて**剰余類** (coset) という．

命題 2.23 $H \leq G$ とする．$a \in H$ とする．

$$HH = Ha = aH = H$$

言い換えれば，H は H による a の剰余類である．

命題 2.24 $H \leq G$ とする．

(1) $\{aH \mid a \in G\}$ は G の分割である．

(2) $\{Ha \mid a \in G\}$ は G の分割である．

命題 2.25 G を可換群とする．$H \leq G$ とする．$a \in H$ とする．

$$aH = Ha$$

命題 2.26 $H \leq G$ とする．

$$|\{aH \mid a \in G\}| = |\{Ha \mid a \in G\}|$$

定義 2.27 $H \leq G$ とする．

$$[G\colon H] := |\{aH \mid a \in G\}| = |\{Ha \mid a \in G\}|$$

$[G\colon H]$ を，G における H の**指数** (index) という．

命題 2.28　$H \leq G$ とする．

(1) $|G| = [G\colon H]|H|$
(2)（Lagrange の定理）G が有限群であれば，$[G\colon H]$ と $|H|$ は $|G|$ の約数である．

例 2.29

(1) 位数 9 の群の部分群の位数としてあり得るのは $1, 3, 9$ のみ．
(2) 素数位数の群 G の部分群は $\{\mathbf{1}\}$ と G のみ．